

1. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con potencias factorizando y usando las propiedades de las mismas. **Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero.**

$$\text{a) } 8^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot 16^{-2} \quad ; \quad \text{b) } \frac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 6^{-5} \cdot 3^2}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}}$$

2. **[1 punto]** **Simplifica al máximo** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

$$\text{a) } \sqrt[4]{16 \cdot \sqrt[3]{16}} \quad ; \quad \text{b) } 4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

3. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

$$\text{a) } \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad \text{b) } \frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

4. **[1 punto]** Realiza la siguiente operación paso a paso y **expresa el resultado en notación científica**.

Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (2,31 \cdot 10^{-5} + 0,9 \cdot 10^{-6})}{0,2 \cdot 10^{-9}}$$

5. **[1 punto]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados (**dar valores exactos, no se admiten soluciones con decimales**). Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_2(12 - 4x) = 3 \quad ; \quad \text{b) } \log x = 4\log 2 - 2\log 3$$

6. **[3 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \text{b) } \sqrt{x-1} + 1 = x - 2$$

7. **[2 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}$$

Soluciones

1. [1 punto] Realiza las siguientes operaciones con potencias factorizando y usando las propiedades de las mismas. **Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero.**

$$\begin{aligned} \text{a) } 8^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot 16^{-2} &= (2^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (2^4)^{-2} = 2^6 \cdot (2^{-2})^3 \cdot (2^{-1})^{-4} \cdot 2^{-8} = \\ &= 2^6 \cdot 2^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^{-8} = 2^{6-6+4-8} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 6^{-5} \cdot 3^2}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} &= \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot (3^2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^{-5} \cdot 3^2}{(2 \cdot 3^2)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^{-1} \cdot 3^5}{2^{-2} \cdot 3^3} = \\ &= 2^{-1-(-2)} \cdot 3^{5-3} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18. \end{aligned}$$

2. [1 punto] **Simplifica al máximo** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

$$\text{a) } \sqrt[4]{16 \cdot 3 \cdot 16} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 2^4} = \sqrt[4]{3 \cdot 2^{12} \cdot 2^4} = \sqrt[4]{3 \cdot 2^{16}} = \sqrt[4]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50} &= 4\sqrt{2^3} + 3\sqrt{2 \cdot 3^2} + 2\sqrt{2^5} - \sqrt{2 \cdot 5^2} = \\ &= 4 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \cdot 2^2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. [1 punto] Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

$$\text{a) } \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{10 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{10 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{10 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{12 - 2} = \\ &= \frac{10 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{10} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. [1 punto] Realiza la siguiente operación paso a paso y **expresa el resultado en notación científica**.

Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (2,31 \cdot 10^{-5} + 0,9 \cdot 10^{-6})}{0,2 \cdot 10^{-9}} &= \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (23,1 \cdot 10^{-6} + 0,9 \cdot 10^{-6})}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \frac{120 \cdot 10^{-10}}{0,2 \cdot 10^{-9}} = \\ &= 600 \cdot 10^{-1} = 6,00 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

5. [1 punto] Halla el valor de x en cada uno de los apartados (**dar valores exactos, no se admiten soluciones con decimales**). Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_2(12 - 4x) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 12 - 4x \Leftrightarrow 8 = 12 - 4x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{b) } \log x = 4\log 2 - 2\log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 2^4 - \log 3^2 \Leftrightarrow \log x = \log \frac{2^4}{3^2} \Leftrightarrow \log x = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}.$$

6. [3 puntos] Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8x - 12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0.$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16.$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{2} \Rightarrow x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}.$$

b) $\sqrt{x-1} + 1 = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x-1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0.$ El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9.$ Por tanto:

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}. \text{ Hagamos la comprobación, por si alguna de ellas no fuera solución.}$$

- Si $x = 5$, entonces $\sqrt{5-1} + 1 = 5 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} + 1 = 3 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3.$
- Si $x = 2$, entonces $\sqrt{2-1} + 1 = 2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0.$

De lo anterior deducimos que $x = 5$ es la única solución de la ecuación. $x = 2$ no es solución porque produce una contradicción al sustituir en la ecuación original.

7. [2 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}. \text{ Despejando } y \text{ de la primera ecuación tenemos: } y = 2x - 1. \text{ Sustituyendo este valor en la}$$

segunda:

$$x^2 + 3x(2x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 7x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(7x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{7} \end{cases}.$$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow y = -1.$

Si $x = \frac{3}{7} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{3}{7} - 1 \Rightarrow x = \frac{6}{7} - 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}.$