

MATEMÁTICAS II

NOMBRE Y APELLIDOS:.....

1 (1.5 ptos)	2 (1.5 ptos)	3 (2 ptos)	4 (3 ptos)	5 (2 ptos)	Nota

1. a) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula los siguientes límites:

$$\text{b.i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} \quad \text{b.ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

2. Dada la función $f(x) = x^6 - 6x^4$, se pide:

- Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Encontrar sus máximos y mínimos, determinar si son relativos o absolutos.
- Calcular el área de la región acotada limitada por el eje $y=0$ y la gráfica de f .

3. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Discute el rango de A según los valores de m .
- ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?
Para $m=0$, despeja y calcula la matriz X .

4. a) Sean la recta $r: \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi: x + y + kz = 0$, calcula m y k para que:

- La recta r sea perpendicular al plano π .
- La recta r está contenida en el plano π .

b) Dados el plano π determinado por los puntos $(0,1,1)$, $(2,0,2)$ y $(1,2,6)$, y el plano $\beta: x - y + z = 3$. Calcula una recta que sea paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos.

5. En una empresa, el 20% de los trabajadores son mayores de 30 años, el 8% desempeña algún puesto directivo, el 6% es mayor de 30 años y desempeña algún puesto directivo. a) ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo? .b) ¿Qué porcentaje de los trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años? c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

Criterios xerais de avaliación

- As respostas deberán estar debidamente xustificadas. Se só se achega a solución, sen ningún tipo de explicación, a puntuación nese apartado será de cero puntos.
- Permitirase o uso de calculadoras científicas non programables, que non teñan capacidade gráfica, e non resolvan integrais.
- No desenvolvemento dos exercicios, valorarase:
 - a. A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados.
 - b. A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes.
 - c. A precisión e rigor adecuados para a resolución dun problema.
 - d. A interpretación da solución dos exercicios.

1) a) A FUNÇÃO É CONTÍNUA EM $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ POR SER CADA FUNÇÃO CONTÍNUA NO SEU DOMÍNIO 0'21

EN $x < 2$, $f(x) = \frac{3}{x-2}$ CONTÍNUA EM $\mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow$ CONTÍNUA EM $x < 2$

EN $2 < x < 3$, $f(x) = \cos \pi x$ CONTÍNUA EM $\mathbb{R} \Rightarrow$ CONTÍNUA EM $(2, 3)$

EN $x > 3$, $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{3-x}$ CONTÍNUA NO SEU DOMÍNIO, $x-2 > 0$, $x \neq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CONTÍNUA EM $x > 2$, $x \neq 3 \Rightarrow$ CONTÍNUA EM $x > 3$.

ESTUDEMOS A CONTINUIDADE EM $x=2$, $x=3$:

CONTINUIDADE EM $x=2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos \pi x = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$
(calculadora em radianes)

$\Rightarrow$ A FUNÇÃO É DESCONTÍNUA INEVITÁVEL DE SALTO INFINITO 0'25

CONTINUIDADE EM $x=3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos \pi x = \cos 3\pi = -1$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[\frac{\ln(3-2)}{3-3} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \right] =$
L'H

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{3-2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$$

$f(3) = 3\pi = -1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Rightarrow$ A FUNCIÓN
ES CONTINUA EN $x=3$ $\Rightarrow$ A FUNCIÓN ES CONTINUA EN $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\text{bii) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \left[\left(\frac{2e^{1-1}}{1+1} \right)^{\frac{1}{1-1}} = \left(\frac{2e^0}{2} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \right] = L$$

$$\Rightarrow \ln \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)}{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \cdot \ln \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)}{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\frac{2e^{x-1}}{x+1}} \cdot \frac{2e^{x-1}(x+1) - 2e^{x-1}}{(x+1)^2}}{\frac{x - (x-1)}{x^2}} =$$

L'H

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2e^{x-1}} \cdot \frac{2e^{x-1}(x+1) - 2e^{x-1}}{x+1}}{\frac{x - x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2e^{x-1}} \cdot \frac{2e^{x-1}(x+1-1)}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\ln L = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{1/2} = L \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{e}}$$

$$\text{b.i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2+4x+3} = \left[\frac{-e^{1-1} + 1}{1-4+3} = -\frac{1+1}{0} = \frac{0}{0} \right] \text{ L'H}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} (2x) - 1}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x e^{x^2-1} - 1}{2x+4} =$$

$$= \frac{-2(-1) e^{1-1} - 1}{2(-1)+4} = \frac{2e^0 - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \left[\frac{1}{2} \right] \text{ (0's)}$$

$$2) f(x) = x^6 - 6x^3$$

$$a) f'(x) = 6x^5 - 24x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3(x^2 - 4) = 0$$

$x = 0$ POSIBLES
 $x = \pm 2$ EXTREMOS



$$f'(-3) = 6(-3)^5 - 24(-3)^2 = -1458 + 648 < 0 \Rightarrow \text{En } (-\infty, -2) \text{ A FUNCIÓN ES DECRECIENTE.}$$

$$f'(-1) = -6 + 24 > 0 \Rightarrow (-2, 0) \text{ CRECIENTE}$$

$$f'(1) = 6 - 24 < 0 \Rightarrow (0, 2) \text{ DECRECIENTE}$$

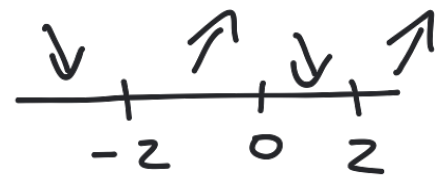
$$f'(3) = 1458 - 648 > 0 \Rightarrow (2, +\infty) \text{ CRECIENTE}$$

ENTÓN LA FUNCIÓN ES CRECIENTE EN $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$,

DECRECIENTE EN $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

MÍNIMO EN $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$

MÁXIMO EN $(0, f(0))$



$$f(-2) = (-2)^6 - 6(-2)^4 = 64 - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, -32) \text{ mínimo. } \textcircled{0'1}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ máximo } \textcircled{0'1}$$

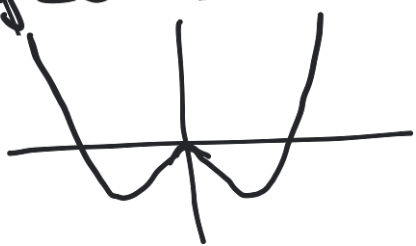
$$f(2) = 2^6 - 6 \cdot 2^4 = 64 - 6 \cdot 16 = 64 - 96 = -32 \Rightarrow (2, -32) \text{ mínimo } \textcircled{0'1}$$

ANALICEMOS LAS RAMAS E OS PUNTOS DE CORTE COS EIXES COORDENADOS, PARA CONCRETAR SE OS EXTREMOS SON ABSOLUTOS O RELATIVOS:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^6 - 6x^4 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 - 6x^4 = \infty$$

PUNTOS DE CORTE COS EIXES COORDENADOS: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

$$y=0 \Rightarrow 0 = x^6 - 6x^4 \Rightarrow 0 = x^4(x^2 - 6) \Rightarrow x=0 \quad x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{6}, 0) \quad (-\sqrt{6}, 0)$$



$\Rightarrow$ OS MÍNIMOS SON ABSOLUTOS $\textcircled{0'2}$
E O MÁXIMO RELATIVO.

$$c) \text{ Área} = 2 \int_{-\sqrt{6}}^0 (-x^6 + 6x^4) dx = \int_{-\sqrt{6}}^0 (-x^6 + 6x^4) dx + \int_0^{\sqrt{6}} (-x^6 + 6x^4) dx =$$

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 2 \int_{-\sqrt{6}}^0 (-x^6 + 6x^4) dx = 2 \left(\underbrace{-\frac{x^7}{7} + \frac{6x^5}{5}}_{\text{6'1}} \right)_{-\sqrt{6}}^0 = \\
&= -2 \left(-\frac{(-\sqrt{6})^7}{7} + \frac{6(-\sqrt{6})^5}{5} \right) = \\
&= -2 \left(\frac{+(\sqrt{6})^7}{7} + \frac{-6(\sqrt{6})^5}{5} \right) = -2 \left(\frac{(\sqrt{6})^7}{7} - \frac{6(\sqrt{6})^5}{5} \right) = \\
&= -2 \left(\frac{5(\sqrt{6})^7 - 42(\sqrt{6})^5}{35} \right) = 2 \left[\frac{-5(\sqrt{6})^7 + 42(\sqrt{6})^5}{35} \right] = \\
&= 2 \left[\frac{-5 \cdot 6^3 \sqrt{6} + 42 \cdot 6^2 \sqrt{6}}{35} \right] = \frac{2}{35} \left[-5 \cdot 6^3 \sqrt{6} + 42 \cdot 6^2 \sqrt{6} \right] = \\
&= \frac{2}{35} \sqrt{6} (-5 \cdot 6^3 + 42 \cdot 6^2) = \frac{2\sqrt{6}}{35} \cdot 432 \approx \underline{\underline{60.46 \text{ unit}}} \quad \text{6'2}
\end{aligned}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

$$|A| = 3m^2 + 3m + 2 - 3m - 2m^2 - 3 = m^2 - 1 \Rightarrow$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow 1) \text{ Se } m \neq \pm 1 \Rightarrow \text{RANGO } A = 3 \quad (0'2)$$

$$2) \text{ Se } m = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{RANGO } A = 2 \quad (0'3)$$

$$3) \text{ Se } m = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{RANGO } A = 2 \quad (0'3)$$

b) $A \cdot X = B \Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{Se } A \in M_{3 \times 3} \\ B \in M_{3 \times 2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow X \in M_{3 \times 2} \quad (0'2)$

Se $m = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B} \quad (0'2)$

$$A \cdot X = B$$

Se $m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}B}$

CALCULEMOS A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & +1 \\ 2 & +3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

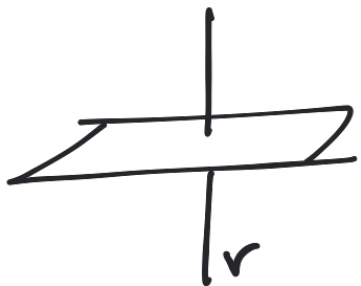
$$|A| = 2 \cdot 3 = -1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{0'3}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \square$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{0'3}$$

4) a) r: $\frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$, $\pi: x+y+kz=0$

a.i) $r \perp \pi$



$\Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_\pi \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow$

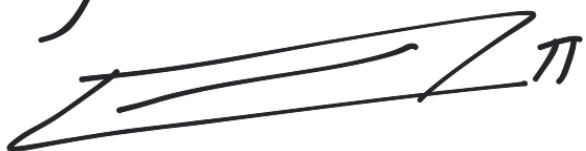
$\Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_\pi \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow m=2$

$2k=4 \Rightarrow k=2$

$\Rightarrow r \perp \pi \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=2 \end{cases}$

a.ii) $r \subset \pi$



$\begin{cases} 2x-2=m(y-1) \\ 4(y-1)=2(z-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2x-2=my-m \\ 2x-my=-m+2 \end{cases} \Rightarrow$

$4y-4=2z-2$

$4y-2z=2$

$\begin{pmatrix} 2 & -m & 0 & : & 2-m \\ 0 & 4 & -2 & : & 2 \\ 1 & 1 & k & : & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |M| = 8k + 2m + 4$

$|M|=0 \Rightarrow 8k + 2m + 4 = 0$

$m = \frac{-4-8k}{2} = -2-4k$

$$m = -2 - 4k$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -m & 0 & 2-m \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -m & 0 & 2-m \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2+4k & 0 & 4+4k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4k & -2k & 4+4k \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{RANGO } M^* = \text{RANGO } M \Leftrightarrow$$

$$4+4k = 2k$$

$$2k = -4$$

$$\boxed{k = -2} \quad \text{O's}$$

$$\text{SE } k = -2 \Rightarrow m = -2 - 4 \cdot (-2) = -2 + 8 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 6} \quad \text{O's}$$

$$b) \pi \begin{cases} (0,1,1) \\ (2,0,2) \\ (1,2,5) \end{cases}$$

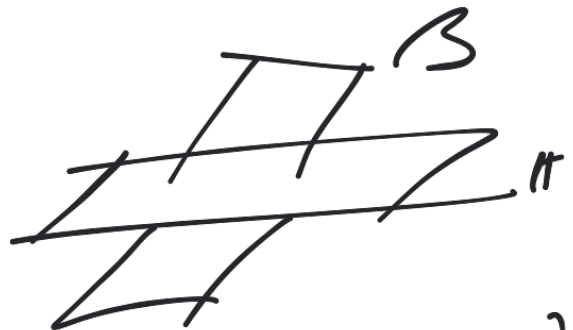
$$\beta: x-y+z=3$$

$$\pi \begin{cases} A(0,1,1) \\ \overline{AB}(2,-1,1) \\ \overline{AC}(1,1,5) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-6, -9, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\pi (-2, -3, 1) \Rightarrow -2x-3y+z+D=0 \Rightarrow \begin{matrix} -3+1+D=0 \\ D=2 \end{matrix}$$

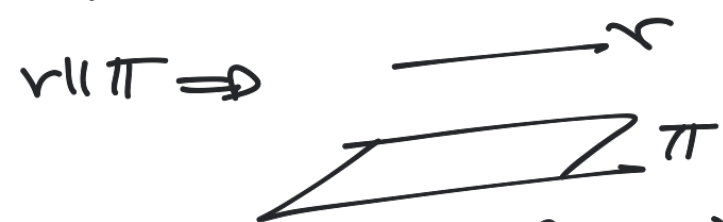
$$\pi: -2x-3y+z+2=0 \quad (0'25)$$

$$\vec{n}_\beta (1,-1,1), \vec{n}_\pi (-2,-3,1) \Rightarrow$$



$$r \begin{cases} \parallel \pi \\ \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_\pi \perp \vec{n}_\pi, \vec{r}_\beta \perp \vec{n}_\beta$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{r}(-2,3,5) \end{cases} \quad (0'25)$$



$$\vec{n}_\pi \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 3, 5)$$

Valida $\begin{cases} -2x-3y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$$P(0,0,0) \notin \pi, P(0,0,0) \notin \beta \quad (0'25)$$

$$\underline{5)} \quad \begin{aligned} P(>30) &= 0.2 \\ P(D) &= 0.08 \\ P(>30 \cap D) &= 0.06 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(M30) &= 0.2 \\ P(D) &= 0.08 \\ P(M30 \cap D) &= 0.06 \end{aligned}$$

a) $P(M30 \cap \bar{D}) = ?$ b) $P(\bar{D} \cap \overline{M30}) = ?$ c) $n=100, P(D \cap M30)$

(a) $P(M30 \cap \bar{D}) = P(M30) - P(M30 \cap D) = 0.2 - 0.06 = 0.14$

(b) $P(\bar{D} \cap \overline{M30}) = P(\overline{D \cup M30}) = 1 - P(D \cup M30) =$
 $= 1 - [P(D) + P(M30) - P(D \cap M30)]$
 $= 1 - [0.08 + 0.2 - 0.06]$
 $= 1 - [0.28 - 0.06] = 1 - 0.22 = 0.78$

(c) Se $n=100$, $P(D \cap \overline{M30}) = P(D) - P(D \cap M30) =$
 $= 0.08 - 0.06 = 0.02 \Rightarrow 2\%$

ENTON 2% de 100 $\Rightarrow$ DOS 100 TRABALLADORES SON DIRECTIVOS E NON TEÑEN MÁIS DE 30 ANOS