

ANÁLISIS DE FUNCIONES

Solucionario

1. Determina los **extremos relativos**, **crecimiento**, **curvatura** y puntos de **inflexión** de las siguientes funciones (estudia la **continuidad** y **asíntotas** de los ejercicios con el **asterisco ***):

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

f) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

g)* $f(x) = \frac{1}{x-2}$

h)* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

i)* $f(x) = e^{-x^2}$

j) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

k) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{Ln} x}$

l)* $f(x) = x \cdot \operatorname{Ln} x$

2. Obtén la ecuación de la **recta tangente** $f(x) = x^2 + 5x - 2$ en el punto $x = -2$.

3. Calcula los **extremos absolutos** de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

DERIVABILIDAD DE FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS O EN INTERVALOS

4. Estudia si es posible encontrar valores para a , b y c para que función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ ax^2-c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. Averigua el valor que debe tener k para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x - 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 3x - 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6. Averigua el valor de m y n para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} m \cdot x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ n \cdot x^2 + x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

7. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable.

ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES

8. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{a}x^3 - ax^2 + 5x + 10$, $a \neq 0$.

- a) Obtener los valores de a para los que la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.
- b) Suponiendo que $a = 3$, estudia los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

9. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo relativo en $(1,-1)$.

- a) Calcula los coeficientes a , b y c .
- b) ¿Qué tipo de extremo es, máximo o mínimo?

10. La ganancia producida por una máquina que duró 6 años se estima por la función:

$f(x) = ax^3 + bx^2$, $0 \leq x \leq 6$ donde $f(x)$ representa la ganancia (en miles de euros) a los x años de funcionamiento; a y b son constantes.

- a) Determine los valores de a y b si se sabe que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(2,32)$.
- b) Si $a = 2$ y $b = 12$, calcula el año en el que la máquina produjo una mayor ganancia. ¿Cuál fue el valor de dicha ganancia? Para estos valores, representa la gráfica de la función $f(x)$ en $[0,6]$.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.
12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.
13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde $s(t)$ se expresa en centímetros y t en segundos.
- Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
 - ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
 - ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
 - ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
 - ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
 - ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes $t = 3$ s y $t = 7$ s ? ¿Por qué son de distinto signo?
14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico** , cuál es el **alcance** y la **altura máxima** . ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo** ?
15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?
16. Halla los valores de las constantes **a** , **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1, 20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3, 12)$.
17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo** .
18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?
19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3 , determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima** .
20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3 . La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible** .
21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0, 2)$?

1a

$$f(x) = -2x^2 + 8x, \text{ Puntos de corte: } x=0 \Rightarrow y=0, y=0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 8x = 0 \\ 2x(4-x) \end{cases} \begin{matrix} < 0 & (0,0) \\ & 4 & (4,0) \end{matrix}$$

$$f'(x) = -4x + 8; \text{ Extremos } f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, f(2) = 8$$

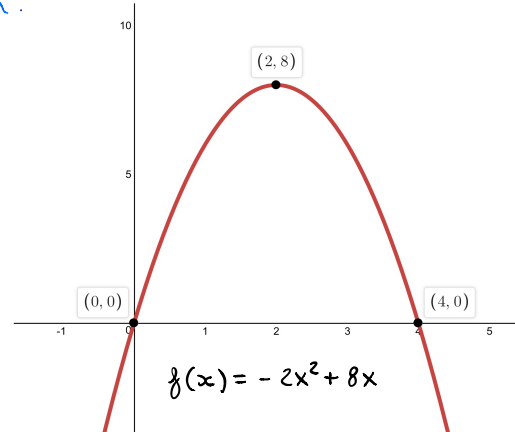
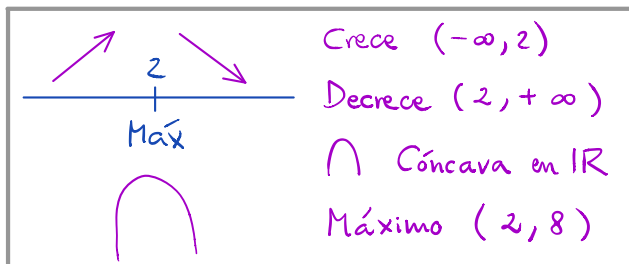
$$f''(x) = -4; f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{En } x=2 \text{ hay un máximo.}$$

$$f'''(x) = 0; f'''(x) \neq 0 \text{ luego no hay puntos de inflexión.}$$

$$f'(2) = 0; \text{ Extremo}$$

$$f''(2) = -4 < 0, \text{ luego la curvatura es siempre cóncava.}$$

$-\infty$		2		$+\infty$
f' :	+	0	-	
f :	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	
f'' :	-	-	-	
f :	$\cap$	$\cap$	$\cap$	



1b

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, f''(x) = 6x - 12, f''' = 6 \neq 0$$

$$\text{Extremos: } f'(x) = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6} < 3$$

$$f'(1) = 0, f''(1) = -6 < 0 \text{ Máximo, } f(1) = 2 \text{ (1, 2)}$$

$$f'(3) = 0, f''(3) = 6 > 0 \text{ Mínimo, } f(3) = -2 \text{ (3, -2)}$$

$$\text{Puntos de inflexión: } f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0, x = 2 \Rightarrow f''(2) = 0$$

$$\text{como } f'''(2) = 6 \neq 0$$

Punto de inflexión

$$f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 18 - 2 = 0 \text{ P.I. (2, 0)}$$

Puntos de corte:

$$\text{Si } x=0, y=-2, (0, -2)$$

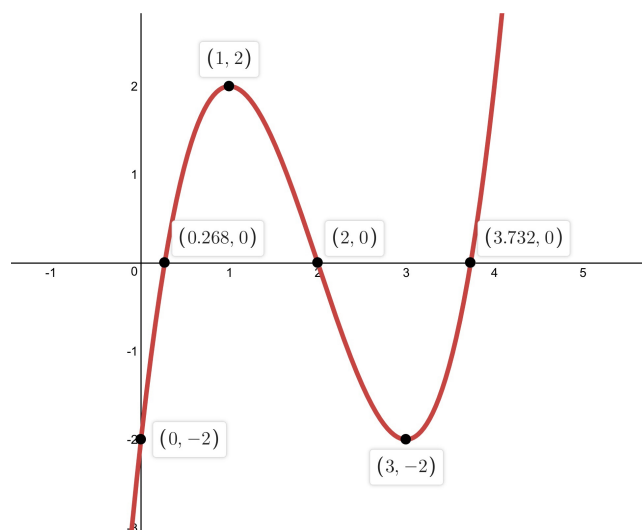
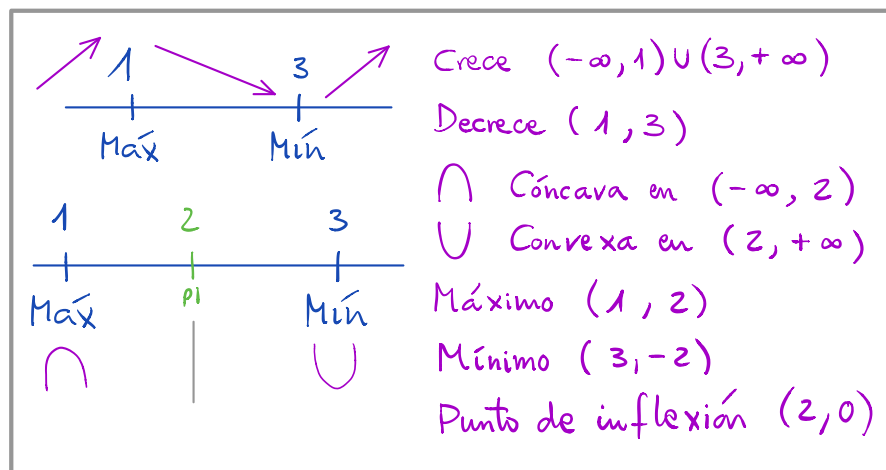
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 9 & -2 \\ & & 2 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

$-\infty$		1	2	3		$+\infty$
f' :	+	0	-	0	+	
f :	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$	
f'' :	-	-	0	+	+	
f :	$\cap$	$\cap$	P.I.	$\cup$	$\cup$	

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} < \begin{matrix} 0,268 & (0,268, 0) \\ 3,732 & (3,732, 0) \end{matrix}$$



1c $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$y' = 15x^4 - 15x^2$;

Si $f'(x) = 0$, hay extremos relativos, $15x^2(x^2 - 1) = 0$
(máximos o mínimos)

Soluciones: $x = 0$, $y(0) = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $y(1) = -2$, $y(-1) = 2$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(15x^4 - 15x^2)$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y''(-1) = -60 + 30 < 0$

Es un máximo local y la curva es cóncava.

$y''(+1) = +60 - 30 > 0$

Es un mínimo local y la curva es convexa.

$y''(0) = 0$. Podría ser un punto de inflexión.

$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}(60x^3 - 30x) = 180x^2 - 30$

$y'''(0) = -30 \neq 0$ luego

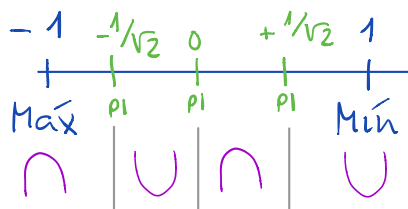
en $x=0$ hay un punto de inflexión.

Más puntos de inflexión:

$y'' = 60x^3 - 30x = 0 \Rightarrow x(60x^2 - 30) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'''(\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0$, $y'''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0 \Rightarrow$

En $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay puntos de inflexión.



		-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	
y'	>0	0	<0	0	<0	0	>0
y	$\nearrow$	Máx	P.I.		P.I.	Mín	$\nearrow$
y''	<0	<0	0	>0	0	<0	>0
y		$\cap$	$\cup$		$\cap$	$\cup$	

Puntos de corte:

$y = 3x^5 - 5x^3$
 $x=0, y=0$.

Si $y=0$,
 $3x^5 - 5x^3 = 0 \Rightarrow$
 $x=0, 3x^2 - 5 = 0$
 $\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$
 $x \approx \pm 1,291$

Crece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrece $(-1, 1)$

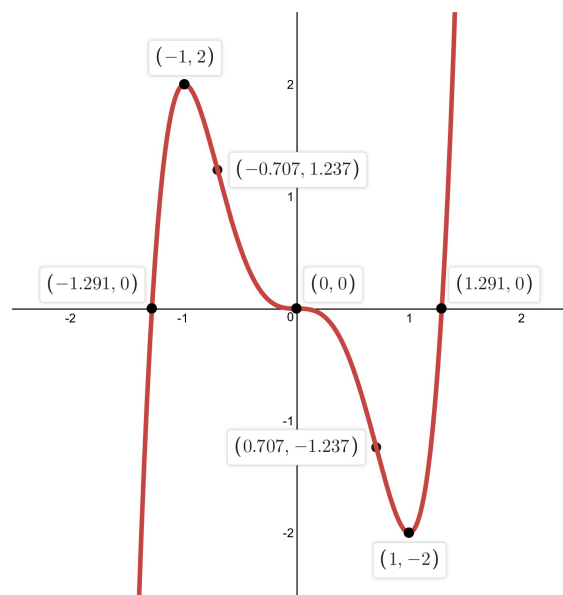
Cóncava $\cap (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Convexa $\cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

Máximo $(-1, 2)$

Mínimo $(1, -2)$

Puntos de inflexión $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1,24)$
 $(0, 0)$
 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1,24)$



1d $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 24x$$

Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$$4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \text{Los extremos son } x = 0, 1, -1$$

$$f''(0) < 0 ; \text{ en } x = 0 \text{ hay un máximo. } f(0) = -3 ; \text{ Máx}(0, -3)$$

$$f''(1) > 0 ; \text{ en } x = 1 \text{ hay un mínimo. } f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 ; \text{ Mín}(1, -4)$$

$$f''(-1) > 0 ; \text{ en } x = -1 \text{ hay un mínimo. } f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4 ; \text{ Mín}(-1, -4)$$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comprobamos si son puntos de inflexión a través de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 24x \neq 0 \text{ en ambos casos. } f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{32}{9} = -3,56$$

$$\text{Los puntos de inflexión son: } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$$

Crece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Cóncava $\cap \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Convexa $\cup \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Máximo $(0, -3)$

Mínimo $(1, -4), (-1, -4)$

Puntos de inflexión $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right),$
 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$

Simetría: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$
 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ \text{Simetría par} \end{array} \right.$

Puntos de corte: Si $x=0, y=-3 \Rightarrow (0, -3)$

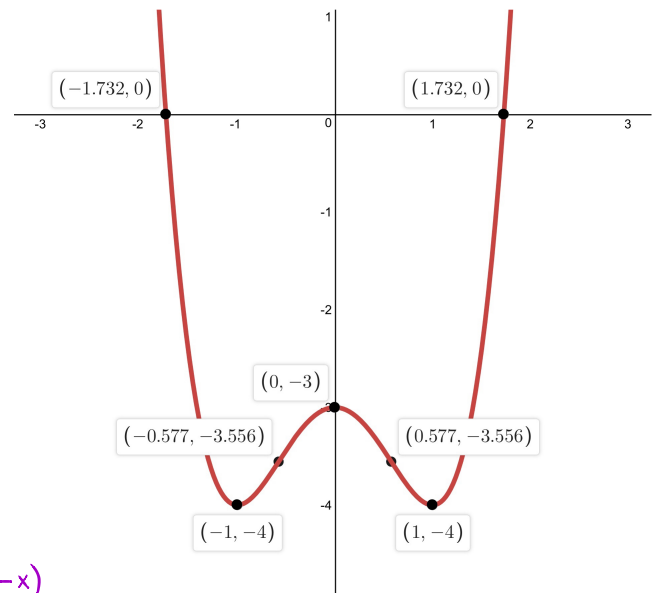
Si $y=0 \Rightarrow x$

$$y = x^4 - 2x^2 - 3 = 0, \text{ Cambio } t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} < \begin{cases} 3 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3} \\ -1 = x^2 \quad \# \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt{3} \quad (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$



1e Estudia el dominio, monotonía y curvatura de $y = \sin x$

Esta función trigonométrica no tiene puntos críticos. $Df(x) = \mathbb{R}$

Monotonía $y' = 0$ Condición de extremo. $y' = \cos x = 0$

Tenemos 2 soluciones: $\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$ Posibles extremos

Vamos a utilizar la 2ª derivada para caracterizar los extremos. $y'' = -\sin x$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 < 0 \Rightarrow$$

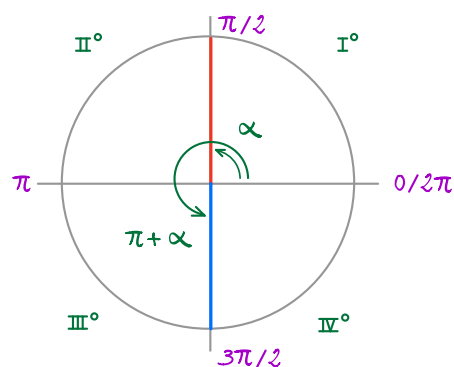
$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ son máximos locales

Coordenada $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

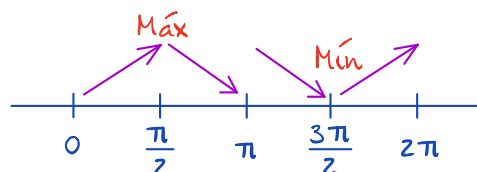
$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} = +1 > 0 \Rightarrow$$

$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ son mínimos locales

Coordenada $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$



Como la función $y = \sin x$ es periódica de período 2π vamos a analizar el intervalo $[0, 2\pi]$.



Monotonía en $[0, 2\pi]$

Crece $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Decrece $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Máximos $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$

Mínimos $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$

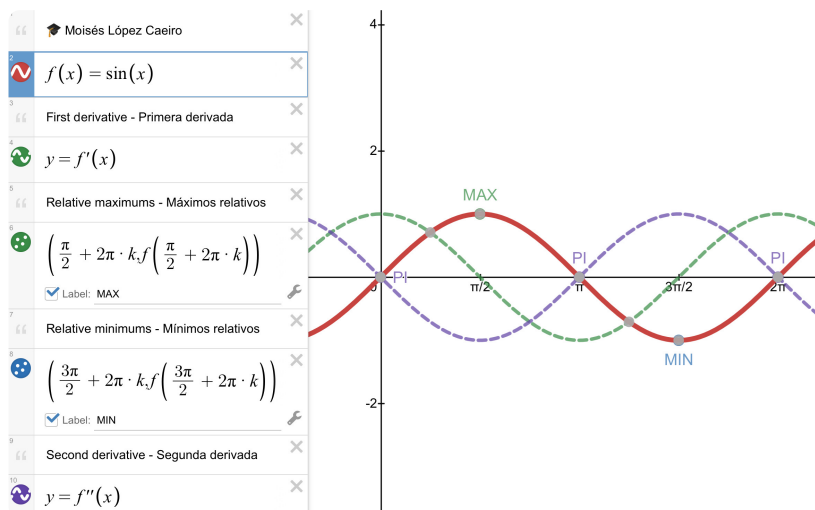
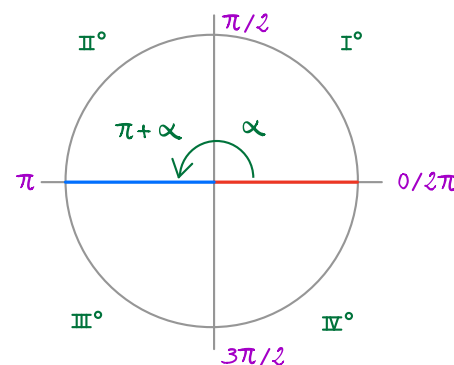
, $k \in \mathbb{Z}$

Curvatura $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y'' = -\sin x = 0$

Se puede expresar en una solución $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ Posibles P.I.

La 3ª derivada $y''' = -\cos x$, siendo $y'''(\pi k) = \pm 1 \neq 0$ luego son P.I.

Coordenada $y(\pi k) = \sin(\pi k) = 0 \Rightarrow (\pi k, 0)$ P.I., $k \in \mathbb{Z}$



Si $x \in (0, \pi)$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 < 0$

$\Rightarrow$ Cóncava en $(0, \pi)$

Si $x \in (\pi, 2\pi)$, $y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} = +1 > 0$

$\Rightarrow$ Convexa en $(\pi, 2\pi)$

1f) Estudia el dominio, monotonía y curvatura de $y = \sin x + \cos x$

Esta función trigonométrica no tiene puntos críticos. El dominio $D_f(x) = \mathbb{R}$

Monotonía $y' = 0$ Condición de extremo.

$$y' = \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1$$

$$x = \arctan 1 \Rightarrow \text{Tenemos 2 soluciones (1er y 3er cuadrante)} \quad \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{\pi}{4} + \pi$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \text{ Posibles extremos}$$

Los extremos relativos tienen la forma general:

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vamos a utilizar la 2ª derivada para caracterizar los extremos. $y'' = -\sin x - \cos x$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow$$

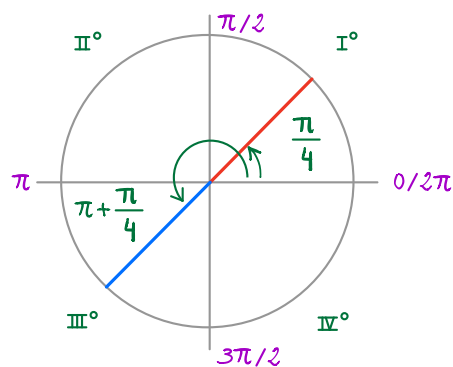
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ son máximos locales}$$

$$\text{Coordenada } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \simeq 1,414$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} > 0 \Rightarrow$$

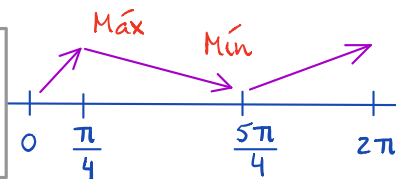
$$x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \text{ son mínimos locales}$$

$$\text{Coordenada } y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} \simeq -1,414$$



Como la función $y = \sin x + \cos x$ es periódica de período 2π vamos a analizar el intervalo $[0, 2\pi]$.

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos



Monotonía en $[0, 2\pi]$

Crece $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

Decrece $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Máximos $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, 1,414\right)$

Mínimos $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, -1,414\right)$

, $k \in \mathbb{Z}$

Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

$$y'' = -\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow -\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = -1$$

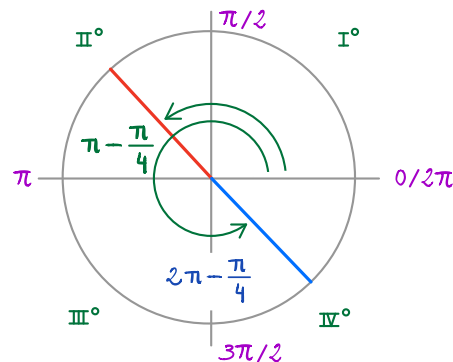
$$x = \arctan(-1). \text{ Tenemos 2 soluciones (2º y 4º cuadrante)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \in \text{I}^\circ$$

$$\text{2º cuadrante: } \boxed{\alpha, \pi - \alpha} \text{ obtenemos el ángulo restando } \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{4º cuadrante: } \boxed{\alpha, 2\pi - \alpha} \text{ obtenemos el ángulo restando } 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Se puede expresar en una solución $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ Posibles Puntos de inflexión P.I.

Entre 0 y 2π tenemos 2 posibles puntos de inflexión $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$



$$y'' = -\sin x - \cos x$$

La 3ª derivada $y''' = -\cos x + \sin x$

Evaluamos los posibles Puntos de inflexión P.I. $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

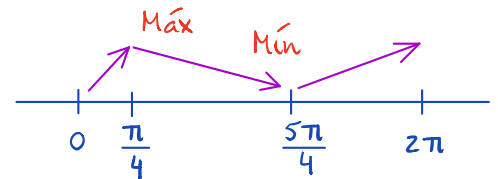
$$y''' \left(\frac{3\pi}{4} \right) = -\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \simeq 1,414 \neq 0 \text{ luego son Puntos de inflexión P.I. confirmados.}$$

Coordenada: siendo $y = \sin x + \cos x \Rightarrow y \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$

$\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, 0 \right)$ P.I., $k \in \mathbb{Z}$; Podemos deducir los intervalos de curvatura porque ya sabemos dónde están los máximos y los mínimos, pero podemos también probarlo con la 2ª derivada.

Si $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4} \right)$, $y'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = -1 < 0$

$\Rightarrow$ Cóncava  en $\left(0, \frac{3\pi}{4} \right)$ Coincide, como es lógico con la zona del máximo.



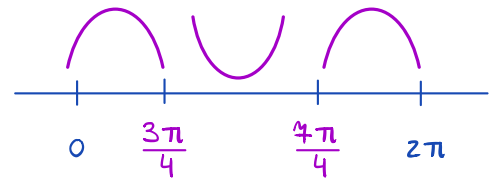
Si $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{4} \right)$, $y''(\pi) = -\sin \pi - \cos \pi = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Convexa  en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4} \right)$ Coincide, como es lógico con la zona del mínimo.

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos

Si $x \in \left(\frac{4\pi}{4}, 2\pi \right)$, $y'' \left(\frac{9\pi}{5} \right) = -\sin \frac{9\pi}{5} - \cos \frac{9\pi}{5} = 1 < 0$

$\Rightarrow$ Cóncava  en $\left(\frac{4\pi}{4}, 2\pi \right)$



Para la representación gráfica sólo necesitaremos a mayores los puntos de corte (no hay asíntotas).

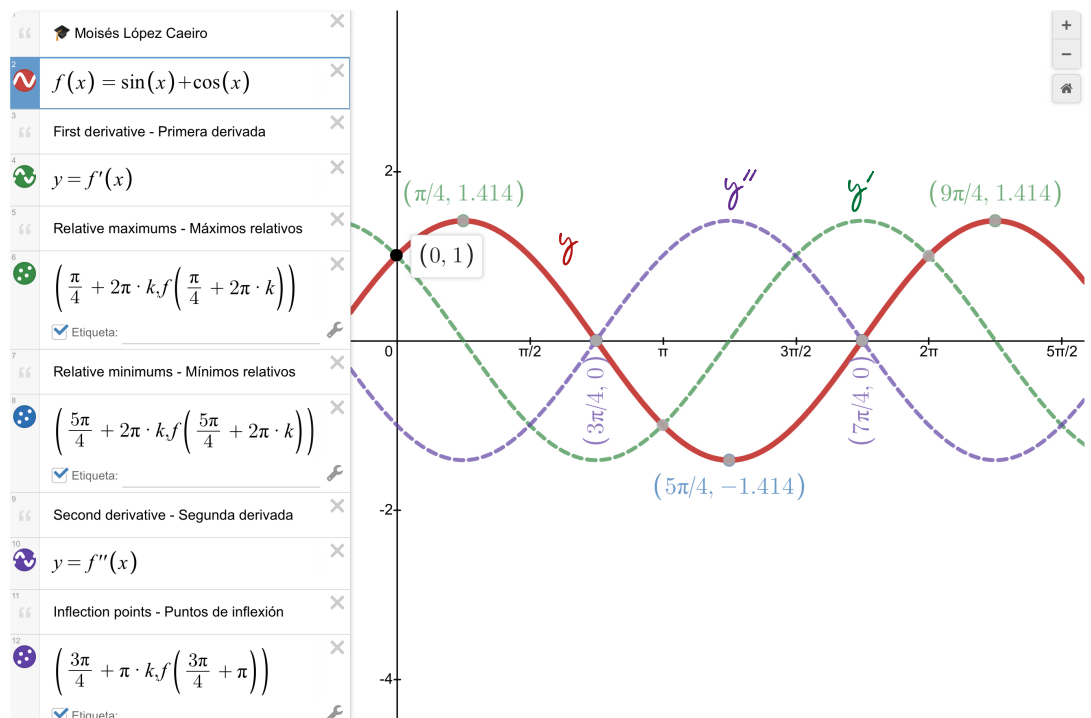
Los puntos de corte con el eje x ya los tenemos.

Son los puntos de inflexión.

Con el eje y , si $x=0 \Rightarrow$

$$y = \sin x + \cos x = \sin 0 + \cos 0 = 1$$

$$\Rightarrow (0, 1)$$



$$18) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Estudiamos el dominio y la continuidad.

$x=2$ es un punto crítico.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty ; x=2 \text{ (asíntota vertical)}$$

El dominio $D = \mathbb{R} - \{2\}$. Es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0 ; y=0 \text{ (asíntota horizontal)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} = (x-2)^{-1}$$

$$f'(x) = -(x-2)^{-1-1} = -\frac{1}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-2}$$

$$f''(x) = +2(x-2)^{-2-1} = \frac{2}{(x-2)^3} = 2 \cdot (x-2)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(x-2)^{-3-1} = -\frac{6}{(x-2)^4} = -6(x-2)^{-4}$$

Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x-2)^2} = 0$ $\nexists$ solución,

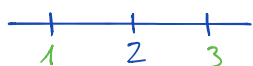
luego no hay extremos relativos.

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-2)^3} = 0 \nexists \text{ solución, luego no hay puntos de inflexión.}$$

Estudiamos el crecimiento y la curvatura a la izquierda y a la derecha del punto crítico.

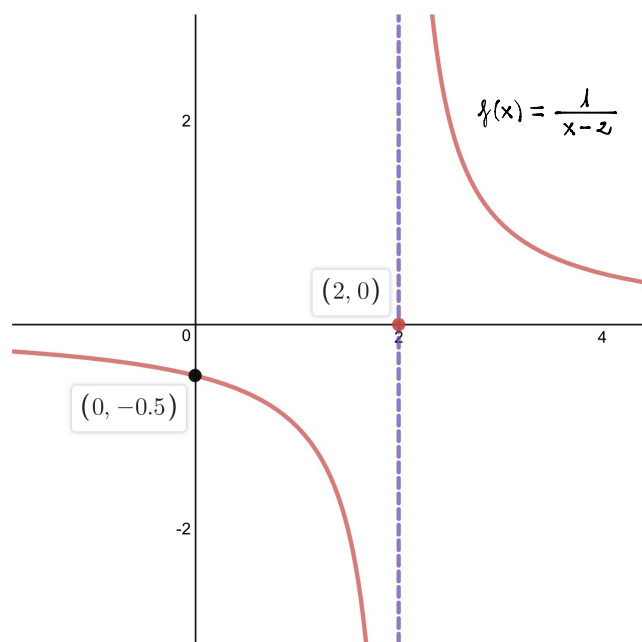


$$f'(1) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1 < 0 \quad \searrow$$

$$f''(1) = \frac{2}{(1-2)^3} = -2 < 0 \quad \cap$$

$$f'(3) = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1 < 0 \quad \searrow$$

$$f''(3) = \frac{2}{(3-2)^3} = +2 > 0 \quad \cup$$



Decrece en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$\cap$ Cóncavo $(-\infty, 2)$

$\cup$ Convexo $(2, +\infty)$

No hay extremos ni puntos de inflexión

1h $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ [Análisis completo: problema modelo]

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, por tanto, el dominio es $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \infty$; $f(x)$ presenta discontinuidades de salto infinito en estos puntos.

El entorno de continuidad es $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntotas.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ las rectas $x=1$ y $x=-1$ son asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal.

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

La recta $y = mx + n$, es decir, $y = x$ es asíntota oblicua.

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} ; f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ y $x = \pm \sqrt{3}$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \right] = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - (x^4 - 3x^2)4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

$f''(0) = 0$. Este punto $x=0$ es dudoso. Podría ser un punto de inflexión.

$f''(\sqrt{3}) > 0$, luego en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo. $f(\sqrt{3}) = 2,6$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$, luego en $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo. $f(-\sqrt{3}) = -2,6$

Mínimo $(\sqrt{3}, 2,6)$

Máximo $(-\sqrt{3}, -2,6)$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada:

Hay dos extremos locales en $x = -\sqrt{3}$ (máximo) y $x = \sqrt{3}$ (mínimo).

Hay dos discontinuidades en $x = -1$ y $x = 1$.

Debemos estudiar los intervalos: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$

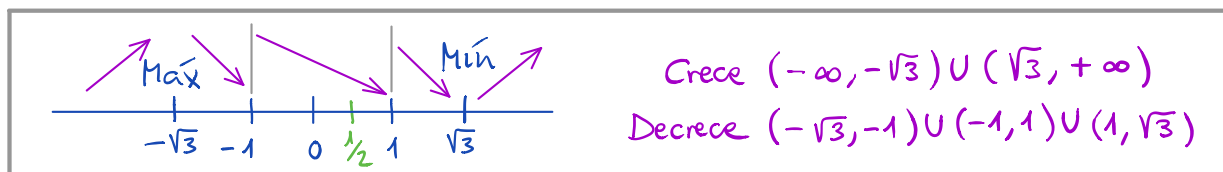
Como $x = -\sqrt{3}$ es un máximo $\begin{cases} \text{En } (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ es creciente} \nearrow \\ \text{En } (-\sqrt{3}, -1) \text{ es decreciente} \searrow \end{cases}$

Como $x = \sqrt{3}$ es un mínimo $\begin{cases} \text{En } (1, \sqrt{3}) \text{ es decreciente} \searrow \\ \text{En } (\sqrt{3}, +\infty) \text{ es creciente} \nearrow \end{cases}$

Aún no sabemos qué ocurre en $(-1, 1)$ porque $x=0$ es dudoso. Para averiguarlo, observamos el signo de la primera derivada en cualquier punto del intervalo, por ejemplo $x = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \text{Si } f'(x) > 0, f \text{ es creciente en } x \\ \text{Si } f'(x) < 0, f \text{ es decreciente en } x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/16 - 3/4}{9/16} < 0 \Rightarrow \text{En } (-1, 1) \text{ es decreciente} \searrow$$



Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x^2 + 3 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

$x = 0$ es un posible punto de inflexión.

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} \right] = \frac{(6x^2 + 6) \cdot (x^2 - 1)^3 - (2x^3 + 6x) \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{(6x^2 + 6)(x^2 - 1) - (2x^3 + 6x) \cdot 6x}{(x^2 - 1)^4} \Rightarrow f'''(0) = -6 \neq 0, \text{ luego } x = 0 \text{ es un punto de inflexión}$$

La imagen $f(0) = 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión $(0, 0)$

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Tenemos un punto de inflexión en $x=0$ y dos discontinuidades en $x=-1$ y $x=1$. Debemos considerar los intervalos:
 $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$

{ Como hay un máximo en $x = -\sqrt{3} \in (-\infty, -1)$, en este intervalo la función es: 
Como hay un mínimo en $x = \sqrt{3} \in (1, +\infty)$, en este intervalo la función es: 

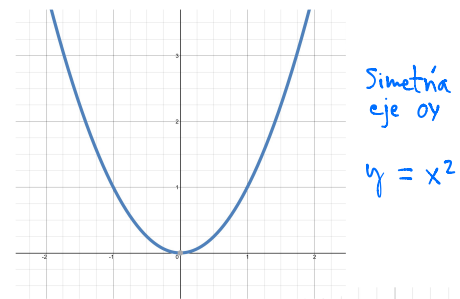
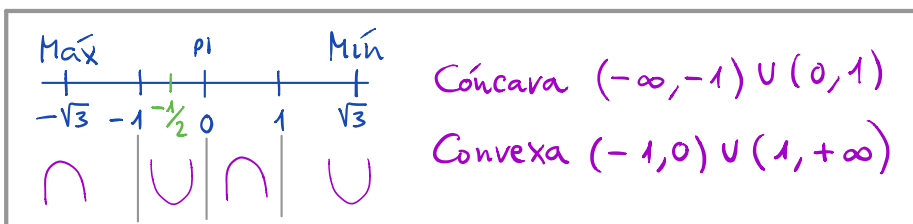
Para averiguar cómo es la función en $(-1, 0)$ observamos el signo de la segunda derivada:

{ Si $f''(x) > 0$, entonces $f(x)$ es convexa  (curvatura positiva)
Si $f''(x) < 0$, entonces $f(x)$ es cóncava  (curvatura negativa)

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} \quad ; \text{ probamos con } x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{4} - 3}{-27/4^3} > 0, \text{ luego en } x \in (-1, 0), f(x) \text{ es } \text{concave up}$$

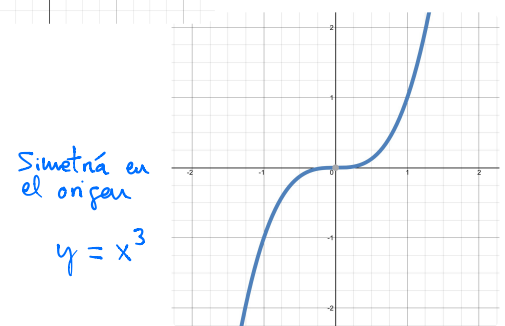
Como en $x=0$ hay un punto de inflexión, en $x \in (0, 1)$, $f(x)$ es 



Simetría

Si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas.

Si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

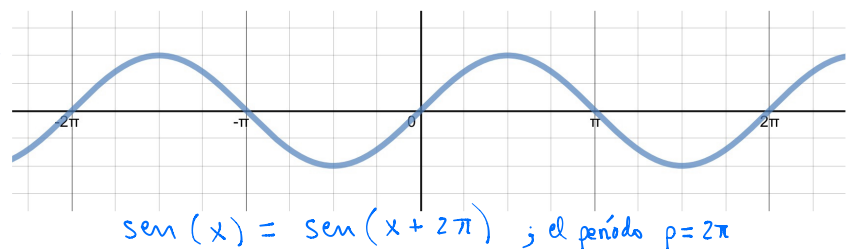


Periodicidad

Una función f es periódica cuando existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in D$.

La función se repite de p en p .

El número p se llama período.



Representación gráfica

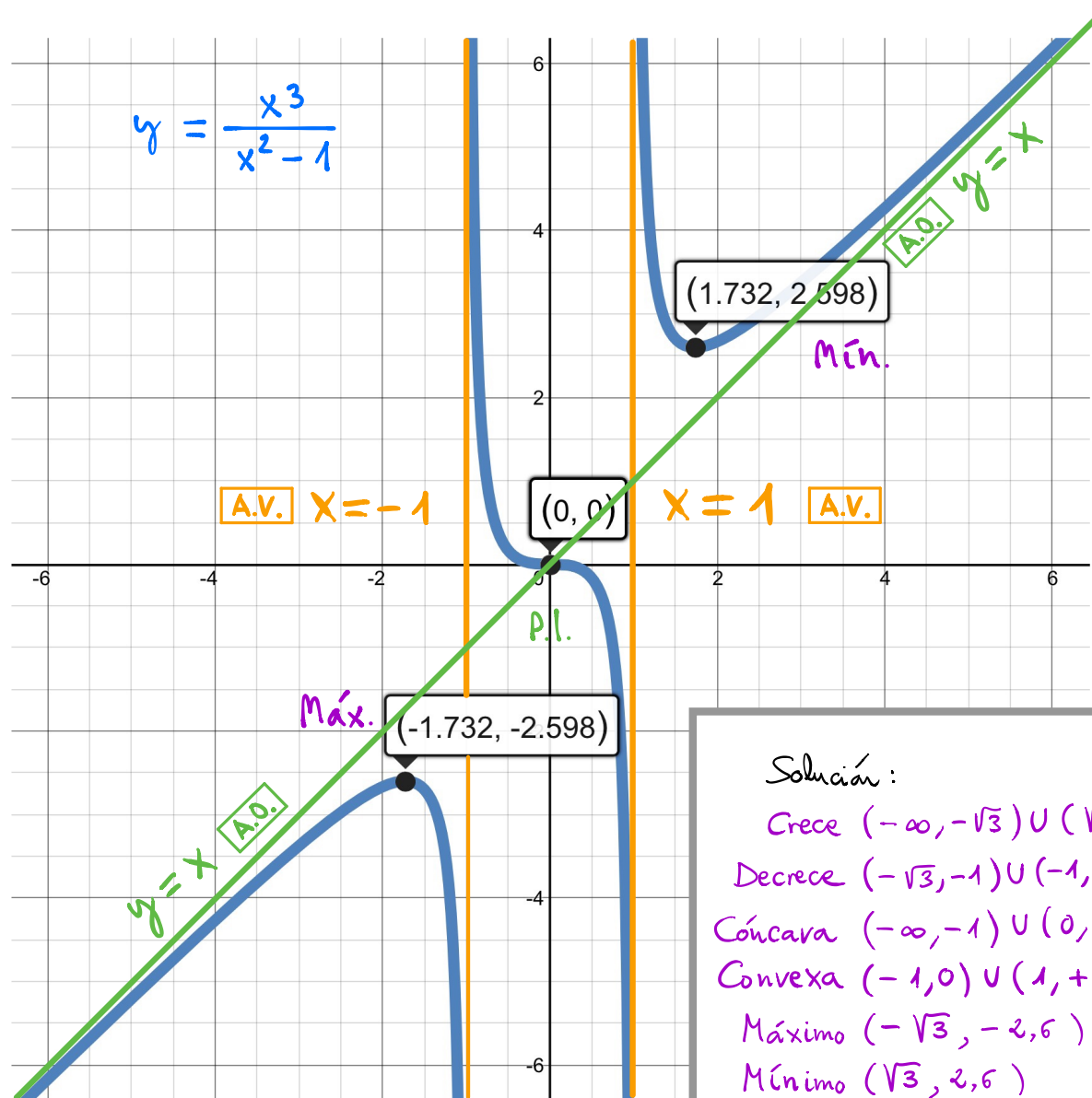
$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ no es periódica como una función trigonométrica.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x) \text{ es impar.}$$

$f(x)$ simétrica respecto del origen de coordenadas

Puntos de corte con los ejes

$x=0 \Rightarrow y=0$
 $y=0 \Rightarrow x=0$ } $f(x)$ corta a los ejes en el punto $(0,0)$.



Solución:

Crece $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Decrece $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Cóncava $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Convexa $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Máximo $(-\sqrt{3}, -2,6)$

Mínimo $(\sqrt{3}, 2,6)$

Punto de inflexión $(0,0)$

1i $f(x) = e^{-x^2}$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

e^{-x^2} existe para todo x (positivo o negativo) $\exists \forall x \Rightarrow D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$

Asíntotas.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow$ no hay asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \Rightarrow$ No hay asíntota oblicua.

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

$f''(0) < 0$, luego en $x = 0$ hay un máximo.

$f(0) = e^{-0} = 1$ luego el máximo está en el punto $(0, 1)$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$. Vemos que: $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} > 0$ (sea $x > 0$ o $x < 0$);

Si $x < 0$ $f'(x) > 0$, f es creciente en $x \in (-\infty, 0) \nearrow$

Si $x > 0$ $f'(x) < 0$, f es decreciente en $x \in (0, +\infty) \searrow$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ son posibles puntos de inflexión.

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) \Rightarrow f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx} e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

$$f'''(x) = -2x e^{-x^2}(4x^2 - 2) + 8x e^{-x^2} = e^{-x^2}(-8x^3 + 4x + 8x) = e^{-x^2}(12x - 8x^3)$$

$f'''(\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0$ y $f'''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0$, luego $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ son puntos de inflexión.

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = e^{-x^2}$. Tenemos puntos de inflexión en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Debemos considerar los intervalos: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

Como hay un máximo en $x = 0 \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, en este intervalo la función es: 

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la izquierda y a la derecha hay puntos de inflexión.

Como en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un punto de inflexión, en $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f(x)$ es 

Como en $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un punto de inflexión, en $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, $f(x)$ es 

Representación gráfica

$f(x) = e^{-x^2}$ no es periódica como una función trigonométrica.

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} \Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ es par.

$f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas.

Puntos de corte con los ejes

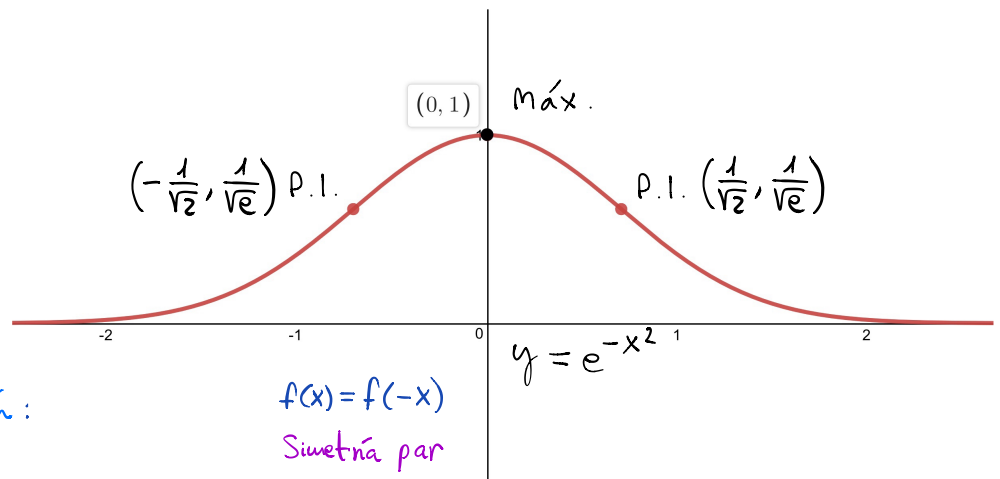
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = e^{-0} = 1 \\ y = 0 \Rightarrow \nexists x \end{array} \right\}$$

$f(x)$ corta el eje oy
en el punto $(0, 1)$.

Ordenadas de los puntos de inflexión:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$



1j $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

e^x existe para todo x (positivo o negativo), luego no hay puntos críticos que anulen el denominador: $f(x) \exists \forall x \Rightarrow D = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}$

Asíntotas. En esta función, el cálculo de límites requiere de la regla de L'Hôpital que estudiaremos el próximo curso. Demostraremos en otra ocasión que tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} = -\frac{x-1}{e^x}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$.

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{e^x} \right) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

$f''(1) < 0$, luego en $x=1$ hay un máximo.

$f(1) = \frac{1}{e} \simeq 0,368$ luego el máximo está en el punto $(1, \frac{1}{e}) = (1, 0,368)$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada:

Hay un extremo local en $x=1$ (máximo).

No hay discontinuidades.

Debemos estudiar los intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$

Como $x=1$ es un máximo $\begin{cases} \text{En } (-\infty, 1) \text{ es creciente } \nearrow \\ \text{En } (1, +\infty) \text{ es decreciente } \searrow \end{cases}$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x)=0$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ es un posible punto de inflexión.}$$

$f''(x)=0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} \Rightarrow f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-2}{e^x} \right)$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}$$

$$f'''(2) = \frac{3-2}{e^2} \neq 0, \text{ luego } x=2 \text{ es un punto de inflexión.}$$

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$$f(x) = \frac{x}{e^x}. \text{ Tenemos un punto de inflexión en } x=2.$$

Debemos considerar los intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$

Como hay un máximo en $x=1 \in (-\infty, 2)$, en este intervalo la función es: 

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la izquierda y a la derecha hay puntos de inflexión.

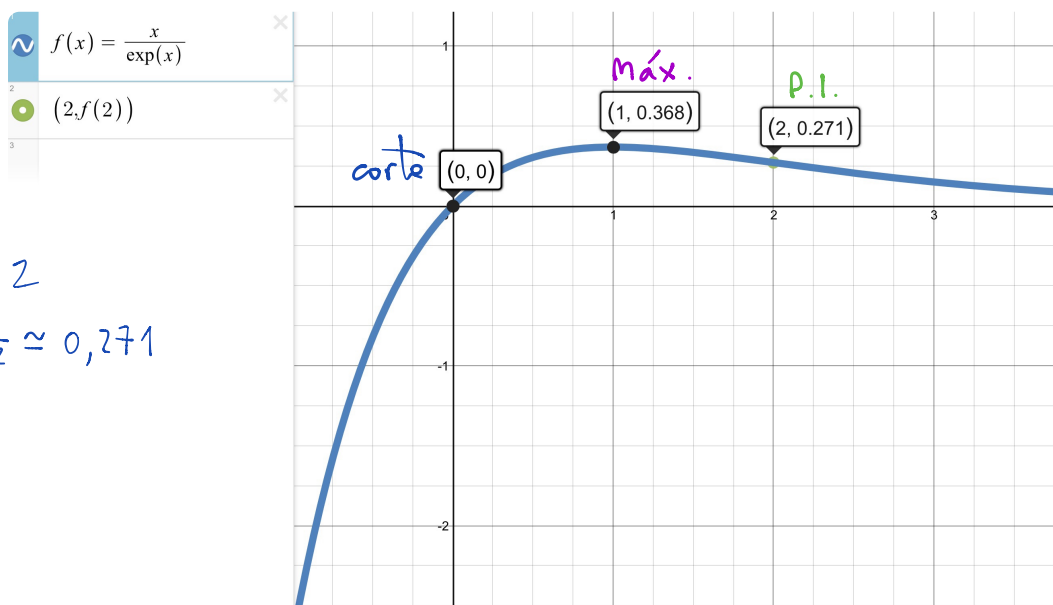
Como en $x=2$ hay un punto de inflexión, en $x \in (2, +\infty)$, $f(x)$ es 

Representación gráfica

$f(x) = \frac{x}{e^x}$ no es periódica como una función trigonométrica.

$$f(-x) = -\frac{x}{e^{-x}} = -xe^x, f(x) \neq f(-x) \neq -f(-x), \text{ No es simétrica.}$$

Puntos de corte con los ejes $x=0 \Rightarrow y = \frac{x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$, corte en $(0,0)$



$$P.I. \quad x=2$$

$$f(2) = \frac{2}{e^2} \approx 0,271$$

$$\boxed{1K} \quad f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} \ln x \neq \text{ para valores negativos de } x. \\ f(x) \neq \text{ si } \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right\} D = (0, 1) \cup (1, +\infty) = (0, +\infty) - \{1\}$$

No está definida para $x=0$. $C = D$.

Asíntotas.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \Rightarrow \text{la recta } x=1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

En esta función, el cálculo de límites requiere de la regla de L'Hôpital que estudiaremos el próximo curso.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \infty \Rightarrow \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{no hay asíntota oblicua.} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \frac{1 \cdot \ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\text{Debe cumplirse la condición } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e.$$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \cdot \frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

$$f''(e) = \frac{2 - 1}{e \cdot 1^3} = \frac{1}{e} > 0, \text{ luego en } x = e \text{ hay un mínimo.}$$

$$f(e) = \frac{e}{1} = e, \text{ luego el mínimo está en el punto } (e, e)$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada

Hay un extremo local en $x=e$ (mínimo). Hay una discontinuidad en $x=1$.

Debemos estudiar los intervalos: $(0,1)$, $(1,e)$, $(e,+\infty)$

Como $x=e$ es un mínimo $\begin{cases} \text{En } (1,e) \text{ es decreciente } \searrow \\ \text{En } (e,+\infty) \text{ es creciente } \nearrow \end{cases}$

Aún no sabemos qué ocurre en $(0,1)$. Para averiguarlo, observamos el signo de la primera derivada en cualquier punto del intervalo, por ejemplo $x=\frac{1}{e}$.

$\begin{cases} \text{Si } f'(x) > 0, f \text{ es creciente en } x \\ \text{Si } f'(x) < 0, f \text{ es decreciente en } x \end{cases} \quad f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$f'(\frac{1}{e}) = \frac{\ln e^{-1} - 1}{(\ln e^{-1})^2} = \frac{-2}{1} < 0$, luego $f(x)$ es decreciente $\searrow$ en $(0,1)$.

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$x = e^2$ es un posible punto de inflexión.

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \right) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x(\ln x)^3 - (2 - \ln x) \cdot ((\ln x)^3 + 3x \frac{(\ln x)^2}{x})}{x^2(\ln x)^6} = \\ &= \frac{-\ln x - 2\ln x + (\ln x)^2 - 6 + 3\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)^2 - 6}{x^2(\ln x)^4} ; \end{aligned}$$

$f'''(e^2) = \frac{2^2 - 6}{e^4 \cdot 2^4} \neq 0$, luego $x = e^2$ es un punto de inflexión.

$f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2}$; el punto de inflexión está en $(e^2, \frac{e^2}{2})$.

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Tenemos un punto de inflexión en $x = e^2$ y discontinuidad en $x = 1$.

Debemos considerar los intervalos: $(0, 1)$, $(1, e^2)$, $(e^2, +\infty)$

Como hay un mínimo en $x = e \in (1, e^2)$, en este intervalo la función es: $\cup$

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la derecha hay un punto de inflexión.

Como en $x = e^2$ hay un punto de inflexión, en $x \in (e^2, +\infty)$, $f(x)$ es $\cap$

Para averiguar cómo es la función en $(0, 1)$ observamos el signo de la segunda derivada:

$\begin{cases} \text{Si } f''(x) > 0, \text{ entonces } f(x) \text{ es convexa } \cup \text{ (curvatura positiva)} \\ \text{Si } f''(x) < 0, \text{ entonces } f(x) \text{ es cóncava } \cap \text{ (curvatura negativa)} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \quad ; \text{ probamos con } x = \frac{1}{e} \in (0, 1)$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2 - (-1)}{\frac{1}{e}(-1)^3} = \frac{3}{-\frac{1}{e}} < 0, \text{ luego } f(x) \text{ es } \cap \text{ en } (0, 1)$$

Representación gráfica

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$ no es periódica.

$$f(-x) = \frac{-x}{\ln(-x)} \neq,$$

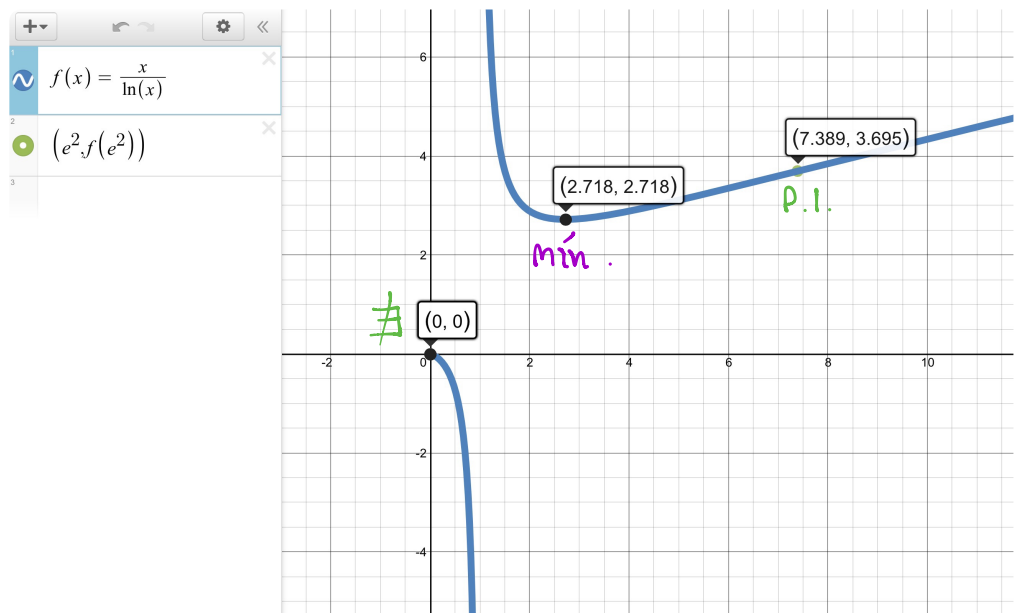
No es simétrica.

Puntos de corte con los ejes

$x = 0 \Rightarrow$ La función no está definida

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \neq$$

No hay puntos de corte con los ejes.



2. Obtén la ecuación de la **recta tangente** $f(x) = x^2 + 5x - 2$ en el punto $x = -2$.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$

$$f(x) = x^2 + 5x - 2$$

$$a = -2 \quad f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) - 2 = 4 - 10 - 2 = -8$$

$$f'(x) = 2x + 5 ; \quad f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$$y + 8 = 1 \cdot (x + 2) = x + 2 \quad \text{ec. punto-pendiente}$$

3. Calcula los **extremos absolutos** de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

En este problema la ligadura es $0 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 ; \quad f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \notin [0, 2] \\ 1 \in [0, 2] \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \text{ Mayor}$$

$$f(0) = 1 \text{ Menor}$$

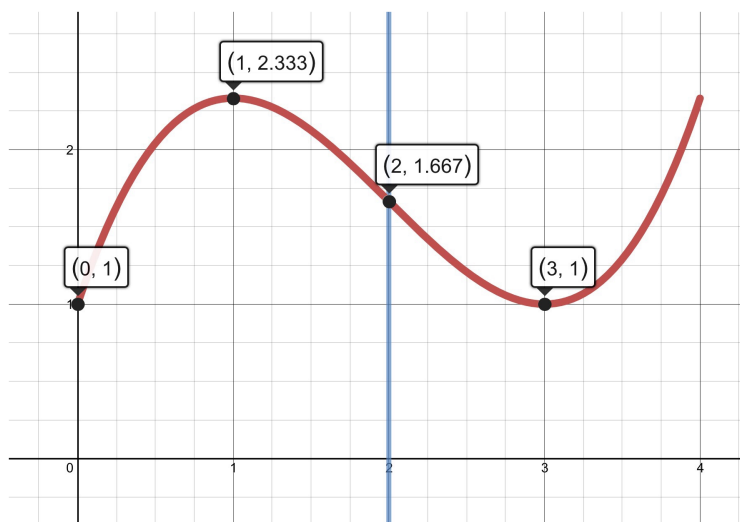
$$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

Mínimo $(0, 1)$

Máximo $(1, \frac{7}{3})$

$$\text{Compruebo } f''(x) = 2x - 4$$

$$f''(1) = -2 < 0 \text{ Es máximo}$$



Actividades de derivabilidad de funciones a trozos

4. Estudia si es posible encontrar valores para a , b y c para que función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ ax^2 - c & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \mathcal{D} f(x) = \mathbb{R}$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ a & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hay que comprobar

Sólo queda estudiar qué ocurre en los puntos críticos y de frontera, siendo en este caso $x=1$ y $x=2$. En el resto del dominio es derivable. Una condición necesaria (no suficiente) es que f sea continua en esos puntos, luego deben coincidir los límites laterales. La segunda condición que debe cumplir es que coincidan las derivadas por la izquierda y por la derecha: $f'(x^-) = f'(x^+)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 5 = a + b, \quad f(1) = 5$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2a + b = 4a - c, \quad f(2) = 2a + b$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow a = 4a$$

$$a = 1 \Rightarrow b = 5 - a = 4$$

$$a = 4a \Rightarrow a = 0 \text{ (en contradicción)}$$

El sistema no tiene solución. $\nexists a, b, c$ para que f sea derivable en 1 y 2.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{1, 2\} \text{ (derivabilidad)}$$

5. Averigua el valor que debe tener k para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x - 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 3x - 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (kx - 5) &= -5 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 3x - 5 &= -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

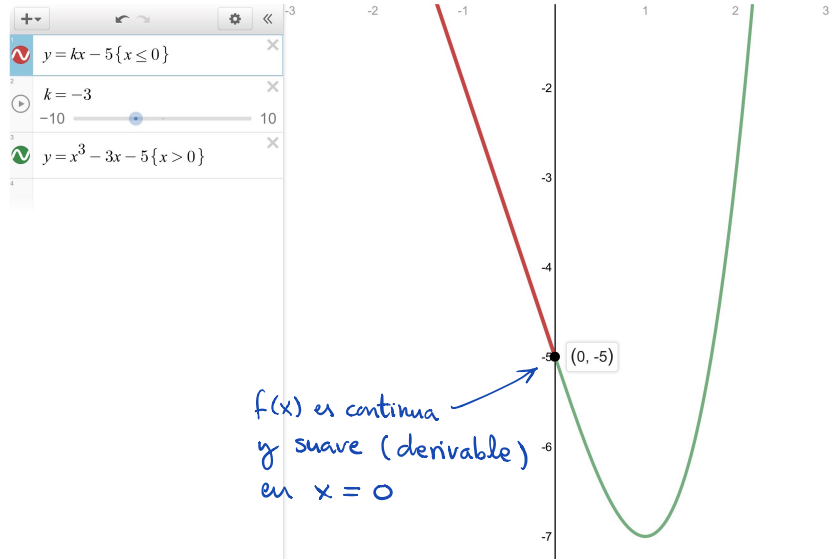
$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2 - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= f'(0^+) \\ f'(x^-) &= k \\ f'(x^+) &= 3x^2 - 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 \\ k &= -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$



6. Averigua el valor de m y n para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=2$:

$$f(x) = \begin{cases} m \cdot x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ n \cdot x^2 + x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (mx + 5) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (nx^2 + x - 1)$$

$$2m + 5 = 4n + 2 - 1$$

$$2m + 4 = 4n \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \leq 2 \\ 2nx + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x^-) = f'(x^+) \Rightarrow m = 2nx + 1$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow m = 4n + 1 \quad (2)$$

Resuelvo el sistema (1) y (2)

$$\left. \begin{aligned} 2m + 4 &= 4n \\ m &= 4n + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2(4n + 1) + 4 &= 4n \\ 8n + 2 + 4 &= 4n \\ 4n &= -6 \\ n &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 4n + 1 = 4\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \\ m &= -6 + 1 = -5 \end{aligned}$$

7. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \quad (-\infty, 0] \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \quad (0, 2] \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \quad (2, \infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ f'(a^-) = f'(a^+)$$

Estudia para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad Vamos a estudiar los puntos críticos frontera, $x=0$ y $x=2$.

$$\boxed{x=0} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2 &= 2 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax+b} &= \sqrt{b} \end{aligned} \right\} \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\boxed{x=2} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{ax+b} &= \sqrt{2a+b} = \sqrt{2a+4} = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sqrt{2a+4} &= \sqrt{2} \Rightarrow 2a+4=2 \\ 2a &= -2 \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Si $b=4$ la función $f(x)$ es continua en $x=0$ y si $a=-1$ es continua en $x=2$.

Veamos si hay algún problema de dominio con $\sqrt{ax+b} = \sqrt{-x+4}$

$-x+4 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \Rightarrow x \leq 4$ y no hay problema porque el intervalo $(0, 2] \leq 4$

Derivabilidad

Vamos a calcular la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $f'(a^-) = f'(a^+)$ Derivabilidad

$$\boxed{x=0} \quad f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 2x = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \xrightarrow{x=0} 0 = \frac{a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow a = 0 \neq -1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{No coincide con} \\ \text{el resultado anterior} \\ \text{No derivable} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x=2} \quad f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{x=2, b=4} \frac{a}{\sqrt{a \cdot 2 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{ elevamos al cuadrado}$$

$$\frac{a^2}{2a+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a^2 = 2a+4 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = 0, \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} < \frac{2}{-1}$$

Si $b=4$ y si $a=-1$ $f(x)$ es continua y derivable en $x=2$.

Es continua, pero no derivable en $x=0$.

Válida

ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES

8. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{a}x^3 - ax^2 + 5x + 10$, $a \neq 0$.

- a) Obtener los valores de a para los que la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.
 b) Suponiendo que $a = 3$, estudia los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $f'(x) = \frac{1}{a} \cdot 3x^2 - 2ax + 5 = 0$ en $x = 1$ (condición de extremo).

$$\frac{1}{a} \cdot 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + 5 = 0 \Rightarrow \frac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Rightarrow 3 - 2a^2 + 5a = 0$$

$$2a^2 - 5a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Comprobación:} \\ 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \checkmark \end{array} \right.$$

Veamos si es máximo con la 2ª derivada. Tiene que verificar $f''(1) < 0 \Rightarrow$ Máximo local.

$f''(x) = \frac{1}{a} \cdot 6x - 2a$. Si $a = 3$ $f''(1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$ Máximo local $a = 3$ cumple

Si $a = -\frac{1}{2}$ $f''(1) = -6 \cdot 1 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ Máximo local $a = -\frac{1}{2}$ cumple

b) Si $a = 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 10$

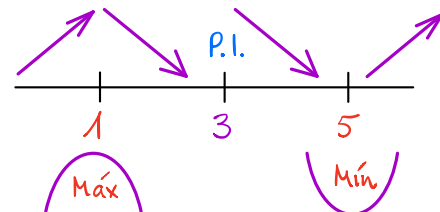
$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$f''(x) = 2x - 6$, $f''(5) = 2 \cdot 5 - 6 > 0 \Rightarrow$ Mínimo local

Condición P.I. $f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ¿P.I.?

Es un punto de inflexión porque la curvatura cambia. $x = 3$

Crece $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, Decrece $(1, 5)$



Veamos las coordenadas.

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 10 = \frac{37}{3}$$

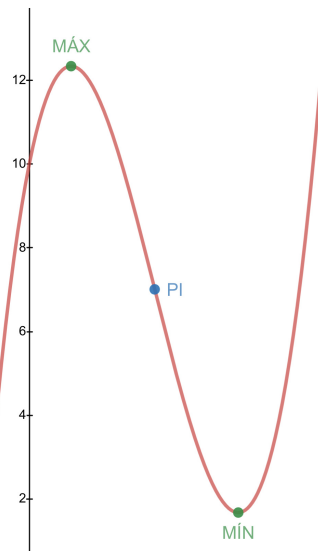
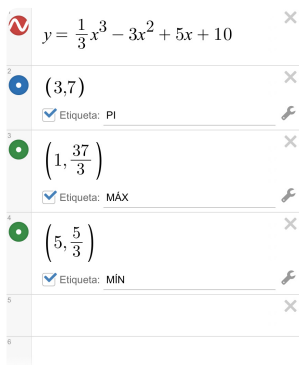
$$f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 10 = \frac{5}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 10 = 7$$

Máximo local $(1, \frac{37}{3})$

Mínimo local $(5, \frac{5}{3})$

Punto de inflexión $(3, 7)$



9. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo relativo en $(1,-1)$.

- a) Calcula los coeficientes a , b y c .
- b) ¿Qué tipo de extremo es, máximo o mínimo?

a) La función pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,-1)$ y cumple la condición de extremo $f'(1)=0$.

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

$$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c = -1 \Rightarrow a + b + \underbrace{c}_0 = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad [1]$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad [2]$$

$$\text{Resolvemos el sistema formado por [1] y [2]} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -1 - a = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{La forma final de la función es } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$b) \text{ Tipo de extremo: } f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 3x \Rightarrow f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo local en } x=1$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN *Solucionario*

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.
12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.
13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde $s(t)$ se expresa en centímetros y t en segundos.
- Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
 - ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
 - ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
 - ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
 - ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
 - ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes $t = 3$ s y $t = 7$ s ? ¿Por qué son de distinto signo?
14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico** , cuál es el **alcance** y la **altura máxima** . ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo** ?
15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?
16. Halla los valores de las constantes **a** , **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1, 20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3, 12)$.
17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo** .
18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?
19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3 , determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima** .
20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3 . La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible** .
21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0, 2)$?

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

Sean x e y los números.

$x + y = 20$ es la ligadura o restricción.

Supongamos que $0 \leq x \leq y$ (x es el menor).

Calculo dónde $x = y$; $2x = 20 \Rightarrow x = 10$ es el valor máximo de x

El valor mínimo de x es $x = 0$. Luego debo hallar los extremos absolutos en el intervalo $[0, 10]$

La función objetivo que queremos maximizar es $S = y^2 + (2x)^2 = y^2 + 4x^2$

Sustituimos la ligadura en la función:

$$y = 20 - x \Rightarrow S = (20 - x)^2 + 4x^2 = 400 - 40x + x^2 + 4x^2$$

$$S = 5x^2 - 40x + 400$$

Para encontrar los extremos, hallamos los ceros de la primera derivada:

$$S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = 10x - 40 \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{10} = 4$$

Comprobamos el valor de y : $y = 20 - 4 = 16$

Efectivamente: $y > x$ (y es mayor)

La suma es $S(4) = 5 \cdot 4^2 - 40 \cdot 4 + 400 = 320$

La derivada segunda me permite comprobar si es un mínimo.

$S''(x) = 10 > 0$, luego la suma es un mínimo relativo.

Tenemos que comprobar la función en los extremos: $[0, 10]$

$$S = 5x^2 - 40x + 400$$

$$S(0) = 400$$

$$S(10) = 5 \cdot 100 - 40 \cdot 10 + 400 = 500$$

$$S(4) = 320 \text{ (es el mínimo absoluto)}$$

12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.

Sean x e y los números.

$x + y = 18$ es la ligadura o restricción.

La función objetivo que queremos maximizar es $P = x \cdot y$

Sustituimos la ligadura en la función:

$$y = 18 - x$$

$$P = x \cdot (18 - x) = 18x - x^2$$

Para encontrar los extremos, hallamos los ceros de la primera derivada:

$$P'(x) = \frac{d}{dx} P(x) = 18 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{2} = 9$$
$$y = 18 - x = 18 - 9 = 9 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x = 9 \\ y = 9 \end{matrix}} \right\} P = 81$$

La derivada segunda $P''(x) = -2 < 0$, luego efectivamente es un máximo.

13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde $s(t)$ se expresa en centímetros y t en segundos.

- Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
- ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
- ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
- ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
- ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
- ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes $t = 3$ s y $t = 7$ s? ¿Por qué son de distinto signo?

a) $s(t)$ es la ecuación de la trayectoria. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = -6t^2 + 48t$

$$v_0 = 48 \text{ cm/s} \quad \frac{1}{2} a = -6 \Rightarrow a = -12 \text{ cm/s}^2$$

b) La velocidad instantánea $v = \frac{ds}{dt} = -12t + 48 \Rightarrow v(0) = 48 \text{ cm/s}$

c) Comienza a descender cuando $v = 0$

$$v(t) = -12t + 48 = 0 \Rightarrow t = \frac{48}{12} = 4 \text{ s}$$

d) $s(t) = -6t^2 + 48t$; $s(4) = -6 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 = 96 \text{ cm}$

e) Tarda lo mismo en subir que en bajar: $t = 8 \text{ s}$

$$f) v(3) = -12 \cdot 3 + 48 = 12 \text{ cm/s}$$

$$v(7) = -12 \cdot 7 + 48 = -36 \text{ cm/s}$$

$$\text{Nota: La aceleración } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (-12t + 48) = -12 \text{ cm/s}^2$$

14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico**, cuál es el **alcance** y la **altura máxima**. ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo**?

La ecuación para resolver el alcance máximo de un tiro parabólico en función del ángulo de lanzamiento α , viene de resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y &= v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\}$$

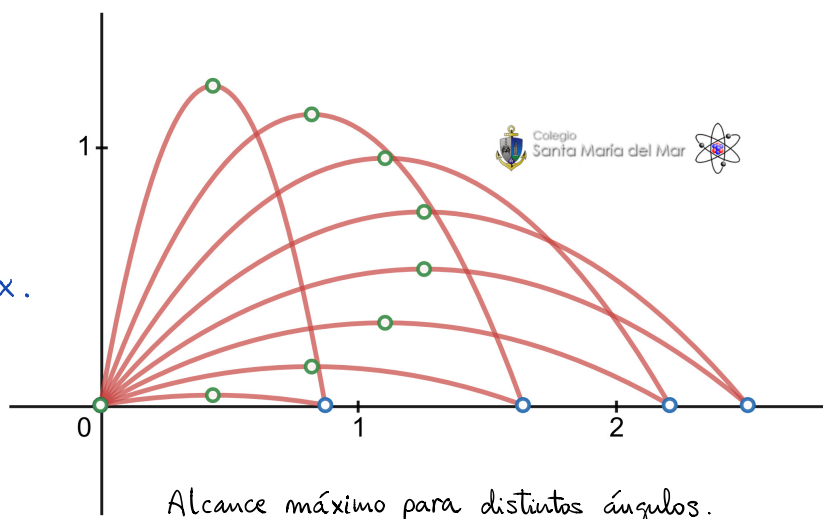
Alcance máximo

Calculo t para $y=0$ y sustituyo en x .

La solución es: **Función objetivo**

$$x_{\max}(\alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g},$$

siendo v_0 el módulo de la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad.



Alcance máximo para distintos ángulos.

Los ángulos complementarios tienen el mismo alcance.

La función $x_{\max}(\alpha)$ depende del ángulo y será máxima cuando se cumpla la condición de extremo:

$$\frac{d}{d\alpha} x_{\max}(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

Luego $2\alpha = (2 \cdot n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ El valor mínimo que cumple la condición, $n=0 \Rightarrow$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ ó 45° ; Logramos un alcance máximo y óptimo con este ángulo.

La 2ª derivada en $\alpha = \frac{\pi}{4}$ es: $\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha \right] = -\frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha$

Evalúamos la 2ª derivada en $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{4v_0^2}{g} \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow$ Es máximo. **Q.E.D.**

Altura máxima. $y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ Ecuación de la altura. **Función objetivo**

$y'(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$ (velocidad). La condición de extremo es $y'(t) = 0$

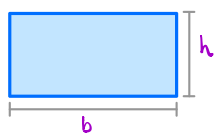
$\Rightarrow v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$; sustituimos en la ecuación de la altura.

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

Para saber si es máximo calculamos la segunda derivada.

$y''(t) = \frac{dv}{dt} = -g < 0$ (aceleración) $\Rightarrow$ Es un máximo. $y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$

15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?



El perímetro $L = 2b + 2h = 2(b+h)$ ec. ligadura

El área $A = b \cdot h$ función objetivo que debemos maximizar

Despejo una variable de la ecuación de ligadura: $b = \frac{L-2h}{2}$ y la sustituyo en la función a maximizar, es decir, el área:

$$A = b \cdot h = \frac{L-2h}{2} \cdot h = \frac{L}{2} \cdot h - h^2 ; \text{ Derivamos } A \text{ con respecto de la variable } h:$$

$$A' = \frac{dA}{dh} = \frac{L}{2} - 2h ; A' = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} - 2h = 0 \Rightarrow 2h = \frac{L}{2} \Rightarrow h = \frac{L}{4}$$

$$\text{Calculamos } b = \frac{L-2h}{2} = \frac{L-2 \cdot \frac{L}{4}}{2} = \frac{L-\frac{L}{2}}{2} = \frac{2L-L}{4} = \frac{L}{4}$$

Por tanto $h = b = \frac{L}{4}$; La solución óptima para un área máxima es un cuadrado.

Comprobamos si se trata de un máximo a través de la derivada segunda.

$$A'' = \frac{d}{dh} A' = \frac{d^2}{dh^2} A$$

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{L}{2} - 2h \right) = -2 < 0 , \text{ por tanto, el valor del área es máximo.}$$

$$\text{En nuestro caso } L = 400 \text{ m} , b = h = \frac{L}{4} = 100 \text{ m}$$

$$\text{El área máxima } A = 100 \text{ m} \cdot 100 \text{ m} = 10^4 \text{ m}^2$$

16. Halla los valores de las constantes **a**, **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1, 20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3, 12)$.

$$f(x) \text{ pasa por } P(-1, 20) \Rightarrow f(-1) = a - b + c = 20 \quad (1)$$

$$\text{Extremo en } Q(3, 12) \Rightarrow \text{En } x=3 \quad f'(x) = 0.$$

$$f(3) = 12 \Rightarrow 9a + 3b + c = 12 \quad (2)$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 ; \text{ en } x=3 \Rightarrow 6a + b = 0 \quad (3)$$

Resolvamos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} a - b + c &= 20 \\ 9a + 3b + c &= 12 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} 8a + 4b = -8 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \times 4 \end{cases}$$

$$16a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

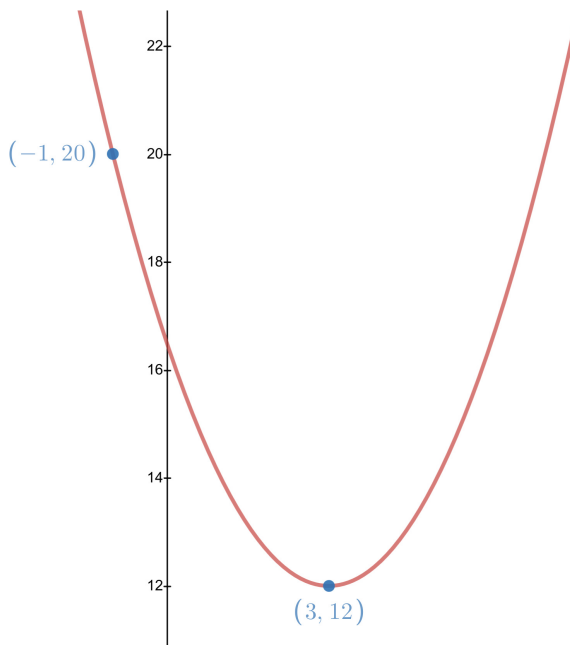
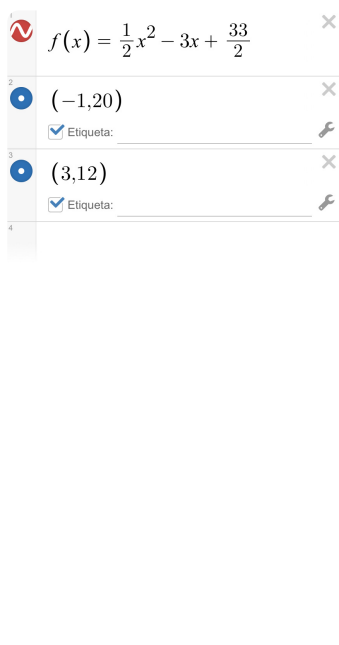
$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

$$\begin{aligned} c &= 20 - a + b = 20 - \frac{1}{2} - 3 = \\ &= \frac{40 - 1 - 6}{2} = \frac{33}{2} \end{aligned}$$

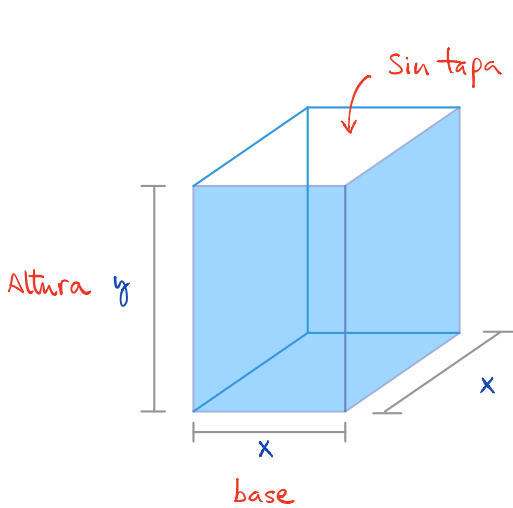
La condición de extremo es que $f'(x) = 0$ y $f''(x) \neq 0$ en $x = 3$.

$$f''(x) = 2a = 2 \cdot \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{En } x=3 \text{ hay un mínimo.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{33}{2}$$



17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo**.



Ligadura o restricción

$$A = x \cdot y \cdot 4 + x^2 = 192 \quad \text{Área limitada}$$

Función objetivo

$$V = \text{base} \cdot \text{altura} = x^2 \cdot y \quad \text{Maximizar}$$

$$x \cdot y \cdot 4 + x^2 = 192 \quad , \quad \text{en la ligadura, despejamos una variable en función de la otra.}$$

$$y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192x^2 - x^4}{4x} = \frac{192x - x^3}{4} \quad , \quad \text{Derivamos para que sea extremo.}$$

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} = \frac{1}{4} \cdot (192 - 3x^2) = 0 \quad \text{Condición de extremo}$$

$$192 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{192}{3}} = 8 \text{ cm} \Rightarrow y = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4 \text{ cm}$$

$$V''(x) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{1}{4} \cdot (-6x) = -\frac{3}{2}x \quad , \quad \text{Veamos si es máximo con la 2ª derivada.}$$

$$V''(8) = -\frac{3}{2} \cdot 8 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 8 \text{ cm hay un máximo.}$$

$$\text{El volumen máximo } V(x, y) = x^2 \cdot y = 8^2 \cdot 4 = 256 \text{ cm}^3$$

Para asegurarnos de que es un máximo absoluto, vamos a analizar los casos extremos:

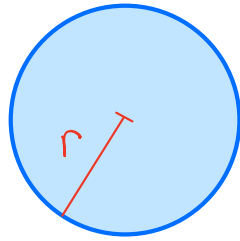
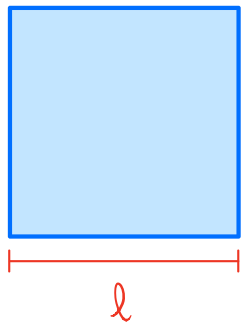
$$\text{Si } y = 0 \text{ entonces } \frac{192 - x^2}{4x} = 0 \Rightarrow 192 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{192} \simeq 13,86 \text{ como máximo}$$

$x \in [0, \sqrt{192}]$, Comprobamos los bordes del intervalo:

$$V = \frac{192x - x^3}{4} \Rightarrow V(0) = 0 \quad , \quad V(\sqrt{192}) = 0$$

luego, el máximo absoluto se alcanza en $x = 8 \text{ cm}$, $y = 4 \text{ cm}$ con un volumen $V = 256 \text{ cm}^3$.

18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?



Ligadura o restricción

$$4l + 2\pi r = 4 \text{ m}$$

Casos extremos

$$\begin{array}{l|l} 4l = 4 & 0 \leq r \leq \frac{2}{\pi} \\ 0 \leq l \leq 1 & 2\pi r = 4 \end{array}$$

Función objetivo : $A = l^2 + \pi \cdot r^2$

$$4l = 4 - 2\pi r \Rightarrow l = \frac{4 - 2\pi r}{4} = 1 - \frac{\pi r}{2}$$

$$A = l^2 + \pi \cdot r^2 = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi \cdot r^2 = 1 - \pi r + \frac{\pi^2 r^2}{4} + \pi \cdot r^2 \quad \text{Mínima.}$$

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 0 - \pi + \frac{\pi^2}{4} \cdot 2r + \pi \cdot 2r = -\pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot r + \pi \cdot 2r = r \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\right) - \pi = 0$$

$$r \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\right) = \pi \Rightarrow r \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2} = \frac{2}{\pi + 4} \simeq 0,28 \text{ m}$$

$$A''(r) = \frac{d^2A}{dr^2} = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0 \Rightarrow r = 0,28 \text{ m} \text{ hay un mínimo.}$$

$$l = 1 - \frac{\pi r}{2} = 0,56 \text{ m} \Rightarrow A = l^2 + \pi \cdot r^2 = 0,56^2 + \pi \cdot 0,28^2 = 0,56 \text{ m}^2$$

Para asegurarnos de que es un **mínimo absoluto**, vamos a analizar los casos extremos:

$$\text{Si } l = 0 \text{ entonces } 1 - \frac{\pi r}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi r}{2} = 1 \Rightarrow r = \frac{2}{\pi} \text{ como máximo}$$

$r \in [0, \frac{2}{\pi}]$, Comprobamos los bordes del intervalo:

$$A = l^2 + \pi \cdot r^2 = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi \cdot r^2 \Rightarrow A(0) = 1 \text{ m}^2, A\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0 + \pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi} \simeq 1,27 \text{ m}^2$$

luego, el **mínimo absoluto** se alcanza en $l = 0,56 \text{ m}$, $r = 0,28 \text{ m}$ con un $A = 0,56 \text{ m}^2$.

19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3 , determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima**.

El área del cilindro consiste en dos caras circulares y el lateral rectangular.

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{Función objetivo que queremos minimizar}$$

$r, h > 0$ (positivos)

Los casos extremos $r=0$ ó $h=0$ son absurdos.

El volumen $V = \pi r^2 h = 4 \text{ m}^3$ Ligadura o restricción

Despejo la altura: $h = \frac{4}{\pi r^2}$; sustituimos en la función de Área:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{4}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{8}{r}$$

Derivamos para encontrar los extremos:

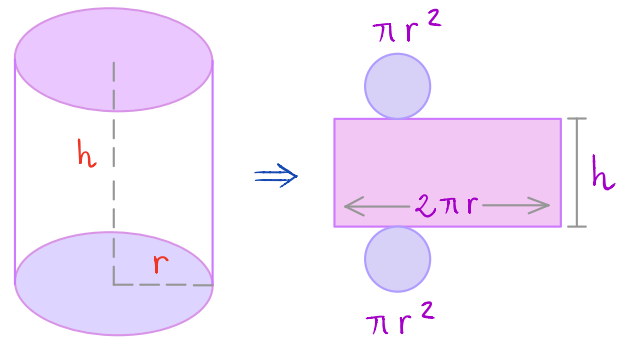
$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{8}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{8}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0,86 \text{ m}$$

Compruebo el tipo de extremo con la segunda derivada.

$$A''(r) = \frac{dA'}{dr} = 4\pi + \frac{16}{r^3} = \frac{4\pi r^3 + 16}{r^3} \Rightarrow A''(0,86) > 0, \text{ es mínimo.}$$

Sustituyendo valores $h = \frac{4}{\pi r^2} \approx 1,72 \text{ m}$ coincide con el diámetro (doble del radio)

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \times \pi \times 0,86^2 + 2 \times \pi \times 0,86 \times 1,72 \approx 13,94113 \text{ m}^2$$



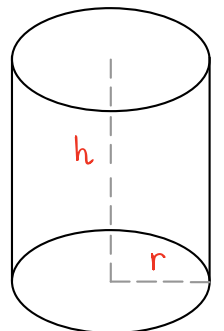
20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3 . La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible**.

Área lateral: $2\pi rh$ Área base: πr^2 Volumen: $\pi r^2 h$

Coste: $C = 2\pi rh + \underbrace{4\pi r^2}$ Función objetivo que queremos minimizar
doble coste de la suma de las 2 caras

$\pi r^2 h = 333$ Ligadura o restricción

$$h = \frac{333}{\pi r^2} \Rightarrow C = 2\cancel{\pi}r \cdot \frac{333}{\cancel{\pi}r^2} + 4\pi r^2 = \frac{666}{r} + 4\pi r^2$$

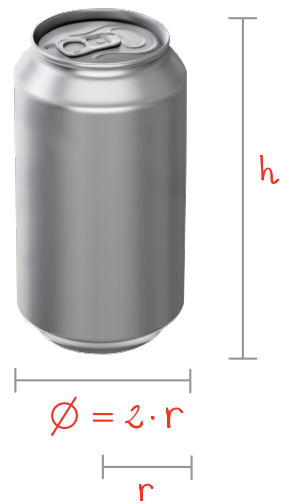


Derivamos para encontrar los extremos: $C'(r) = \frac{dC(r)}{dr} = -\frac{666}{r^2} + 8\pi r = 0$

$$\Rightarrow 8\pi r = \frac{666}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{666}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{666}{8\pi}} \approx 2,98 \text{ cm}$$

$h = \frac{333}{\pi r^2} \approx 11,94 \text{ cm}$, El coste de fabricación de la lata es el mínimo con estas proporciones.

$C''(r) = \frac{2 \cdot 666}{r^3} + 8\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$; Puede verificarse que una lata estándar lo verifica de forma aproximada (la función de coste real es parecida).



21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0,2)$?

Coordenadas de los puntos
 $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}$

En nuestro problema, vamos a calcular la función distancia entre P y cualquier punto (x, y) de la gráfica: $(x, y) - (0, 2) = (x, y - 2)$, siendo la distancia, el módulo:

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \quad \text{Función objetivo que deseamos minimizar.}$$

$y = 4 - x^2$ Ligadura o restricción; Ya tenemos despejada una variable en función de la otra.

Sustituimos y en la Función objetivo de modo que dependa de una sola variable.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0, \quad \text{Condición de extremo. } 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (4x^2 - 6) = 0$$

$$\text{Tenemos posibles extremos en } x = 0, \quad 4x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

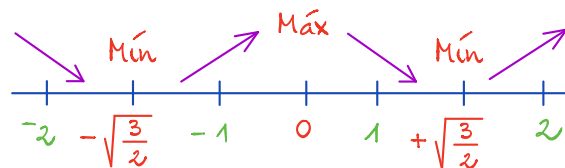
Evalúamos puntos al azar en cada intervalo y estudiamos la monotonía con el signo de la 1ª derivada.

$$d'(-2) < 0 \Rightarrow \searrow$$

$$d'(-1) > 0 \Rightarrow \nearrow$$

$$d'(1) < 0 \Rightarrow \searrow$$

$$d'(2) > 0 \Rightarrow \nearrow$$



$\Rightarrow$ Tenemos dos mínimos en $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y\left(\pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 4 - \left(\pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Los puntos más cercanos a $P(0,2)$ son:

$$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$$

