Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m^2 de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m^2 de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, *x* en años, viene definida por la función $R(x)=\begin{cases} -\left(x+(t-3)\right)^2+(t+27) & si\ \ 0\le x\le 3 \\ -\dfrac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3 & si\ \ x>3 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de *t* la rentabilidad del fondo, R(x); es una función continua en *x = 3*? (0.5 puntos)

b) Para *t = –2*, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)

c) Para *t = –2*, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0) y la ecuación de la recta tangente a la función en *x = 0* es $y=x$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30% de los analistas y el 50% de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 42 milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94.64%. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.12%, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$ (0.75 puntos)

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$? (1.25 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72% aprueban Inglés y el 78% aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)

b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justica la respuesta. (0.75 puntos)

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años^2. Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95.44 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura, A(x); que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (x en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & si\ 0 \le x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & si\ 2 \le x \le 7 \end{cases}$$

a) Halla los valores de t para que la función de la altura de las olas sea continua en $x = 2$.
(0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función de la altura de las olas, A(x); para el valor $t = -1$.
(0.75 puntos)

6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 ($t = 0$); hasta su desaparición en 2018 ($t = 53$) viene dada por la expresión $S(t) = -0.5\cdot\left(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60\right)$ donde t se expresa en años.

a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)
b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m^2 de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m^2 de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad.
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

a) Llamamos "x" al número de carpetas folio, "y" al número de carpetas cuartilla.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	m^2 de cartón	Cinta de goma	Beneficio
Nº carpetas folio (x)	0.20x	0.30x	2.10x
Nº carpetas cuartilla (y)	0.15y	0.27y	1.5y
TOTALES	$0.2x+0.15y$	$0.3x+0.27y$	$2.1x+1.5y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=2.1x+1.5y$.
Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

"Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma" → $0.2x+0.15y\le 270$; $0.3x+0.27y\le 432$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}0.2x+0.15y\le 270\\0.3x+0.27y\le 432\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}20x+15y\le 27000\\30x+27y\le 43200\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+3y\le 5400\\10x+9y\le 14400\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$4x+3y=5400$

x	$y=\dfrac{5400-4x}{3}$
0	1800
900	600
1350	0

$10x+9y=14400$

x	$y=\dfrac{14400-10x}{9}$
0	1600
900	600
1440	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

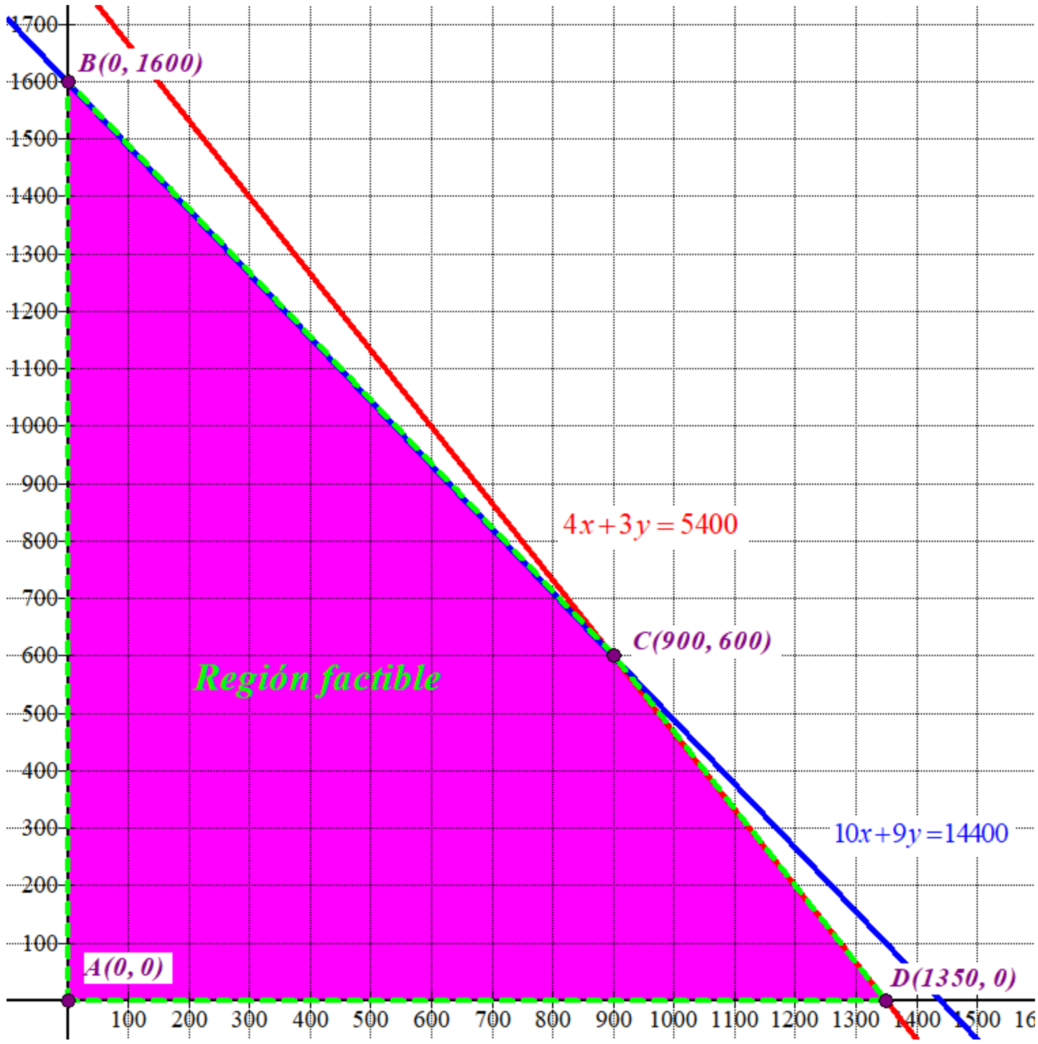
Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+3y\le 5400 \\ 10x+9y\le 14400 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos si el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 400+300\le 5400 \\ 1000+900\le 14400 \\ 100\ge 0;\ 100\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos la función beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 1600) → $B(0,1600)=2.1\cdot 0+1.5\cdot 1600=2400$

C(900, 600) → $B(900,600)=2.1\cdot 900+1.5\cdot 600=2790$

D(1350, 0) → $B(1350,0)=2.1\cdot 1350+1.5\cdot 0=2835$ ¡Máximo!

El máximo se alcanza en el vértice D(1350, 0) con un valor de 2835.
Se deben fabricar 1350 carpetas tamaño folio y 0 carpetas tamaño cuartilla para obtener un beneficio máximo de 2835 €.

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de medallas de oro, "y" al número de medallas de plata y "z" al número de medallas de bronce.

"En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas" → $x+y+z=36$

"El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro" → $z=3x$

"Si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata" → $z+2=2(y-2)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z+2=2(y-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z+2=2y-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z=2y-6 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z=2y-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+3x=36 \\ 3x=2y-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y=36 \\ 3x=2y-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=36-4x \\ 3x=2y-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=2(36-4x)-6 \Rightarrow 3x=72-8x-6 \Rightarrow 11x=66 \Rightarrow \boxed{x=\frac{66}{11}=6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=36-4\cdot 6=12} \\ \boxed{z=3\cdot 6=18} \end{cases}$$

Se repartieron 6 medallas de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

Bloque 2

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, *x* en años, viene definida por la función $R(x)=\begin{cases} -(x+(t-3))^2+(t+27) & si\ \ 0\leq x\leq 3 \\ -\dfrac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3 & si\ \ x>3 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de *t* la rentabilidad del fondo, R(x); es una función continua en *x = 3*? (0.5 puntos)

b) Para *t = –2*, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)

c) Para *t = –2*, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

a) Para que sea continua en $x=3$ deben coincidir los limites laterales y el valor de la función en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} R(3)=-(3+(t-3))^2+(t+27)=-t^2+t+27 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} R(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}-(x+(t-3))^2+(t+27)=-t^2+t+27 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} R(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}-\dfrac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3=-\dfrac{1}{3}3^3-t\cdot 3^2+5\cdot 3-3=3-9t \\ R(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} R(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} R(x) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2+t+27=3-9t\Rightarrow t^2-10t-24=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(-24)}}{2}=\frac{10\pm 14}{2}=\begin{cases} \dfrac{10+14}{2}=\boxed{12=t} \\ \dfrac{10-14}{2}=\boxed{-2=t} \end{cases}$$

La función es continua para *t = 12* y para *t = –2*.

b) Para *t = –2* la función queda $R(x)=\begin{cases} -(x-5)^2+25 & si\ \ 0\leq x\leq 3 \\ -\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+5x-3 & si\ \ x>3 \end{cases}$.

La función a partir del tercer año tiene la expresión $R(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+5x-3$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} R'(x)=-x^2+4x+5 \\ R'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x+5=0\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(5)}}{2(-1)}=$$

$$=\frac{-4\pm 6}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-4+6}{-2}=-1\notin(3,+\infty) \\ \dfrac{-4-6}{-2}=\boxed{5=x} \end{cases}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$R''(x) = -2x + 4 \Rightarrow R''(5) = -10 + 4 = -6 < 0 \rightarrow x = 5 \text{ es máximo}$$

La rentabilidad es máxima en el año 5.

c) Para $t = -2$ la función tiene un máximo en $x = 5$. La función crece en $(3,5)$ y decrece em $(5,+\infty)$.
La rentabilidad del fondo crece del año 3 al 5 y decrece a partir del año 5.

2. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0) y la ecuación de la recta tangente a la función en *x = 0* es $y=x$. (1.5 puntos)

Si la función tiene un extremo relativo en (–1, 0) significa dos cosas: *f(–1) = 0* y que $f'(-1)=0$.

$$f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^4+a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)=0 \Rightarrow \boxed{1-a+b-c=0}$$

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx \Rightarrow f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(-1)^3+3a(-1)^2+2b(-1)+c=0 \Rightarrow \boxed{-4+3a-2b+c=0}$$

Si la ecuación de la recta tangente a la función en *x = 0* es $y=x$, entonces la pendiente de la recta tangente en *x = 0* es 1 → $f'(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 0^3+3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=1 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 1-a+b-c=0 \\ -4+3a-2b+c=0 \\ \boxed{c=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1-a+b-1=0 \\ -4+3a-2b+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+b=0 \rightarrow b=a \\ 3a-2b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a-2a=3 \Rightarrow \boxed{a=3} \Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores buscados son *a = 3*, *b = 3* y *c = 1*.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30% de los analistas y el 50% de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.
a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

En la empresa hay 6 + 4 = 10 analistas y 6 + 6 = 12 desarrolladores.
El 30 % de los analistas usan MacBooks, por lo que son $0.30 \cdot 10 = 3$ analistas los que usan MacBooks. El 50 % de los desarrolladores usan MacBooks, por lo que $0.5 \cdot 12 = 6$ desarrolladores usan MacBooks. Ponemos los datos en una tabla.

	Usan MacBooks (M)	No usan MacBooks ($\overline{M}$)	
Analista	**3**	**7**	**10**
Desarrollador	**6**	**6**	**12**
TOTALES	**9**	**13**	**22**

a) Hay 22 trabajadores, de los cuales 13 no usan MacBooks. Utilizamos la regla de Laplace.

$$P\left(\overline{M}\right) = \frac{13}{22} \simeq 0.591$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar no use MacBook es de 13/22.

b) Hay 9 trabajadores que usan MacBooks y de ellos hay 6 que son desarrolladores. Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(D/M) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \simeq 0.667$$

La probabilidad de que el trabajador usuario de MacBooks sea desarrollador es 2/3.

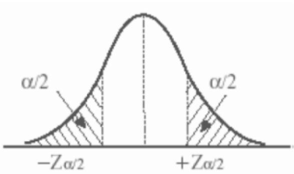
4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 42 milisegundos.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94.64%. (1 punto)
b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.12%, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = el tiempo de ejecución de los chips en milisegundos.
Desviación típica = σ = 42 milisegundos
X = N(μ, 42)
El tamaño de la muestra es n = 144 chips. La media muestral es $\bar{x} = 142$ milisegundos.

a) Con un nivel de confianza del 94.64% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.9464 \rightarrow \alpha = 0.0536 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0268 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.93$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9

Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}} = 6.755 \text{ milisegundos}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (142 - 6.755, 142 + 6.755) = (135.245, 148.755)$$

b) Con un nivel de confianza del 94.12% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.9412 \rightarrow \alpha = 0.0588 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0294 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9706 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.89$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Sustituimos 8 milisegundos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 8 = 1.89 \cdot \frac{42}{\sqrt{n}} \Rightarrow 8\sqrt{n} = 1.89 \cdot 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.89 \cdot 42}{8} \Rightarrow n = \left(\frac{1.89 \cdot 42}{8} \right)^2 \simeq 98.46$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido → 99 chips.

Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de votos para Inés, "y" al número de votos para Nerea y "z" al número de votos nulos.

"Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto" → $4y - 3x = z + 1$

"Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$)" → $x = 1 \cdot y + 7$

"El 5% del total de votos emitidos es nulo" → $z = 0.05(x + y + z)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ z = 0.05(x + y + z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ 100z = 5(x + y + z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ 20z = x + y + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ -x - y + 19z = 0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ -x - y + 19z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y - 3(y + 7) = z + 1 \\ -y - 7 - y + 19z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y - 3y - 21 = z + 1 \\ -2y + 19z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = z + 22 \\ -2y + 19z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow -2(z + 22) + 19z = 7 \Rightarrow -2z - 44 + 19z = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17z = 51 \Rightarrow \boxed{z = \frac{51}{17} = 3} \Rightarrow \boxed{y = 3 + 22 = 25} \Rightarrow \boxed{x = 25 + 7 = 32}$$

Inés recibió 32 votos, Nerea recibió 25 y 3 votos fueron nulos.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

a) Calcula, si es posible, $C+A\cdot B$ (0.75 puntos)

b) ¿Son iguales $C^{-1}+\left(A\cdot B\right)^{-1}$ y $\left(C+A\cdot B\right)^{-1}$? (1.25 puntos)

a) Comprobamos que son posibles las operaciones indicadas.

$$A\cdot B \qquad\qquad C+A\cdot B$$

$$2\times\boxed{3\cdot 3}\times 2\to 2\times 2 \qquad\qquad 2\times 2+2\times 2\to 2\times 2$$

Es posible. Calculamos la expresión de la matriz 2×2 resultado de las operaciones indicadas.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4-3 & 0+4+3\\ -2+2-1 & 0+2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$C+A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

b) Calculamos las inversas.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow C^{-1}=\frac{Adj\left(C^{T}\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}0 & 7\\ -1 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0\Rightarrow\left(A\cdot B\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B\right)^{T}\right)}{|A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix}}{7}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|C+A\cdot B|=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow\left(C+A\cdot B\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(C+A\cdot B\right)^{T}\right)}{|C+A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 3\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos si se cumple la igualdad $C^{-1}+\left(A\cdot B\right)^{-1}=\left(C+A\cdot B\right)^{-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} C^{-1}+\left(A\cdot B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/7 & 0\\ -6/7 & 1\end{pmatrix}\\ \left(C+A\cdot B\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow C^{-1}+\left(A\cdot B\right)^{-1}\neq\left(C+A\cdot B\right)^{-1}$$

No se cumple la igualdad.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72% aprueban Inglés y el 78% aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)
b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justica la respuesta. (0.75 puntos)

Llamamos M a "Aprobar matemáticas" e I a "aprobar inglés".
Tenemos que $P(M)=0.64$, $P(I)=0.72$ y $P(M\cup I)=0.78$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(M)=0.64 \\ P(I)=0.72 \\ P(M\cup I)=0.78 \\ P(M\cup I)=P(M)+P(I)-P(M\cap I) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.78=0.64+0.72-P(M\cap I)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M\cap I)=0.64+0.72-0.78=0.58$$

a) Nos piden calcular $P(\overline{M}\cup\overline{I})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{M}\cup\overline{I})=P(\overline{M\cap I})=1-P(M\cap I)=1-0.58=\boxed{0.42}$$

b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(M\cap I)=P(M)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(M\cap I)=0.58 \\ P(M)P(I)=0.64\cdot 0.72=0.4608 \end{array}\right\} \Rightarrow P(M\cap I)=0.58\neq 0.4608=P(M)P(I)$$

Los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés no son independientes.

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años^2. Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95.44 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = La edad de los usuarios de un juego online.

Desviación típica = σ = $\sqrt{4} = 2$ años. X = N(μ, 2)

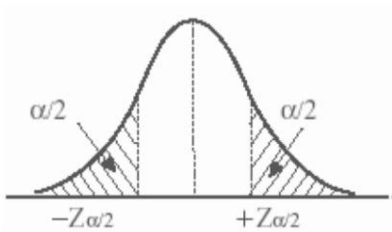
Tamaño de la muestra = n = *10 usuarios.*

La media muestral es $\bar{x} = \dfrac{16+19+21+15+14+18+20+15+14+18}{10} = 17$ años.

a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1-\alpha = 0.97 \to \alpha = 0.03 \to \frac{\alpha}{2} = 0.015 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \to z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \simeq 1.3724 \text{ años}$$

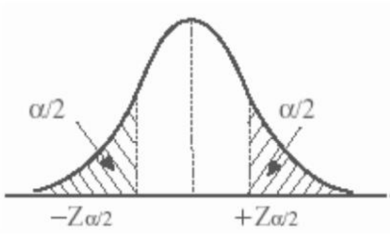
El intervalo de confianza para la edad de los usuarios de un juego online es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(17 - 1.3724, 17 + 1.3724\right) = \left(15.6276, 18.3724\right)$$

b) Si mantenemos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ es el mismo. La desviación típica también es la misma. Si deseamos que la amplitud del intervalo de confianza sea menor el error debe ser menor. Como el error lo obtenemos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ lo hacemos menor si aumentamos el tamaño de la muestra (n).

c) Con un nivel de confianza del 95.44 % hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha=0.9544 \rightarrow \alpha=0.0456 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.0228 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.9772 \rightarrow z_{\alpha/2}=2$$



z	0.00	0.01
2.0	0.9772	0.977…
2.1	0.9821	0.982…

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9} \simeq 0.4444 .$$

El error máximo es de 0.4444 años.

Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura, A(x); que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (*x* en horas) mediante la función

$$A(x)=\begin{cases}-(2x+t)^2+(11+t) & si\ 0\le x<2\\ x^2-8x+19+t & si\ 2\le x\le 7\end{cases}$$

a) Halla los valores de *t* para que la función de la altura de las olas sea continua en *x = 2*. (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función de la altura de las olas, A(x); para el valor *t = –1*. (0.75 puntos)

a) Para que la función *A(x)* sea continua en *x = 2* deben coincidir los limites laterales con el valor de la función en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-(2x+t)^2+(11+t)=-(4+t)^2+(11+t)\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}x^2-8x+19+t=t+7\\ f(2)=2^2-8\cdot 2+19+t=t+7\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(4+t)^2+11+t=t+7\Rightarrow -t^2-8t-16+11+\cancel{t}=\cancel{t}+7\Rightarrow -t^2-8t-12=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2+8t+12=0\Rightarrow t=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(1)(12)}}{2}=\frac{-8\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{-8+4}{2}=\boxed{-2=t}\\ \dfrac{-8-4}{2}=\boxed{-6=t}\end{cases}$$

Para *t = –2* y *t = –6* la función *A(x)* es continua en *x = 2.*

b) Para el valor *t* = –1 la función no es continua en *x = 2*.

La función queda:

$$A(x)=\begin{cases}-(2x-1)^2+10=-4x^2+4x-1+10=-4x^2+4x+9 & si\ 0\le x<2\\ x^2-8x+19-1=x^2-8x+18 & si\ 2\le x\le 7\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de parábola cóncava (antes de 2) y otro trozo de parábola convexa (a partir de 2).
Hallamos los vértices de cada parábola.

$$0\le x<2\to\left.\begin{array}{l}A'(x)=-8x+4\\ A'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -8x+4=0\Rightarrow 8x=4\Rightarrow\boxed{x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}$$

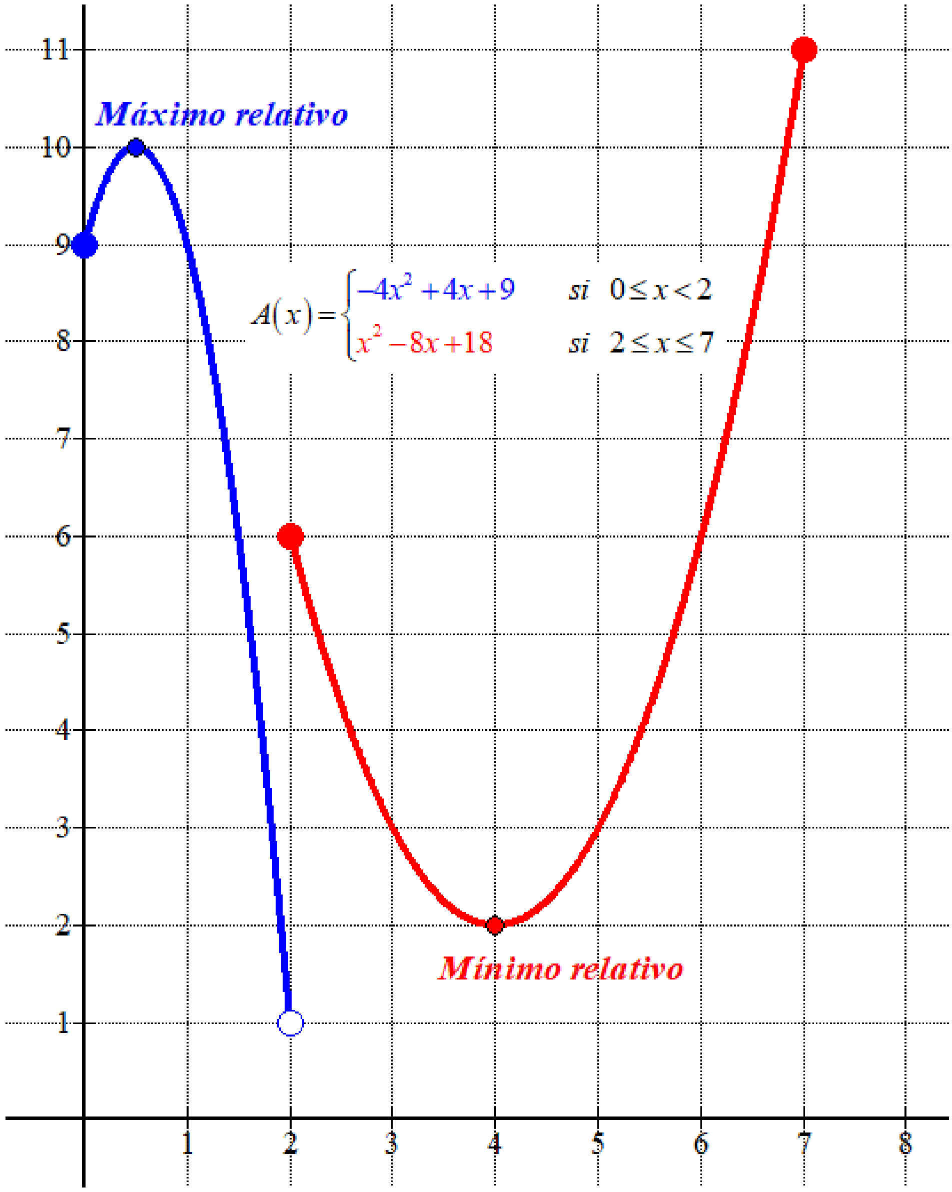
$$2\le x\le 7\to\left.\begin{array}{l}A'(x)=2x-8\\ A'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-8=0\Rightarrow 2x=8\Rightarrow\boxed{x=4}$$

$0 \le x < 2$

x	$y = -4x^2 + 4x + 9$
0	9
0.5	10 Máximo
1	9

$2 \le x \le 7$

x	$y = x^2 - 8x + 18$
2	6
3	3
4	2 Mínimo
5	3
6	6



6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 (t = *0*); hasta su desaparición en 2018 (t = *53*) viene dada por la expresión $S(t) = -0.5\cdot\left(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60\right)$ donde t se expresa en años.

a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)
b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

a) El año 1982 = 1965 + 17. Nos piden hallar S(17).

$$S(17) = -0.5\cdot\left(2\cdot 17^3 - 34\cdot 17^2 - 3968\cdot 17 - 60\right) = 33758$$

En el año 1982 el club de fútbol tenía 33758 socios.

b) Derivamos e igualamos a cero.

$$S(t) = -0.5\cdot\left(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60\right) \Rightarrow S'(t) = -0.5\left(6t^2 - 68t - 3968\right)$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -0.5\left(6t^2 - 68t - 3968\right) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 68t - 3968 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 34t - 1984 = 0 \Rightarrow t = \frac{34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4(3)(-1984)}}{2(3)} = \frac{34 \pm 158}{6} = \begin{cases} \frac{34+158}{6} = \boxed{32 = t} \\ \frac{34-158}{6} = \frac{-62}{3} < 0 \end{cases}$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en t = *32*.

$$S'(t) = -0.5\left(6t^2 - 68t - 3968\right) \Rightarrow S''(t) = -0.5(12t - 68) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(32) = -0.5(12\cdot 32 - 68) = \frac{-536}{3} < 0 \rightarrow t = 32 \text{ es máximo}$$

Se alcanza el máximo número de socios en el año 32, es decir en 1965 + 32 = 1997.
Como $S(32) = -0.5\cdot\left(2\cdot 32^3 - 34\cdot 32^2 - 3968\cdot 32 - 60\right) = 48158$ el número máximo de socios es de 48158 socios.
La función crece de 0 a 32 y decrece a partir de 32, por lo que el número mínimo de socios está situado en uno de los extremos del intervalo de definición de la función. Valoramos la función en $t = 0$ y en t = *53*.

$$S(0) = -0.5\cdot\left(2\cdot 0^3 - 34\cdot 0^2 - 3968\cdot 0 - 60\right) = 30$$

$$S(53) = -0.5\cdot\left(2\cdot 53t^3 - 34\cdot 53^2 - 3968\cdot 53 - 60\right) = 4058$$

El número mínimo de socios lo tuvo el club el año de su fundación 1965, siendo 30 los socios en ese año.