Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

➢ Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
➢ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{ y }\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para *m = 1*.

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}-60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2\\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2<x\le 5\end{cases}$$

donde *x* representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) **[1.75 punto]** Estudia y representa gráficamente la función *f* entre las 0 y las 5 horas.

b) **[0.75 puntos]** Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(2) = 0*.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje *X* entre *x* = −2 y *x* = 1.

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

Pregunta 8. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l.*

a) **[1.5 puntos]** Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) **[0.5 puntos]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) **[0.5 puntos]** Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

[*] Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{ y }\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para *m = 1*.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A+B\cdot C=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m+1 & 2\\ m-2m & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E\Rightarrow(A+B\cdot C)\cdot D=3E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{matrix}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{matrix}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{matrix}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A. Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 4\end{vmatrix}=4-m^2$$

$$\left.\begin{matrix}|A|=4-m^2\\ |A|=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4-m^2=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m\neq\pm 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{matrix}x+2y=3\\ 2x+4y=6\end{matrix}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $m=-2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{matrix}x-2y=3\\ -2x+4y=-6\end{matrix}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una ecuación: $x-2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Respuestas: El sistema tiene solución para cualquier valor de *m*. La solución es única cuando $m \neq \pm 2$.

Resolvemos el sistema para *m = 1*. Sabemos que tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+4y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-y \\ x+4y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-y+4y=3 \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=3-0=3}$$

La solución es $x=3,\ y=0$.

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

a) Llamamos “x” al número de gorros e “y” al número de bufandas.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Metros de lana blanca	Metros de lana negra
Número de gorros (x)	50x	40x
Número de bufandas (y)	100y	100y
	$50x+100y$	$40x+100y$

“Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro” → $50x+100y\leq 2200;\ 40x+100y\leq 2000$

“El número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas” → $x\leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50x+100y\leq 2200 \\ 40x+100y\leq 2000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\leq 44 \\ 2x+5y\leq 100 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x+2y=44$

x	$y=\frac{44-x}{2}$
0	22
44	0

$2x+5y=100$

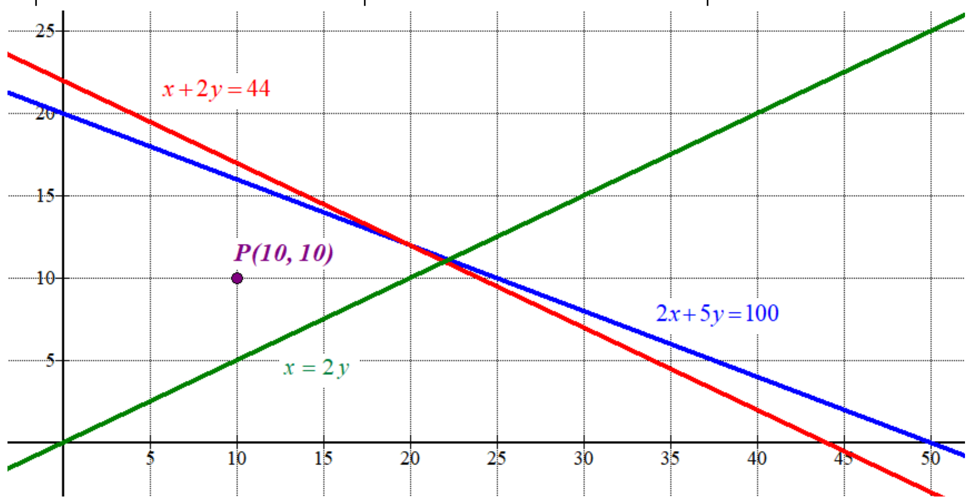
x	$y=\frac{100-2x}{5}$
0	20
50	0

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
20	10

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

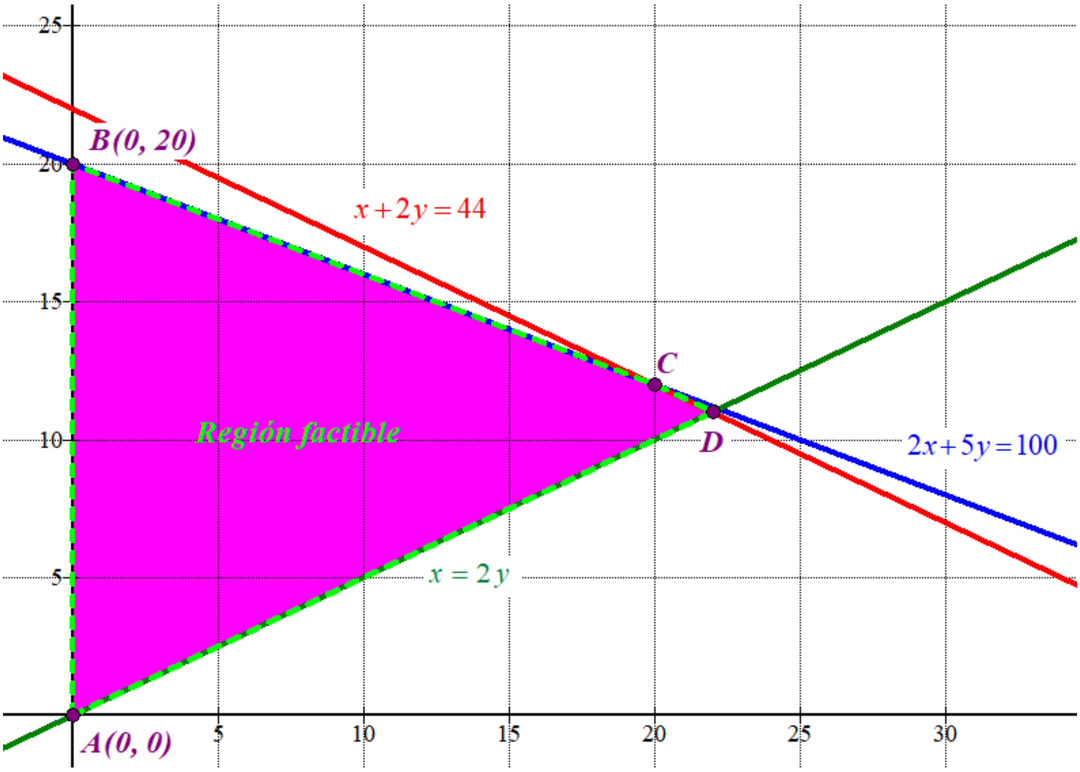


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 44 \\ 2x+5y\leq 100 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\leq 44 \\ 20+50\leq 100 \\ 10\leq 20 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices C y D.

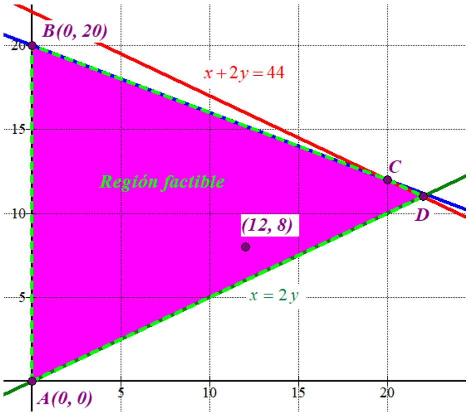
$$C\rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ 2x+5y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=44-2y \\ 2x+5y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(44-2y)+5y=100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88-4y+5y=100\Rightarrow y=12\Rightarrow x=44-24=20\Rightarrow C(20,12)$$

$$D\rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2y=44\Rightarrow 4y=44\Rightarrow y=\frac{44}{4}=11\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=22\Rightarrow D(22,11)$$

¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?
El punto (12, 8) pertenece a la región factible, por lo que si se pueden tejer 12 gorros y 8 bufandas.



b) Si vende cada gorro a 12 € y cada bufanda a 18 € los ingresos son $I(x,y)=12x+18y$. Deseamos maximizarlos.
Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

A(0,0) → $I(0,0)=0$

B(0, 20) → $I(0,20)=12\cdot 0+18\cdot 20=360$

C(20, 12) → $I(20,12)=12\cdot 20+18\cdot 12=456$

D(22, 11) → $I(22,11)=12\cdot 22+18\cdot 11=$ 462 ¡Máximo!

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 462 euros con la confección de 22 gorros y 11 bufandas.

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}-60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2\\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2<x\le 5\end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) **[1.75 punto]** Estudia y representa gráficamente la función *f* entre las 0 y las 5 horas.

b) **[0.75 puntos]** Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.
El dominio de la función es [0, 5].
La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x=2$.

- Existe $f(2)=-60\cdot 2^2+160\cdot 2=80$.
- Existe $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}-60x^2+160x=80$.
- Existe $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right)=\frac{10}{3}\left(2^2-14\cdot 2+48\right)=80$.
- Los tres valores son iguales.

Se cumple todo y la función es continua en $x = 2$.
La función es continua en todo su dominio.
Hallamos los puntos críticos de cada trozo.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\begin{cases}-120x+160 & si \quad 0\le x<2\\ \frac{10}{3}(2x-14) & si \quad 2<x\le 5\end{cases}\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}-120x+160=0\to x=\frac{160}{120}=\frac{4}{3}\in[0,2)\\ \frac{10}{3}(2x-14)=0\to x=\frac{14}{2}=7\notin(2,5]\end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $\left[0,\frac{4}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $f'(1)=-120\cdot 1+160=40>0$. La función crece en $\left[0,\frac{4}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{4}{3},2\right)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

  $f'(1.5)=-120\cdot 1.5+160=-20<0$. La función decrece en $\left(\frac{4}{3},2\right)$.

- En el intervalo $(2,5]$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

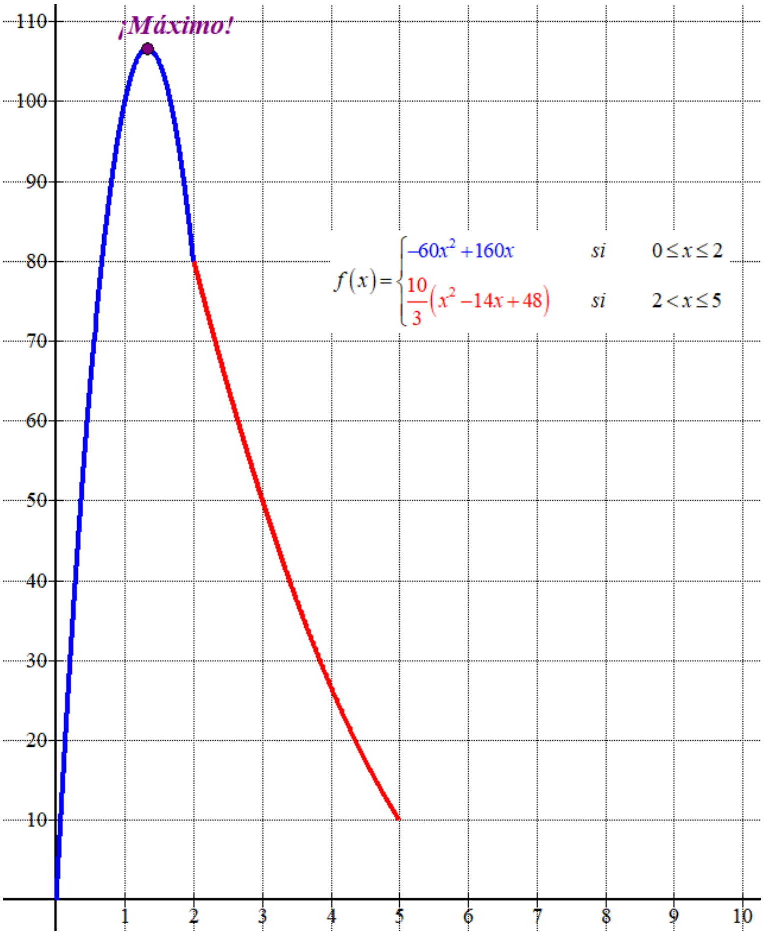
  $f'(x)=\frac{10}{3}(2\cdot 3-14)=\frac{-80}{3}<0$. La función decrece en $(2,5]$.

  La función tiene un máximo relativo en $x=\frac{4}{3}$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y=-60x^2+160x$
0	0
1	100
4 / 3	106.66
2	80

x	$y=\frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right)$
3	50
5	10



b) A las 3 horas de la ingesta el nivel de alcohol en sangre es de 50 mg/dl. Por lo que no podría conducir.
A las 5 horas de la ingesta el nivel de alcohol en sangre es de 10 mg/dl. Por lo que si podría conducir.

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(2) = 0*.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje *X* entre *x = −2* y *x = 1*.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x^3-2x^2-3xdx=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+K$$

Como debe ser *F(2) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+K \\ F(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2^4}{4}-2\frac{2^3}{3}-3\frac{2^2}{2}+K=0\Rightarrow 4-\frac{16}{3}-6+K=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K=\frac{16}{3}+2=\frac{22}{3}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+\frac{22}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+\frac{22}{3}$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua.
Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$Eje\,OY\rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0^3-2\cdot 0^2-3\cdot 0=0\Rightarrow A(0,0)$$

$$Eje\,OX\rightarrow f(x)=0\Rightarrow x^3-2x^2-3x=0\Rightarrow x\left(x^2-2x-3\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0\rightarrow A(0,0) \\ x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{2}=3=x\rightarrow B(3,0) \\ \dfrac{2-4}{2}=-1=x\rightarrow C(-1,0)\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x-3 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3x^2-4x-3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(-3)}}{2(3)}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{52}}{6}=\begin{cases}\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\simeq 1.87 \\ \dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\simeq -0.53\end{cases}$$

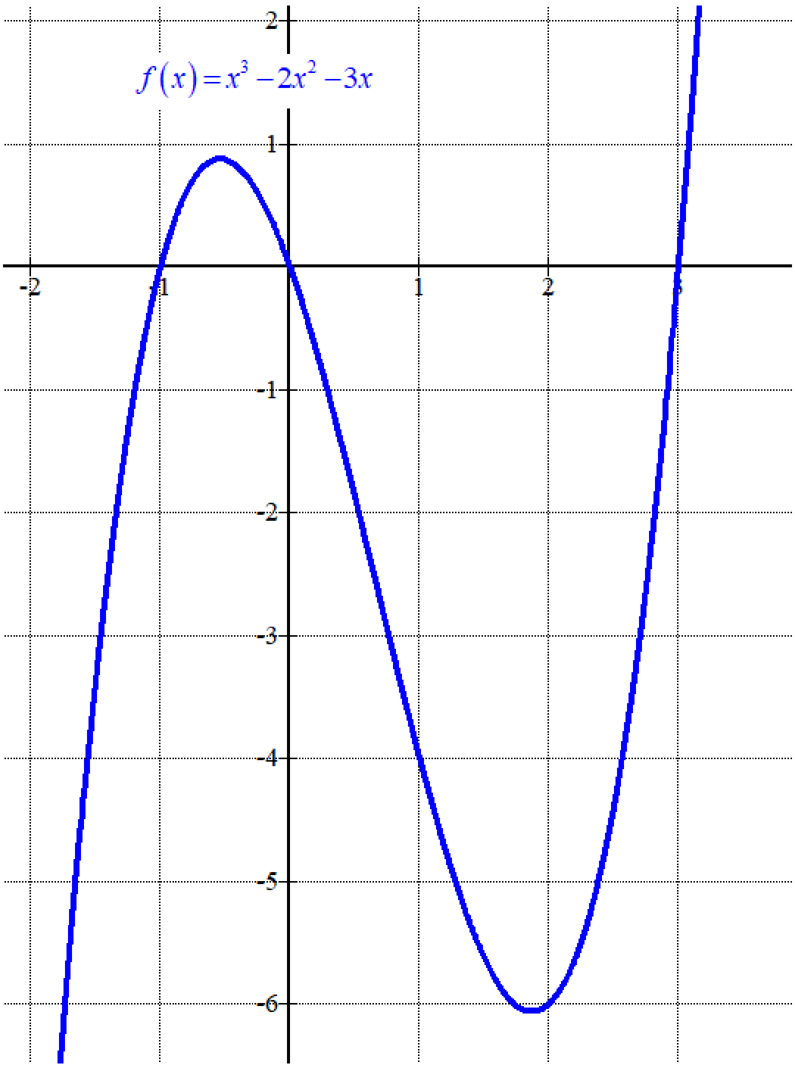
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) - 3 = 4 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y = x^3 - 2x^2 - 3x$
–2	–10
–1	0
0	0
1	–4
3	0
4	20



Como la función corta el eje X en $x = -1$ y en $x = 0$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$ la dividimos en tres partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre –2 y –1, otra entre –1 y 0, y por último entre 0 y 1.

$$\acute{A}rea\ regi\acute{o}n 1 = \left|\int_{-2}^{-1} x^3 - 2x^2 - 3x dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} - 3\frac{(-1)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} - 3\frac{(-2)^2}{2}\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 4 - \frac{16}{3} + 6\right| = \boxed{\frac{47}{12} \simeq 3.9u^2}$$

$$\acute{A}rea\ regi\acute{o}n 2 = \left|\int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 3x dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} - 3\frac{(-1)^2}{2}\right]\right| =$$

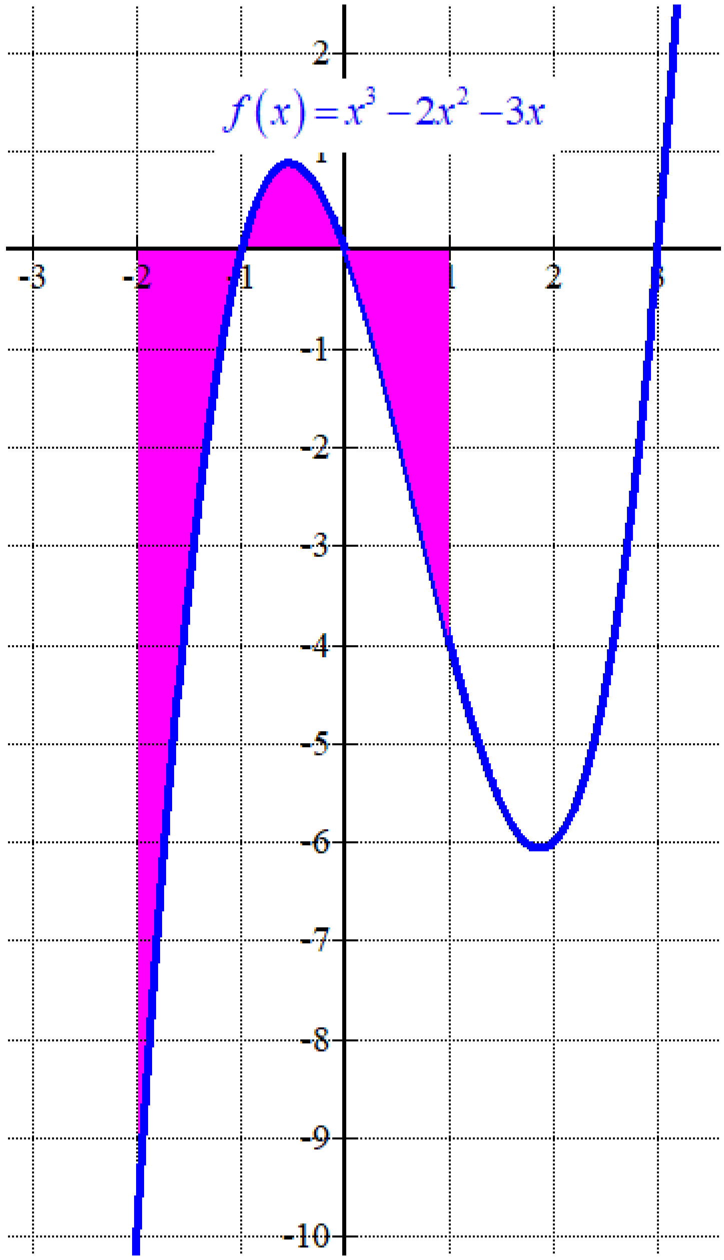
$$= \left|-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right| = \boxed{\frac{7}{12} \simeq 3.3u^2}$$

$$\acute{A}rea\ regi\acute{o}n 3 = \left|\int_{0}^{1} x^3 - 2x^2 - 3x dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{1^4}{4} - 2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2}\right]\right| =$$

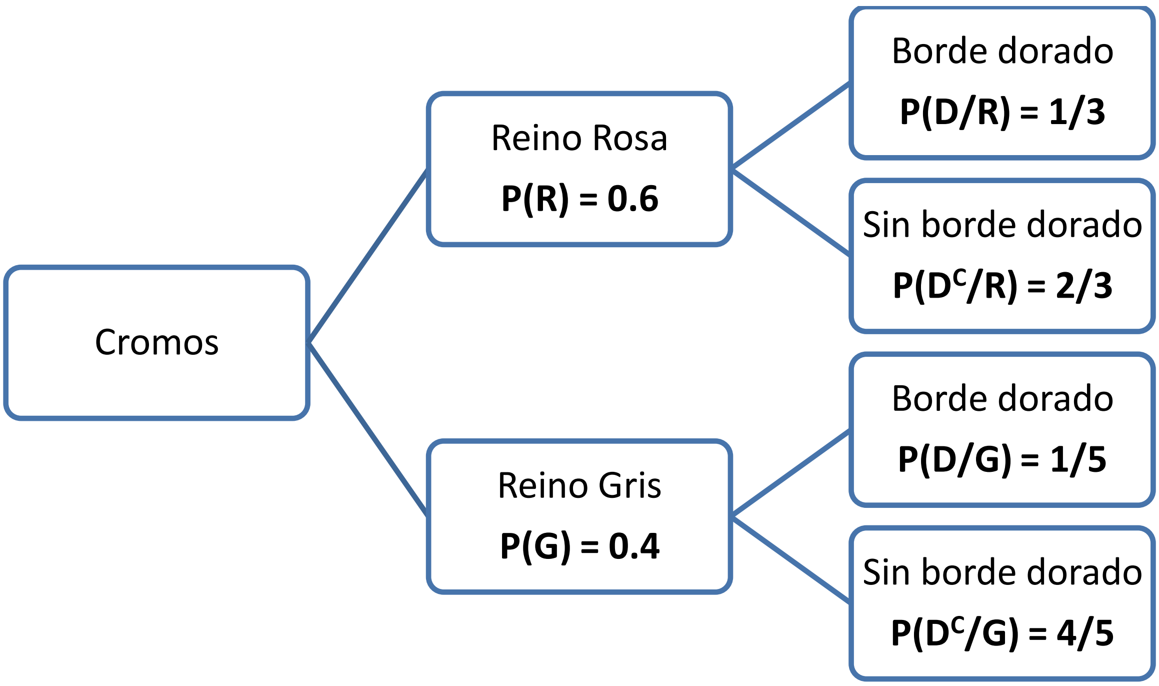
$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right| = \boxed{\frac{23}{12} \simeq 1.92u^2}$$

El área total es la suma de las tres áreas calculadas: $\frac{47}{12} + \frac{7}{12} + \frac{23}{12} = \boxed{\frac{77}{12} \simeq 6.42u^2}$


$f(x)=x^3-2x^2-3x$

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.
a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?
b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

a) Llamamos R al suceso "el cromo es de Reino Rosa", G a "el cromo es del Reino Gris" y D a "el cromo tiene el borde dorado".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(R)P(D/R)+P(G)P(D/G)=0.6\cdot\frac{1}{3}+0.4\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{7}{25}=0.28}$$

La probabilidad de que el cromo elegido tenga el borde dorado es de 0.28.

b) Nos piden calcular $P(R/D^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/D^C)=\frac{P(R\cap D^C)}{P(D^C)}=\frac{P(R)P(D^C/R)}{1-P(D)}=\frac{0.6\cdot\frac{2}{3}}{1-0.28}=\boxed{\frac{5}{9}\simeq 0.556}$$

La probabilidad de que el cromo sin borde dorado elegido sea del <<Reino Rosa>> tiene un valor aproximado de 0.556

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 cromos. De ellos 60 son del Reino Rosa y 40 del Reino Gris. De los 60 del Reino Rosa tenemos que un tercio tienen borde dorado, es decir, 20 cromos tienen borde dorado y son del Reino Rosa. De los 40 cromos del Reino Gris una quinta parte tienen borde dorado, es decir 8 cromos son del Reino Gris y tienen borde dorado.

a) Tenemos 20 cromos del Reino Rosa con borde dorado y 8 con borde dorado del Reino Gris. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(D)=\frac{20+8}{100}=0.28$$

b) Tenemos 40 cromos del Reino Rosa sin borde dorado y 32 del Reino Gris sin borde dorado. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P\left(R/D^C\right)=\frac{40}{40+32}=\frac{5}{9}$$

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.
a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.
b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Llamamos V = "el estudiante vive en residencia universitaria", N = "el estudiante es del país (no extranjero)".
Con los datos del ejercicio podemos decir que $P\left(V \cap N^C\right) = 0.10$, $P(N) = 0.80$, y $P\left(V^C / N\right) = 0.75$.

a) Nos piden calcular $P\left(N \cap V^C\right)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V^C / N\right) = \frac{P\left(V^C \cap N\right)}{P(N)} \Rightarrow 0.75 = \frac{P\left(V^C \cap N\right)}{0.8} \Rightarrow P\left(V^C \cap N\right) = 0.8 \cdot 0.75 = \boxed{0.6}$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso es de 0.6.

b) Nos piden calcular $P\left(V^C / N^C\right)$.

$$P\left(V^C / N^C\right) = \frac{P\left(V^C \cap N^C\right)}{P\left(N^C\right)} = \frac{P\left(N^C\right) - P\left(V \cap N^C\right)}{1 - P(N)} = \frac{(1-0.8)-0.1}{1-0.8} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

De 100 estudiantes 80 son nacionales y 20 extranjeros. De los 20 extranjeros los que viven en residencia son el 10 % del total, es decir, 10 estudiantes son extranjeros y viven en residencia. De los 80 nacionales el 75 % no viven en residencia, es decir, 0.75 · 80 = 60 estudiantes nacionales no viven en residencia y 20 estudiantes nacionales viven en residencia.
Ponemos estos datos en una tabla.

	Viven en residencia	No viven en residencia	
Nacionales	20	60	80
Extranjeros	10	10	20
TOTALES	30	70	100

Aplicamos la regla de Laplace y tenemos las respuestas a lo que se pide.

a) $P\left(N \cap V^C\right) = \frac{60}{100} = 0.6$

b) $P\left(V^C / N^C\right) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0.5$

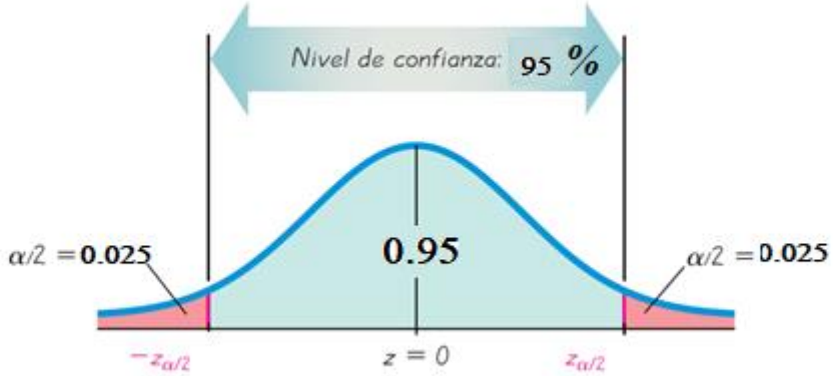
Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.∗

a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

a) No tenemos un valor para la proporción muestral de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio.
Al no conocer el valor de la proporción y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable: $p = 0.5$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} = 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 tabletas de chocolate.

b) Tamaño de la muestra = n = 300. La proporción de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio es: $p = \frac{264}{300} = 0.88$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}} = 1.64\sqrt{\frac{0.88 \cdot 0.12}{300}} \simeq 0.031$$

El intervalo de confianza será:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.88 - 0.031,\ 0.88 + 0.031\right) = \left(0.849,\ 0.911\right)$$

Pregunta 8. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l.*

a) **[1.5 puntos]** Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) **[0.5 puntos]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) **[0.5 puntos]** Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

a) X = El nivel de cierta hormona en sangre. X = N(μ, 1.2).

Tamaño de la muestra = $n = 200$. Media muestral = $\overline{x} =$ 8.7 UI/l.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.64 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{200}} \simeq 0.1392 \text{ UI/l.}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(8.7 - 0.1392, 8.7 + 0.1392\right) = \left(8.5608, 8.8392\right)$$

Es decir, tenemos una confianza del 90% de que el nivel medio de cierta hormona en sangre está entre 8.5608 y 8.8392 UI/l.

b) El error en la estimación lo hemos calculado y tiene un valor de 0.1392 UI/l..

c) Si es un intervalo al 88% de confianza, debe ser un intervalo más estrecho que el obtenido en el apartado a), ya que aquel se había construido con un nivel de confianza mayor (90%).
La amplitud del intervalo de confianza del apartado a) es 2 · Error = $2 \cdot 0.1392 = 0.2784$
La amplitud del intervalo de confianza (8.5681, 8.8319) es $8.8319 - 8.5681 = 0.2638$.
La amplitud del intervalo de confianza (8.5514, 8.8486) es $8.8486 - 8.5514 = 0.2972$.
El intervalo más estrecho que el del apartado a) es el intervalo de confianza $\left(8.5681,\ 8.8319\right)$. Este es el intervalo que se ha calculado con una confianza del 88 %.