Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

➢ Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
➢ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A \cdot B - C)\cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.
b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para *m = –1*.

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.
a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (*f*) se puede expresar en función de las horas de experiencia (*x*) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0 \le x \le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200 < x \le 300 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de ≪a≫ para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.
b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de ≪a≫ obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función *f* en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=-x^2-2x+3$, se pide:
a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(1) = 1*.
b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva *f* y el eje *X* entre *x* = −2 y *x* = 2.

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

[*] Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A\cdot B-C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para *m = –1*.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & 2m+1\\ -1-m & -m+m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2m+1\\ -1-m & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B-C)\cdot D=E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$ y el de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1+m & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{vmatrix}=1-(-1+m)=2-m$$

$$|A|=0\Rightarrow 2-m=0\Rightarrow\boxed{m=2}$$

Analizamos las dos situaciones que se plantean.

- Si $m\neq 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x+y=1\end{array}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones iguales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+y=1$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Conclusión: El sistema tiene solución para cualquier valor de *m*. La solución es única cuando $m \neq 2$.

Resolvemos el sistema para *m* = –*1*. Sabemos que tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-x \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+1-x=1 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=1-0=1}$$

Para *m* = –*1* la solución es $x=0,\ y=1$.

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

a) Llamamos “x” al número de adultos e “y” al número de menores.
Obtenemos las restricciones.

“El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas” → $x+y\leq 180$

“El número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores” → $x\geq \frac{y}{4}$.

“Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará” → $x+y\geq 45$

“El número de menores, al menos, la mitad del número de adultos” → $y\geq \frac{x}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 180 \\ x\geq \frac{y}{4} \\ y\geq \frac{x}{2} \\ x+y\geq 45 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x+y=180$

x	$y=180-x$
0	180
120	60

$x=\frac{y}{4}$

x	$y=4x$
0	0
45	0

$y=\frac{x}{2}$

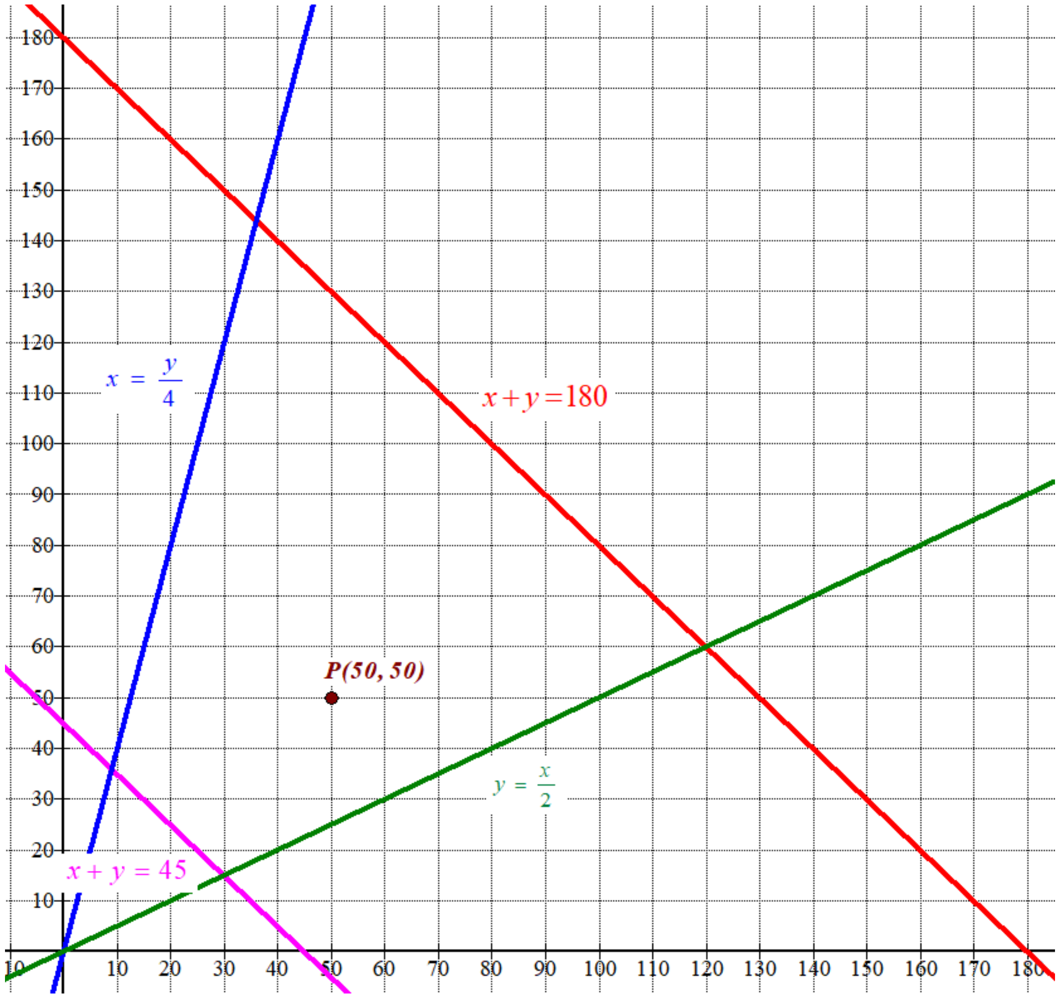
x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
30	15
120	60

$x+y=45$

x	$y=45-x$
0	45
30	15
45	0

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

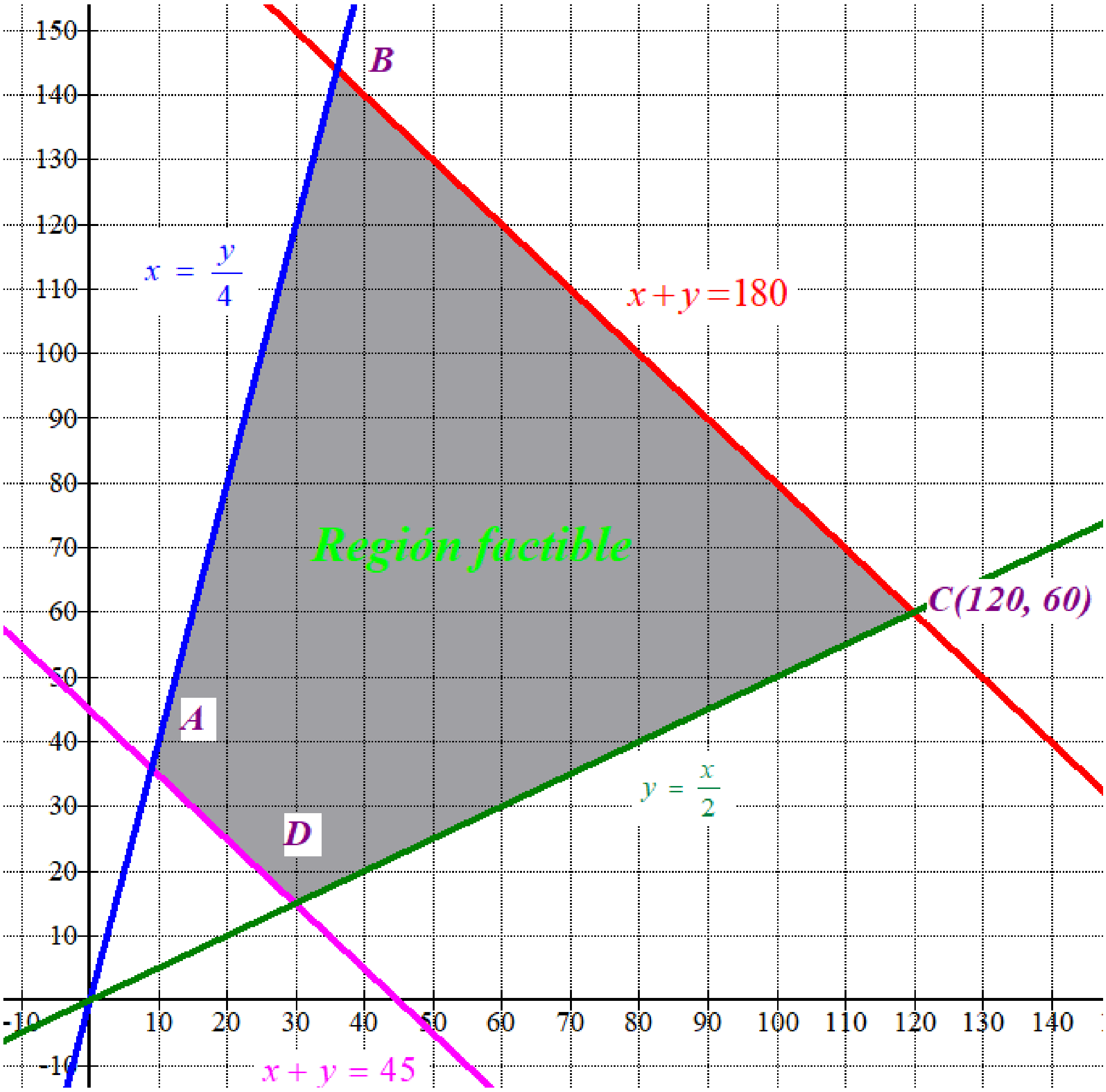


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 180 \\ x\geq \dfrac{y}{4} \\ y\geq \dfrac{x}{2} \\ x+y\geq 45 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 50+50\leq 180 \\ 50\geq \dfrac{50}{4} \\ 50\geq \dfrac{50}{2} \\ 50+50\geq 45 \\ 50\geq 0;\ \ 50\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de gris en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y D.

$$A \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=45 \Rightarrow 5x=45 \Rightarrow x=9 \Rightarrow y=4\cdot 9=36 \Rightarrow A(9,36)$$

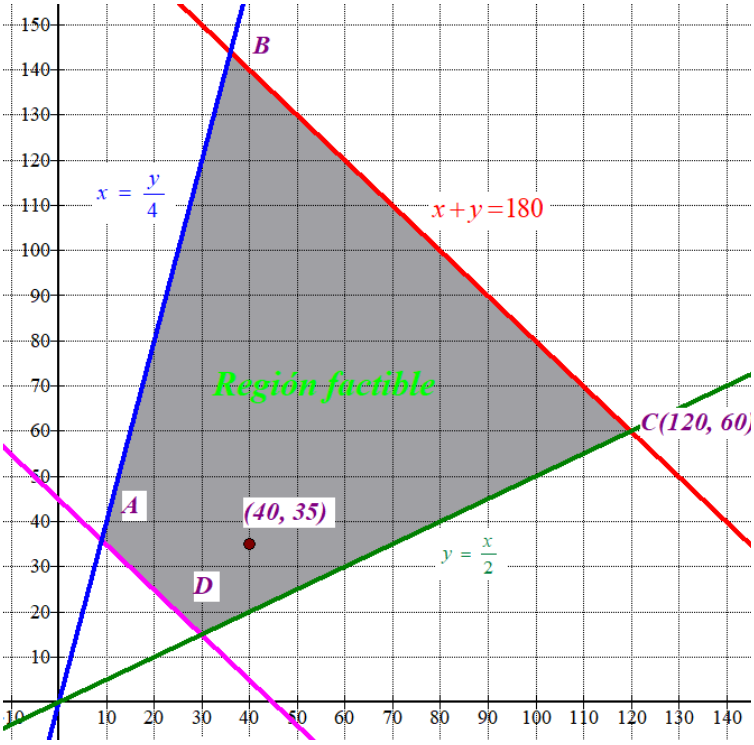
$$B \to \left.\begin{array}{l} x+y=180 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=180 \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=\frac{180}{5}=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=4\cdot 36=144 \Rightarrow B(36,144)$$

$$D \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=\frac{x}{2} \to x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+y=45 \Rightarrow 3y=45 \Rightarrow y=\frac{45}{3}=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\cdot 15 \Rightarrow x=30 \Rightarrow D(30,15)$$

¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
El punto (40, 35) pertenece a la región factible, por lo que si pueden asistir 40 adultos y 35 niños.



b) Si cada adulto paga 18 € y cada niño 10 € los ingresos son $I(x,y)=18x+10y$. Deseamos maximizarlos.
Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

A(9, 36) → $I(9,36)=18\cdot 9+10\cdot 36=522$

B(36, 144) → $I(36,144)=18\cdot 36+10\cdot 144=2088$

C(120, 60) → $I(120,60)=18\cdot 120+10\cdot 60=2760$ ¡Máximo!

D(30, 15) → $I(30,15)=18\cdot 30+10\cdot 15=690$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 2760 euros con la venta de 120 entradas de adulto y 60 de menor.

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200< x\le 300 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de ≪a≫ para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de ≪a≫ obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.
La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x = 200$.

- Existe $f(200)=\dfrac{-200^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^-}\dfrac{-x^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^+}\dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a=\dfrac{200^2}{1000}-\dfrac{3\cdot 200}{5}+a=a-80$.

Para que la función sea continua los tres valores deben ser iguales.

$$30=a-80\Rightarrow a=110$$

Para $a=110$ la función es continua en $x = 200$.
Para $a=110$ la función es continua en todo su dominio.

b) La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+110 & si \quad 200< x\le 300 \end{cases}$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{1000} & si \quad 0\le x< 200 \\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5} & si \quad 200< x\le 300 \end{cases} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{1000}=0\to x=0\in[0,200] \\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5}=0\to x=300\in(200,300] \end{cases}$$

Los puntos críticos están situados en los extremos de los intervalos.
Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $[0,200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $f'(100)=\dfrac{-100}{1000}=-0.1<0$. La función decrece en $[0,200)$.

- En el intervalo $(200,300]$ tomamos $x = 250$ y la derivada vale $f'(250)=\frac{250}{500}-\frac{3}{5}=-0.1<0$. La función decrece en $(200,300]$.

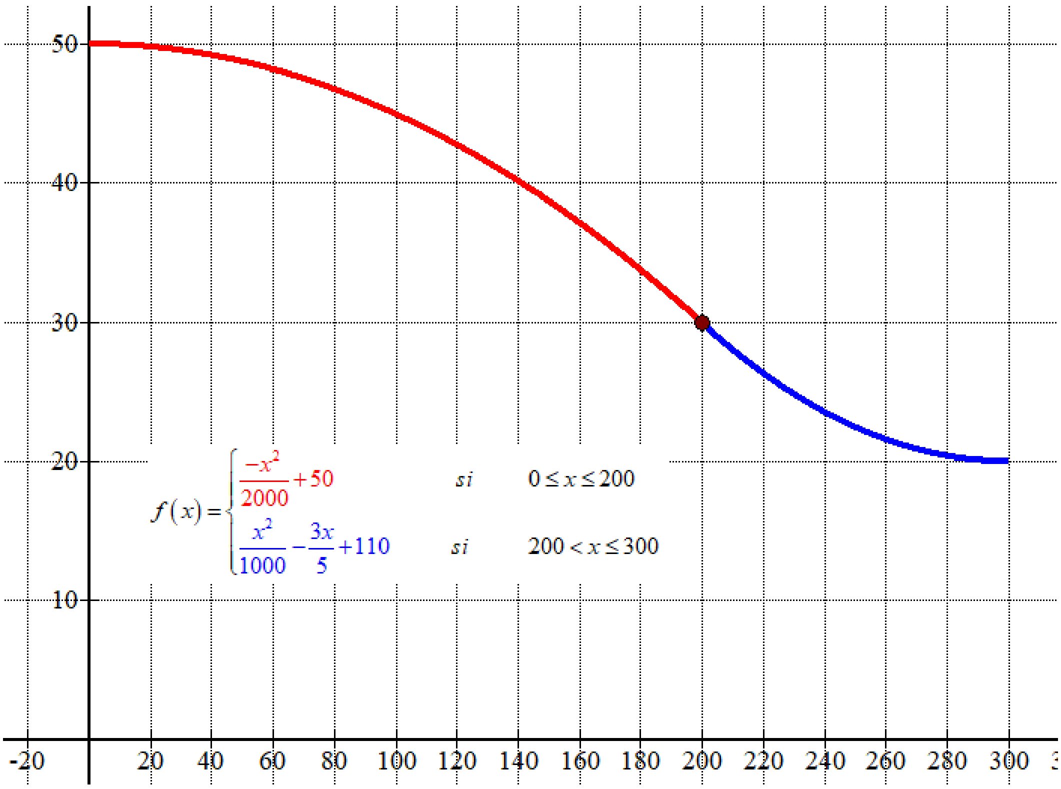
La función decrece en todo su dominio. como la función es continua el valor máximo está situado en $x = 0$ y el valor mínimo en $x = 300$.

Como $f(0)=\frac{-0^2}{2000}+50=50$ el tiempo máximo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 50 minutos. Como $f(300)=\frac{300^2}{1000}-\frac{3\cdot 300}{5}+110=20$ el tiempo mínimo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 20 minutos.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y=\frac{-x^2}{2000}+50$
0	50
100	45
200	30

x	$y=\frac{x^2}{1000}-\frac{3x}{5}+110$
250	27.5
300	20



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(1) = 1*.
b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva *f* y el eje *X* entre *x* = −*2* y *x* = *2*.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -x^2 - 2x + 3dx = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K$$

Como debe ser *F(1) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \dfrac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K \\ F(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1^3}{3} - 1^2 + 3\cdot 1 + K = 1 \Rightarrow K = 1 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-x^3}{4} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua. Su gráfica es una parábola. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$Eje\,OY \to x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 - 2\cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0,3)$$

$$Eje\,OX \to f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{-2} = -3 = x \to B(-3,0) \\ \dfrac{2-4}{-2} = 1 = x \to C(1,0) \end{cases}$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

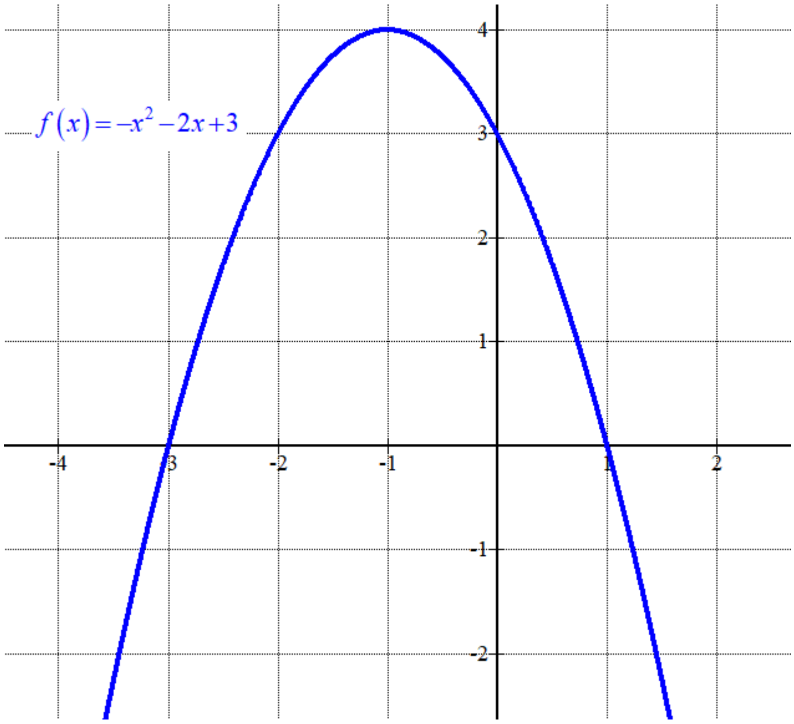
Estudiamos el signo de la segunda derivada en este punto crítico.

$$f'(x) = -2x - 2 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-1) = -2 < 0$$

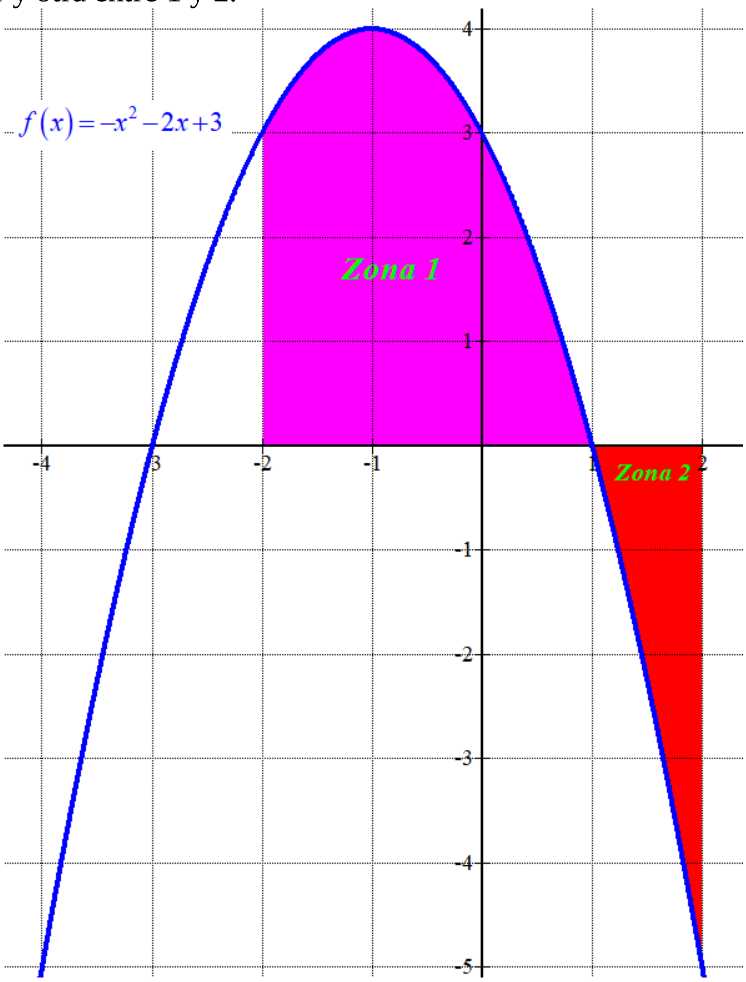
En *x = –1* la función presenta un máximo relativo y absoluto.
La función crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x) = -x^2 - 2x + 3$
-3	0
-2	3
-1	4
0	3
1	0
2	-5



Como la función corta el eje X en $x = 1 \in (-2, 2)$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$ la dividimos en dos partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre -2 y 1 y otra entre 1 y 2.



$$\text{Área zona}\,1=\left|\int_{-2}^{1}-x^2-2x+3dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-2}^{1}\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{1^3}{3}-1^2+3\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2+3(-2)\right]\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{3}-1+3-\frac{2}{3}+4+6\right|=\boxed{11u^2}$$

$$\text{Área zona}\,2=\left|\int_{1}^{2}-x^2-2x+3dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{1}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{2^3}{3}-2^2+3\cdot 2\right]-\left[-\frac{1^3}{3}-1^2+3\right]\right|=\left|-\frac{8}{3}-4+6+\frac{1}{3}+1-3\right|=\boxed{\frac{7}{3}u^2}$$

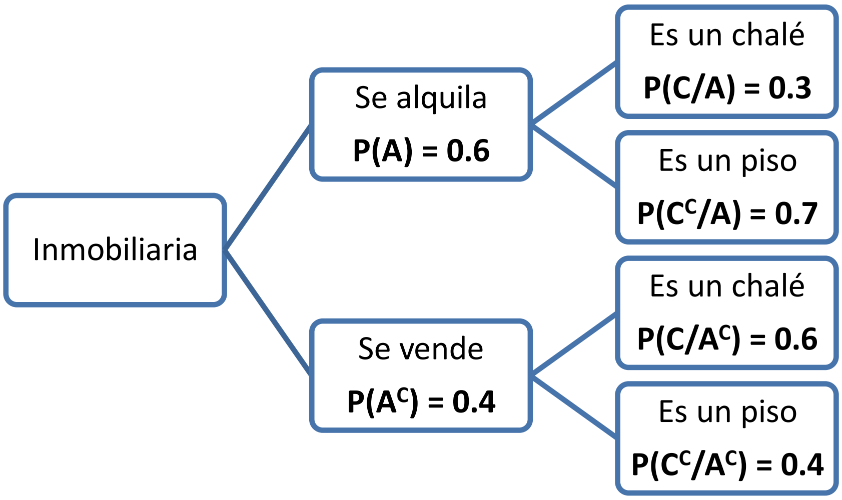
El área total es la suma de las dos áreas calculadas: $11+\frac{7}{3}=\boxed{\frac{38}{3}\simeq 12.667\,u^2}$

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

a) Llamamos A al suceso "la vivienda se alquila", A^C al suceso "la vivienda se vende", C a "la vivienda es un chalé" y C^C a "la vivienda es un piso".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A/C^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/C^C\right)=\frac{P\left(A\cap C^C\right)}{P\left(C^C\right)}=\frac{P(A)P\left(C^C/A\right)}{P(A)P\left(C^C/A\right)+P\left(A^C\right)P\left(C^C/A^C\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.7+0.4\cdot 0.4}=\boxed{\frac{21}{29}\simeq 0.7241}$$

La probabilidad de que se alquile sabiendo que es un piso tiene un valor aproximado de 0.7241.

b) Nos piden calcular $P\left(A^C\cup C\right)$.

$$P\left(A^C\cup C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\cap C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=P\left(A^C\right)+\left(P(A)P(C/A)+P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)\right)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=0.4+(0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.6)-0.4\cdot 0.6=0.4+0.18+0.24-0.24=\boxed{0.58}$$

La probabilidad de que esté en venta o sea un chalé es de 0.58

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 viviendas. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan (60), el resto se venden (40). Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan (0.30 ·60 = 18) y el 60% de las que se venden (0.6 · 40 = 24) son chalés. El resto son pisos: 60 – 18 = 42 son pisos que se alquilan, 40 – 24 = 16 son pisos que se venden.

a) Hay 42 + 16 = 58 pisos. De estos hay 42 que se alquilan. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(A/C^C\right)=\frac{42}{58}=\boxed{\frac{21}{29}}$$

b) De las 100 viviendas hay 40 en venta (24 chalés y 16 pisos). También hay 18 chalés que se alquilan.

$$P\left(A^C\cup C\right)=\frac{40+18}{100}=\boxed{0.58}$$

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5		40
No tienen hijos (H^C)			
	20		100

Completamos la tabla.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5	**35**	40
No tienen hijos (H^C)	**15**	**45**	**60**
	20	**80**	100

a) Nos piden calcular $P\left(H^C \cap S^C\right)$. Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(H^C \cap S^C\right) = \frac{45}{100} = \boxed{0.45}$$

La probabilidad de que un habitante elegido al azar no tenga ni hijos, ni estudios superiores es de 0.45.

b) Nos piden calcular $P\left(H^C / S\right)$. Hay 20 personas con estudios superiores y de ellas 15 no tienen hijos. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(H^C / S\right) = \frac{15}{20} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que elegido un habitante con estudios superiores no tenga hijos es de 0.75.

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

a) X = El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera (en miles de euros).
X = N(μ, 35)

El tamaño de la muestra es n = 150. La media muestral es $\bar{x} = 138$.
Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

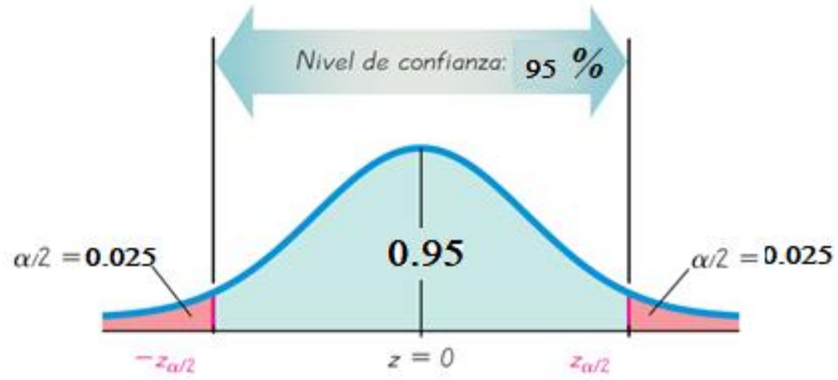
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64\frac{35}{\sqrt{150}} \simeq 4.6867$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(138 - 4.6867,\ 138 + 4.6867\right) = \left(133.3133,\ 142.6867\right)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0.05 →∝/2 = 0.025 →1 – ∝/2 = 0.975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1.96**

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Sustituimos en la fórmula del error el valor 5 y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1.96\frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 1.96 \cdot 35 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 35}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 35}{5}\right)^2 \simeq 188.23$$

El tamaño mínimo de la muestra en de 189 hipotecas.

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

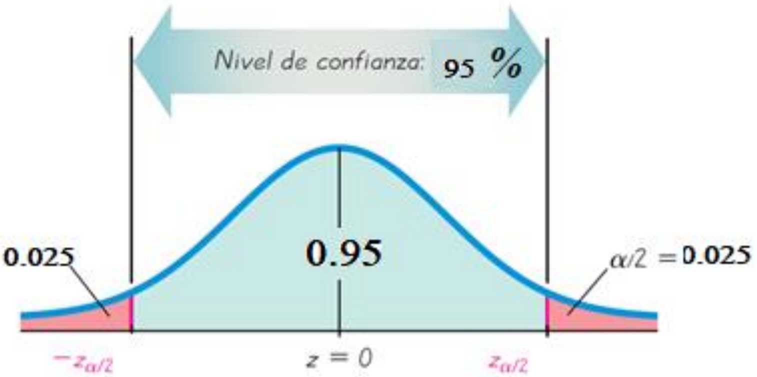
a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

a) Tamaño de la muestra es n = 180 hogares. La proporción muestral de los hogares que contratarían la fibra es $p = \frac{130}{180} = \frac{13}{18} \simeq 0.7222$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$1 - \propto = 0.95 \rightarrow \propto = 0.05 \rightarrow \propto/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{18}\cdot\frac{5}{18}}{180}} \simeq 0.0654$$

El intervalo de confianza será:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = (0.7222 - 0.0654,\ 0.7222 + 0.0654) = (0.6568,\ 0.7876)$$

b) El error de estimación es de 0.0654.
Si aumentásemos el nivel de confianza aumentaría el valor de $z_{\alpha/2}$. Entonces aumentaría el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$.