

PARTE 1: CUESTIONES

- De un experimento se sabe que $P(A) = 0'25$, $P(B) = 0'6$, y $P(A|B) = 0'15$. La probabilidad de $A \cap B$ es de:
a) 0'09
b) 0'45
c) 0'76
- Si la variable aleatoria X sigue una distribución, $N(4; 9)$, siempre se puede afirmar que:
a) $Z = \frac{X-4}{9}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.
b) $Z = \frac{X+4}{9}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.
c) $Z = \frac{X-9}{4}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.
- Si el error máximo admisible, E , para una muestra de tamaño n viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se puede afirmar que:
a) Cuanto mayor es $(1 - \alpha)$ mayor el error E .
b) Cuanto menor es $(1 - \alpha)$ mayor el error E .
c) Cuanto mayor es $(1 - \alpha)$ menor el error E .
- El intervalo de confianza para el parámetro μ de una población $N(\mu, \sigma)$ al nivel de confianza $1 - \alpha$ viene dado por:
a) $IC = \left(\bar{x} \pm z_{(1-\alpha)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
b) $IC = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
c) $IC = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
- La función $f(x) = \frac{7}{x-7}$ presenta una discontinuidad en el punto $x = 7$
a) Inevitable de salto infinito.
b) Discontinuidad evitable
c) Ninguna de las otras
- Dada la función $f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^3+27}}$; el dominio de la función es:
a) $(-3, \infty)$
b) $(3, \infty)$
c) Ninguna de las otras.
- La función $f(x) = \frac{8x^2}{x-2}$ tiene un mínimo en el punto:
a) $x = 4$
b) $x = 0$
c) Ninguna de las otras

8. Hallar $\int (-3x^{4/5} + 2\sqrt[5]{x^4})dx$

a) $-5x^{9/5} + C$

b) $5x^{9/5} + C$

c) Ninguna de las otras.

9. Una matriz A es escalar si se cumple que:

a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1.

b) Es diagonal y los elementos de la diagonal son todos distintos.

c) Ninguna de las otras.

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. El resultado de hacer $(3A + 3B)^T$

a) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$

c) Ninguna de las otras.

11. Dada la siguiente inecuación $3x - 7 + 4x \geq +4x - 6 + 2x$. Los puntos $x = -1$ y $x = 0$ son:

a) Ambos valores son solución de la inecuación

b) Ninguno de los valores es solución de la inecuación

c) El valor $x = -1$ no es solución y el valor $x = 0$ es solución de la inecuación.

12. Dada la inecuación $-6x + 8y - 6 \geq 2$. Un punto solución es:

a) $(1,1)$

b) $(0,1)$

c) Ninguno de los anteriores.

PARTE 2: PROBLEMAS

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = 3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] \text{ y } B = 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula la matriz A
- b) Calcula la matriz B
- c) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $3X + A = B$

Resolución:

a) Cálculo de la matriz A :

$$A = 3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = 3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ 54 & 21 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A será $A = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ 54 & 21 \end{pmatrix}$

b) Cálculo de la matriz B

$$B = 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 57 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz B será $B = \begin{pmatrix} 24 & 57 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$

c) Cálculo de la ecuación $3X + A = B$

$$3X + A = B \rightarrow 3X = B - A \rightarrow X = \frac{1}{3}(B - A) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 24 & 57 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ 54 & 21 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 33 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz X que verifica la ecuación: $3X + A = B$ será $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

2. Dada la función $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x) = -30x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, 5)$:

- a) Calcula la primera derivada de la función, $f'(x)$.
- b) Halla la función $f(x)$.
- c) Halla el máximo de la función $f(x)$.

Resolución:

a) Cálculo de $f'(x)$:

- i) Se obtiene $f'(x)$ resolviendo la integral de $f''(x)$:

$$f'(x) = \int -30x \, dx = -15x^2 + C$$

- ii) Una vez obtenida $f'(x)$, para determinar el valor de C se tiene en cuenta que se indica que la función tiene un mínimo en $(-2, 5)$. En lo que se traduce este dato es en que $f'(-2) = 0$. Considerando esto, el valor de C será:

$$f'(-2) = 0 \rightarrow -15(-2)^2 + C = 0 \rightarrow -15 \cdot 4 + C = 0 \rightarrow -60 + C = 0 \rightarrow C = 60$$

Solución:

La primera derivada de la función $f'(x) = -15x^2 + 60$

b) Cálculo de la función $f(x)$:

- i) Se obtiene $f(x)$ resolviendo la integral de $f'(x)$:

$$f(x) = \int (-15x^2 + 60) \, dx = -5x^3 + 60x + C$$

- iii) Una vez obtenida $f(x)$, para determinar el valor de C se tiene en cuenta que se indica que la función tiene un mínimo en $(-2, 5)$. En lo que se traduce este dato es en que $f(-2) = 5$. Considerando esto, el valor de C será:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -5(-2)^3 + 60(-2) + C = 5 \rightarrow -5(-8) - 120 + C = 5 \rightarrow 40 - 120 + C = 5 \rightarrow \\ &\rightarrow -80 + C = 5 \rightarrow C = 5 + 80 \rightarrow C = 85 \end{aligned}$$

Solución:

La función $f(x)$ será $f(x) = -5x^3 + 60x + 85$

c) Cálculo del máximo:

- i) Dado que se sabe que la derivada de la función es $f'(x) = -15x^2 + 60$, al igualar a 0 dicha derivada, y despejar x , se obtendrán puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow -15x^2 + 60 = 0 \rightarrow -15x^2 = -60 \rightarrow x^2 = \frac{-60}{-15} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

- ii) Una vez obtenidos los puntos críticos, se hacen intervalos contando con el dominio de la función, y posteriormente se reemplaza en $f'(x)$. Si el signo de $f'(x)$ es positivo (+), quiere decir que la función crece; y, si es negativo(-), que decrece. Sobre esto, si el signo pasa de positivo (+) a negativo (-), indica que la función tiene un máximo; y, si pasa de negativo (-) a positivo (+), indica que la función tiene un mínimo:

Dominio	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de x	-3	0	3
Signo de $f'(x)$	< 0	> 0	< 0
Interpretación	Decrece	Crece	Decrece

En el punto de abscisa $x = -2$, la primera derivada pasa de decrecer a crecer, lo que indica que tiene un mínimo (tal y como se indicaba en los datos iniciales del ejercicio)

En el punto de abscisa $x = 2$, la primera derivada pasa de crecer a decrecer, lo que implica que, en ese punto, la función presenta un máximo.

- iii) Ya conocido dónde se encuentra el máximo, se reemplaza en $f(x)$, obteniéndose la coordenada y en la cual se sitúa dicho máximo:

$$y = f(2) = -5(2)^3 + 60(2) + 85 = -5(8) + 120 + 85 = -40 + 120 + 85 = 165$$

Solución:

La función presenta un máximo en la coordenada $(x; y) = (2; 165)$

3. En una empresa de productos cosméticos, se toma la siguiente muestra de 9 botes de crema hidratante, obteniendo los siguientes pesos en gramos:

88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89

Se sabe que la distribución del peso de los botes de crema sigue una distribución normal con una desviación típica de 1'8g.

- Determina la distribución que seguirá los pesos medios de los botes de crema.
- Identifica los distintos parámetros que intervienen en la construcción del intervalo de confianza explicando su significado y el valor que toman.
- Halla un intervalo de confianza al 95% para la media población.

Resolución:

- a) Cálculo de la distribución de los pesos medios de los botes de crema:

Para resolver el ejercicio, se parte de que se sabe que la variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, y que la desviación típica es $\sigma = 1'8$, quedando que la distribución será $N(\mu, 1'8)$.

Sabiendo esto, es necesario determinar cuál es el valor de la media (μ). Para ello, se hace la media aritmética, a partir de los valores dados para la muestra:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{88 + 90 + 90 + 86 + 87 + 88 + 91 + 92 + 89}{9} = \frac{801}{9} = 89$$

Solución:

La distribución de los pesos medios de los botes de crema será $N(89, 1'8)$

- b) Elementos de un intervalo de confianza:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \leftrightarrow IC(\bar{x})_{1-\alpha} = (\bar{x} \pm E), \text{ donde } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$: Media muestral

$1 - \alpha$: Nivel de confianza. Se trata de la probabilidad de que la media esté dentro del intervalo.

$z_{\alpha/2}$: Valor crítico. Se trata de aquel el que, en una distribución $N(0,1)$ cumple que $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2})$.

σ : Desviación típica. Muestra cómo de dispersos están los datos. Cuanto menor sea su valor, más concentrados están los datos.

n : Muestra. Se refiere al conjunto de datos pertenecientes a una población.

E : Error de estimación. Muestra la desviación máxima permitida para que un dato caiga dentro del intervalo.

- c) Cálculo del intervalo de confianza al 95%:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow IC(\bar{x})_{0.95} = \left(89 \pm 1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{9}} \right) = (89 \pm 1.176) = (87.824; 90.176)$$

$$P(z_{\alpha/2} = j) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Solución:

La media estará comprendida entre 87,824 gramos y 90,176 gramos, con una confianza del 95%.