uc3m

Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2023-2024**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

C

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x\,dx$.

b) (1.25 puntos) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

1.1

x → Largo

y → Medio

z → Corto

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x = y + z + 17 \\ x + y = 9z + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - 15z = 0 \\ x - y - z = 17 \\ x + y - 9z = 7 \end{cases}$$

Lo convertimos a forma matricial y reducimos a forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \leftarrow f_3 - f_1]{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 3f_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = 19 \text{ cm} \\ y = 71 \text{ cm} \\ x = 107 \text{ cm} \end{array}}$$

A.2

a)

Calculamos $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$

La recta tangente en $x=\pi$ viene dada por $y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$

$f(\pi) = 5\pi^4$

$f'(\pi) = 4\cdot\pi^3 + 3\pi^3 + 2\pi^3 + \pi^3 = 10\pi^3$

Así: $y = 5\pi^4 + 10\pi^3(x-\pi)$

$= 10\pi^3 \cdot x - 5\pi^4$

b)

T^{ma} de Rolle → "Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f(a) = f(b)$. Entonces, $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$".

En nuestro caso, $f(x)$ es continua y derivable por ser un polinomio $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comprobamos que $f(0) = f(-\pi)$:

$f(0) = \pi^4$

$f(-\pi) = \pi^4$

Por tanto, se verifican las condiciones del teorema de Rolle y existe $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

T^{ma} de Bolzano → "Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo. Entonces, $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$."

Ahora tomamos $f'(x)$. Por ser la derivada de un polinomio es una función continua.

Evaluamos $f'(-\pi)$ y $f'(0)$:

$f'(0) = \pi^3$

$f'(-\pi) = -2\pi^3$

Como $f'(0) > 0$ y $f'(-\pi) < 0$, se cumplen las condiciones del T^{ma} de Bolzano. Por tanto $\exists c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

A.2 (Cont.)

c)

$$g(x) = f(-x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

Vemos dónde se cortan f y g: $f(x) = g(x) \Rightarrow \cancel{x^4} + \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} + \pi^3 x + \cancel{\pi^4} = \cancel{x^4} - \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} - \pi^3 x + \cancel{\pi^4}$

$$\Rightarrow \cancel{2}\pi x^3 + \cancel{2}\pi^3 x = 0 \Rightarrow (x^2 + \pi^2)\, x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\searrow x^2 + \pi^2 = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \text{ solución}$$

Por tanto, integramos directamente $f(x) - g(x)$ entre 0 y π:

$$\int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\,dx = \left(2\pi \frac{x^4}{4} + 2\pi^3 \frac{x^2}{2}\right|_0^\pi = \cancel{2}\pi \frac{\pi^4}{\cancel{4}2} + \cancel{2}\pi^3 \frac{\pi^2}{\cancel{2}} = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3}{2}\pi^5 \ //$$

A.3

a) Como tiene que ser perpendicular a $z=0$, usamos el vector normal al plano y el vector $\vec{AB}=(1,1,-1)$ para usar la fórmula del plano de un punto y dos vectores:

$$\begin{array}{l}\vec{n}=(0,0,1)\\ \vec{AB}=(1,1,-1)\\ A=(0,0,1)\end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{y-x=0}$$

b) El vector director de ambas rectas debe ser el mismo: $\vec{d}=(a,b,c)$

Tomamos el punto A. La recta que pasa por A es $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z-1}{c} \equiv r$

Como la recta debe estar en el plano $x+z=1$ (cuyo vector normal es $\vec{n}(1,0,1)$), el producto escalar de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ debe ser nulo. Así:

$$(a,b,c)\cdot(1,0,1)=0 \rightarrow a=-c \quad \rightarrow r \equiv \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{1-z}{a}$$

Ahora, la distancia de B a r debe ser 1. Usamos la fórmula de la distancia punto-recta:

$$D=\frac{|\vec{AB}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ a & b & -a\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{|(b-a,0,b-a)|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2(b-a)^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}=1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(b-a)^2=2a^2+b^2 \rightarrow 2(b^2+\cancel{a^2}-2ab)=\cancel{2a^2}+b^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2-2ab=0 \rightarrow b(b-4a)=0 \rightarrow b=0$$

$$\searrow b=4a \quad \text{(Dos soluciones)}$$

Por ejemplo, cogemos $b=0$.

$$(a,0,-a)\rightarrow(1,0,-1)\rightarrow\begin{cases} r\equiv \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{1-z}{1} \\ s\equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{-z}{1}\end{cases}$$

A.4

a)

$$P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\bar{B}) = (1 - P(\bar{A})) - P(A\cap B) = \left(1-\frac{11}{20}\right) - \frac{3}{10} = \frac{3}{20} \,//$$

$P(B)$? Sabemos que $P(x|y) = \dfrac{P(x\cap y)}{P(y)}$. Así:

$$P(A|B) - P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} - \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24} \rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{P(A\cap B)}{1-P(\bar{A})} \rightarrow$$

$$\rightarrow P(B) = P(A\cap B)\cdot\left(1/24 + \frac{P(A\cap B)}{1-P(\bar{A})}\right)^{-1} = \frac{3}{20}\left(\frac{1}{24} + \frac{3/20}{9/20}\right)^{-1} = \frac{2}{5} \,//$$

b)

Sabemos que $P(A\cup C) = P(A) + P(C) - P(A\cap C)$

Como son independientes $\rightarrow P(A\cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C)$.

Así:

$$P(A\cup C) = P(A) + (\overbrace{1-P(A)}^{P(\bar{A})})\,P(C) \rightarrow P(C) = \frac{P(A\cup C) - (1-P(\bar{A}))}{P(\bar{A})} =$$

$$= \frac{14/25 - 9/20}{11/20} = \frac{1}{5} \,//$$

B.1

a) $B = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(B) = b \cdot (-1) = -b$

Como en una igualdad matricial los determinantes deben ser iguales:

$|BCB^{-1}| = |A| \Rightarrow |B| \cdot |C| \cdot |B^{-1}| = |A| \Rightarrow -\cancel{b} \cdot |C| \cdot \frac{-1}{\cancel{b}} = |A| \Rightarrow |C| = |A| \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = 12$

Por tanto, la igualdad se verifica $\forall b \in \mathbb{R}$.

b) $|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 12^2 = 144$

c) Creamos el sistema matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \leftarrow f_3 - f_1]{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$ Así: $\boxed{\begin{array}{l} z = 5 \\ y = 2 \\ x = -6 \end{array}}$

B.2

(Por partes)

a) $\int_1^e (x+2)\cdot \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & ; du = \frac{1}{x}dx \\ dv=(x+2)dx; & v=\frac{x^2}{2}+2x \end{bmatrix} = \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot \ln x\right|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2}+2\right)dx$

$= \left[\frac{e^2}{2}+2e\right] - \left[\frac{x^2}{4}+2x\right|_1^e = \frac{e^2}{2}+\cancel{2e}-\frac{e^2}{4}-\cancel{2e}+\frac{1}{4}+2=$

$= \frac{e^2}{4}+\frac{9}{4} = \frac{e^2+9}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^{+\infty}$

Definimos $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Aplicamos logaritmos:

$\log(L) = \log\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \log\left(\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(tg\,x/2)}{\cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$

$\to \log(L) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tg\,x/2}\cdot\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-1} = -1$

Deshacemos el logaritmo:

$L = e^{\log(L)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

B.3

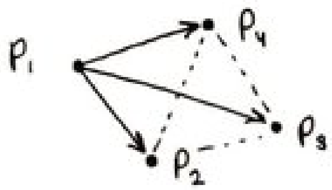
a) El volumen debe ser 1.

Sabemos tres puntos y nos falta el $P_4 (3, a, 3)$. Podemos obtener tres vectores:

$\vec{P_1P_2} = (1, 0, -1)$

$\vec{P_1P_3} = (0, 2, 1)$

$\vec{P_1P_4} = (2, a-1, 2)$



El volumen de un tetraedro del cual conocemos los vectores que conforman sus aristas al vértice común viene dado por:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ son los tres vectores.

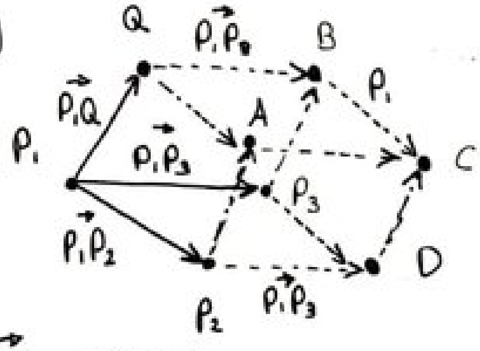
Así:

$$\frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 1 \rightarrow |4 + 4 + 1 - a| = 6 \rightarrow |9 - a| = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 9 - a = 6 \rightarrow a_1 = 3 \ ✓ \\ a - 9 = 6 \rightarrow a_2 = 15 > 10 \ \text{No vale} \end{cases}$$

Por tanto, $a = 3$ //

b)



$\vec{PQ} = (2, 2, 2)$

Tomamos P_1 como punto de partida:

Para llegar a A, partimos de P_1, nos movemos $\vec{P_1Q}$ y luego $\vec{P_1P_2}$. Así:

$$A = P_1 + \vec{PQ} + \vec{P_1P_2} = (1\ 1\ 1) + (2\ 2\ 2) + (1\ 0\ {-1})$$
$$= (4, 3, 2)$$

Para llegar a B: $B = P_1 + \vec{PQ} + \vec{P_1P_3} = (1\ 1\ 1) + (2\ 2\ 2) + (0\ 2\ 1) = (3, 5, 4)$

Para llegar a C: $C = A + \vec{P_1P_3} = (4\ 3\ 2) + (0\ 2\ 1) = (4, 5, 3)$

Para llegar a D: $D = P_3 + \vec{P_1P_2} = (1\ 3\ 2) + (1\ 0\ {-1}) = (2, 3, 1)$

Así, los puntos que habría que darle a la máquina son:

$P_1 (1, 1, 1)$ $Q(3, 3, 3)$ $C(4, 5, 3)$
$P_2 (2, 1, 0)$ $A(4, 3, 2)$ $D(2, 3, 1)$
$P_3 (1, 3, 2)$ $B(3, 5, 4)$

B.4

a) Creamos la tabla de resultados:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3	4	5	6	7	8	9
4	6	8	10	12	14	16
5	6	7	8	9	10	11
6	8	10	12	14	16	18

$$P(10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{"impar"}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) $$P(\text{"par azul"} \mid 8) = \frac{P(\text{"par azul"} \cap 8)}{P(8)} = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{"impar rojo"} \mid \text{"par"}) = \frac{P(\text{"impar rojo"} \cap \text{"par"})}{P(\text{"par"})} = \frac{18/36}{27/36} = \frac{2}{3}$$