	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 (tabla adicional)**

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.
Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota. Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

P2.
Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

P3.
La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x)=\begin{cases} -0.16x^2+1.6x+3.64 & si\ 0\le x<7 \\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si\ 7\le x\le 12 \end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.
b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

P4.

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

P5.

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

P6.

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1.

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \end{pmatrix}$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^t = 9$ (siendo M^t la matriz traspuesta de M).

C2.

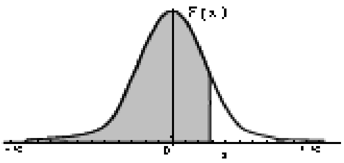
Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

C3.

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(\overline{A}) = 0.3$, donde $\overline{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A / B)$.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1.
Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota. Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Llamamos "x" al número de partidos ganados, "y" al número de partidos empatados y "z" al número de partidos perdidos.

"Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos" → $x+y+z=38$.
"El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota" → $3x+y=86$.
"El triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados" → $3y+z=x+2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=38 \\ 3x+y=86 \\ 3y+z=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=38 \\ y=86-3x \\ 3y+z=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+86-3x+z=38 \\ 3(86-3x)+z=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x+z=-48 \\ 258-9x+z=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=-48+2x \\ z=-256+10x \end{array}\right\} \Rightarrow -48+2x=-256+10x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 208=8x \Rightarrow \boxed{x=\frac{208}{8}=26} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z=-48+2\cdot 26=4} \\ \boxed{y=86-3\cdot 26=8} \end{array}\right.$$

El campeón de liga ganó 26 partidos, empató 8 y perdió 4 partidos.

P2.
Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Llamamos x = la inversión en artículos A e y = la inversión en artículos B.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio: $B(x,y)=0.10x+0.05y$

Las restricciones son:

"Se dispone de 12000 euros" → $x+y\le 12000$
"La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B" → $y\ge 3000;\ x\le 2y$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 12000 \\ y\ge 3000 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=12000$

x	$y=12000-x$
0	12000
8000	4000
12000	0

$y=3000$

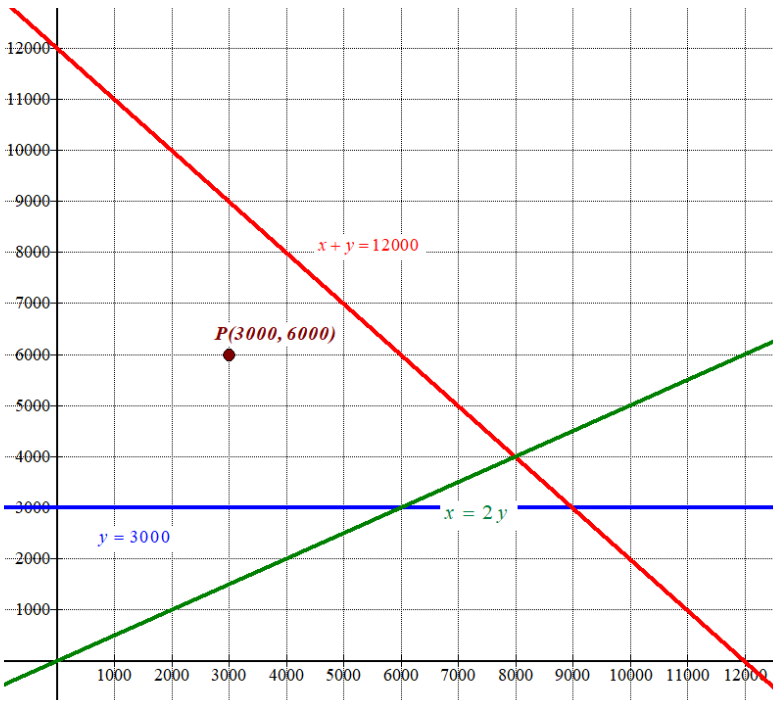
x	$y=3000$
0	3000
1000	3000
6000	3000

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
6000	3000
8000	4000

$x\ge 0;\ y\ge 0$

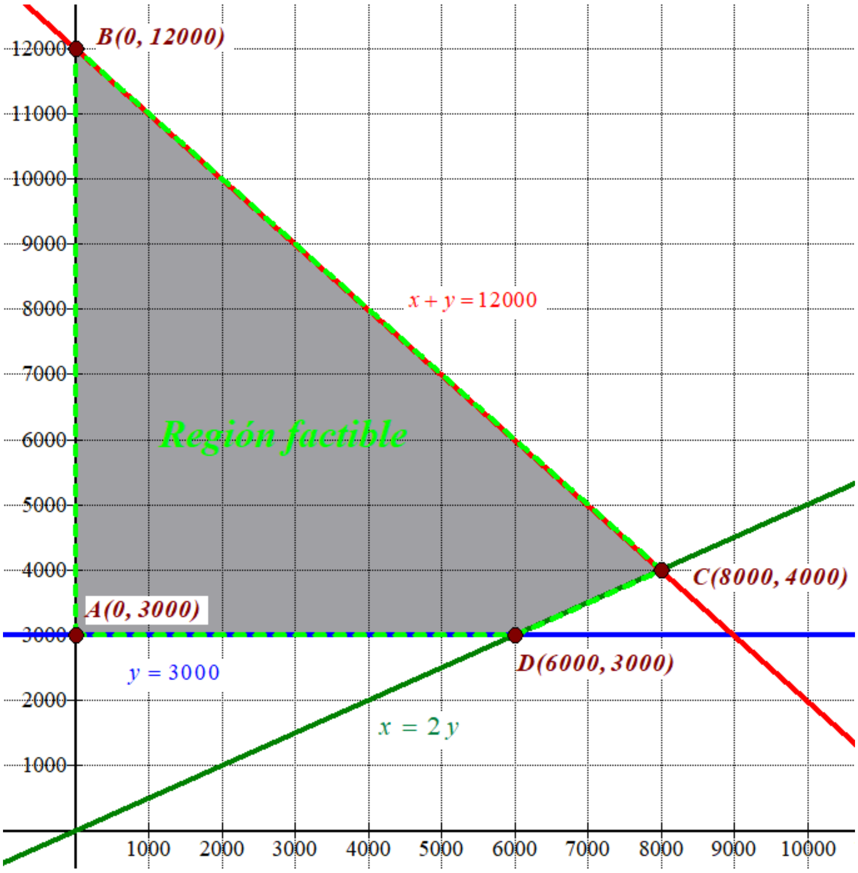
Primer cuadrante



Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 12000 \\ y\geq 3000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja, y por encima de las rectas verde y azul. Comprobamos que el punto P(3000, 6000) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3000+6000\leq 12000 \\ 6000\geq 3000 \\ 3000\leq 2\cdot 6000 \\ 3000\geq 0;\ 6000\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 3000); B(0, 12000); C(8000, 4000) y D(6000, 3000).
Valoramos la función objetivo $B(x,y)=0.10x+0.05y$ en cada vértice en busca del máximo.

A(0, 3000) → $B(0,3000)=0.10\cdot 0+0.05\cdot 3000=150$

B(0, 12000) → $B(0,12000)=0.10\cdot 0+0.05\cdot 12000=600$

C(8000, 4000) → $B(8000,4000)=0.10\cdot 8000+0.05\cdot 4000=1000$ ¡Máximo!

D(6000, 3000) → $B(6000,3000)=0.10\cdot 6000+0.05\cdot 3000=750$

El beneficio máximo son 1000 € y se consiguen invirtiendo 8000 € en artículos A y 4000 € en artículos B.

P3.
La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x)=\begin{cases} -0.16x^2+1.6x+3.64 & si\ 0\le x<7 \\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si\ 7\le x\le 12 \end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.
b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

a) En [0, 7) la función es una parábola y es continua. En el intervalo (7, 12] la función es $f(x)=\dfrac{3x+49}{x+3}$ y es continua en el intervalo de definición.
Estudiamos si la función es continua en $x = 7$.

$$\left.\begin{array}{l} f(7)=\dfrac{3\cdot 7+49}{7+3}=7 \\ \lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 7^-}-0.16x^2+1.6x+3.64=-0.16\cdot 7^2+1.6\cdot 7+3.64=7 \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{3x+49}{x+3}=7 \end{array}\right\}$$

Como $f(7)=\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=7$ la función es continua en $x = 7$ y por tanto, continua en todo su dominio.

b) Utilizamos el signo de la derivada para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función.

$$f'(x)=\begin{cases} -0.32x+1.6 & si\ 0\le x<7 \\ \dfrac{3(x+3)-1\cdot(3x+49)}{(x+3)^2}=\dfrac{3x+9-3x-49}{(x+3)^2}=\dfrac{-40}{(x+3)^2} & si\ 7<x\le 12 \end{cases}$$

Vemos cuando se anula la derivada.

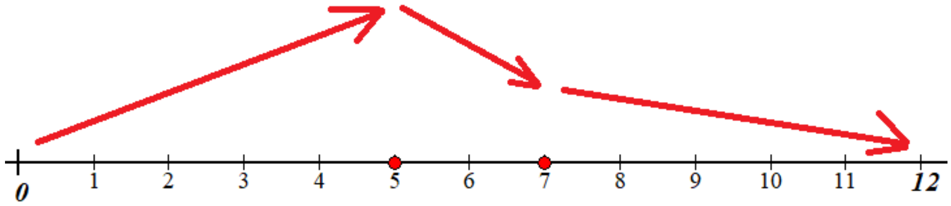
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} -0.32x+1.6=0\to x=\dfrac{-1.6}{-0.32}=5\in(0,7) \\ \dfrac{-40}{(x+3)^2}=0\to \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=5$ y $x = 7$.

- En el intervalo $[0,5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=-0.32\cdot 1+1.6=1.28>0$. La función crece en $[0,5)$.
- En el intervalo $(5,7)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6)=-0.32\cdot 6+1.6=-0.32<0$. La función decrece en $(5,7)$.

- En el intervalo $(7,12]$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(8)=\dfrac{-40}{(8+3)^2}<0$. La función decrece en $(7,12]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $[0,5)$ y decrece en $(5,12]$.

La función tiene un máximo relativo en $x=5$. Como $f(5)=-0.16\cdot5^2+1.6\cdot5+3.64=7.64$ el máximo tiene coordenadas $(5,7.64)$.

Como la función es continua en todo su dominio y sigue el esquema anterior, el valor mínimo está situado en uno de los extremos del intervalo.

$$f(0)=-0.16\cdot0^2+1.6\cdot0+3.64=3.64$$

$$f(12)=\frac{3\cdot12+49}{12+3}=\frac{17}{3}\simeq5.667$$

La tasa de variación del IPC fue máxima en el mes 5, siendo esta tasa de 7.64.
y fue mínima al comienzo del año (mes 0) con una tasa de 3.64.

P4.
Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

a) Debemos hallar "*x*" para que *f(x) = 50*.

$$f(x) = 50 \Rightarrow -x^2 + 25x - 100 = 50 \Rightarrow -x^2 + 25x - 150 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-1)(-150)}}{2(-1)} = \frac{-25 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-25+5}{-2} = \boxed{10 = x} \\ \dfrac{-25-5}{-2} = \boxed{15 = x} \end{cases}$$

Se debe elaborar 10 o 15 kilos de masa para obtener un beneficio de 50 euros.

b) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 25 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 25 = 0 \Rightarrow 2x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12.5$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y vemos si el resultado es positivo o negativo.

$$f'(x) = -2x + 25 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(12.5) = -2 < 0$$

Al tener la segunda derivada valor negativo la función tiene un máximo relativo en $x = 12.5$.

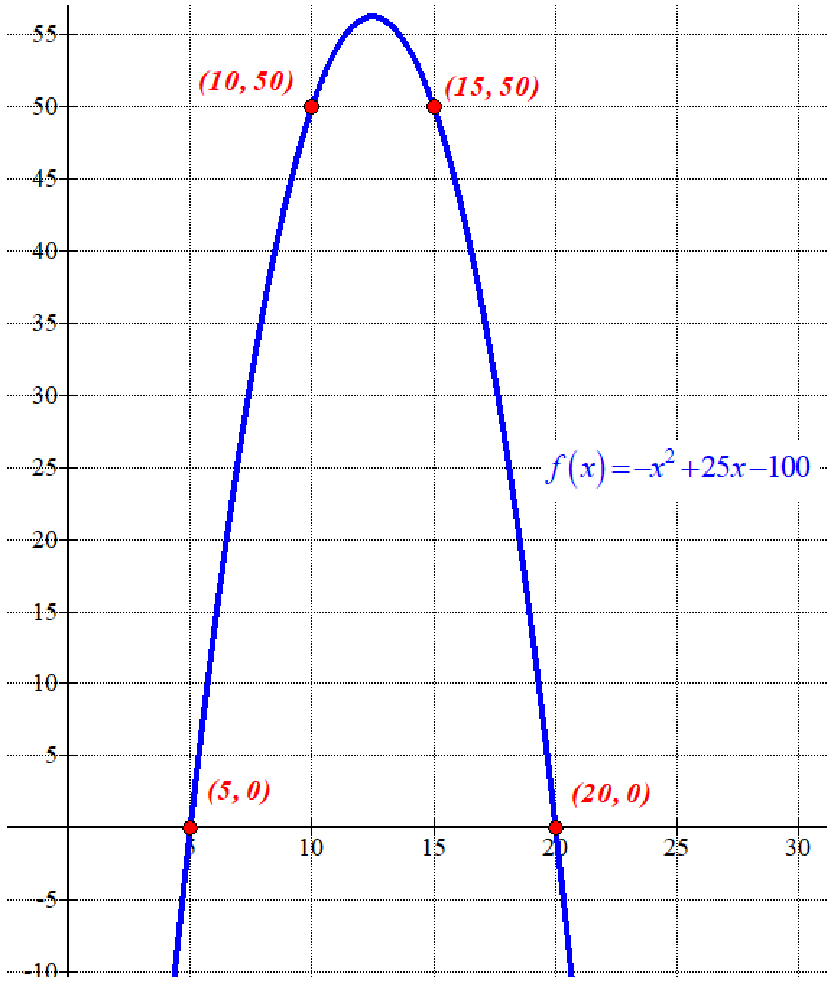
Se han de vender 12.5 kilogramos de masa para obtener un beneficio máximo.
Como $f(12.5) = -12.5^2 + 25 \cdot 12.5 - 100 = 56.25$ este beneficio máximo es de 56.25 euros.

c) Averiguamos cuando los beneficios son nulos.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 25x - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-1)(-100)}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-25 \pm 15}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-25+15}{-2} = \boxed{5 = x} \\ \dfrac{-25-15}{-2} = \boxed{20 = x} \end{cases}$$

La función tiene un máximo en (12.5, 56.25), crece en (0, 12.5) y decrece en (12.5, +∞).
Además, la función es continua, por lo que el beneficio es negativo con menos de 5 kilogramos de masa y a partir de 20 kilogramos de masa.



55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
-5
-10
5
10
15
20
25
30
(10, 50)
(15, 50)
(5, 0)
(20, 0)
$f(x) = -x^2 + 25x - 100$

P5.
Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

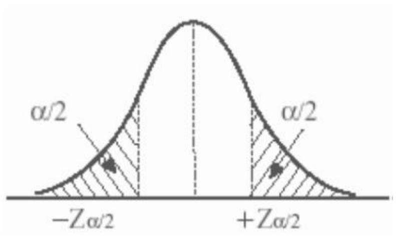
a) X = El número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años. X = N(μ, 9)

Tamaño de la muestra es n = 400. La media muestral es $\overline{x} = 75$ pulsaciones por minuto.

Con un nivel de confianza del 95 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0.025 = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Miramos\, en\, la \\ tabla\; N(0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,[illegible]239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,[illegible]636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,[illegible]026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,[illegible]406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,[illegible]772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,[illegible]123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,[illegible]454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,[illegible]764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,[illegible]051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,[illegible]315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,[illegible]554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,[illegible]770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,[illegible]962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,[illegible]131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,[illegible]279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,[illegible]406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,[illegible]515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,[illegible]608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,[illegible]686
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{400}} \simeq 0.882$$

El error es de 0.882 pulsaciones.

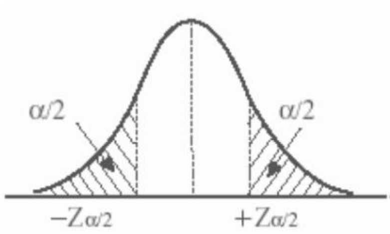
El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(75-0.882,\ \ 75+0.882\right) = \left(74.118, 75.882\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1-0.005=0.995 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Miramos\,en\,la \\ tabla\;N(0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.57+2.58}{2}=2.575$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]	[illegible]	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]	[illegible]	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]	[illegible]	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]	[illegible]	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]	[illegible]	0,9
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]	[illegible]	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]	[illegible]	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]	[illegible]	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]	[illegible]	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]	[illegible]	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]	[illegible]	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]	[illegible]	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]	[illegible]	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	[illegible]	[illegible]	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]	[illegible]	0,9
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	[illegible]	[illegible]	0,9
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	[illegible]	[illegible]	0,9
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9949	0,9951	0,9
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9

Utilizamos la fórmula del error, lo igualamos a 0.88 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.88=2.575\cdot\frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.88\sqrt{n}=2.575\cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}=\frac{2.575\cdot 9}{0.88} \Rightarrow n=\left(\frac{2.575\cdot 9}{0.88}\right)^2 \simeq 693.54$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 694 personas entre 20 y 30 años.

P6.
De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

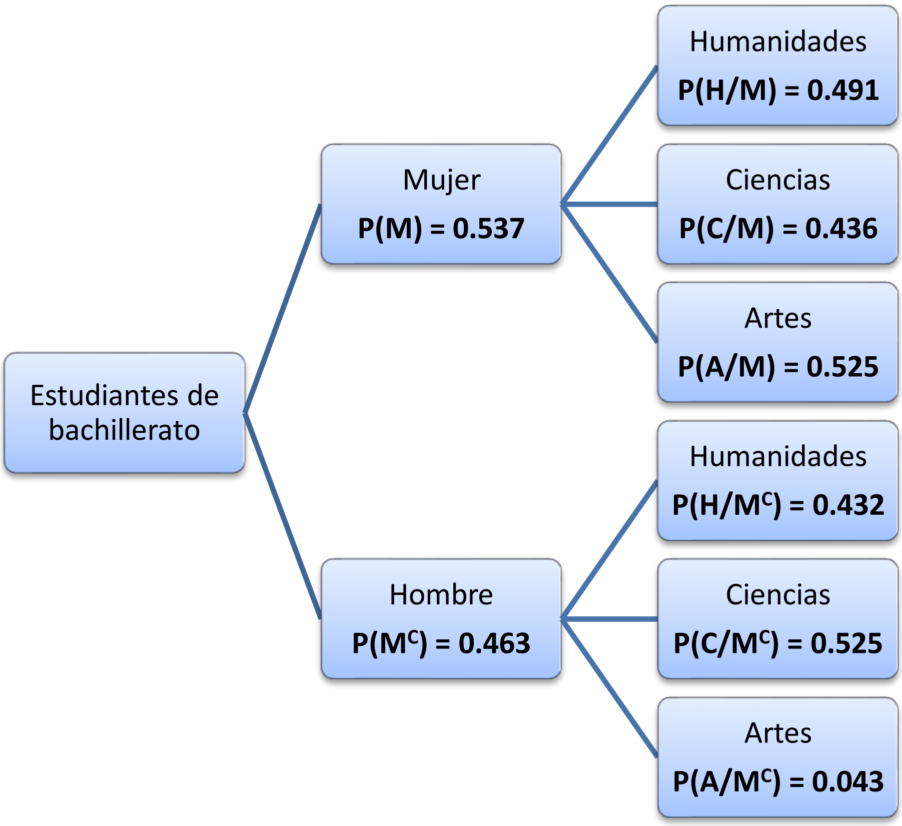
a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Llamamos M al suceso "El estudiante de bachillerato es mujer", H al suceso "el estudiante cursa la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales", C al suceso "el estudiante cursa la modalidad de Ciencias y Tecnología" y A al suceso "el estudiante cursa la modalidad de Artes".

Sabemos que $P(M)=0.537$, $P(H/M)=0.491; P(C/M)=0.436$, $P(A/M)=0.525$, $P(H/M^C)=0.432; P(C/M^C)=0.525$ y $P(A/M^C)=1-0.432-0.525=0.043$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(M)P(C/M)+P(M^C)P(C/M^C)=0.537\cdot 0.436+0.463\cdot 0.525\simeq \boxed{0.4772}$$

La probabilidad de que al elegir un estudiante de bachillerato esté matriculado en la modalidad de Ciencias y Tecnología tiene un valor aproximado de 0.4772.

b) Nos piden calcular $P(M/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)P(C/M)}{P(C)} = \frac{0.537 \cdot 0.436}{0.4772} \simeq \boxed{0.4906}$$

Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, la probabilidad de que sea mujer tiene un valor aproximado de 0.4906.

C1.
Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \end{pmatrix}$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^t = 9$ (siendo M^t la matriz traspuesta de M).

$$M \cdot M^t = 9 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} = 9 \Rightarrow 1 + 4 + m^2 = 9 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

C2.
Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Comprobamos si la función corta el eje OX entre –1 y 2.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 9 \\ eje\, OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \notin (-1, 2)$$

La función no corta el eje OX en el intervalo (–1, 2). Como $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ la función es positiva en el intervalo (–1, 2).
El valor del área del recinto limitado por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$. es la integral definida entre –1 y 2 de la función.

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} x^2 - 6x + 9dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) \right] = \frac{8}{3} - 12 + 18 + \frac{1}{3} + 3 + 9 = \boxed{21u^2}$$

El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ tiene un valor de 21 unidades cuadradas.

C3.
Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(\overline{A}) = 0.3$, donde $\overline{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$.

$$P(A \cup B) = 0.8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow 1 - P(\overline{A}) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0.3 + P(B) - 0.2 = 0.8 \Rightarrow P(B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.6667}$$