
PROBLEMAS DISTRIBUCIONES BINOMIALES INTERESANTES

1. (Castilla-La Mancha 2021, Ordinaria) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
 - a. ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
 - b. Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
 - c. Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo. ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
 - d. Con dicho algoritmo ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?
2. (Castilla-La Mancha 2021, Extraordinaria) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según lleguen al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
 - a. ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
 - b. Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
 - c. En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
 - d. ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
 - e. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?
3. (Canarias 2021, Extraordinaria) Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:
 - a. Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20%
 - b. Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?
 - c. ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

Problemas Binomiales Interesantes

pág ①

- ① (Muy completo) Empieza con prob. y termina con binomial

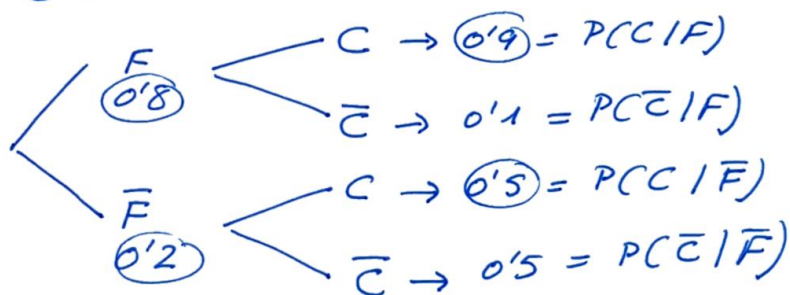
Red social $\rightarrow$ los usuarios comparten fotos o nunca lo hacen $\rightarrow$ Pueden comentar fotos o nunca lo hacen

F = "alguna vez comparte foto"

$\bar{F}$ = "nunca comparte foto"

C = "alguna vez comenta fotos de sus contactos"

$\bar{C}$ = "nunca comentan fotos"



$$a) P(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. Totales}}}{=} 0.5 \cdot 0.2 + 0.9 \cdot 0.8 = \boxed{0.82} = \boxed{82\%}$$

$$b) P(F|\bar{C}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{P(F \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(\bar{C} \cap F)}{P(\bar{C})} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{P(\bar{C}|F) \cdot P(F)}{P(\bar{C})} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a)}{=} \frac{0.1 \cdot 0.8}{1 - 0.82} = \boxed{0.4444} = \boxed{44.44\%}$$

- c) Algoritmo de reconocimiento facial
* $p = 0.8$ = prob. ident. correcta a las personas a partir de las fotografías.
prob. constante

* Procesamos 4 fotografías $n = 4$
(cada proceso es indep. de los otros)

* Consideramos solamente la prob. de éxito "persona ident. correcta" o fracaso "no ident. correctamente a la persona"

Claramente es una binomial

$X =$ "nº de personas correctamente identificadas entre las 4 fotos procesadas" $\in B_i(4, 0'8)$ pág(2)

$$\left. \begin{array}{l} n=4 \\ p=0'8 \\ q=0'2 \end{array} \right\}$$

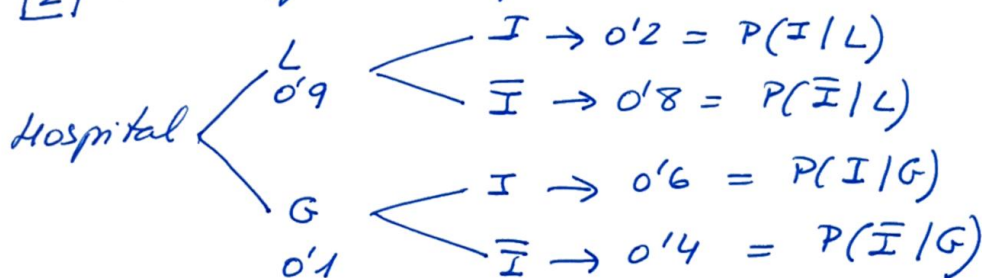
$$P(X=4) = \binom{4}{4} 0'8^4 \cdot 0'2^0 = \boxed{0'4096} = \boxed{40'96\%}$$

$$d) \text{ "al menos 1" } \rightarrow P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0} 0'8^0 \cdot 0'2^4 = \boxed{0'9984} = \boxed{99'84\%}$$

↑
más corto

menos cuentas $\rightarrow$ lo contrario a no identificar a ninguna.

[2] Un completo de probabilidad con una binomial



$$a) P(I) = 0'2 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1 = \boxed{0'24} = \boxed{24\%}$$

↑
P. Totales

$$b) P(L|I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I \cap L)}{P(I)} \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(I|L) \cdot P(L)}{P(I)} = \\ = \frac{0'2 \cdot 0'9}{0'24} = \boxed{0'75} = \boxed{75\%}$$

↑
Bayes

c) Aquí viene la binomial
llegan 8 pacientes ; $n=8$

$P = P(L) = 0'9$ es constante ; $q = 1 - p = 0'1$
cada suceso es indep.

sólo contemplamos éxito = ser clasificado como LEVE

o fracaso = No ser clasificado
como leve = ser clasificado
como grave

Continuación [2] $\Rightarrow$ pág. [3]

$X =$ "nº de pacientes clasificados como leves, entre los 8 pacientes recién llegados" $\in B_i(8, 0.9)$

$$P(X=4) = \binom{8}{4} 0.9^4 \cdot 0.1^4 \approx \boxed{0.0046} = \boxed{0.46\%}$$

$$d) P(X \leq 7) = 1 - P(X=8) = 1 - \binom{8}{8} 0.9^8 \cdot 0.1^0 =$$

"como mucho 7"

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

(con su $\leq$ larguísimo)

$$\approx \boxed{0.5695} = \boxed{56.95\%}$$

[3] Lote de 20 arandelas; $n=20$

$X =$ "nº de defectuosas en el lote"

$p(\text{defectuosa}) = 0.01$ es constante

$$q = 1 - 0.01 = 0.99$$

Sólo consideramos éxito o fracaso

los sueros son independientes

$$\Rightarrow X \in B_i(20, 0.01)$$

$$a) P(X=2) + P(X=1) = \binom{20}{2} 0.01^2 \cdot 0.99^{18} + \binom{20}{1} 0.01 \cdot 0.99^{19} =$$

(10.2 arandelas defectuosas)

$$\approx \boxed{0.1811} = \boxed{18.11\%}$$

Obviamente

18.11% No es mayor que

b) Un lote se rechaza si se encuentra, al menos, 1 arandela defectuosa $P(\text{rechazar lote})?$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=20) =$$

$$\approx 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} 0.01^0 \cdot 0.99^{20} \approx \boxed{0.1821} = \boxed{18.21\%}$$

Así menos
cuentas que hacer

prob. de rechazar
el lote

c) Ahora cambiamos el pto. de vista un poco, ampliamos

$$n = 200$$

$$p = 0.99$$

$$q = 0.01$$

ma la muestra a 200

$Y =$ "nº arandelas sin defectos en el lote de 200" $\in B_i(200, 0.99)$

(Ahora el éxito es "sin defectos")

Esperanza, valor esperado, media $= \mu = np = 200 \cdot 0.99$

$$= \boxed{198}$$

En un lote de 200 esperamos que 198 no sean defectuosas