

1 Un vector  $\overrightarrow{AB}$  tiene componentes  $(5, -2)$ . Hallar las coordenadas de  $A$  si se conoce el extremo  $B=(12, -3)$ .

### Solución



Un vector  $\overrightarrow{AB}$  tiene componentes  $(5, -2)$ . Hallar las coordenadas de  $A$  si se conoce el extremo  $B=(12, -3)$ .

1 Como no conocemos las coordenadas de  $A$ , las denotamos mediante

$$A=(x_A, y_A).$$

2 Sabemos que las coordenadas de un vector se obtienen a partir de restarle el punto inicial al punto final

$$B - A = \overrightarrow{AB}$$

$$(12 - x_A, -3 - y_A) = (5, -2)$$

3 Obtenemos dos ecuaciones

$$12 - x_A = 5, \quad -3 - y_A = -2$$

4 Resolvemos las dos ecuaciones y obtenemos que las coordenadas de  $A$  son

$$A = (7, -1)$$

2 Dado el vector  $\vec{u} = (2, -1)$  y dos vectores equipolentes a  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ , determinar  $B$  y  $C$  sabiendo que  $A = (1, -3)$  y  $D = (2, 0)$ .

### Solución



Dado el vector  $\vec{u} = (2, -1)$  y dos vectores equipolentes a  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ , determinar  $B$  y  $C$  sabiendo que  $A = (1, -3)$  y  $D = (2, 0)$ .

1 Como  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  son equipolentes, entonces  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

2 Como no conocemos las coordenadas de  $B$ , las denotamos mediante

$$B = (x_B, y_B).$$

3 Sabemos que las coordenadas de un vector se obtienen a partir de restarle el punto inicial al punto final

$$B - A = \overrightarrow{AB}$$

$$B - A = \vec{u}$$

$$(x_B - 1, y_B + 3) = (2, -1)$$

4 Obtenemos dos ecuaciones

$$x_B - 1 = 2, \quad y_B + 3 = -1$$

5 Resolvemos las dos ecuaciones y obtenemos que las coordenadas de **B** son

$$B = (3, -4)$$

6 Resolviendo de la misma forma que para **B**, tenemos que **C** = (0, 1).

3 Calcular la distancia entre los puntos **A** = (2, 1) y **B** = (-3, 2).

**Solución**



Calcular la distancia entre los puntos  $A=(2,1)$  y  $B=(-3,2)$ .

1 La fórmula para la distancia entre dos puntos es

$$d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2 Sustituimos los valores de  $A$  y  $B$  fórmula de distancia entre dos puntos y obtenemos

$$d(AB) = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$$

4 Si  $\vec{v}$  es un vector de componentes  $(3,4)$ , hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

**Solución**



Si  $\vec{v}$  es un vector de componentes  $(3,4)$ , hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

1 La fórmula para que un vector sea unitario es

$$= \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

2 Calculamos la magnitud de  $\vec{v}$

$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

3 Sustituimos en la fórmula para obtener un vector unitario

$$= \frac{1}{5}(3, 4) = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

5 Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector  $= (8, -6)$ .

### Solución



Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector  $= (8, -6)$ .

1 La fórmula para que un vector sea unitario es

$$= \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

2 Calculamos la magnitud de  $\vec{v}$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

3 Sustituimos en la fórmula para obtener un vector unitario

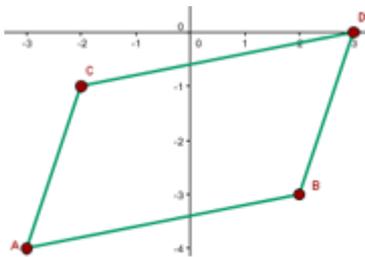
$$= \frac{1}{10}(8, -6) = \left(\frac{10}{8}, \frac{-6}{10}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

**6** Calcula las coordenadas de **D** para que el cuadrilátero de vértices  $A=(-1,-2)$ ,  $B=(4,-1)$ ,  $C=(5,2)$  y **D** sea un paralelogramo.

**Solución**



Calcula las coordenadas de **D** para que el cuadrilátero de vértices  $A=(-1,-2)$ ,  $B=(4,-1)$ ,  $C=(5,2)$  y **D** sea un paralelogramo.



1 Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales en magnitud y dirección, entonces tenemos

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

- 2 Como no conocemos las coordenadas de  $D$ , las denotamos mediante

$$D=(x_D, y_D).$$

- 3 Sustituimos los valores de los vértices del paralelogramo en la igualdad de vectores

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$(4 + 1, -1 + 2) = (5 - x_D, 2 - y_D)$$

- 4 Obtenemos dos ecuaciones

$$5=5-x_D, \quad 1 = 2 - y_D$$

- 5 Resolviendo las ecuaciones obtenemos las coordenadas buscadas

$$D=(0,1)$$

- 7 Hallar las coordenadas del punto medio del segmento  $AB$ , de extremos  $A=(3,9)$  y  $B=(-1,5)$ .



Hallar las coordenadas del punto medio del segmento  $AB$ , de extremos  $A=(3,9)$  y  $B=(-1,5)$ .

- 1 Las fórmulas para las coordenadas del punto medio son

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- 2 Sustituimos los valores de  $A$  y  $B$  en las dos fórmulas anteriores

$$x_m = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$y_m = \frac{9 + 5}{2} = 7$$

- 3 El punto medio es  $P_m = (1, 7)$ .

8 Hallar las coordenadas del punto  $C$ , sabiendo que  $B=(2,-2)$  es el punto medio de  $AC$ , donde  $A=(-3,1)$ .



Hallar las coordenadas del punto  $C$ , sabiendo que  $B=(2,-2)$  es el punto medio de  $AC$ , donde  $A=(-3,1)$ .

- 1 Las fórmulas para las coordenadas del punto medio son

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- 2 Sustituimos los valores de  $A$  y  $B$  en las dos fórmulas anteriores y calculamos la primera coordenada de  $C$

$$2 = \frac{-3 + x_C}{2}$$

$$4 = -3 + x_C$$

$$7 = x_C$$

- 3 La segunda coordenada de  $C$  es

$$-2 = \frac{1 + y_C}{2}$$

$$-4 = 1 + y_C$$

$$-5 = y_C$$

- 4 Finalmente  $C=(7,-5)$  es

- 9 Averiguar si están alineados los puntos  $A=(-2,-3)$ ,  $B=(1,0)$  y  $C=(6,5)$ .

**Solución**



Averiguar si están alineados los puntos  $A=(-2,-3)$ ,  $B=(1,0)$  y  $C=(6,5)$ .

- 1 Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son colineales si las pendientes de los segmentos  $AB$  y  $BC$  son iguales.

$$m_{AB} = \frac{0 - (-3)}{1 - (-2)} = 1, \quad m_{BC} = \frac{5 - 0}{6 - 1} = 1$$

- 2 Como ambas pendientes son iguales, entonces los tres puntos si están alineados.

- 10 Calcular el valor de  $a$  para que los puntos  $A=(2,1)$ ,  $B=(4,2)$ ,  $C=(6,a)$  estén alineados.

**Solución**



Calcular el valor de  $a$  para que los puntos  $A=(2,1)$ ,  $B=(4,2)$ ,  $C=(6,a)$  estén alineados.

1 Los puntos  $A, B, C$  son colineales si las pendientes de los segmentos  $AB$  y  $BC$  son iguales.

$$m_{AB} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}, \quad m_{BC} = \frac{a-2}{6-4} = \frac{a-2}{2}$$

2 Como ambas pendientes son iguales, igualamos ambas expresiones y despejamos  $a$

$$\frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a-2 = 1$$

$$a = 3$$

11 Dados los puntos  $A=(3,2)$  y  $B=(5,4)$ , hallar un punto  $C$  alineado con  $A$  y  $B$ , de manera que se obtenga  $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$ .

**Solución**



Dados los puntos  $A=(3,2)$  y  $B=(5,4)$ , hallar un punto  $C=(x,y)$  alineado con

$A$  y  $B$ , de manera que se obtenga  $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2}$ .

1 Partimos de la condición dada y obtenemos una igualdad

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$(3 - x, 2 - y) = \frac{3}{2}(5 - x, 4 - y)$$

2 Igualamos ambas expresiones coordenada a coordenada y obtenemos

$$3 - x = \frac{3}{2}(5 - x) \quad 2 - y = \frac{3}{2}(4 - y)$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones para obtener las coordenadas de C

$$3 - x = \frac{3}{2}(5 - x)$$

$$2(3 - x) = 3(5 - x)$$

$$6 - 2x = 15 - 3x$$

$$3x - 2x = 15 - 6$$

$$x = 9$$

$$2 - y = \frac{3}{2}(4 - y)$$

$$2(2 - y) = 3(4 - y)$$

$$4 - 2y = 12 - 3y$$

$$3y - 2y = 12 - 4$$

$$y = 8$$

**12** Dado un triángulo con vértices  $A=(1,2)$ ,  $B=(-3,4)$  y  $C=(-1,6)$ , hallar las coordenadas del baricentro.

### Solución



Dado un triángulo con vértices  $A=(1,2)$ ,  $B=(-3,4)$  y  $C=(-1,6)$ , hallar las coordenadas del baricentro.

1 La fórmula para encontrar el baricentro es

$$G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

2 Sustituyendo los valores de los vértices del triángulo obtenemos

$$G = \left( \frac{1 - 3 - 1}{3}, \frac{2 + 4 + 6}{3} \right) = (-1, 4)$$

**13** Dado un triángulo con dos de sus vértices  $A=(2,1)$ ,  $B=(1,0)$  y el baricentro  $G=(2/3,0)$ , calcular el tercer vértice.

### Solución



Dado un triángulo con dos de sus vértices  $A=(2,1)$ ,  $B=(1,0)$  y el baricentro  $G=(2/3,0)$ , calcular el tercer vértice.

1 La fórmula para encontrar el baricentro es

$$G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

2 Sustituyendo los valores del baricentro y los vértices del triángulo obtenemos dos ecuaciones

$$\frac{2}{3} = \frac{2 + 1 + x}{3}, \quad 0 = \frac{1 + 0 + y}{3}$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos el tercer vértice  $(-1,-1)$ .

**14** Hallar el simétrico del punto  $A=(4,-2)$  respecto de  $M=(2,6)$ .

## Solución



Hallar el simétrico del punto  $A=(4,-2)$  respecto de  $M=(2,6)$ .

1 Denotamos por  $B=(x,y)$  al simétrico de  $A$ , luego se cumple que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$-2=x-2, \quad 8=y-6$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos  $B=(0,14)$ .

15 Hallar el simétrico del punto  $A=(3,-2)$  respecto de  $M=(-2,5)$ .

## Solución



Hallar el simétrico del punto  $A=(3,-2)$  respecto de  $M=(-2,5)$ .

1 Denotamos por  $B=(x,y)$  al simétrico de  $A$ , luego se cumple que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$-5=x+2, \quad 7=y-5$$

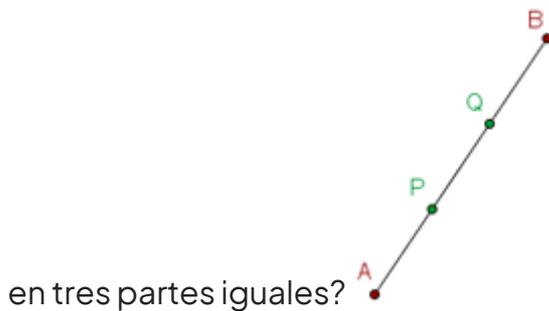
3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos  $B=(-7,12)$ .

16 ¿Qué puntos  $P$  y  $Q$  dividen al segmento de extremos  $A=(-1,-3)$  y  $B=(5,6)$  en tres partes iguales?

**Solución**



¿Qué puntos  $P$  y  $Q$  dividen al segmento de extremos  $A=(-1,-3)$  y  $B=(5,6)$



1 En notación vectorial tenemos

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$x_P + 1 = 2, \quad y_P + 3 = 3$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos  $P=(1,0)$ .

4 Para encontrar las coordenadas de  $Q$  utilizamos la condición

$$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$$

5 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$x_P + 1 = 4, \quad y_P + 3 = 6$$

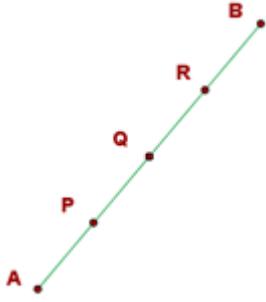
6 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos  $P=(3,3)$ .

17 Si el segmento  $AB$  de extremos  $A=(1,3)$ ,  $B=(7,5)$  se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

**Solución**



Si el segmento  $AB$  de extremos  $A=(1,3)$ ,  $B=(7,5)$  se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?



1 Notamos que  $Q$  es el punto medio del segmento  $AB$

$$Q = \left( \frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (4, 4)$$

2  $P$  es el punto medio del segmento  $AQ$

$$P = \left( \frac{1+4}{2}, \frac{3+4}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

3  $R$  es el punto medio del segmento  $QB$

$$R = \left( \frac{4+7}{2}, \frac{4+5}{2} \right) = \left( \frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right)$$