

BOLZANO

2022 Castilla La Mancha Extraordinaria

1. Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función corta al eje de abscisas al menos una vez

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2 + 2}$$

2. Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función corta al eje de abscisas al menos una vez

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2 + 2}$$

2022 Castilla León Extraordinaria

3. Realice los apartados siguientes:

(a) Enuncie el teorema de Bolzano.

(b) Averigüe si la función $f(x) = x + \sin x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2022 Madrid Ordinaria

4. Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$

2022 Navarra Extraordinaria

5. Sea la función

$$f(x) = \ln\left(\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$$

(a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$.

(b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2,4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

2013 GALICIA

6. Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ alguna solución en el intervalo $(0,1)$? ¿Tiene esa ecuación más de una solución real?

2011 GALICIA

7. Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(0,\pi)$? Razona la respuesta.

2007 GALICIA

8. Enuncia e interpreta geoméricamente el teorema de Bolzano. Dada la función $f(x) = e^x + 3x \ln(1 + x^2)$, justifica si podemos asegurar que su gráfica corta el eje OX en algún punto del intervalo $[-1,0]$.

9. Enunciado del teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 4 \text{ Corta al eje OX en algún punto del intervalo } (1,2)?$$

2001 GALICIA

10. Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Bolzano. ¿Se puede asegurar, empleando Bolzano, que la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razona la respuesta. Esboza la gráfica de la función en ese intervalo.

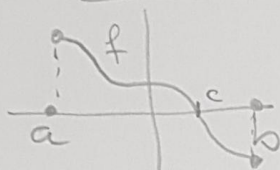
Th Bolzano

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ cont } [a, b]$$

$$f(a)f(b) < 0$$

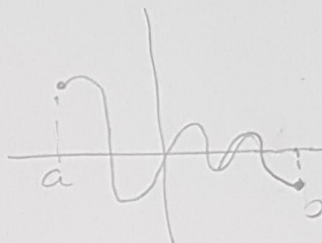
$$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ cont } [a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$$

INT. Geométrica

si la función es continua en un intervalo y en él cambia de signo $\Rightarrow$ necesariamente corta al eje de las x AL MENOS en un pto.

Observaciones

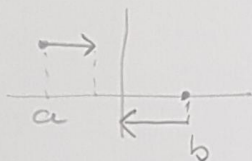
• El pto no tiene por qué ser único



• Si la función no es continua

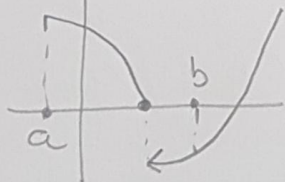
$\Rightarrow$ no tiene p.g. cumplirse el th.

(la continuidad es condición NECESARIA)

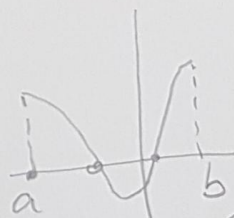


• $\nexists$ puede ocurrir que $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$ pero eso no implica ni que la función sea continua ni que cambie de signo entre a y b

Ejemplo



Esta función tiene un pto de corte pero no es continua



Esta función es cont. y tiene 2 pto de corte sin embargo $f(a)f(b) > 0$

(6b) $f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2 + 2}$ buscaremos justificar que (2) $\exists c \in \text{Dom } f$ t.q. $f(c) = 0$

f cont. por ser cociente de dos funciones continuas
y el denominador $x^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

tenemos que buscar un intervalo en el que haya un cambio de signo

Como $x^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, sólo tenemos q. fijarnos en el signo del numerador $2e^x - 8x - 3$

pruebo $x=0 \rightarrow 2e^0 - 8 \cdot 0 - 3 < 0$ exponencial crece muy rápida
 $x=1 \Rightarrow 2e - 8 - 3 < 0$
 $x=2 \Rightarrow 2e^2 - 8 \cdot 2 - 3 < 0$
 $x=3 \Rightarrow 3e^3 - 8 \cdot 2 - 3 > 0$ recta decrece a velocidad constante -8

} cambia el signo

Podemos tomar el intervalo $[2, 3]$

f cont. en $[2, 3]$
 $f(2) f(3) < 0 \Rightarrow \exists c \in (2, 3)$
 t.q. $f(c) = 0$

Así hemos garantizado que la ecuación

$$2e^x - 8x - 3 = 0$$

tiene al menos una solución en $[2, 3]$

Con geogebra se puede seguir aproximando

$$c \in (2.410, 2.412)$$

hasta las milésimas o hasta donde se quiera

(2) 2022 Castilla - Mancha Ext (6b) Muy Fácil
 $f(x) = x + \sin x - 2$ ¿ $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2})$ / $f(c) = 0$? obvio

(ya nos dan ellos el intervalo, no hay que buscar a ni b)

$$f(0) = 0 + \sin 0 - 2 = -2 < 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

f es suma de la función seno y un polinomio $\Rightarrow$

f es cont. en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ por th Bolzano $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2})$ t.q. $f(c) = 0$

[interesante]

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \text{ en } [0, 2]$$

Estudiar el signo de f en ese intervalo

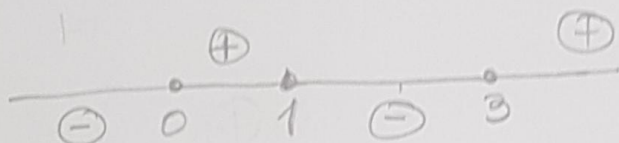
Primero busco sus raíces (es un polinomio, así que es fácil)

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) \rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{matrix} \boxed{3} \\ \boxed{1} \end{matrix}$$

El polinomio es de grado 3 $\Rightarrow$ tiene exactamente 3 raíces que son: 0, 1, y 3 (mi una raíz una menos)

Estudiamos el signo de f



Si $x < 0 \Rightarrow$ p. ej. $-1 \rightarrow -1 - 4 - 3 < 0$

Entre -1 y 0 no hay más raíces así que el signo de f en $(-\infty, 0)$ tiene que ser $\ominus$
 (de lo contrario si $\exists a \in (-\infty, 0)$ tq $f(a) > 0 \Rightarrow$ por el th. de Bolzano encontraríamos otra raíz a la izqda del 0, lo que no es posible (sólo lo son 0, 1 y 3)) $\Rightarrow f(x) < 0 \forall x \in (-\infty, 0)$

Si $x \in (0, 1)$

p. ejemplo $x = \frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2}) = \oplus \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in (0, 1)$
 en caso contrario por Bolzano tendríamos que existir otra raíz, lo que es imposible

Si $x \in (1, 3)$, $f(2) < 0$

Por el mismo razonamiento se puede concluir que $f(x) < 0 \forall x \in (1, 3)$

Si $x > 3$ p. ej. $f(4) > 0 \Rightarrow$ aplicando el mismo razonamiento $f(x) > 0 \forall x > 4$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{comprobar aumple Bolzano en } [-1, 1]$$

f es cociente de funciones polinómicas (continuas)
 $\Rightarrow f$ será continua donde esté bien definida, i.e.
 donde $x^2+1 \neq 0$; como $x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ no
 hay problema, está bien definida $\forall x \in \mathbb{R}$
 y por tanto f CONT en $\mathbb{R}$, en particular f es
 continua en $[-1, 1]$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(1) &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$$

$\Rightarrow$ por el th. Bolzano $\exists c \in (-1, 1)$ t.q. $f(c) = 0$

22 Navarra - Ext (7)

Difícil

$$f(x) = \ln \left(\sin \frac{\pi}{6} x - \cos \frac{\pi}{6} x \right) \text{ para } x \in [2, 4]$$

Las funciones seno y coseno son cont. en $\mathbb{R}$
 la función $\ln x$ es continua EN SU DOMINIO $(0, +\infty)$
 por tanto para que f continua en $x \in [2, 4]$ t.g.d.

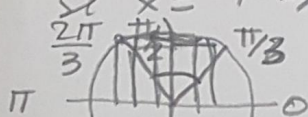
$$\text{que } \sin \frac{\pi}{6} x - \cos \frac{\pi}{6} x > 0$$

$$x \in [2, 4]$$

Veamos quién es en realidad $\sin \frac{\pi}{6} x - \cos \frac{\pi}{6} x$ en $[2, 4]$

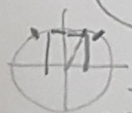
$$\text{si } x=2 \rightarrow \frac{\pi}{6} 2 = \frac{\pi}{3} (60^\circ) \rightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{si } x=4 \rightarrow \frac{\pi}{6} 4 = \frac{2\pi}{3} (120^\circ) \rightarrow \cos \frac{2\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



Además si $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$

$$\sin \alpha > \left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| \Rightarrow$$



El dibujo es importante!

$\rightarrow$ en todos estos ángulos la vertical mide más que la horizontal

Continuación Madrid OR B2

(p.5)

$$\text{por } \operatorname{sen} \alpha > \left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| \text{ con } \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha > 0 \Rightarrow \exists \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \in \mathbb{R}$$

La función estará bien definida en este intervalo
y por tanto f continua en $[2, 4]$

$$f(2) = \operatorname{Ln}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{Ln}(0.366...) \approx -1.005 < 0$$

$$f(4) = \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \approx \operatorname{Ln}(1.366) > 0$$

$$\Rightarrow f(2) - f(4) < 0 \Rightarrow \text{Por el th. de Bolzano}$$

$$\exists c \in [2, 4] \text{ t.q. } f(c) = 0$$