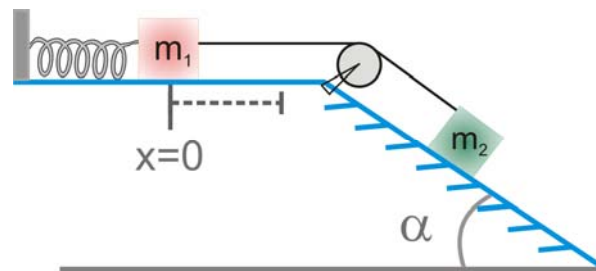
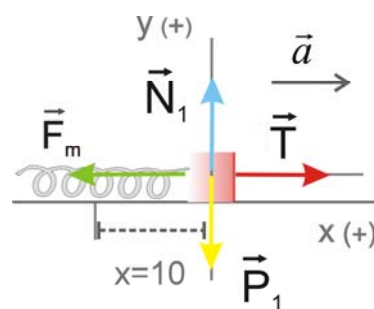


Los bloques de la figura (considerados sin dimensiones) tienen masas $m_1 = 50$ kg y $m_2 = 300$ kg y están unidos por una cuerda inextensible sin masa que pasa por una polea de masa despreciable. Inicialmente se encuentran en reposo y el muelle está en su longitud natural. La constante elástica del muelle es $K = 100$ N/m. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el plano inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$ y m_2 es $\mu_d = 0.2$. En el tramo horizontal no hay rozamiento.



a) Dibujar las fuerzas que actúan y expresar la Segunda Ley de Newton para cada bloque, en el momento en que m_1 se ha desplazado una distancia $x = 10$ cm.

- Sobre m_1



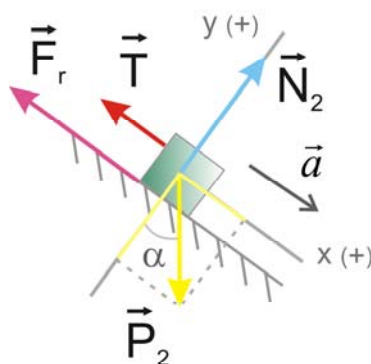
$$\vec{T} + \vec{F}_m + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}$$

$$x: T - F_m = m_1 a$$

$$y: N_1 - m_1 g = 0$$

$$T - Kx = m_1 a \quad (1) \quad x = 10 \text{ cm}$$

- Sobre m_2



$$\vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_r = m_2 \vec{a}$$

$$F_r = \mu_d N_2$$

$$x: m_2 g \sin \alpha - T - F_r = m_2 a$$

$$y: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha$$

$$m_2 g \sin \alpha - T - \mu_d m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

- b) Calcular el valor de la tensión de la cuerda y de la aceleración de los bloques en dicho instante.

Resolvemos el sistema sumando las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} T - Kx = m_1 a & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g \sen \alpha - T - \mu_d m_2 g \cos \alpha = m_2 a & (2) \end{cases}$$

$$m_2 g \sen \alpha - Kx - \mu_d m_2 g \cos \alpha = (m_1 + m_2) a$$

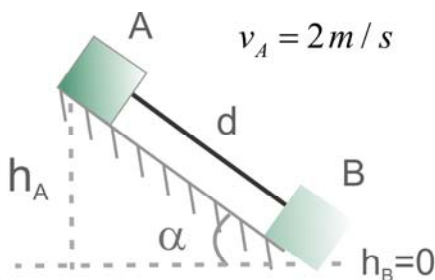
Despejando a y sustituyendo los datos:

$$\boxed{a = 2.77 \text{ m/s}^2}$$

Despejamos la T en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$(1) \quad T = Kx + m_1 a \quad \boxed{T = 148.5 \text{ N}}$$

- c) Cuando m_2 lleva una velocidad $v = 2 \text{ m/s}$, se corta la cuerda. Utilizando razonamientos energéticos, determinar qué velocidad tendrá después de deslizarse una distancia $d = 0.5 \text{ m}$ a lo largo del plano inclinado.



$$\Delta E_T = W_r \quad E_{TB} - E_{TA} = W_r$$

$$E_{TA} = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + m_2 g h_A = 1350 \text{ J}$$

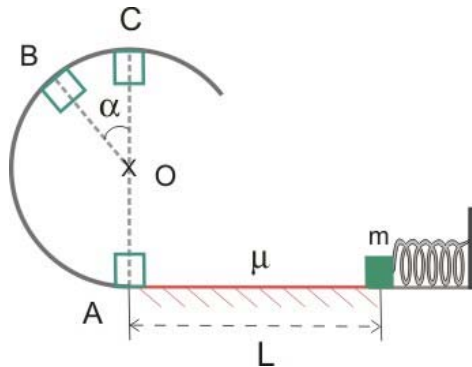
$$E_{TB} = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = 150 v_B^2$$

$$h_A = d \sen \alpha = 0.25 \text{ m}$$

$$W_r = -F_r d = -\mu_d N_2 d = -\mu_d m_2 g \cos \alpha d = -259.8 \text{ J}$$

$$150 v_B^2 - 1350 = -259.8 \Rightarrow v_B = 2.69 \text{ m/s}$$

Un bloque de dimensiones despreciables de masa m se empuja contra un muelle de constante recuperadora K comprimiéndolo una longitud x . Cuando se libera el sistema, el bloque recorre una longitud L por una superficie horizontal con rozamiento (μ) hasta llegar al bucle de radio R por el que asciende sin rozamiento. La velocidad con la que el bloque llega al punto A es $v_A = 15 \text{ m/s}$.
 Datos: $m = 0.3 \text{ kg}$; $K = 1200 \text{ N/m}$; $\mu = 0.4$; $R = 0.6 \text{ m}$; $L = 3 \text{ m}$.
 Tomar $g = 10 \text{ m/s}^2$.



a) Calcular la compresión inicial x del muelle.

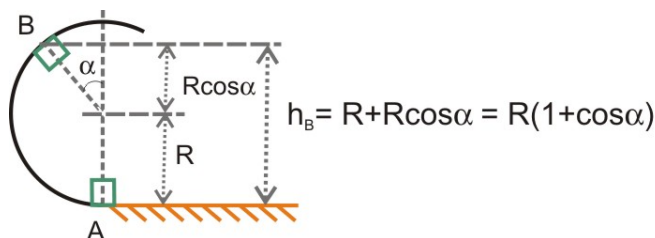
$$\Delta E_T = E_A - E_{\text{inicial}} = W_{\text{roz}}$$

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} K x^2 \quad E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \quad W_{\text{roz}} = -\mu N L = -\mu m g L$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} K x^2 = -\mu m g L$$

$$x = \left[\left(\frac{1}{2} m v_A^2 + \mu m g L \right) \frac{2}{K} \right]^{1/2} = 0.24 \text{ m}$$

b) Calcular la velocidad del bloque en el punto B ($\alpha = 60^\circ$)



$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g R(1 + \cos \alpha)$$

$$v_B = \left[\left(\frac{v_A^2}{2} - g R(1 + \cos \alpha) \right) 2 \right]^{1/2} = 14.4 \text{ m/s}$$

- c) Calcular la velocidad del bloque en el punto C. ¿Es este valor suficiente para que el bloque continúe por el bucle circular?

$$E_A = E_C$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g 2R$$

$$v_C = \left[\left(\frac{v_A^2}{2} - g 2R \right) 2 \right]^{1/2} = 14.2 \text{ m/s}$$

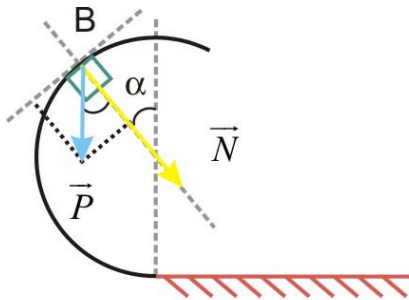
Ley de Newton en el punto C $\vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}_N \quad a_N = m \frac{v^2}{R}$

Condición crítica para que deje de apoyar: $\vec{N} = 0$

$$m g = m \frac{v_{\min}^2}{R} \quad v_{\min} = \sqrt{g R} = 2.45 \text{ m/s}$$

$$v_C > v_{\min} \Rightarrow \text{se mantiene sobre el bucle}$$

- d) Expresar la Segunda Ley de Newton en componentes intrínsecas en el punto B y calcular en ese punto el módulo de la aceleración normal y de la aceleración tangencial.



$$\vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}$$

Descomponiendo según los ejes:

$$\text{normal:} \quad m g \cos \alpha + N = m a_N = m \frac{v_B^2}{R}$$

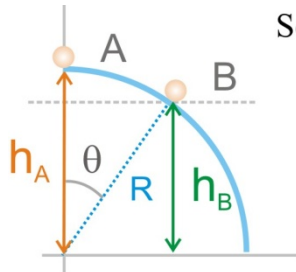
$$\text{tangencial:} \quad m g \sin \alpha = m a_T$$

$$\text{aceleración normal:} \quad a_N = \frac{v_B^2}{R} = \frac{14.4^2}{0.6} = 345.6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{aceleración tangencial:} \quad a_T = g \sin \alpha = 8.7 \text{ m/s}^2$$

Una partícula puntual de masa $m = 0.3 \text{ kg}$ se desliza sin rozamiento por una pista que es un cuadrante de circunferencia de radio $R = 0.7 \text{ m}$. La masa parte del reposo desde la posición A.

- a) Utilizando razonamientos energéticos, determinar la velocidad de la masa y la aceleración normal en el punto B. Particularizar el resultado para $\theta = 30^\circ$



Se conserva la energía total (no hay rozamiento) $E_A = E_B$

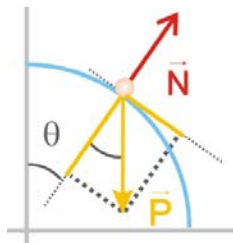
$$A : E_{Acin} = 0 \quad (v_A = 0) \quad E_{Apot} = mgh_A = mgR$$

$$B : E_{Bcin} = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad E_{Bpot} = mgh_B = mgR \cos \theta$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \cos \theta \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} = 1.37 \text{ (m/s)}$$

$$a_n = \frac{v_B^2}{R} = 2g(1 - \cos \theta) = 2.68 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

- b) En función del ángulo θ , escribir la Segunda Ley de Newton en componentes intrínsecas y determinar el valor de la fuerza normal que ejerce la pista.



$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$\text{Eje tangente:} \quad P \sin \theta = m a_t \quad (1)$$

$$\text{Eje normal:} \quad P \cos \theta - N = m a_n \quad (2)$$

$$(1) \quad mg \sin \theta = m a_t$$

$$(2) \quad mg \cos \theta - N = m a_n \quad \text{del apartado (a)} \quad a_n = 2g(1 - \cos \theta)$$

$$mg \cos \theta - N = 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$N = mg \cos \theta - 2mg + 2mg \cos \theta \Rightarrow N = mg(3 \cos \theta - 2)$$

- c) Determinar el valor del ángulo θ para el que la masa se despegue de la pista, así como las componentes intrínsecas de la aceleración para dicho valor del ángulo.

$$\text{Condición para que se despegue de la pista } N = 0 \quad N = mg(3 \cos \theta - 2) = 0$$

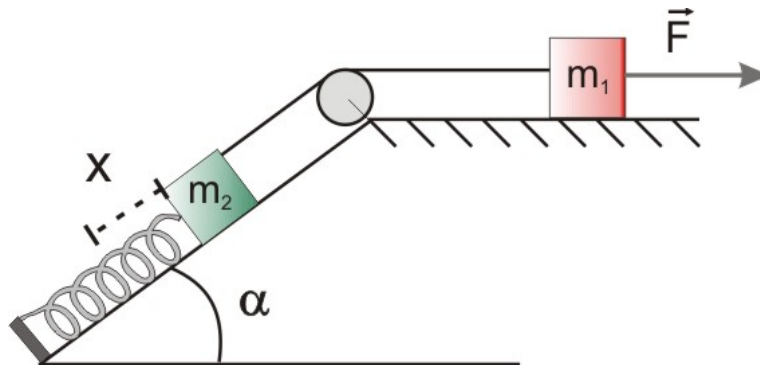
$$3 \cos \theta - 2 = 0 \quad \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.18^\circ$$

Del apartado (b) y sustituyendo:

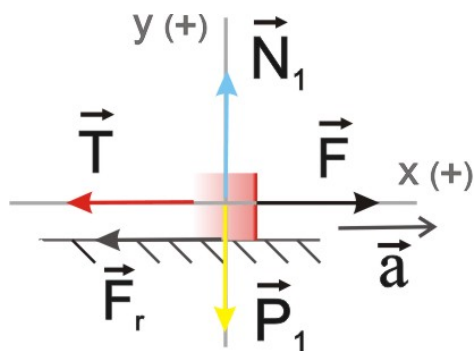
$$a_t = g \sin \theta = 7.45 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad a_n = 2g(1 - \cos \theta) = 6.66 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

En el sistema de la figura la masa m_2 está apoyada sin rozamiento sobre un plano inclinado un ángulo α y entre la masa m_1 y el plano horizontal el coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_c = 0.2$. Las dos masas están unidas entre sí por una cuerda inextensible y de masa despreciable que pasa por una polea sin masa. Sobre m_1 se aplica una $F = 20 \text{ N}$ de modo que el muelle de constante recuperadora k sufre una deformación x .

Datos: $m_1 = 2 \text{ kg}$; $m_2 = 0.5 \text{ kg}$; $\mu_e = 0.15$; $\mu_c = 0.2$; $\alpha = 30^\circ$; $K = 150 \text{ N/m}^2$. Tomar $g = 10 \text{ m/s}^2$.



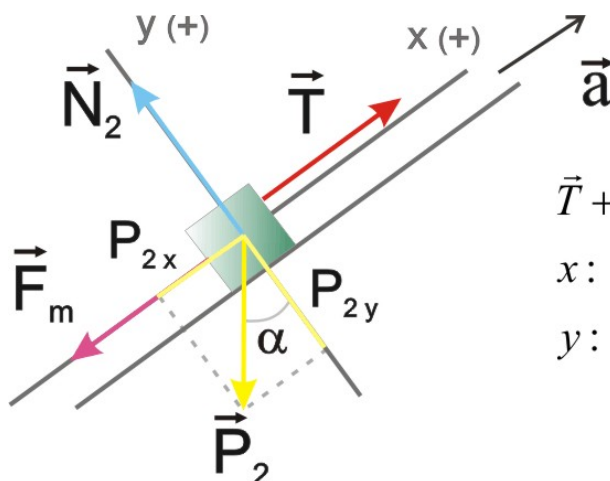
- a) Hacer un diagrama de m_1 y m_2 por separado y dibujar las fuerzas que actúan sobre él. Descomponerlas según los ejes elegidos y expresar la segunda ley de Newton en cada eje.



$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_r + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}$$

$$x: F - T - F_r = m_1 a$$

$$y: N_1 - m_1 g = 0$$



$$\vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_m = m_2 \vec{a}$$

$$x: T - m_2 g \sin \alpha - F_m = m_2 a$$

$$y: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

- b) Calcular la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda cuando el muelle se ha estirado una longitud $x = 0.03\text{m}$ con respecto a su longitud de equilibrio.

Teniendo en cuenta que:

$$F_r = \mu_c N_1 = \mu_c m_1 g \quad \text{y} \quad F_m = k x$$

Resolvemos el sistema sumando las ecuaciones:

$$\begin{cases} T' - m_2 g \sin \alpha - k x = m_2 a \\ F - T' - \mu_c m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

$$F - m_2 g \sin \alpha - k x - \mu_c m_1 g = (m_1 + m_2) a$$

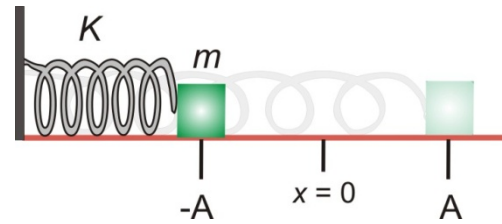
Despejando a y sustituyendo los datos:

$$a = 3.6 \text{ m/s}^2$$

Despejamos la T en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$T = F - \mu_c m_1 g - m_1 a \quad T = 8.8 \text{ N}$$

Un objeto se encuentra unido a un muelle de constante recuperadora $K = 2000$ N/m sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El objeto oscila según un movimiento armónico simple de amplitud $A = 6$ cm y la velocidad máxima que alcanza es $v_{\text{máx}} = 2.2$ m/s.



- a) Determinar la frecuencia ω del movimiento, la masa del objeto y la aceleración máxima a la que se ve sometido.

$$K = 2000 \text{ Nm}^{-1} \quad A = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m} \quad v_{\text{máx}} = 2.2 \text{ ms}^{-1}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

- $|v_{\text{máx}}| = A\omega \quad \omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = 36.67 \text{ rad s}^{-1}$
- $\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{2000}{36.67^2} = 1.49 \text{ kg}$
- $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$
 $|a_{\text{máx}}| = \omega^2 A = 80.7 \text{ ms}^{-2}$

- b) Calcular la energía total del movimiento. Si en un instante dado la energía potencial elástica es 1.6 J, calcular la posición de la masa (x) y el módulo de la velocidad en dicho instante.

- Energía total $E_T = \frac{1}{2} K A^2 = 3.6 \text{ J}$
- Energía potencial elástica $E_p = 1.6 \text{ J} \quad x = ?$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow x = \left(\frac{2E_p}{K} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm 0.04 \text{ m}$$

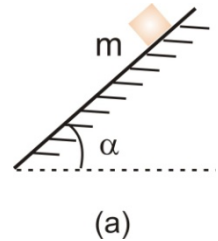
$$\text{Energía total } E_T = E_p + E_c \Rightarrow E_c = E_T - E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = E_T - E_p \Rightarrow v = \left(\frac{2}{m} (E_T - E_p) \right)^{\frac{1}{2}} = \pm 1.64 \text{ ms}^{-1}$$

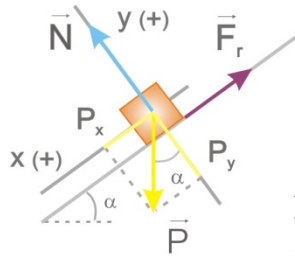
Se tiene una masa puntual $m = 4 \text{ kg}$ en un plano inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$. Entre la masa y el plano existe rozamiento de coeficientes estático $\mu_s = 0.3$ y dinámico $\mu_d = 0.12$.

- a) Razonar si la masa desliza por el plano. En caso afirmativo, calcular la aceleración con la que baja. Figura (a).

Fuerzas que actúan: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)



Para que deslice:



$$\text{eje } x: P_x > F_{r\text{máx}} \Rightarrow m g \sin \alpha > F_{r\text{máx}}$$

$$\text{eje } y: P_y + N = 0 \Rightarrow m g \cos \alpha = N$$

$$\text{Máximo valor de } F_r: F_{r\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s m g \cos \alpha$$

$$m g \sin \alpha > \mu_s m g \cos \alpha \Rightarrow \sin 30 > 0.3 \cos 30 \Rightarrow \text{Desliza}$$

$$\text{En movimiento } F_r = \mu_d N \quad \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m \vec{a}$$

$$\begin{aligned} x: m g \sin \alpha - F_r &= m a \\ y: N - m g \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \cancel{m} g \sin \alpha - \mu_d \cancel{m} g \cos \alpha = \cancel{m} a \quad a = 3.96 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Se aplica ahora una fuerza $\vec{F}$ perpendicular al plano. Figura (b).

- b) Calcular el módulo de $\vec{F}$ para que la masa baje con velocidad constante.

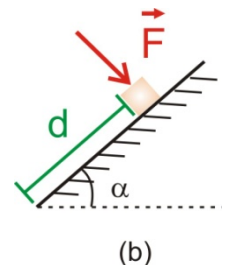
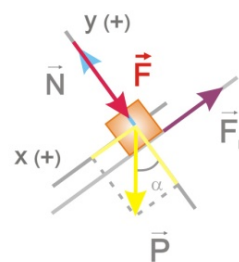
Fuerzas: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$), fuerza ($\vec{F}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)

$$\text{Velocidad constante} \Rightarrow \vec{a} = 0$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F} = 0 \quad F_r = \mu_d N$$

$$x: m g \sin \alpha - F_r = 0 \quad (1)$$

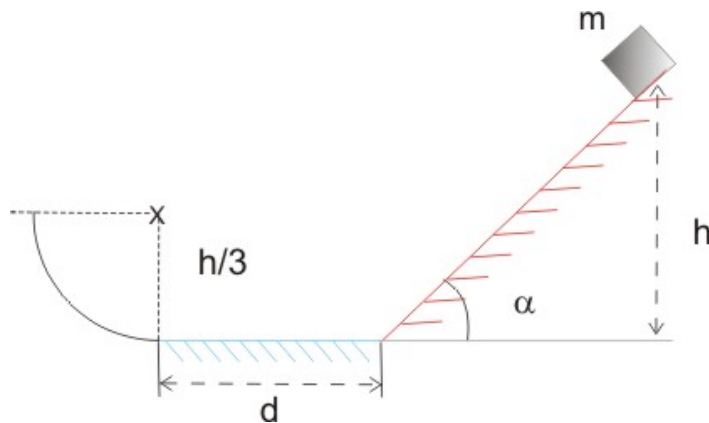
$$y: N - F - m g \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = m g \cos \alpha + F$$



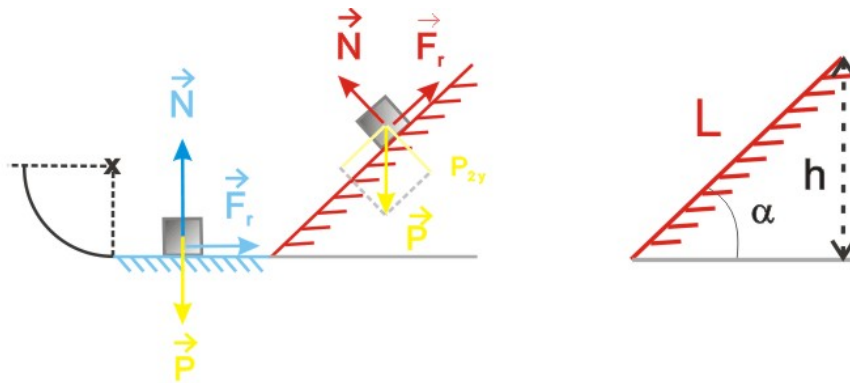
$$(1) \quad m g \sin \alpha - \mu_d (m g \cos \alpha + F) = 0 \quad F = \frac{m g \sin \alpha - \mu_d m g \cos \alpha}{\mu_d} = 132 \text{ (N)}$$

2) La pista de la figura está formada por un tramo inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$, un tramo horizontal de longitud $d = 0.2 \text{ m}$ y un cuadrante circular de radio $R = h/3$. Una masa considerada puntual $m = 3 \text{ kg}$ se sitúa sin velocidad inicial a una altura $h = 2 \text{ m}$ sobre el plano inclinado y cae por la pista. Entre la masa y los dos tramos rectilíneos hay rozamiento con coeficiente $\mu = 0.2$ y en el tramo curvo no hay rozamiento. Tomar $g = 10 \text{ m/s}^2$

- Calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento desde su situación inicial hasta que la masa llega al final de la pista.
- Calcular la velocidad con la que sale despedida al llegar al final.



a)

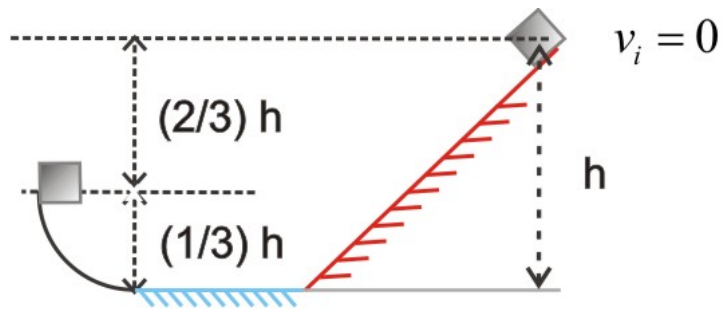


$$W_r = -F_r L = -\mu N \frac{h}{\text{sen} \alpha} = -\mu m g \cos \alpha \frac{h}{\text{sen} \alpha} = -20.8 \text{ J}$$

$$W_r = -F_r d = -\mu N d = -\mu m g d = -1.2 \text{ J}$$

$$W_{r \text{ total}} = W_r + W_r = -22 \text{ J}$$

b)



$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_r = -22 J$$

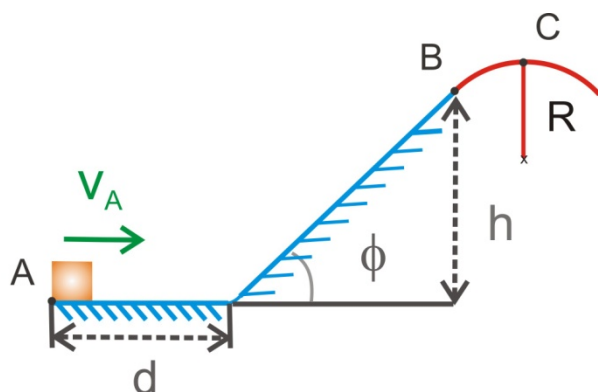
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ gana esta } E_c \quad ; \quad \Delta E_p = -m g \frac{2}{3} h \text{ pierde esta } E_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g \frac{2}{3} h = -22. \text{ Despejando } v \text{ y sustituyendo:}$$

$$v = 3.46 \text{ m/s}$$

Una masa puntual $m = 0.5 \text{ kg}$ se lanza desde el punto A con una velocidad $v_A = 9 \text{ m/s}$ por una pista formada por un tramo horizontal de longitud $d = 1.5 \text{ m}$ y uno inclinado un ángulo $\phi = 30^\circ$. El coeficiente de rozamiento dinámico es el mismo en los dos tramos y vale $\mu_d = 0.2$. El tramo inclinado enlaza con una pista circular sin rozamiento de radio $R = 1.75 \text{ m}$.

- a) Calcular la aceleración de la masa mientras está subiendo por el plano inclinado y sus componentes intrínsecas.



Fuerzas: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m \vec{a} \quad (F_r = \mu_d N)$$

$$x: -m g \sin \phi - F_r = m a$$

$$y: N - m g \cos \phi = 0$$

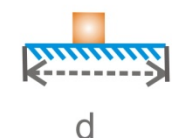
$$-m g \sin \phi - \mu_d m g \cos \phi = m a$$

$$a = -g (\sin \phi + \mu_d \cos \phi) = -6.73 \text{ m/s}^2$$

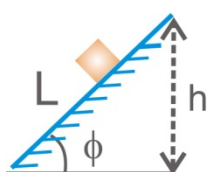
$$\text{Mov. rectilíneo} \Rightarrow a_n = 0 \quad a_t = a = -6.73 \text{ m/s}^2$$

- b) Calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento desde el punto A al punto B, situado a una altura $h = 2 \text{ m}$.

Igual que en el problema anterior: $W_r = W_{r_1} + W_{r_2}$



$$W_{r_1} = -F_{r_1} d = -\mu_d N_1 d = -\mu_d m g d = -1.5 \text{ J}$$



$$N_2 = m g \cos \phi \quad L = \frac{h}{\sin \phi}$$

$$W_{r_2} = -F_{r_2} L = -\mu_d N_2 L = -3.46 \text{ J}$$

$$W_r = W_{r_1} + W_{r_2} = -1.5 - 3.46 \simeq -5 \text{ J}$$

c) Calcular la velocidad con la que llega a B.

$$\Delta E_T = W_r \quad \Delta E_c + \Delta E_p = W_r = -5 J$$

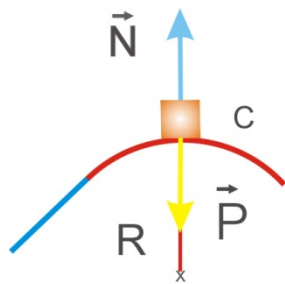
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad ; \quad \Delta E_p = m g h_B - \cancel{m g h_A}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h = -5$$

Despejando v_B y sustituyendo:

$$\boxed{v_B = 4.6 \text{ m/s}}$$

d) ¿Cuál es la velocidad mínima con la que debería llegar al punto C para seguir sobre la pista?



$$\vec{P} + \vec{N} = m \vec{a} \quad mg - N = m a_N$$

Condición para que se despegue de la pista $N = 0$

$$m g = m a_N = m \frac{v_c^2}{R} \Rightarrow v_c = \sqrt{R g} = 4.18 \text{ m/s}$$