

Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y Rolle

①

Ej. 1 Demuestra q. $x^5 + 5x + 1$ tiene una ÚNICA solución real

Solución

1º Existencia (Bolzano)

$f(x) = x^5 + 5x + 1$ func. polinómica $\Rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R}$

$f(0) = 1 > 0$ (además $f(x) > 0 \forall x \in [0, +\infty)$)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 5 > 0 \\ f(-2) = -41 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [-2, -1] \\ f \text{ deriv } (-2, -1) \\ f(-1) \cdot f(-2) < 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow \exists c \in (-2, -1) \\ \uparrow \\ \text{t.q. } f(c) = 0 \\ \text{Bolzano} \end{array}$$

2º Unicidad (Rolle)

por reducción al absurdo, supongamos q. es falso y que $\exists c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c_1) = f(c_2) = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1, c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (c_1, c_2) / f'(c) = 0$$

$\uparrow$ Rolle

En nuestro caso $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ por ser

4º por y $5 > 0$

¡Absurdo! $\Rightarrow$ la hipótesis de partida es falsa y por tanto $\exists^{\circ} c \in \mathbb{R}$ (en particular en $(-2, -1)$) t.q. $f(c) = 0$.

Ej. 2 Demuestra q. $2^x + x - 2$ tiene una única raíz real

Sol llamo $f(x) = 2^x + x - 2$ func. elemental suma de una exponencial y una polinómica, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 f cont y deriv. en $\mathbb{R}$

Existencia (Bolzano) $f(0) = -1 < 0$ | $\Rightarrow$
 $f(1) = 1 > 0$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont en } [0,1] \\ f \text{ deriv en } (0,1) \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0,1) \text{ t.q. } f(c) = 0$$

↑
th. Bolzano

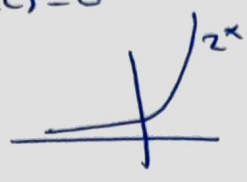
UNICIDAD (Rolle)

por reducci3n al absurdo, supongamos que hubiese m3s de una raiz $\Rightarrow \exists c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c_1) = f(c_2) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1, c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (c_1, c_2) / f'(c) = 0$$

↑
th Rolle

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 1, \quad \text{como } \begin{array}{l} 2^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln 2 > 0 \\ 1 > 0 \end{array}$$



$\Rightarrow f'(x) > 0$ ¡absurdo!

$\Rightarrow$ S3lo puede haber una raiz. y est3 en $(0,1)$

CONCLUSI3N

Unicidad de Soluciones (monoton3a de la 1ª derivada)

Si f cont. y deriv
 f estrictamente creciente $\Rightarrow$ [Si existe una soluci3n para $f(x)=0 \Rightarrow$ es 3NICA]

* Se puede enunciar lo mismo para f decreciente

Demost por reducci3n al absurdo, supongamos $\exists c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$

t.q. $f(c_1) = f(c_2) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1, c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (c_1, c_2) / f'(c) = 0$$

↑
Rolle

Pero por f estrictamente creciente $f'(x) > 0 \forall x \Rightarrow$ ¡Absurdo!
y portanto $\neq 0$

$\Rightarrow$ Si existe soluci3n es 3nica

Bolzano se usa para localizar el intervalo en el q. exista la raiz (No siempre la hay)

Ej 3

Demstrar q. $x^3 + x + 1$ corta al eje x en un único pto $\text{---} \cdot \text{---}$

(P.3)

Sol $f(x) = x^3 + x + 1$ func. polinómica $\Rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R}$

Existencia (Bolzano) busco el intervalo q. me interesa

$$f(0) = 1 > 0 \quad (\text{yualg. } x > 0 \text{ también}) \quad \text{int } [-1, 1]$$

$$f(-1) = -1 < 0$$

$$f \text{ cont } [-1, 1]$$

$$f \text{ deriv } (-1, 1)$$

$$f(-1) \cdot f(1) < 0$$

Bolzano

$$\Rightarrow \exists c \in (-1, 1) \text{ t.q. } f(c) = 0$$

Unicidad (Rolle) por reducción al absurdo, suponga-

mos q. es falso $\Rightarrow \exists c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c_1) = f(c_2) = 0$

$$\text{Como } \left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1, c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (c_1, c_2) \mid f'(c) = 0$$

Rolle

Veamos quién es $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

p.q. $2 \text{ par y } 1 > 0$



$\Rightarrow$ ¡absurdo! ($\nexists c \in (c_1, c_2)$ con $f'(c) = 0$) $\Rightarrow$ la raíz es ÚNICA

Ejercicio para seguir practicando

[4] Comprobar q. en $(0, 1)$, $f(x) = 2x^3 + x^2$ y $g(x) = x^2 + 6x - 1$ se cortan en un único pto

[5] Demostrar q. $x + 1 = e^x$ tiene una única solución real

[6] Demostrar q. $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$

[7] Igual para $x^3 - 6x^2 + 15x - 25 = 0$