



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumnado deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a las tres preguntas de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular, cuando sea posible, $A \cdot C$, $B \cdot C$ (1 punto)

b) Calcular el determinante de la matriz $\frac{1}{4}B \cdot C$ (1 punto)

c) Obtener la matriz X tal que: $A \cdot X = \frac{1}{4}B \cdot C$ (1,5 puntos)

Solución:

a) El producto $A \cdot C$ no podemos calcularlo ya que no se cumple que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz C .

Esta condición si se cumple en el caso de $B \cdot C$.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{4}B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{1}{4}B \cdot C \right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$\text{c) Vamos a obtener la matriz } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ tal que } A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_{11} = 2 \Rightarrow x_{11} = 1 \\ 2x_{12} = 4 \Rightarrow x_{12} = 2 \\ x_{11} + x_{21} = 3 \Rightarrow x_{21} = 2 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \Rightarrow x_{22} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Pregunta 2.** (3,5 puntos)

Se estima que los beneficios, en cientos de miles de euros, obtenidos en un teatro que lleva seis años funcionando vienen dados por la función:

$$B(t) = 9 - \frac{(t-3)^2}{2}, \quad 1 \leq t \leq 6$$

Siendo t el tiempo en años.

- a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio en el teatro? (2 puntos)
- b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)
- c) ¿En qué momento el beneficio obtenido fue igual a 700.000 euros? (1 punto)

Solución:

a) Se trata de maximizar el beneficio para ello hay que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada): $B'(t) = -(t-3) = 0 \Rightarrow t = 3$

Ahora calculamos el valor de la función en los puntos extremos (la función toma valores para $1 \leq t \leq 6$) y en el punto crítico:

$$B(1) = 9 - \frac{(1-3)^2}{2} = 7$$

$$B(3) = 9 - \frac{(3-3)^2}{2} = 9$$

$$B(6) = 9 - \frac{(6-3)^2}{2} = 4,5$$

Por lo tanto, el máximo beneficio se obtiene en el tercer año.

b) El beneficio máximo asciende a 900.000 euros.

c) Para obtener en qué momento el beneficio obtenido en el teatro fue igual a 700.000 euros, tenemos que obtener t tal que $B(t) = 7$

$$B(t) = 9 - \frac{(t-3)^2}{2} = 7 \Rightarrow -\frac{(t-3)^2}{2} = 7 - 9 = -2$$

$$(t-3)^2 = 4 \Rightarrow (t-3) = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow t = 1 \text{ y } t = 5$$

Por lo tanto, el teatro obtiene unos beneficios de 700.000 euros el primer año y el quinto año.

**Pregunta 3.** (3 puntos)

Los siguientes valores corresponden al tiempo que esperan para ser atendidos 20 clientes en una oficina bancaria (datos en minutos): 15, 5, 10, 5, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 7, 10, 10, 12, 11, 11, 12, 15, 12, 15.

- a) Calcular el tiempo medio de espera. (1 punto)
- b) Calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos. (0,5 puntos)
- c) Calcular el tiempo más frecuente de espera. Obtener el tercer cuartil. (1,5 puntos)

Solución:

En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i) :

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
5	5	5	5/20=0,25	5/20=0,25
6	3	8	3/20=0,15	8/20=0,4
7	1	9	1/20=0,05	9/20=0,45
10	3	12	3/20=0,15	12/20=0,6
11	2	14	2/20=0,1	14/20=0,7
12	3	17	3/20=0,15	17/20=0,85
15	3	20	3/20=0,15	20/20=1
TOTAL (N)		20		

- a) Para calcular el tiempo medio de espera, es decir, la media aritmética aplicamos la siguiente

formula: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N}$, en este caso:

$$\bar{x} = \frac{5 \times 5 + 6 \times 3 + 7 \times 1 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 3 + 15 \times 3}{20} = \frac{183}{20} = 9,15$$

El tiempo medio de espera es de 9,15 minutos.



b) Para calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas relativas. El 45 % de los clientes han esperado como mucho 7 minutos. Por lo tanto, el 55 % de los clientes esperan más de 7 minutos.

c) El tiempo más frecuente de espera es la moda. Para obtener la moda, nos fijamos en la columna de las frecuencias ordinarias y el valor de mayor frecuencia corresponde al valor $x_i = 5 \Rightarrow Mo = 5$.

Por tanto, el tiempo más frecuente de espera es de 5 minutos, el valor que más se repite (5 veces).

Para obtener el tercer cuartil nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas (N_i), buscamos $\frac{3 \times N}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15$, si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 15. En este caso no aparece 15 y hay que coger 17 que corresponde a $x_i = 12$. Por lo tanto, $Q_3 = 12$, lo que nos indica que el 75 % de los clientes han esperado como máximo 12 minutos.

Otra forma de obtener el tercer cuartil sería a partir de la columna de las frecuencias acumuladas relativas (F_i), buscamos 0,75 si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 0,75. En este caso no aparece 0,75 y hay que coger 0,85 que corresponde a $x_i = 12$. Por lo tanto, $Q_3 = 12$, lo que nos indica que el 75 % de los clientes han esperado como máximo 12 minutos.



OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dado el programa lineal:

$$\text{Max } 4x + 3y$$

sujeto a

$$2x + y \leq 10$$

$$x + 3y \leq 12$$

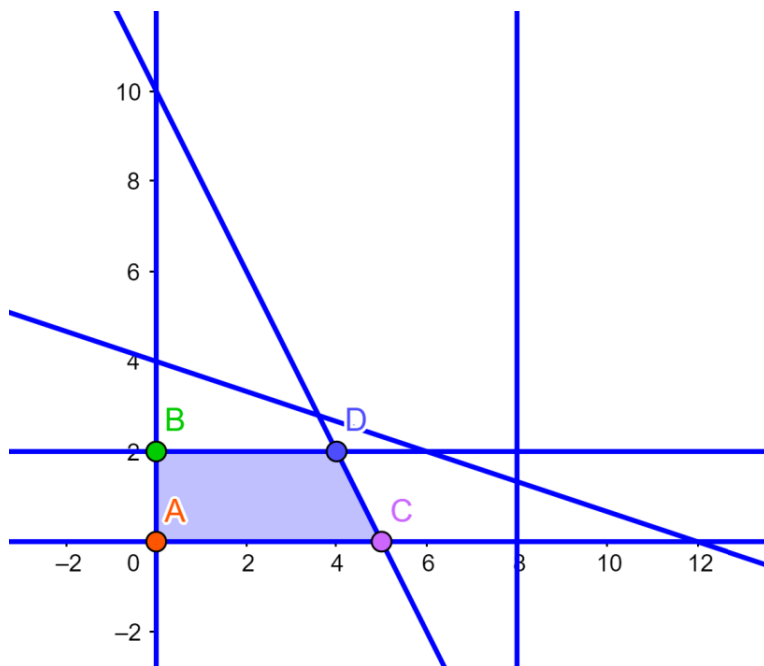
$$0 \leq x \leq 8$$

$$0 \leq y \leq 2$$

- a) Representar gráficamente la región factible del programa lineal. (1,5 puntos)
- b) ¿Podría encontrarse el máximo en el punto (8,2)? (0,5 puntos)
- c) Resolver el programa lineal. (1,5 puntos)

Solución:

- a) El conjunto factible es el recinto representado en azul en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: A(0,0), B(0,2), C(5,0), D(4,2)



Región factible



b) El máximo no podría encontrarse en el punto $(8,2)$, ya que dicho punto está fuera de la región factible.

c) Para obtener el máximo de la función objetivo $z(x,y) = 4x + 3y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible: $z(A) = 0$; $z(B) = 6$; $z(C) = 20$; $z(D) = 22$. Por lo tanto, el máximo se alcanza en el punto $D(4,2)$ y el valor máximo que alcanza esta función en la región factible es igual a 22.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{2x}{(x-4)^2}$

a) Estudie si la función es continua en los puntos $x = 3$ y $x = 4$ (2 puntos)

b) Calcule la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 5$ (1,5 puntos)

Solución:

a) En primer lugar, vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{2x}{(x-4)^2}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Luego la función está definida para todo número real distinto de 4: $Dom f = \mathbb{R} - \{4\}$

Teniendo en cuenta que la función no está definida para $x = 4$ podemos concluir que en dicho punto la función no es continua.

En el punto $x = 3$ la función es continua ya que:

$$\begin{cases} f(3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{(x-4)^2} = 6 \\ f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 \end{cases}$$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

$$\text{Si } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = (g/h)'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

$$\text{En este caso: } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x}{(x-4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-4)^2 - 2x(2(x-4))}{((x-4)^2)^2} = \frac{-2x-8}{(x-4)^3}$$



En el punto $x = 5 \Rightarrow f'(5) = \frac{-18}{(5-4)^3} = -18$

Pregunta 3. (3 puntos)

En cierta época del año se sabe que la probabilidad de que llueva es del 42 % y que hace viento el 25 % de los días que llueve y el 30 % de los días que no llueve. Elegido un día al azar de esa época del año:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento? (1,5 puntos).
- b) Si se sabe que hace viento ¿cuál es la probabilidad de que llueva? (1,5 puntos).

Solución:

Si denotamos por L el suceso “llueve” y por V el suceso “hace viento”, los datos del enunciado se traducen en:

$$P(L) = 0,42 \Rightarrow P(\bar{L}) = 1 - 0,42 = 0,58$$

$$P(V / L) = 0,25$$

$$P(V / \bar{L}) = 0,3$$

a) La probabilidad de que haga viento será:

$$P(V) = P(V / L)P(L) + P(V / \bar{L})P(\bar{L}) = 0,25 \times 0,42 + 0,3 \times 0,58 = 0,279$$

b) Si se sabe que hace viento, la probabilidad de que llueva será:

$$P(L / V) = \frac{P(L \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V / L)P(L)}{P(V)} = \frac{0,105}{0,279} = 0,3763$$



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Calcular el producto de las matrices: 1 punto.
- b) Calcular el determinante de la matriz: 1 punto.
- c) Resolver la ecuación matricial: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Obtener el momento en el que se alcanza el máximo beneficio: 2 puntos.
- b) Obtener el beneficio máximo: 0,5 puntos.
- c) Obtener el momento en el que el beneficio es igual a 700.000 euros: 1 punto.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Calcular la media aritmética: 1 punto.
- b) Calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos: 0.5 puntos.
- c) Calcular la moda y tercer cuartil: 1,5 puntos.

OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Representación gráfica de la región factible: 1,5 puntos.
- b) Responder razonadamente si el máximo puede estar en el punto: 0,5 puntos.
- c) Resolver el programa lineal: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Estudiar la continuidad: 2 puntos.
- b) Calcular la derivada: 1,5 puntos.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Resolución: 1,5 puntos.
- b) Resolución: 1,5 puntos.