EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

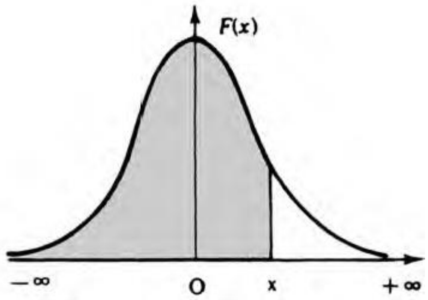
A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de banderas, “y” al número de camisetas y “z” al número de gorras.

“El presupuesto es de 500 €” → $5x+6y+2z=500$.

“La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras” → $y=\frac{z}{2}$.

“La suma de banderas y camisetas debe ser 70” → $x+y=70$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo ordenamos.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ y=\frac{z}{2}\rightarrow 2y=z \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y \qquad =70 \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y \qquad =70 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6-4+5=-5\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y \qquad =70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ 2y=z \\ x=70-y \end{array}\right\} \Rightarrow 5(70-y)+6y+2(2y)=500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 350-5y+6y+4y=500 \Rightarrow 5y=150 \Rightarrow \boxed{y=30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=70-30=40} \\ \boxed{z=2\cdot 30=60} \end{cases}$$

Deben comprarse 40 banderas, 30 camisetas y 60 gorras si se pretende agotar el presupuesto disponible.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos “x” = número de menús A e “y” = número de menús B.
Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Horas	Beneficio
Nº menús A (x)	$2x$	$50x$
Nº menús B (y)	$3y$	$70y$
TOTAL	$2x+3y$	$50x+70y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=50x+70y$$

Las restricciones son:

“La empresa quiere preparar al menos 15 menús” → $x+y\geq 15$

“No quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B” → $x\leq \frac{y}{2}$.

“Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús” → $2x+3y\leq 96$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ x\leq \frac{y}{2} \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=15$

x	$y=15-x$
0	15
5	10
15	0

$y=2x$

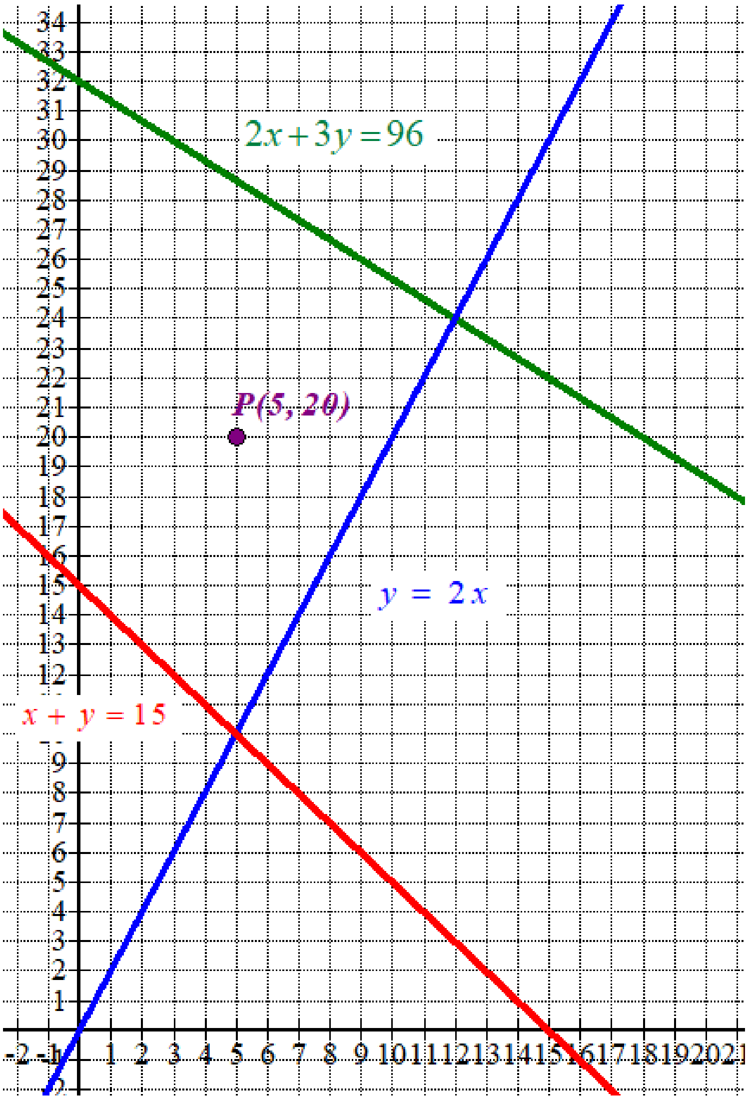
x	$y=2x$
0	0
5	10
12	24

$2x+3y=96$

x	$y=\frac{96-2x}{3}$
0	32
12	24
48	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

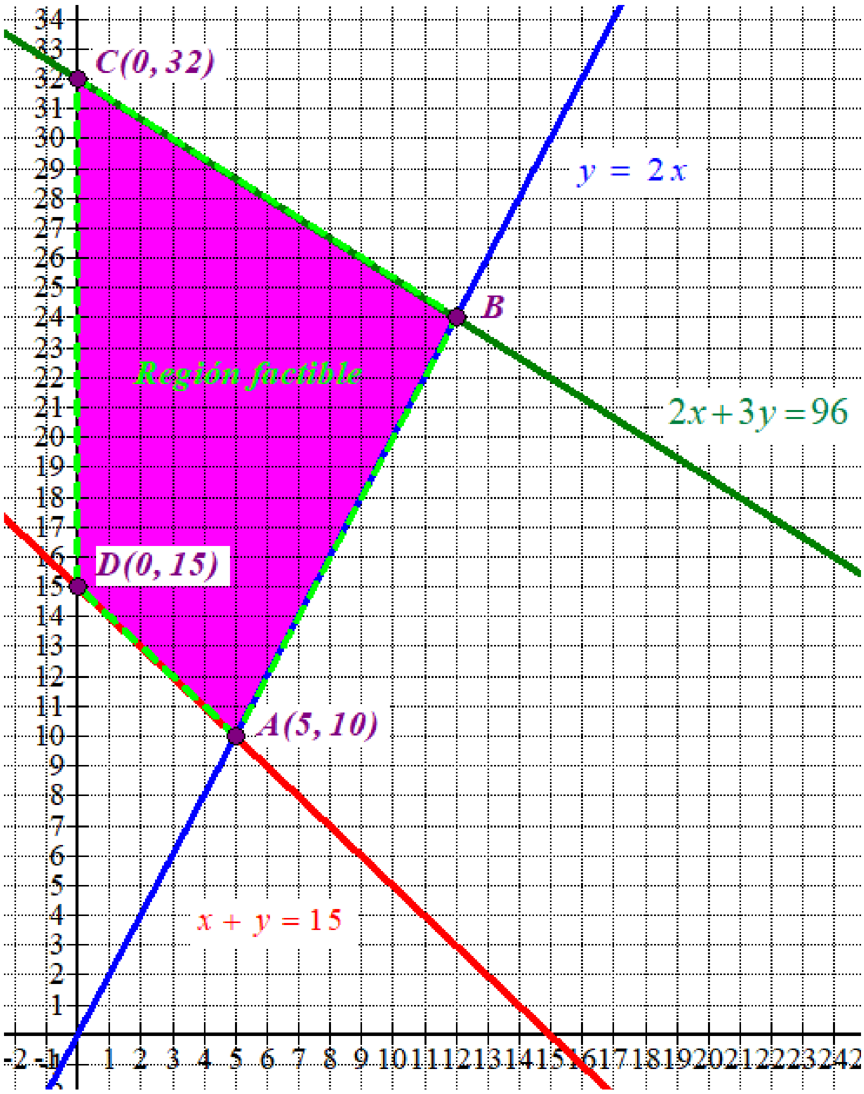


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta verde y por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(5, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+20\geq 15 \\ 2\cdot 5\leq 20 \\ 2\cdot 5+3\cdot 20\leq 96 \\ 5\geq 0;\ 20\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice B.

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=96 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+6x=96 \Rightarrow 8x=96 \Rightarrow x=\frac{96}{8}=12 \Rightarrow y=24 \Rightarrow B(12,24)$$

Los vértices son A(5, 10); B(12, 24); C(0, 32) y D(0, 15).

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=50x+70y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(5, 10) → $B(5,10)=50\cdot 5+70\cdot 10=950$

B(12, 24) → $B(12,24)=50\cdot 12+70\cdot 24=2280$ ¡Máximo!

C(0, 32) → $B(0,32)=50\cdot 0+70\cdot 32=2240$

D(0, 15) → $B(0,15)=50\cdot 0+70\cdot 15=1050$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice B(12, 24). Se deben cocinar 12 menús A y 24 menús B para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 2280 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]
Dada la función $f(x)=x^3-3x+2$
A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva *y = f(x)* y la recta $y=x+2$. Calcule el área de esta región.

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+2 \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0+2=2 \Rightarrow \boxed{A(0,2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+2 \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x+2=0 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \to \boxed{B(1,0)} \\ x^2+x-2=0 \to x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}= \\ =\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+3}{2}=1=x \\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=x \to \boxed{C(-2,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Hay tres puntos de corte: A(0,2), B(1, 0) y C(–2, 0).

B. Utilizamos la derivada de la función para determinar sus puntos críticos.

$$f(x)=x^3-3x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$. La función crece en el intervalo $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-3=-3<0$. La función decrece en el intervalo $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-3=9>0$. La función crece en el intervalo $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

C. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

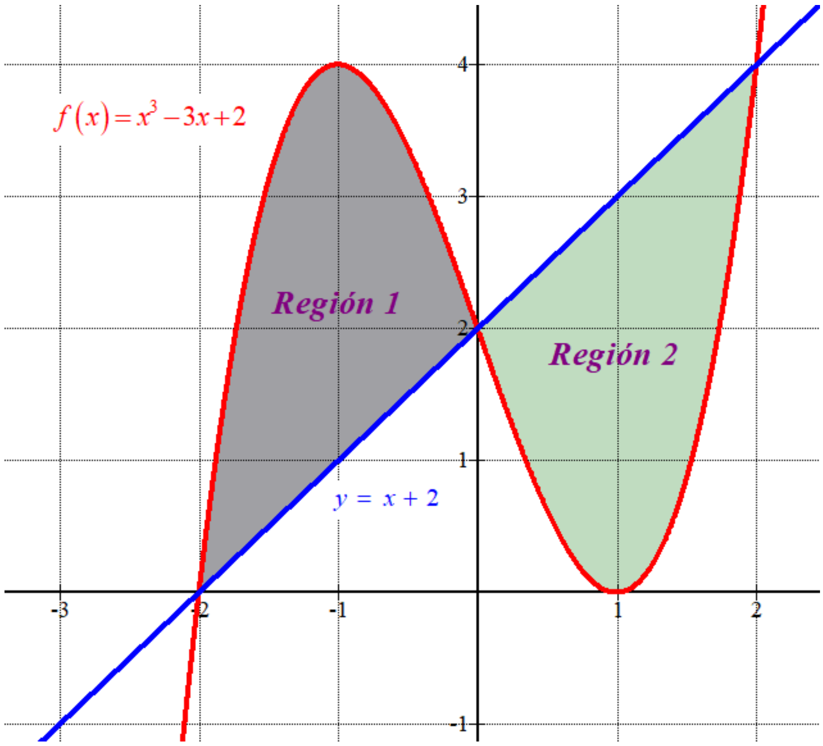
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de la curva y la recta.

x	$y = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4

x	$y = x + 2$
-2	0
0	2
2	4



Hallamos el área de la región 1.

$$Área\,1 = \int_{-2}^{0} x^3 - 3x + 2 - (x+2)\,dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 3x + 2 - x - 2dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 4xdx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] = -4 + 8 = 4u^2$$

El área de la región 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
Hallamos el área de la región 2.

$$Área\,2 = \int_{0}^{2} x + 2 - \left(x^3 - 3x + 2\right)dx = \int_{0}^{2} x + 2 - x^3 + 3x - 2 - x - 2dx = \int_{0}^{2} -x^3 + 4xdx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} = \left[-\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^2\right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2\cdot 0^2\right] = -4 + 8 = 4u^2$$

El área de la región 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
El área de la región limitada por la curva y la recta tiene un valor de 4 + 4 = 8 unidades cuadradas.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Estudiamos la continuidad en $x=-1$ y en $x=1$.

Calculamos los límites de la función en dichos valores.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{(-1)^2-2(-1)-3}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x-2}{2x}=\frac{2(-1)-2}{2(-1)}=\boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{1^2-2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{-4}{0}=\infty$$

La función presenta una discontinuidad evitable en $x=-1$ y una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=1$.

B. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=2$$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

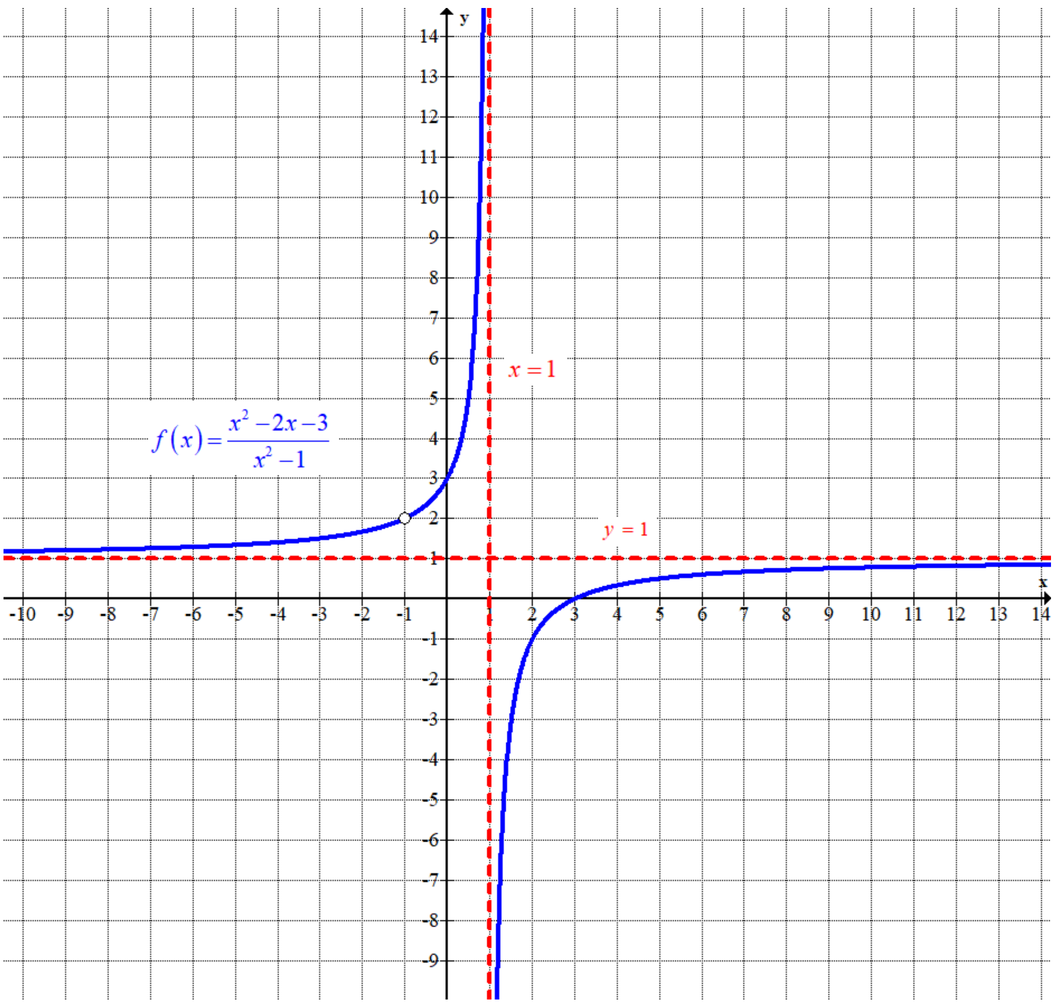
C. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \\ Eje\,OY \rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2\cdot 0 - 3}{0^2 - 1} = 3 \Rightarrow \boxed{A(0,3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \\ Eje\,OX \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 = x \rightarrow \boxed{B(3,0)} \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 = x \text{ No pertenece al dominio} \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: A(0,3) y B(3, 0).
Con la información obtenida dibujamos la gráfica de la función.



Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]
En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

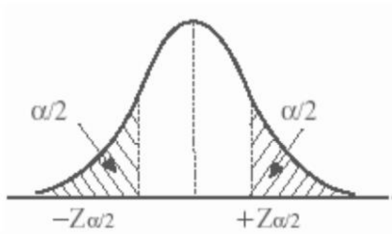
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

X = el porcentaje de cafeína por lata. X = N(μ, 0.45)

Tamaño de muestra = n = *120*. $\overline{x} = 8.75$ %.

A. Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	[illegible]	.52
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	[illegible]	.56
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	[illegible]	.60
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	[illegible]	.64
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	[illegible]	.68
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	[illegible]	.71
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	[illegible]	.74
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	[illegible]	.77
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	[illegible]	.80
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	[illegible]	.83
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	[illegible]	.85
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	[illegible]	.87
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	[illegible]	.89
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	[illegible]	.91
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	[illegible]	.92
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	[illegible]	.94
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	[illegible]	.95
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	[illegible]	.96
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	[illegible]	.96
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9750	.97
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{120}} \simeq 0.08 \ \%$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(8.75 - 0.08, 8.75 + 0.08\right) = \left(8.67, 8.83\right)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 0.1 %.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.17 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.17 \cdot 0.45 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.9765}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{0.9765}{0.1}\right)^2 \simeq 95.35$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 96 latas.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

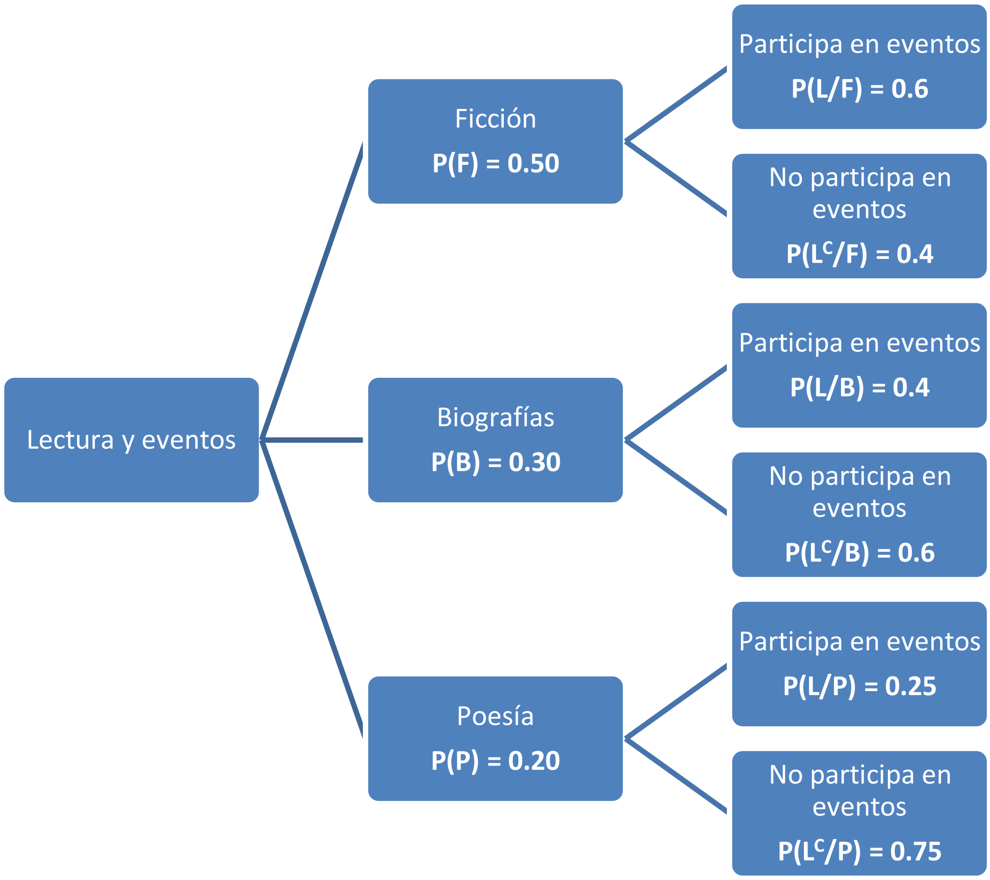
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

Llamamos F al suceso "el lector prefiere libros de ficción", B al suceso "el lector prefiere libros de biografías", P al suceso "el lector prefiere libros de poesía" y L al suceso "el lector participa en eventos de lectura".

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



A. Nos piden calcular $P(F \cap L)$.

$$P(F \cap L) = P(F)P(L/F) = 0.5 \cdot 0.6 = \boxed{0.3}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura es de 0.3.

B. Nos piden calcular $P\left(P \cap L^C\right)$.

$$P\left(P \cap L^C\right) = P(P)P\left(L^C / P\right) = 0.2 \cdot 0.75 = \boxed{0.15}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura es de 0.15.

C. Nos piden calcular $P\left(F / L^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(F / L^C\right) = \frac{P\left(F \cap L^C\right)}{P\left(L^C\right)} = \frac{P(F)P\left(L^C / F\right)}{P(F)P\left(L^C / F\right) + P(B)P\left(L^C / B\right) + P(P)P\left(L^C / P\right)} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.75} = \boxed{\frac{20}{53} \simeq 0.3774}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción sabiendo que no participa en eventos de lectura tiene un valor aproximado de 0.3774.