

1. [1,5 puntos] Realiza las siguientes operaciones con potencias. **Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero.**

$$\text{a) } \frac{5^3}{(5^{-2})^3 \cdot 5} ; \text{ b) } \frac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6} ; \text{ c) } \frac{25^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{(5^3)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}}$$

2. [1,5 puntos] **Simplifica al máximo** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot (\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{4})^3 ; \text{ b) } \sqrt{3\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{81} ; \text{ c) } \sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$$

3. [2 puntos] Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

$$\text{a) } \frac{3\sqrt{27} - \sqrt{12}}{2\sqrt{3}} ; \text{ b) } \frac{-2(1 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1}$$

4. [1 punto] Expresa mediante intervalos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades con valores absolutos.

$$\text{a) } |1 - 2x| < 3 ; \text{ b) } \left| \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} \right| \geq \frac{1}{2}$$

5. [1,5 puntos] Calcula el valor final de cada expresión. Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_3 \sqrt{27} ; \text{ b) } \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} ; \text{ c) } \log_4 16 + \log_2 \sqrt{32} - \log_5 1$$

6. [1,5 puntos] Halla el valor de x en cada uno de los apartados. Como en el ejercicio anterior, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_x \frac{1}{4} = -2 ; \text{ b) } \log_4 \left(\frac{3-x}{7} \right) = 1 ; \text{ c) } \log(x+1) - \log 5 = \log 100$$

7. [1 punto] Opera paso a paso y **expresa el resultado en notación científica.**

Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\text{a) } \frac{3 \cdot 10^3 - 200 \cdot 10}{(2 \cdot 10)^4} ; \text{ b) } \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (2,31 \cdot 10^{-5} + 0,9 \cdot 10^{-6})}{0,2 \cdot 10^{-9}}$$

Nota: lee bien los enunciados y contesta exactamente a lo que se pide en cada uno de ellos.

Soluciones

1. [1,5 puntos] Realiza las siguientes operaciones con potencias. **Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero.**

a) $\frac{5^3}{(5^{-2})^3 \cdot 5} = \frac{5^3}{5^{-6} \cdot 5} = \frac{5^3}{5^{-5}} = 5^8.$

b) $\frac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6} = \frac{(2^2)^4 \cdot (2^3)^{-1} \cdot (2^4)^2}{(2^{-1})^3 \cdot (2^3)^6} = \frac{2^8 \cdot 2^{-3} \cdot 2^8}{2^{-3} \cdot 2^{18}} = \frac{2^{13}}{2^{15}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

c) $\frac{25^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{(5^3)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}} = \frac{(5^2)^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot (3^2 \cdot 5)^2}{(5^3)^2 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}} = \frac{5^4 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{5^6 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}} = \frac{5^7 \cdot 3^4}{5^6 \cdot 3^1} = 5^1 \cdot 3^3 = 5 \cdot 27 = 135.$

2. [1,5 puntos] **Simplifica al máximo** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

a) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{4})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{2^{24}} = \sqrt[12]{2^{39}} = 2^3 \sqrt[12]{2^3} = 8\sqrt[12]{2}.$

b) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3} \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3^8} = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9.$

c) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = \sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5} - 2^2\sqrt{5} =$
 $= \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (1+3+6-4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$

3. [2 puntos] Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

a) $\frac{3\sqrt{27} - \sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{27} - \sqrt{12})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{81} - \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 9 - 6}{6} = \frac{27 - 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$

b) $\frac{-2(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1} = \frac{-2(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{-2(\sqrt{3}+1-3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{-2 \cdot (-2)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$

4. [1 punto] Expresa mediante intervalos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades con valores absolutos.

a) $|1-2x| < 3 \Leftrightarrow -3 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -3-1 < -2x < 3-1 \Leftrightarrow -4 < -2x < 2 \Leftrightarrow 2 > x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, 2).$

b) $\left|\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{2}$. Resolvemos primero la desigualdad contraria: $\left|\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < \frac{3x}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \frac{3x}{2} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -1 < 6x < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < x < \frac{3}{6} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$

Por tanto, los valores de x que satisfacen la desigualdad original son $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$

5. **[1,5 puntos]** Calcula el valor final de cada expresión. Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$a) \log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{3/2} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

$$b) \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 \frac{1}{2^{1/2}} = \log_2 2^{-1/2} = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$c) \log_4 16 + \log_2 \sqrt{32} - \log_5 1 = \log_4 4^2 + \log_2 \sqrt{2^5} - 0 = 2 \log_4 4 + \frac{5}{2} \log_2 2 = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

6. **[1,5 puntos]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados. Como en el ejercicio anterior, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$a) \log_x \frac{1}{4} = -2 \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2.$$

$$b) \log_4 \left(\frac{3-x}{7} \right) = 1 \Rightarrow 4^1 = \frac{3-x}{7} \Rightarrow 28 = 3-x \Rightarrow x = 3-28 \Rightarrow x = -25.$$

$$c) \log(x+1) - \log 5 = \log 100 \Rightarrow \log \frac{x+1}{5} = \log 100 \Rightarrow \frac{x+1}{5} = 100 \Rightarrow x+1 = 500 \Rightarrow x = 499.$$

7. **[1 punto]** Opera paso a paso y **expresa el resultado en notación científica**.

Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$a) \frac{3 \cdot 10^3 - 200 \cdot 10}{(2 \cdot 10)^4} = \frac{3 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3}{2^4 \cdot 10^4} = \frac{1 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^4} = 0,0625 \cdot 10^{-1} = 6,25 \cdot 10^{-3}.$$

$$b) \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (2,31 \cdot 10^{-5} + 0,9 \cdot 10^{-6})}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (2,31 \cdot 10^{-5} + 0,09 \cdot 10^{-5})}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2,4 \cdot 10^{-5}}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{0,2 \cdot 10^{-9}} = 60 \cdot 10^0 = 6 \cdot 10^1.$$