PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ a-3 & a-1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X\cdot A-B=C\cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultiva para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^3+ax^2+3x+b$ en el punto $P(1,2)$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t)=\begin{cases} t^2-8t+60 & si\ 0\le t\le 10 \\ -t^2+32t-140 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Comprueba que la función *v* es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 Km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa, ¿Se emitiría alerta roja?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3,-1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

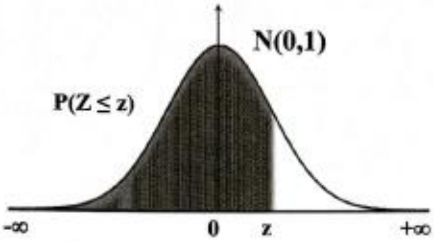
EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%.
c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ a-3 & a-1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X\cdot A-B=C\cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B$$

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ a-3 & a-1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{vmatrix}=a(a-1)+0-4(a-3)-0-a(a-3)-2=$$

$$=\cancel{a^2}-a-4a+12-\cancel{a^2}+3a-2=-2a+10$$

$$|A|=0\Rightarrow -2a+10=0\Rightarrow 2a=10\Rightarrow \boxed{a=5}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 5.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=8+2-2=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y obtenemos la matriz X.

$$X\cdot A-B=C\cdot A\Rightarrow X\cdot A=C\cdot A+B\Rightarrow X=\left(C\cdot A+B\right)A^{-1}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+0 & -2+0+8 & 4+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A+B=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 11\end{pmatrix}$$

$$X=\left(C\cdot A+B\right)A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5 & 9 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}10+18-44 & 25+9-22 & -5+27+22\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-16 & 12 & 44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 11/2\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 11/2\end{pmatrix}$.

c) El producto $B\cdot A$ da una matriz de dimensiones 1×3.

$$\begin{array}{c}B \quad\cdot\quad A\\ 1\times\boxed{3\cdot 3}\times 3\rightarrow 1\times 3\end{array}$$

Esta matriz de 1 fila y 3 columnas debe tener la misma dimensión que la matriz $D\cdot C^t\cdot B$ para poder realizarse la suma. Suponemos la matriz D de dimensiones $m\times n$.

$$\begin{array}{c}D \quad\cdot\quad C^t \quad\cdot\quad B\\ m\times\boxed{n\cdot 3}\times\boxed{1\cdot 1}\times 3\rightarrow m\times 3\end{array}$$

El producto $C^t\cdot B$ es posible y da una matriz de orden 3×3. El producto $D\cdot C^t\cdot B$ es posible si $n=3$. Y el resultado de la operación es una matriz $m\times 3$. Para poder sumarse con la matriz $B\cdot A$ deben tener la misma dimensión 1×3, debiendo ser $m=1$.

Las dimensiones de la matriz D deben ser 1×3

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultiva para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Llamemos x = “número de hectáreas de secano”, y = “número de hectáreas de regadío”.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Agua	Abono	Productos fitosanitarios	Producción
Hectáreas de secano (x)		100x	50x	5000x
Hectáreas de regadío (y)	$1500y$	110y	80y	10000y
TOTALES	$1500y$	$100x+110y$	$50x+80y$	$5000x+10000y$

Deseamos maximizar la producción que viene expresada como $P(x,y)=5000x+10000y$.
Las restricciones del problema son:

“Anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios” → $1500y \le 30000$; $100x+110y \le 5500$; $50x+80y \le 3000$
“Manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano” → $x \ge 20$
“Las cantidades deben ser positivas” → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1500y \le 30000 \\ 100x+110y \le 5500 \\ 50x+80y \le 3000 \\ x \ge 20 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \ge 20 \\ y \le 20 \\ 10x+11y \le 550 \\ 5x+8y \le 300 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y=20$

x	$y=20$
0	20
10	20
20	20

$x=20$

$x=20$	y
20	0
20	20

$10x+11y=550$

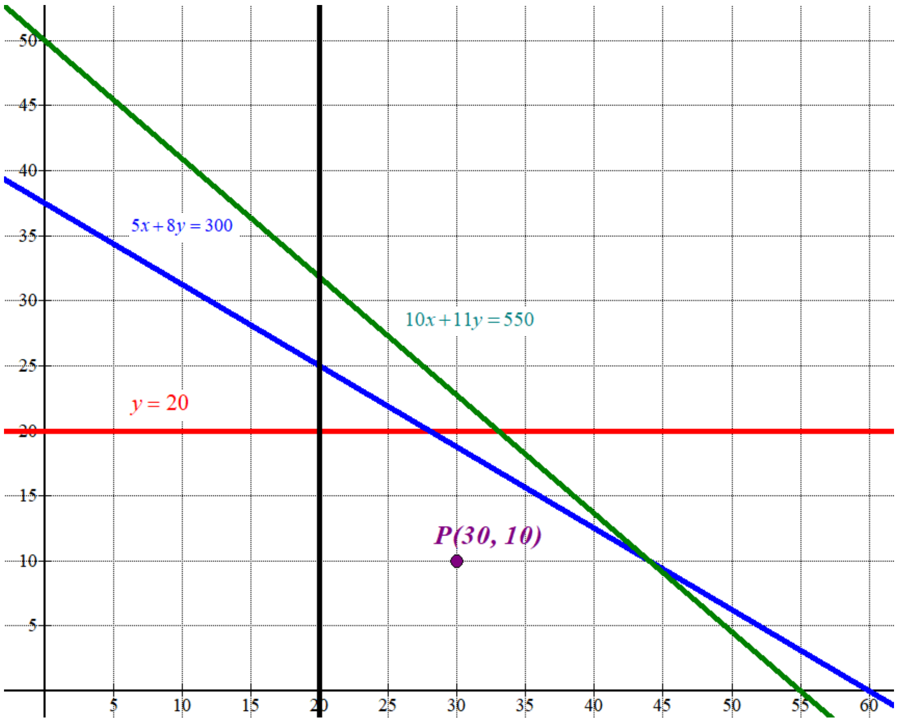
x	$y=\frac{550-10x}{11}$
0	50
55	0

$5x+8y=300$

x	$y=\frac{300-5x}{8}$
20	25
60	0

$x \ge 0;\ y \ge 0$

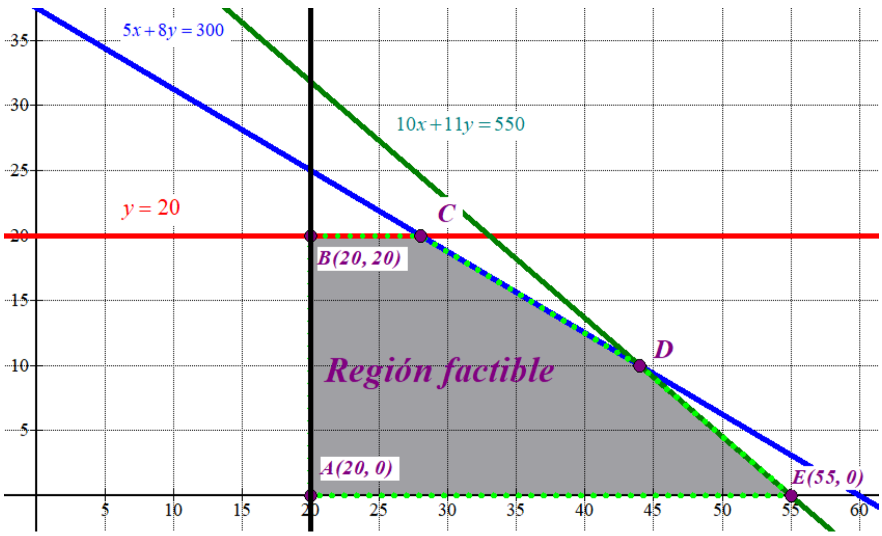
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \leq 20 \\ 10x+11y \leq 550 \\ 5x+8y \leq 300 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, azul y roja y a la derecha de la recta vertical. Lo comprobamos viendo si el punto P(30, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \geq 20 \\ 10 \leq 20 \\ 10 \cdot 10+11 \cdot 10 \leq 550 \\ 5 \cdot 10+8 \cdot 10 \leq 300 \\ 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=20 \\ 5x+8y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x+160=300 \Rightarrow 5x=140 \Rightarrow x=\frac{140}{5}=28 \Rightarrow C(28,20)$$

$$D \rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x+11y=550 \\ 5x+8y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x+11y=550 \\ -10x-16y=-600 \end{array}\right\}$$

$$-5y=-50 \Rightarrow y=10 \Rightarrow 5x+80=300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=220 \Rightarrow x=\frac{220}{5}=44 \Rightarrow D(44,10)$$

Valoramos la producción $P(x,y)=5000x+10000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 0) → $P(20,0)=5000\cdot 20=100\,000\,kg$
B(20, 20) → $P(20,20)=5000\cdot 20+10000\cdot 20=300\,000\,kg$
C(28, 20) → $P(28,20)=5000\cdot 28+10000\cdot 20=340\,000\,kg$ ¡Máximo!
D(44, 10) → $P(44,10)=5000\cdot 44+10000\cdot 10=320\,000\,kg$
E(55, 0) → $P(55,0)=5000\cdot 55+10000\cdot 0=275\,000\,kg$

La máxima producción es de 340 000 kg de oliva y se consigue en el vértice C(28, 20), que significa tener 28 hectáreas de secano y 20 de regadío.

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^3+ax^2+3x+b$ en el punto *P(1,2)*.

a) Calculamos la derivada de *f(x)*.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=3\left(x^2+2\right)^2(2x)\cdot e^{-2x}+\left(x^2+2\right)^3\cdot(-2)e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}-2\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}-2\left(x^2+2\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}+\left(-2x^2-4\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(-2x^2+6x-4\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow \boxed{f'(x)=-2\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}}$$

Calculamos la derivada de *g(x)*.

$$g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2}{1-x^3}\left(1-2x^2\right)^2-2\left(1-2x^2\right)(-4x)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-2x^2\right)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(1-2x^2\right)\left[\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}+8x\ln\left(1-x^3\right)\right]}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}+8x\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^3}=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-x^3\right)\ln\left(1-x^3\right)}{1-x^3}}{\left(1-2x^2\right)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x)=\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-x^3\right)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^3\left(1-x^3\right)}}$$

b) Para que la recta tangente a la gráfica en el punto *P(1,2)* sea horizontal tiene que tener pendiente 0, es decir, la derivada de la función en $x = 1$ es 0 → $h'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} h'(x)=3x^2+2ax+3 \\ h'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 1^2+2a\cdot 1+3 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-6}{2}=-3}$$

La función queda $h(x)=x^3-3x^2+3x+b$.

Además, la función debe pasar por el punto *P(1,2)*, por lo que $h(1)=2$.

$$\left.\begin{array}{r} h(x)=x^3-3x^2+3x+b \\ h(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+b \Rightarrow 2=1-\cancel{3}+\cancel{3}+b \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = 1$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función *v(t)* expresada en km/h, donde *t* es el tiempo expresado en horas:

$$v(t)=\begin{cases} t^2-8t+60 & si\ 0\le t\le 10 \\ -t^2+32t-140 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Comprueba que la función *v* es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 Km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa, ¿Se emitiría alerta roja?

a) La función en el intervalo $[0,10)$ tiene la expresión $v(t)=t^2-8t+60$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $v'(t)=2t-8$.

La función en el intervalo $(10,24]$ tiene la expresión $v(t)=-t^2+32t-140$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $v'(t)=-2t+32$.

Estudiamos la continuidad en *t = 10*.

- Existe $v(10)=10^2-8\cdot10+60=80$
- Existe $\lim_{t\to10^-} v(t)=\lim_{t\to10^-} t^2-8t+60=80$
- Existe $\lim_{t\to10^+} v(t)=\lim_{t\to10^+} -t^2+32t-140=-10^2+320-140=80$
- Los tres valores son iguales

Se cumplen todas las condiciones y la función es continua en [0, 24].

Estudiamos la derivabilidad en *t = 10*. Para ello comprobamos si las derivadas laterales coinciden.

La derivada de la función es $v'(t)=\begin{cases} 2t-8 & si\ 0\le t<10 \\ -2t+32 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} v'(10^-)=\lim_{t\to10^-} 2t-8=20-8=12 \\ v'(10^+)=\lim_{t\to10^+} -2t+32=-20+32=12 \end{array}\right\}\Rightarrow v'(10^-)=v'(10^+)=12$$

La función es derivable en *t = 10*.
La función es derivable en [0, 24].

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

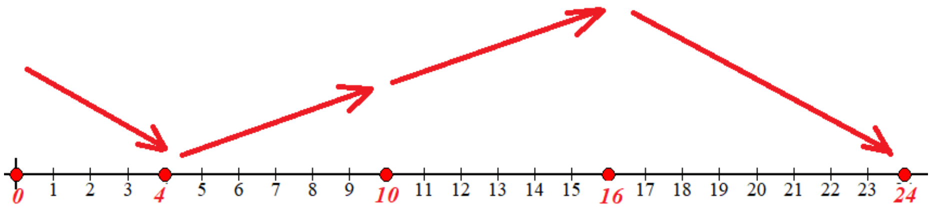
$$v'(t)=0\Rightarrow\begin{cases} 2t-8=0\to 2t=8\to t=4\in(0,10) \\ -2t+32=0\to 2t=32\to t=16\in(10,24) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *t = 4*, *t = 10* y *t = 16*.

- En el intervalo $[0,4)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $v'(1)=2\cdot1-8=-6<0$. La función decrece en $[0,4)$.

- En el intervalo $(4,10)$ tomamos *t = 5* y la derivada vale $v'(t) = 2 \cdot 5 - 8 = 2 > 0$. La función crece en $(4,10)$
- En el intervalo $(10,16)$ tomamos *t = 11* y la derivada vale $v'(11) = -2 \cdot 11 + 32 = 10 > 0$. La función crece en $(10,16)$
- En el intervalo $(16,24]$ tomamos *t = 20* y la derivada vale $v'(20) = -2 \cdot 20 + 32 = -8 < 0$. La función decrece en $(16,24]$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $[0,4) \cup (16,24]$ y crece en $(4,16)$.
La función presenta un mínimo relativo en *t = 4* y un máximo relativo en *t = 16*.
Valoramos la velocidad del viento en estos valores y en los extremos del intervalo para establecer los máximos y mínimos absolutos.

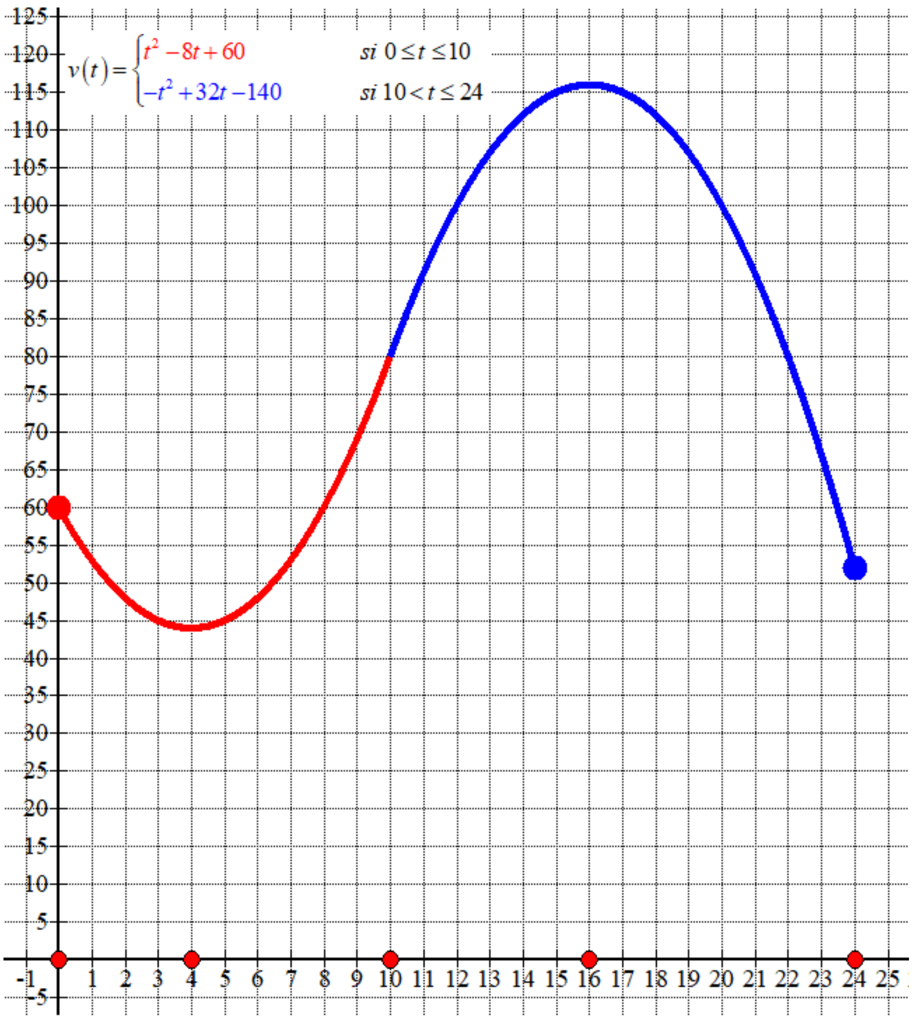
$$v(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 60 = 60$$
$$v(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 60 = 44$$
$$v(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 60 = 80$$
$$v(16) = -16^2 + 32 \cdot 16 - 140 = 116$$
$$v(24) = -24^2 + 32 \cdot 24 - 140 = 52$$

La máxima velocidad de viento es de 116 km/ y se produce a las 16 horas. La mínima velocidad de viento es de 44 km/h y se produce a las 4 horas.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$v(t) = t^2 - 8t + 60$
0	60
4	44 *Mínimo*
10	80

t	$v(t) = -t^2 + 32t - 140$
11	91
16	116 *Máximo*
24	52



c) Observando la gráfica vemos que hay momentos en los que el viento supera los 100 km/h y nunca se superan los 140 km/h. No habrá alerta roja pues no está previsto que se superen los 140 km/h.
Observamos que es entre las 10 y las 24 horas cuando se producen vientos más fuertes.
Averiguamos cuando el viento alcanza los 100 km/h.

$$v(t)=100 \Rightarrow -t^2+32t-140=100 \Rightarrow t^2-32t+240=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{32\pm\sqrt{(-32)^2-4(1)(240)}}{2}=\frac{32\pm 8}{2}=\begin{cases} \frac{32+8}{2}=\boxed{20=t} \\ \frac{32-8}{2}=\boxed{12=t}\end{cases}$$

Habrá alerta naranja entre las 12 y las 20 horas. Antes y después de este intervalo el viento será inferior a los 100 Km/h.

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: “Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*”.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Conductores sénior	Conductores jóvenes	
Coches viejos		21	
Coches nuevos			19
		29	54

Completamos la tabla.

	Conductores sénior	Conductores jóvenes	
Coches viejos	**14**	21	**35**
Coches nuevos	**11**	**8**	19
	25	29	54

a) Hay 14 siniestros con coche viejo y conductor sénior de un total de 54 siniestros. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo* vale $\frac{14}{54}=\frac{7}{27}\simeq 0.26$.

b) Hay 35 siniestros con coche viejo y de ellos hay 21 con conductor joven. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo* vale $\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=0.6$.

c) Del total de 54 siniestros hay 11 con conductor senior y coche nuevo, 14 con conductor senior y coche viejo, 8 con coche nuevo y conductor joven y 21 con conductor joven y coche viejo. Según este estudio el menor número de siniestros se produce con conductor joven y coche nuevo. La afirmación es falsa.

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

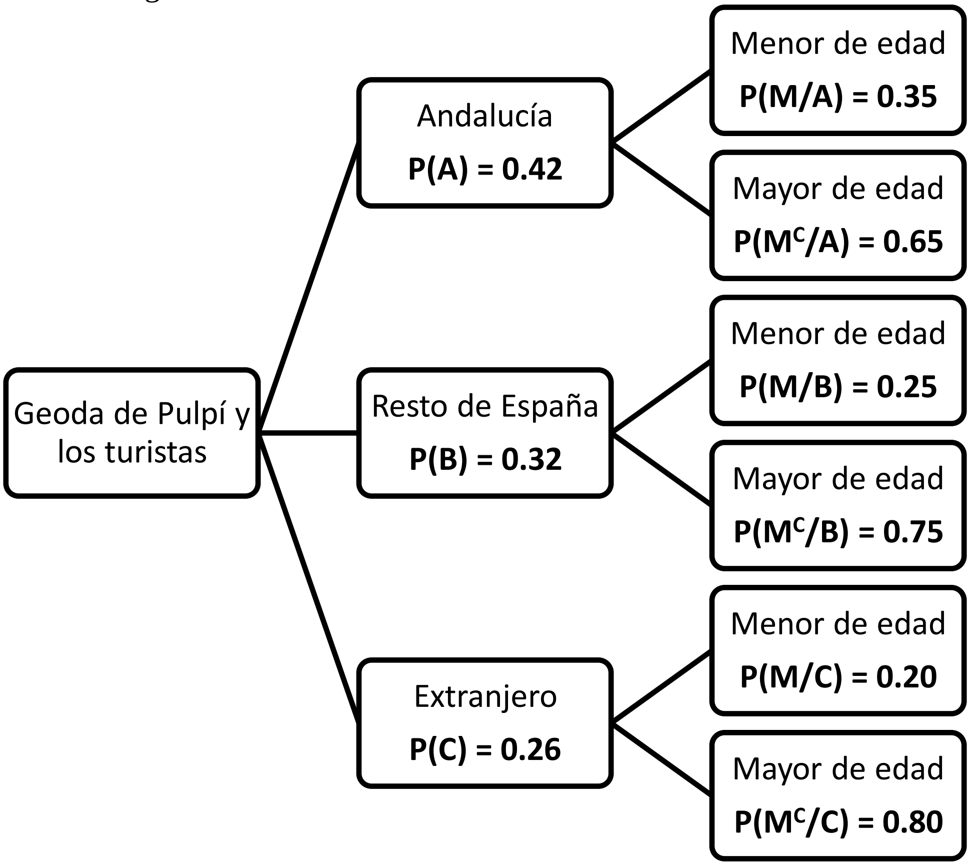
a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Llamamos A al suceso “el turista procede de Andalucía”, B a “el turista procede de otras comunidades autónomas” y C a “el turista es extranjero”. Llamamos M al suceso “Ser menor de edad”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(M^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total y la información del diagrama.

$$P\left(M^C\right)=P(A)P\left(M^C/A\right)+P(B)P\left(M^C/B\right)+P(C)P\left(M^C/C\right)=$$

$$=0.42\cdot 0.65+0.32\cdot 0.75+0.26\cdot 0.80=\boxed{0.721}$$

La probabilidad de que el turista sea mayor de edad es de 0.721.

b) Nos piden calcular $P(A\cap M)$.

$$P(A\cap M)=P(A)P(M/A)=0.42\cdot 0.35=\boxed{0.147}$$

La probabilidad de que el turista sea un andaluz menor de edad es de 0.147.

c) Nos piden calcular $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C)P(M/C)}{1-P(M^C)}=\frac{0.26\cdot 0.2}{1-0.724}=\frac{13}{69}\simeq 0.1884$$

La probabilidad de que el turista sea extranjero sabiendo que es menor de edad es de 0.1884.

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población {–3,–1, 2, 5, 7}, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

a) En la primera muestra en el estrato E_1 se eligen 25 individuos de 500. En el estrato E_2 se eligen en la misma proporción, tenemos:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Elegidos} & \textit{Total} \\ E_1 & 25 \longrightarrow & 500 \\ E_2 & 30 \longrightarrow & x \end{array} \left. \right\} \Rightarrow 25x = 500 \cdot 30 \Rightarrow x = \frac{15000}{25} = 600$$

En el estrato E_2 hay 600 individuos.

En la segunda muestra en el estrato E_3 se eligen 80 individuos de 400. En el estrato E_4 se eligen en la misma proporción, tenemos:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Elegidos} & \textit{Total} \\ E_3 & 80 \longrightarrow & 400 \\ E_4 & 100 \longrightarrow & y \end{array} \left. \right\} \Rightarrow 80y = 400 \cdot 100 \Rightarrow y = \frac{40000}{80} = 500$$

En el estrato E_4 hay 500 individuos.

El estrato E_1 tiene 500 individuos, el E_2 tiene 600, el E_3 tiene 400 y el E_4 tiene 500.

La proporción en la que se eligen en la primera muestra es $\frac{25}{500} = \frac{1}{20}$, por lo que en el estrato E_2 se eligen 30, en el E_3 se eligen $\frac{1}{20}400 = 20$ y en el E_4 se eligen $\frac{1}{20}500 = 25$.

La proporción en la que se eligen en la segunda muestra es $\frac{80}{400} = \frac{1}{5}$, por lo que en el estrato E_1 se eligen $\frac{1}{5}500 = 100$, en el E_2 se eligen $\frac{1}{5}600 = 120$ y en el E_3 se eligen 80 y en el E_4 se eligen 100..

b) La media de la distribución de las medias muestrales coincide con la media poblacional.

$$\bar{x} = \frac{-3-1+2+5+7}{5} = 2$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$Varianza(X) = \frac{\sum (x_i)^2}{5} - (\bar{x})^2 = \frac{9+1+4+25+49}{5} - 2^2 = 13.6$$

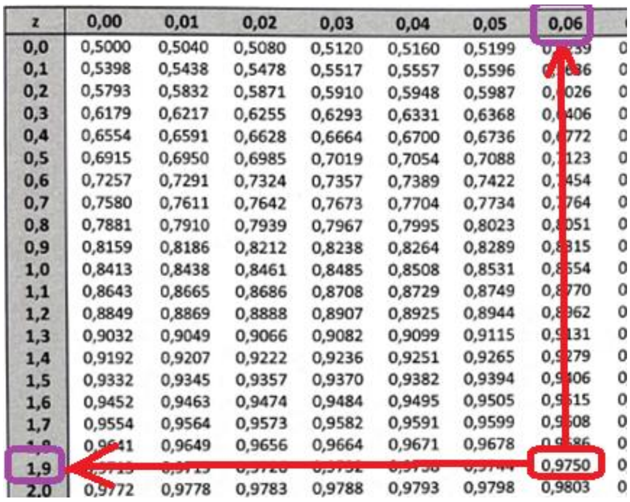
La varianza de la distribución de las medias muestrales es la varianza poblacional dividida entre el tamaño de las muestras (2) → $\frac{13.6}{2} = 6.8$

EJERCICIO 8
Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.
a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible
b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%.
c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

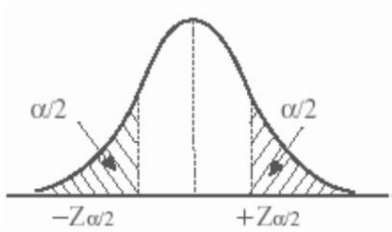
Tamaño de la muestra es $n = 2500$. $pr = \dfrac{1685}{2500} = 0.73$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.73 = 0.27$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]	0
[illegible]	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]	0
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}} \simeq 0.0174$$

El error es de 0.0174.
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error\right) = \left(0.73 - 0.0174,\quad 0.73 + 0.0174\right) = \left(0.7126,\ 0.7474\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

El error máximo es de 0.01, lo sustituimos en la fórmula y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{2.17} = \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2 = \frac{0.73 \cdot 0.27}{n} \Rightarrow n = \frac{0.73 \cdot 0.27}{\left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2} \simeq 9281.24$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 9282 habitantes.

c) La amplitud del intervalo es el Error que calculamos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$.

Si disminuimos el tamaño de la muestra (n) aumentará el error y la amplitud del intervalo será mayor.