PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.

b) **(1 punto)** Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{5}$.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

b) **(1.5 puntos)** Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

EJERCICIO 4

Se consideran las funciones

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\quad -1\le x\le 1\\ (x-2)^2 & si\quad 1<x\le 3\end{cases};\qquad g(x)=1\quad si\quad -1\le x\le 3$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f y g en sus dominios.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45% de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40% no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, sólo el 30% compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(0.75 puntos)** Compre novelas históricas y de fantasía.

b) **(1 punto)** No compre novelas históricas y tampoco de fantasía.

c) **(0.75 puntos)** Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

EJERCICIO 6

Una fábrica dispone de 3 máquinas A, B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25% de las piezas son fabricadas por la máquina A, el 35% por B y el resto por C. Tras un estudio se determina que el 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1% de las piezas fabricadas por B son defectuosas.

a) **(1.25 puntos)** Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B?

b) **(1.25 puntos)** Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

a) **(1.5 puntos)** Estime, mediante un intervalo de confianza del 97.5%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%.

b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2.5%?

EJERCICIO 8

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

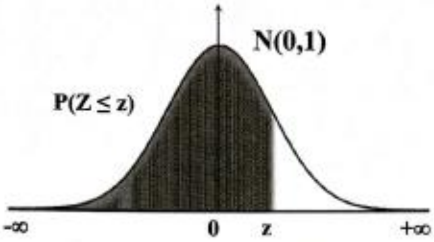
2.71 3.84 3.26 2.28 2.86 3.08 3.07 2.46 2.54 2.58

Por experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.36 minutos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93.5% de confianza.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0.05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.

b) **(1 punto)** Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$.

a) Despejamos la matriz A de la ecuación matricial.

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=J\Rightarrow PP^{-1}\cdot A\cdot P=P\cdot J\Rightarrow A\cdot P=P\cdot J\Rightarrow A\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot P^{-1}\Rightarrow A=P\cdot J\cdot P^{-1}$$

Comprobamos que la matriz P tiene inversa, para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|P|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{vmatrix}=-1+0+0-1-0-0=-2\neq 0$$

Calculamos la matriz inversa de P.

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz A.

$$A=P\cdot J\cdot P^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2+0+0&-2-2+0&-2+0+0\\0&-4&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-4&-2\\0&-4&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2+1 & -4-1 & -2-1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2+0-1 & -4+4+1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Sabemos que $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Lo utilizamos para comprobar la igualdad.

$$A^3 = \left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right)\left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right)\left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right) = P \cdot J \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot J \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot J \cdot P^{-1} =$$

$$= \left\{P^{-1} \cdot P = I\right\} = P \cdot J \cdot I \cdot J \cdot I \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J \cdot J \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$$

Con lo que queda demostrada la igualdad $A^3 = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

Llamemos x = "número de centros florales", y = "número de candelabros".

Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x,y)=32x+35y$.
Las restricciones del problema son:

"En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas" → $12 \le x+y \le 40$

"El número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales" → $y \le \frac{x}{3}$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \le x+y \le 40 \\ y \le \dfrac{x}{3} \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
9	3
12	0

$x+y=40$

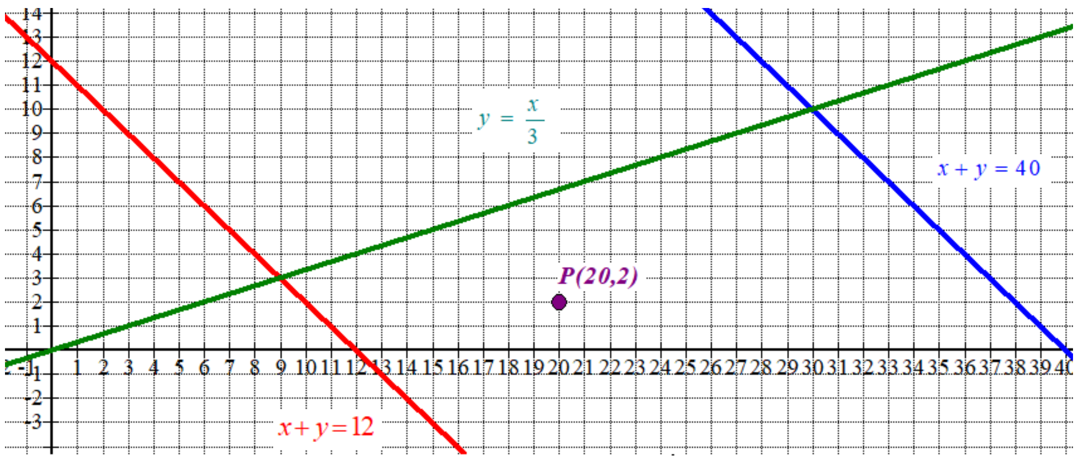
x	$y=40-x$
0	40
30	10
40	0

$y=\frac{x}{3}$

x	$y=\frac{x}{3}$
0	0
9	3
30	10

$x \ge 0;\ y \ge 0$

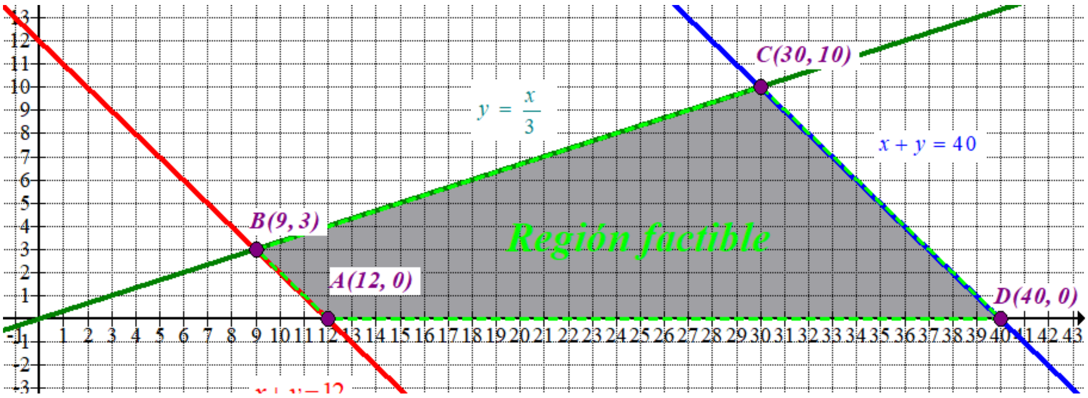
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 12 \leq x+y \leq 40 \\ y \leq \dfrac{x}{3} \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y azul y por encima de la recta roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(20, 2) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \leq 20+2 \leq 40 \\ 2 \leq \dfrac{20}{3} \\ 20 \geq 0;\ 2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los ingresos $I(x,y) = 32x + 35y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(12, 0) → $I(12,0) = 32 \cdot 12 + 35 \cdot 0 = 384$

B(9, 3) → $I(9,3) = 32 \cdot 9 + 35 \cdot 3 = 393$

C(30, 10) → $I(30,10) = 32 \cdot 30 + 35 \cdot 10 = 1310$ ¡Máximo!

D(40, 0) → $I(40,0) = 32 \cdot 40 + 35 \cdot 0 = 1280$

Los ingresos máximos son de 1310 € y se consiguen en el vértice C(30, 10), que significa poner 30 centros florales y 10 candelabros.

EJERCICIO 3

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\frac{x^2}{5}$.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

b) **(1.5 puntos)** Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

a) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2+6x=\frac{x^2}{5}\Rightarrow -5x^2+30x=x^2\Rightarrow -6x^2+30x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-5=0\Rightarrow x=5\end{cases}$$

La región del plano delimitada por la gráfica de las dos funciones está situada entre 0 y 5.
Hallamos el vértice de las parábolas $f(x)$ y *g(x)*.

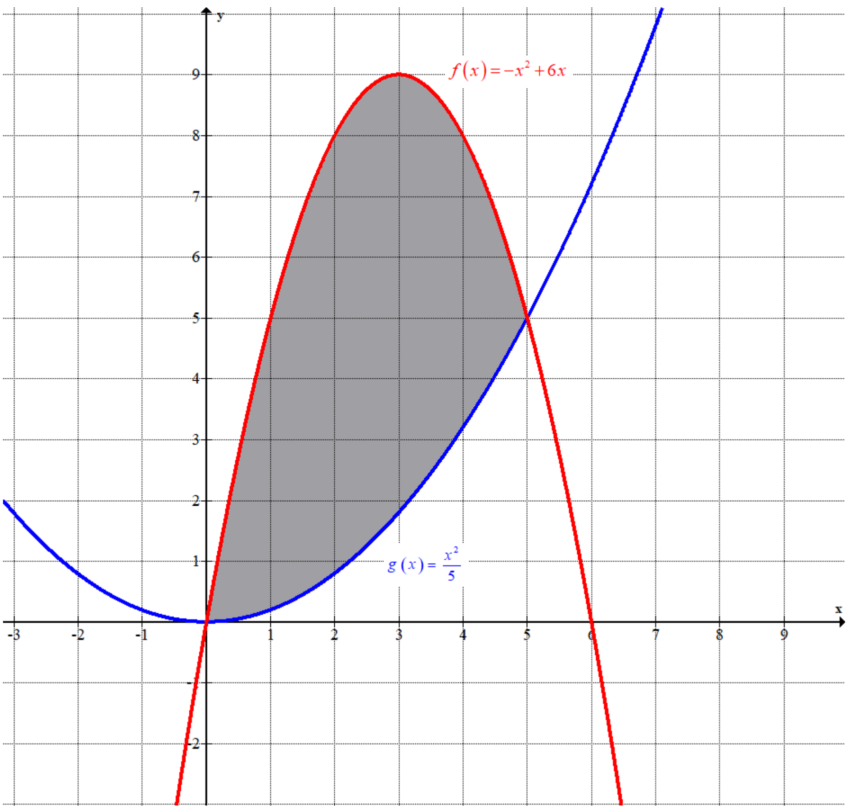
$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=-2x+6\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2x+6=0\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3$$

$$\left.\begin{array}{l}g'(x)=\frac{2x}{5}\\ g'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2x}{5}=0\Rightarrow x=0$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la región del plano delimitada por las dos gráficas.

x	$f(x)=-x^2+6x$
0	0
1	5
2	8
3	9
5	5

x	$g(x)=\frac{x^2}{5}$
0	0
1	$1/5$
2	$4/5$
3	$9/5$
5	5



b) El área de la ampliación es la integral definida entre 0 y 5 de $f(x)-g(x)$.

$$Área=\int_0^5 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^5 -x^2+6x-\frac{x^2}{5}\,dx=\int_0^5 -\frac{6}{5}x^2+6x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{6}{5}\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^5=\left[-\frac{2x^3}{5}+3x^2\right]_0^5=\left[-\frac{2\cdot5^3}{5}+3\cdot5^2\right]-\left[-\frac{2\cdot0^3}{5}+3\cdot0^2\right]=25\ dam^2$$

El área de la ampliación tiene un valor de 25 decámetros cuadrados, que equivalen a 2500 metros cuadrados.

Como el precio del nuevo suelo es de 75 €/m^2 el coste del acondicionamiento es de $2500\cdot75=187500$ euros.

EJERCICIO 4

Se consideran las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & si \ -1\le x\le 1 \\ (x-2)^2 & si \ \ 1<x\le 3 \end{cases}; \qquad g(x)=1 \quad si \ -1\le x\le 3$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* y *g* en sus dominios.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

a) La función en el intervalo $[-1,1)$ tiene la expresión $f(x)=2-x^2$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f\,'(x)=-2x$.

La función en el intervalo $(1,3]$ tiene la expresión $f(x)=(x-2)^2$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f\,'(x)=2(x-2)$.

Estudiamos la continuidad de *f(x)* en *x = 1*.

- Existe $f(1)=2-1^2=1$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2-x^2=1$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} v(t)=\lim_{x\to 1^+} (x-2)^2=(1-2)^2=1$
- Los tres valores son iguales.

Se cumplen todas las condiciones y *f(x)* es continua en *x = 1*.
La función es continua en [–1, 3].

Estudiamos la derivabilidad en *x = 1*. Para ello comprobamos si las derivadas laterales coinciden.

La derivada de la función es $f\,'(x)=\begin{cases} -2x & si -1\le x<1 \\ 2(x-2) & si \ 1<x\le 3 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} -2x=-2 \\ f\,'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} 2(x-2)=2(1-2)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f\,'(1^-)=f\,'(1^+)=-2$$

La función es derivable en *x = 1*.
La función es derivable en [–1, 3].

La función *g(x)* es una función constante que es continua y derivable en [–1, 3].

b) Averiguamos donde coinciden las gráficas de las dos funciones.

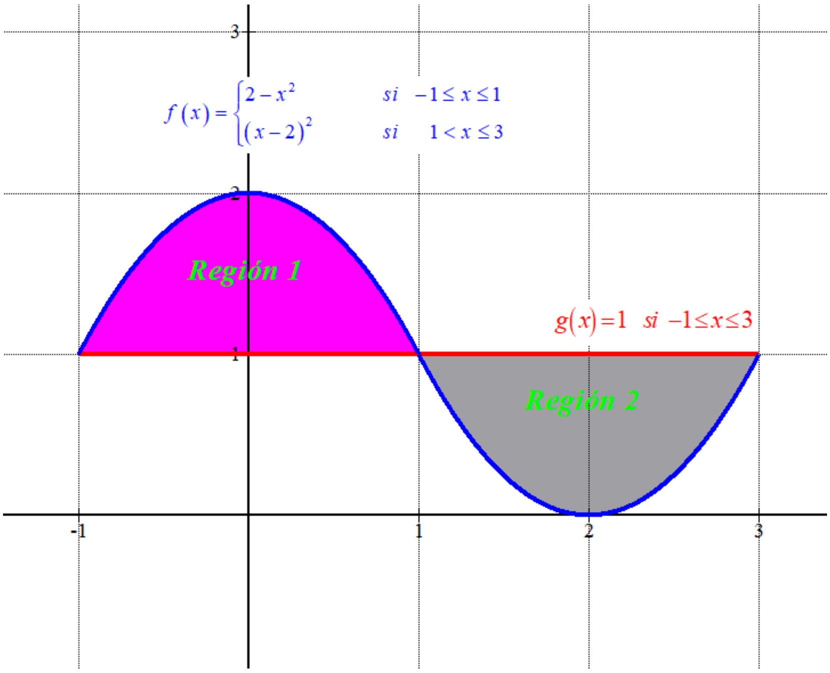
$$f(x)=g(x)\Rightarrow \begin{cases} 2-x^2=1\to 1=x^2\to x=\sqrt{1}=\pm 1\in[-1,1] \\ (x-2)^2=1\to x-2=\sqrt{1}=\pm 1\to \begin{cases} x-2=-1\to x=1\notin(1,3] \\ x-2=1\to x=3\in(1,3] \end{cases} \end{cases}$$

Las gráficas coinciden en tres puntos. El área del recinto limitado por ellas lo dividimos en dos partes que calculamos con dos integrales definidas: una entre –1 y 1 y la segunda entre 1 y 3.

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas de las funciones y la región encerrada entre ellas.

x	$f(x)$
-1	1
0	2
1	1
2	0
3	1

x	$g(x)=1$
-1	1
0	1
1	1
2	1
3	1



Calculamos el área de la región 1.

$$Área\,1=\int_{-1}^{1} f(x)-g(x)dx=\int_{-1}^{1} 2-x^2-1dx=\int_{-1}^{1}1-x^2dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left[1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[-1-\frac{(-1)^3}{3}\right]=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\,u^2$$

Calculamos el área de la región 2.

$$Área\,2=\int_{1}^{3} g(x)-f(x)dx=\int_{1}^{3}1-(x-2)^2\,dx=\int_{1}^{3}1-\left(x^2-4x+4\right)dx=$$

$$=\int_{1}^{3}-x^2+4x-3dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right]=-9+18-9+\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}\,u^2$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es la suma de las dos áreas obtenidas: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\simeq 2.667\,u^2$.

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45% de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40% no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, sólo el 30% compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(0.75 puntos)** Compre novelas históricas y de fantasía.

b) **(1 punto)** No compre novelas históricas y tampoco de fantasía.

c) **(0.75 puntos)** Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

Hay un 40 % de clientes que no compran novelas de fantasía, por lo que el 100 – 40 = 60 % de los clientes compran novelas de fantasía. De estos sólo el 30% compran también novelas históricas, es decir, $0.60 \cdot 0.30 = 0.18$. Por lo que el 18 % de los clientes compran novelas históricas y de fantasía.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Compran novelas de fantasía	No compran novelas de fantasía	
Compran novelas históricas	18		45
No compran novelas históricas			
	60	40	100

Completamos la tabla.

	Compran novelas de fantasía	No compran novelas de fantasía	
Compran novelas históricas	18	**27**	45
No compran novelas históricas	**42**	**13**	**55**
	60	40	100

a) Hay un 18 % de clientes que compran novela histórica y novela de fantasía. La probabilidad de que un cliente compre novelas históricas y de fantasía es de 0.18.

b) Hay un 13 % de clientes que no compran novelas históricas ni de fantasía. La probabilidad de que un cliente no compre novelas históricas y tampoco de fantasía es de 0.13.

c) Hay un 55 % de clientes que no compran novelas históricas y un 42 % compran novela de fantasía, pero no histórica.
La probabilidad de que un cliente compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica es $\frac{42}{55} \simeq 0.7636$.

EJERCICIO 6

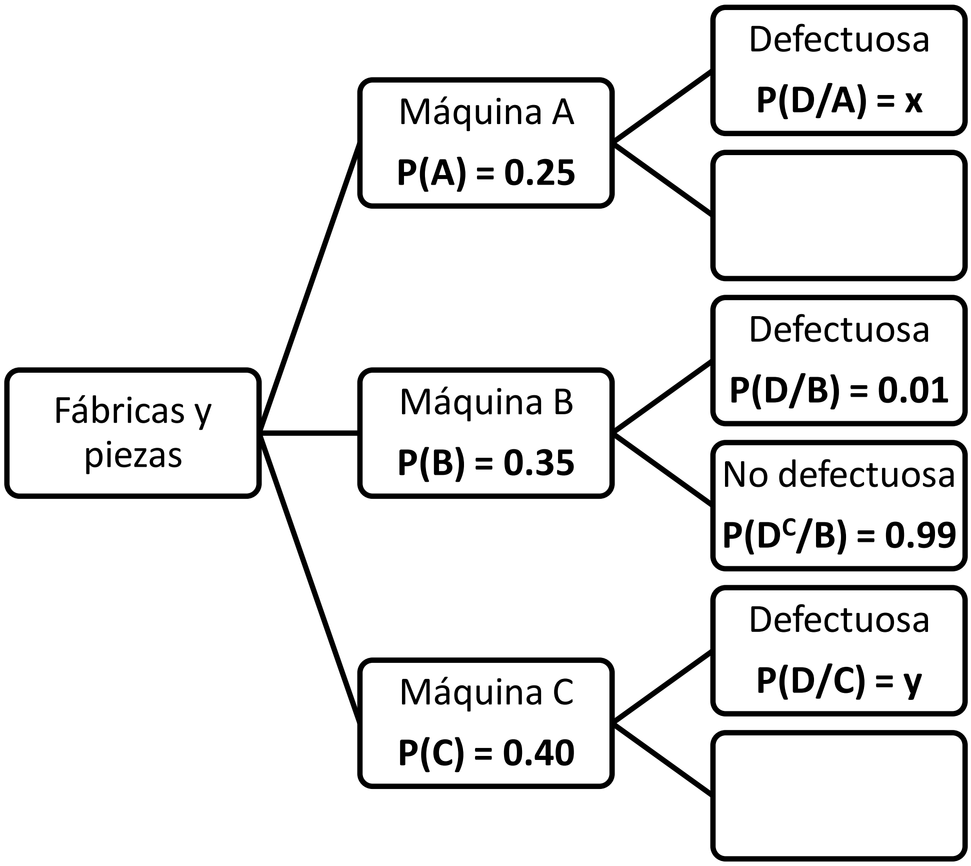
Una fábrica dispone de 3 máquinas A, B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25% de las piezas son fabricadas por la máquina A, el 35% por B y el resto por C. Tras un estudio se determina que el 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1% de las piezas fabricadas por B son defectuosas.

a) **(1.25 puntos)** Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B?

b) **(1.25 puntos)** Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?

Llamamos A al suceso "la pieza la fabrica la máquina A", B a "la pieza la fabrica la máquina B" y C a "la pieza la fabrica la máquina C". Llamamos D al suceso "la pieza es defectuosa".

Realizamos un diagrama de árbol.



El 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas lo que implica que $P(D)=0.0205$.

a) Nos piden calcular $P\left(B/D^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/D^C\right)=\frac{P\left(B\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P(B)P\left(B/D^C\right)}{1-P(D)}=\frac{0.35\cdot 0.99}{1-0.0205}=\boxed{\frac{231}{653}\simeq 0.3538}$$

La probabilidad de que una pieza no defectuosa haya sido fabricada por la máquina B es de 0.3538.

b) Si $P(D/A)=P(D/C)$ tenemos que $x=y$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.0205=0.25\cdot x+0.35\cdot 0.01+0.4\cdot x\Rightarrow 0.65x=0.017\Rightarrow x=\frac{0.017}{0.65}\simeq 0.0262$$

Hemos obtenido que $P(D/A)=P(D/C)=0.0262$.

Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.0262}{0.0205}=\frac{131}{410}\simeq 0.319$$

La probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa tiene un valor aproximado de 0.319.

EJERCICIO 7

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

a) **(1.5 puntos)** Estime, mediante un intervalo de confianza del 97.5%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%.

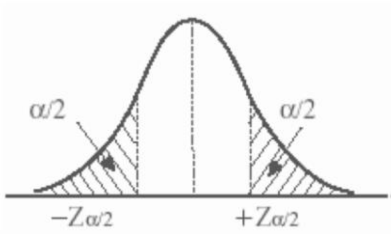
b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2.5%?

Tamaño de la muestra es $n = 220$. $pr = \dfrac{165}{220} = 0.75$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.75 = 0.25$

a) Con un nivel de confianza del 97.5 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	[illegible]
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5[illegible]57	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5[illegible]48	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6[illegible]31	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6[illegible]00	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7[illegible]54	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7[illegible]89	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7[illegible]04	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7[illegible]95	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8[illegible]64	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8[illegible]08	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8[illegible]29	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8[illegible]25	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9[illegible]99	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9[illegible]51	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9[illegible]82	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9[illegible]95	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9[illegible]91	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9[illegible]71	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9[illegible]38	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9[illegible]93	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	[illegible]	0,
2,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9875	0,
[illegible]	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	[illegible]	0,



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{220}} \simeq 0.0654$$

El error es de 0.0654.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error \right) = \left(0.75 - 0.0654,\quad 0.75 + 0.0654 \right) = \left(0.6846, 0.8154 \right)$$

Con un nivel de confianza del 97.5% la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra estaría entre 68.46% y 81.54%.

¿Puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%?

Si, pues este porcentaje está en el intervalo de confianza obtenido.

b) Con un nivel de confianza del 97.5 % tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2.24**. La proporción muestral es $pr = 0.75$.

El error máximo es de 0.025, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.025 = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow \frac{0.025}{2.24} = \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.025}{2.24}\right)^2 = \frac{0.75 \cdot 0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.75 \cdot 0.25}{\left(\frac{0.025}{2.24}\right)^2} = 1505.28$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1506 enfermos.

EJERCICIO 8

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

2.71 3.84 3.26 2.28 2.86 3.08 3.07 2.46 2.54 2.58

Por experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.36 minutos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93.5% de confianza.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0.05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

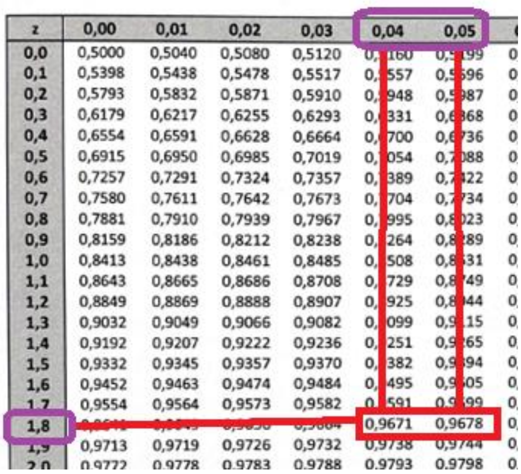
Calculamos la media de la muestra.

$$\bar{x} = \frac{2.71+3.84+3.26+2.28+2.86+3.08+3.07+2.46+2.54+2.58}{10} = 2.868 \text{ minutos}$$

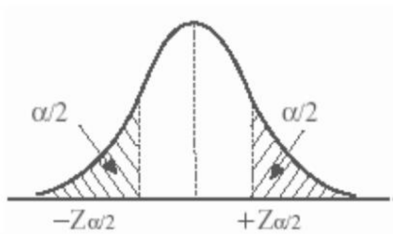
X = Tiempo en minutos de cada repetición cronometrada de una prueba.
X = N(μ, 0.36)

a) El tamaño de la muestra es n = *10*. La media muestral es $\bar{x} = 2.868$ minutos.
Con un nivel de confianza del 93.5% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.935 \rightarrow \alpha = 0.065 \rightarrow \alpha/2 = 0.0325 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9675 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.84+1.85}{2} = 1.845$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	[illegible]	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	[illegible]	[illegible]
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{10}} = 0.21$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(2.868 - 0.21,\ 2.868 + 0.21\right) = \left(2.658,\ 3.078\right)$$

a) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 1.845**.

El error máximo es de 0.05 minutos, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.05\sqrt{n} = 1.845 \cdot 0.36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.845 \cdot 0.36}{0.05} \Rightarrow n = \left(\frac{1.845 \cdot 0.36}{0.05}\right)^2 \simeq 176.46$$

El número mínimo de repeticiones es de 177.