OPTIMIZACIÓN

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm. (sol:$\sqrt{50}cm$,$\sqrt{50}cm$)

2. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40. (Sol:80/3, 40/3)

3. Averigua cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m2de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima. (sol: 60m,60m)

4. Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible. (sol: 2/3x2/3x1/6)

5. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo? (sol:5x10m)

6. Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio? (sol: $\approx 28 días$)

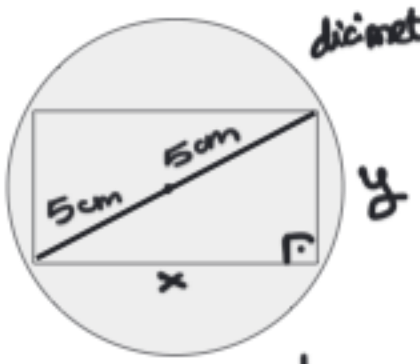
7. Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.(sol: 12´5 cént)

8. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. Determinar el coste del marco.(sol: 3m, 2m, 240€)

Boletín Optimización

diámetro = 10cm = 2 radios

1º)



Función a optimizar: $\boxed{\text{Área} = x\,y}$

Condición (la sacamos de Pitágoras)

$\boxed{x^2+y^2=10^2}$

1º) despejo y en la condición: $y=\sqrt{100-x^2}$ (No tiene sentido tomar el valor negativo de la raíz, las dimensiones y áreas son +)

2º) sustituyo en la función $\boxed{x\sqrt{100-x^2}=A(x)}$

3º) derivo función e igualo a cero

$$A'(x)=\sqrt{100-x^2}+x\,\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\sqrt{100-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=\frac{(\sqrt{100-x^2})^{\cancel{2}}-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$=\boxed{\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}}=0 \Rightarrow 100-2x^2=0 \Rightarrow 100=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{100}{2}=50$$

$\boxed{x=\sqrt{50}\text{ cm}}$

4º) segunda derivada, compruebo si es máx. o mínimo

$$A''(x)=\frac{-4x\left(\sqrt{100-x^2}\right)-(100-2x^2)\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}}{\left(\cancel{\sqrt{100-x^2}}\right)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{-4x\left(\cancel{\sqrt{100-x^2}}\right)^{\cancel{2}}+x(100-2x^2)}{\sqrt{100-x^2}}}{(100-x^2)}=\frac{-4x(100-x^2)+x(100-2x^2)}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$$

$$=\frac{2x^3-300x}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}\;;$$

$A''(\sqrt{50})<0$ es Máximo

5º) calculo y en la condición: $y=\sqrt{100-(\sqrt{50})^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$

Solución: las dimensiones del rectángulo son
$x=\sqrt{50}$, $y=\sqrt{50}$ (es un cuadrado)

Optimización 2

2º) No hay dibujo posible

x, y dos nºs cualquiera t.q. $\boxed{x^2 y \text{ Función}}$

$\boxed{\text{condición } x+y=40}$

1º) despejo y en la condición: $y=40-x$

2º) sustituyo en la función $f(x)=x^2(40-x)=40x^2-x^3$

3º) Derivo función $f'(x)=80x-3x^2$ e igualo a cero: $x(80-3x)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{80}{3} \end{cases}$

4º) Calculo segunda derivada para comprobar si max. o min.

$f''(x)=80-6x$; $f''(0)=80>0$ mínimo

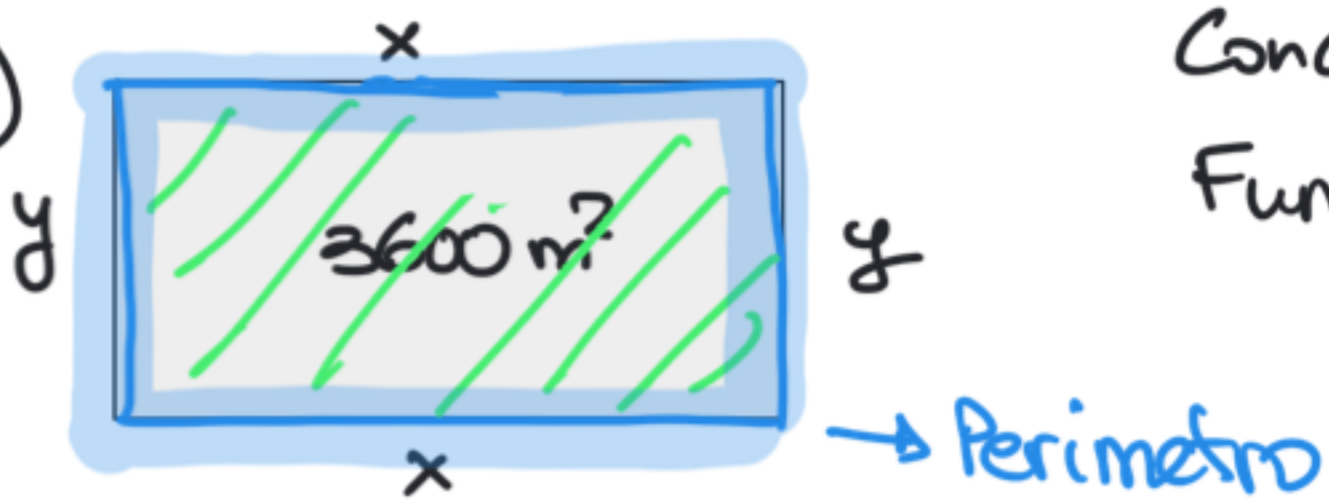
$f''\left(\frac{80}{3}\right)=-80<0$ máximo

5º) sustituyo en la condición para calcular y

$y=40-x$; $y=40-\frac{80}{3}=\frac{40}{3}$

$\boxed{\text{Solución } x=\frac{80}{3}, \; y=\frac{40}{3}}$

3)



Condición $xy = 3600$

Función $2x + 2y$

1º) despejo y en la condición: $y = \frac{3600}{x}$

2º) sustituyo en la función: $2x + 2\,\frac{3600}{x} =$

$= 2x + \frac{7200}{x} = A(x)$

3º) Derivo función e igualo a 0:

$A'(x) = \boxed{2 - \frac{7200}{x^2} = 0} \Rightarrow \frac{7200}{x^2} = 2$

$7200 = 2x^2$; $x^2 = \frac{7200}{2} = 3600$; $x = \sqrt{3600} =$
$= \boxed{60}$

(no tiene sentido coger el valor negativo, es un área)

4º) Calculo 2ª derivada para ver si max, o mínimo

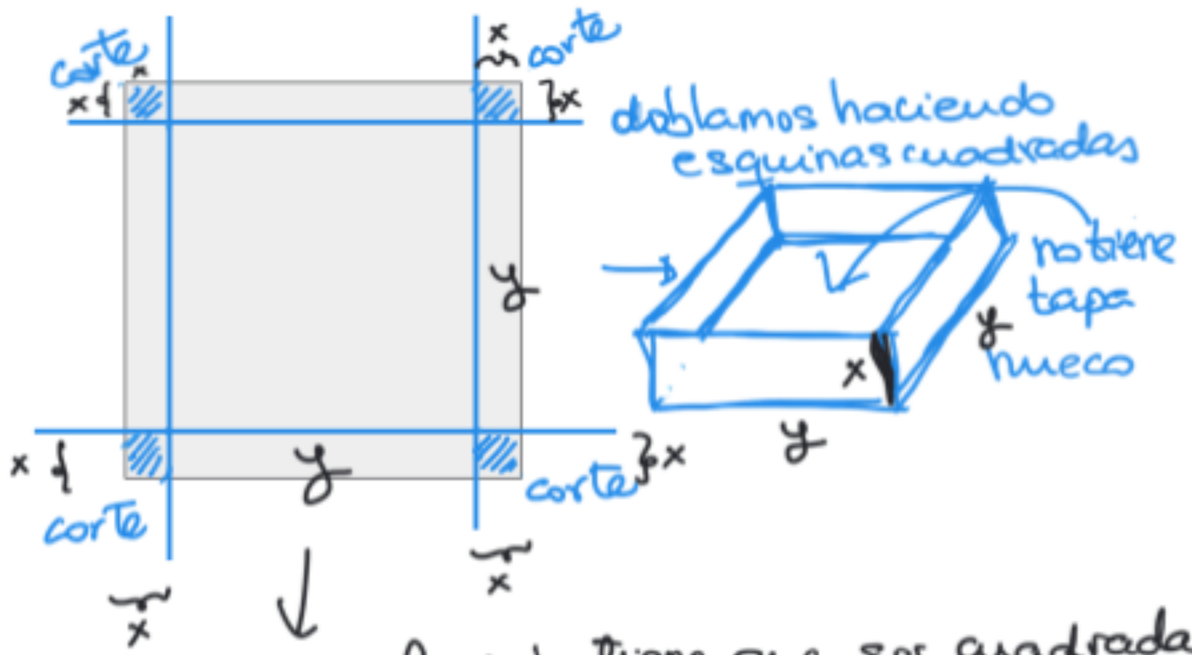
$A''(x) = + \frac{7200 \cdot 2x}{x^4} = \frac{1440x}{x^4} = \boxed{\frac{1440}{x^3}}$

5º) Sustituyo x en la condición para calcular y

$y = \frac{360\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 60$

Solución las dimensiones del rectángulo son 60 cm × 60 cm

4) El enunciado del boletín está incompleto faltaba por indicar que la caja era de base cuadrada y no tenía tapa



como la caja tiene que ser cuadrada (el cartón también)

nos queda $(2x+y)(2x+y) = 1\ m^2$

$\boxed{2x+y=1}$ condición

Para la función a optimizar $V = y^2 x$

1º) despejo y en la condición

$y = 1-2x$

2º) sustituyo en la función $V(x) = (1-2x)^2 x =$

$= 4x^3 - 4x^2 + x$

3º) derivo la función e igualo a 0

$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 = 0$; $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24}$

$= \frac{8 \pm 4}{24} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$

4º) calculo 2ª deriv para ver si máx. o mínimo

$V''(x) = 24x - 8$

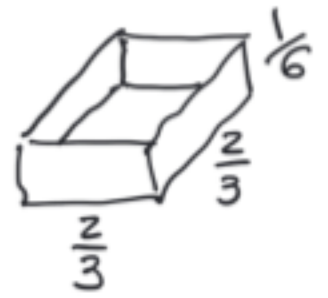
$V''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mínimo

$V''\left(\frac{1}{6}\right) < 0$ máximo → este es el que buscamos

5º) sustituyo el valor en la condición para obtener la y

$y = 1-2x$

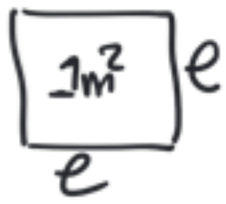
$y = 1 - 2\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



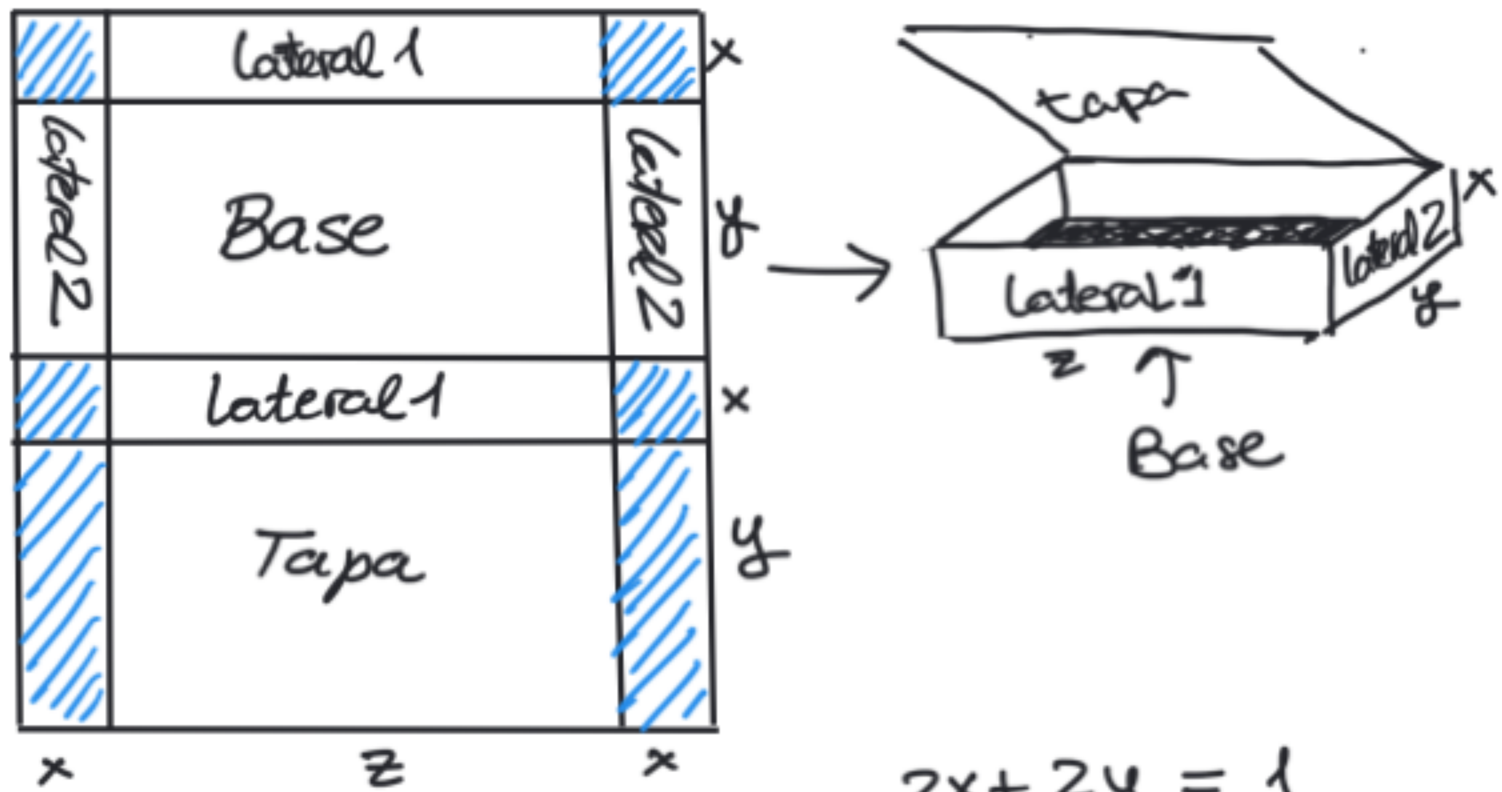
Las dimensiones de la caja son $\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

Otra variante del mismo ejercicio, pero CON Tapa (este NO entra) pero para que veais cómo se haría

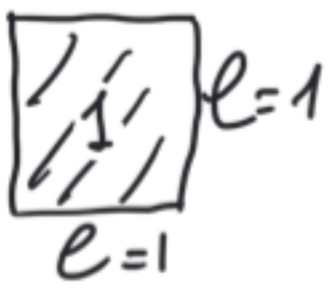
Cartón Cuadrado, ¡ojo!



$e^2 = 1$
$e = 1m$



Por ser el cartón cuadrado $\left\langle \begin{array}{l} 2x + 2y = 1 \\ \text{(dos condiciones)} \\ 2x + z = 1 \end{array}\right.$



Una función $V = xyz$

1º) despejo y, z en las condiciones $\quad y = \frac{1-2x}{2}$

$z = 1 - 2x$

2º) sustituyo en la función

$$V(x) = x\,\frac{(1-2x)}{2}\,(1-2x) = \frac{x}{2}(1 - 4x + 4x^2) =$$
$$= \frac{x}{2} - 2x^2 + 2x^3$$

3º) Derivo e igualo a cero

$$V'(x) = \frac{1}{2} - 4x + 6x^2 = 0 \quad ; x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

4º) Calculo segunda derivada para ver si máx o mínimo

$$V''(x) = 12x - 4$$

$V''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mínimo

$V''\left(\frac{1}{6}\right) < 0$ máximo → este es el que me interesa

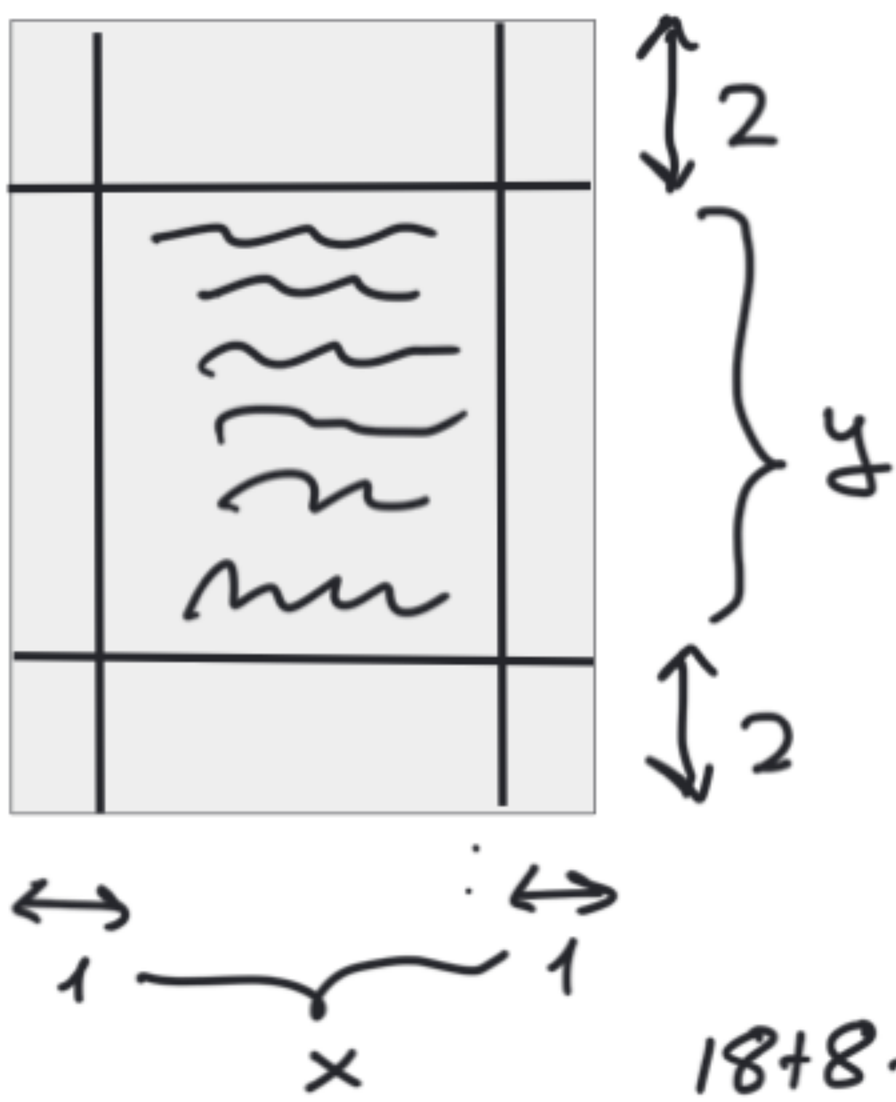
5º) sustituyo en las condiciones para obtener y, z

$$\boxed{x = \frac{1}{6}\ ,\ y = \frac{1}{3}\ ,\ z = \frac{2}{3}}$$

solución para la caja con tapa, hecha con un cartón cuadrado.

5) hoja con $18 cm^2$ de texto escrito.

Entendemos que cuanto más pequeña sea la hoja más barata saldrá, así que tenemos que minimizar su superficie.



$xy = 18$ condición

$A = (y+4)(x+2)$ función

1º) despejo y en la condición : $y = \frac{18}{x}$

2º) sustituyo en la función

$A(x) = \left(\frac{18}{x} + 4\right) \cdot (x+2) =$

$= \frac{18x}{x} + \frac{36}{x} + 4x + 8 =$

$18 + 8 + 4x + \frac{36}{x} = \boxed{26 + 4x + \frac{36}{x}}$

3º) Derivamos la función e igualamos a 0

$A'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 = \frac{36}{x^2} \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow \underline{x = 3}$ (no tiene sentido tomar el valor negativo)

4º) sustituimos en la condición para obtener y

$y = \frac{18}{x} \Rightarrow y = \frac{18}{3} = \underline{6}$

Esto NO son los valores que nos pedían, son tan sólo las proporciones del texto ($3 \times 6 = 18$)

Ahora añadimos los márgenes para tener las dimensiones de la hoja $\Rightarrow$ $y + 4 = 6 + 4 = 10$ cm

$x + 2 = 3 + 2 = 5$ cm

Solución : la hoja tiene dimensiones 5×10

6) <u>La cosecha.</u> Este problema es atípico. No hay condición y la función se obtiene de forma recursiva, veámoslo:

Días de espera hasta la venta	Peso (kg) cosecha	Precio venta/kg
0	50000	20
1	$50000-800$	$20+3$
2	$50000-800\cdot 2$	$20+3\cdot 2$
3	$50000-800\cdot 3$	$20+3\cdot 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$50000-800x$	$20+3x$

Beneficio = Peso · precio venta/kg =

$$= \boxed{(50000-800x)\cdot(20+3x)}$$

función a optimizar

Operando un poco: $B(x) = -2400x^2 + 134000x + 1000000$

derivamos e igualamos a 0 $\Rightarrow$

$B'(x) = -4800x + 134000 = 0 \Rightarrow \boxed{x \cong 28 \text{ días}}$

para comprobar que es el máximo:

$B''(x) = -4800 < 0$

$\boxed{\text{Sol. } 28 \text{ días}}$

7) Los bolis otro atípico, sin condición.

PVP	Nº bolis vendidos por día	Nº bolis fabricados
		1000
15 cent	1000	1000
15+1	1000 − 100	1000
15+2	1000 − 100 · 2	1000
15+3	1000 − 100 · 3	⋮
⋮	⋮	1000
15+x	1000 − 100x	

siendo x = nº cént. que añade a los 15 cent

Beneficio diario = gana por bolis vendidos − 7'5 · 1000 (stock diario de bolis fabricados)

$B(x) = (15+x)(1000-100x) - 7'5 \cdot 1000$

$B(x) = 15000 - 1500x + 1000x - 100x^2 - 7500$

$B(x) = 7500 - 500x - 100x^2$

derivamos e igualamos a cero:

$B'(x) = -500 - 200x = 0$

$-500 = 200x$

$x = \frac{-500}{200} = -2'5$ cént. de euro

$B''(x) = -200 < 0$ máximo

El precio óptimo es $x + (-2'5) = 12'5$ cént unidad

8) <u>las ventanas</u>

x: Para los horizontales 20 €/m
y: Para los verticales 30 €/m

$\boxed{\text{Condición} \quad xy = 6}$

Para la función:
el precio de los perfiles será:

$\boxed{40 \cdot x + 60 \cdot y}$ Función

1º) despejamos y en la condición

$y = \frac{6}{x}$

2º) sustituimos en función $P(x) = 40x + 60 \cdot \frac{6}{x}$

3º) derivamos e igualamos a 0

$P'(x) = 40 - \frac{360}{x^2} = 0 \Rightarrow 40 = \frac{360}{x^2}$

$x^2 = \frac{36\cancel{0}}{4\cancel{0}} = 9 \Rightarrow x = 3\,m$ (la solución negativa no tiene sentido si hablamos de magnitudes)

4º) segunda derivada para ver si max. o mínimo

$P''(x) = + \frac{360\,x}{x^4} = \frac{360}{x^3}$

$P''(3) > 0 \Rightarrow$ es mínimo

5º) sustituimos x en la condición para calcular y : $y = \frac{6}{x}$; $y = \frac{6}{3} = 2\,m$

ventana
las dimensiones de la ventana son 3×2

y su coste es $P(3) = 40 \cdot 3 + 60 \cdot \frac{6}{3} =$
$120 + 120 = \boxed{240\,€}$