	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 (tabla adicional)**

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.
Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

P2.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a:*

$$\begin{cases} x-y+az=3 \\ x+5y-2az=1 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.
b) Resolver el sistema para $a=-1$.

P3.
Se considera la función $f(x)=ax^3+3x^2+bx-4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2,-8)$.

b) Si $a=0$ y $b=-11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4,5]$.

P4.
Una empresa tiene un gran servidor *web* cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. **(2 puntos)**

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? **(1 punto)**

P5.
El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

a) La probabilidad de que el test resulte positivo.

b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

P6.
Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?

b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

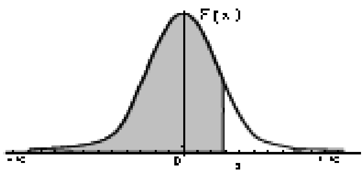
C1.
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $\left(A + B^t\right) \cdot X = C$.

C2.
¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x\left(x^2 - 1\right)}$? Justificar la respuesta.

C3.
Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1.
Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Llamamos x = número de estudiantes matriculados en A1 e y = número de estudiantes matriculados en A2.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio mensual: $B(x,y)=145x+150y$

Las restricciones son:

"Se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes" → $x \leq 66;\ y \geq 60$.

"El número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2" → $x \leq \frac{2}{3}y$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ x \leq \frac{2}{3}y \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ \frac{3x}{2} \leq y \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=66$

$x=66$	y
66	0
66	60
66	99

$y=60$

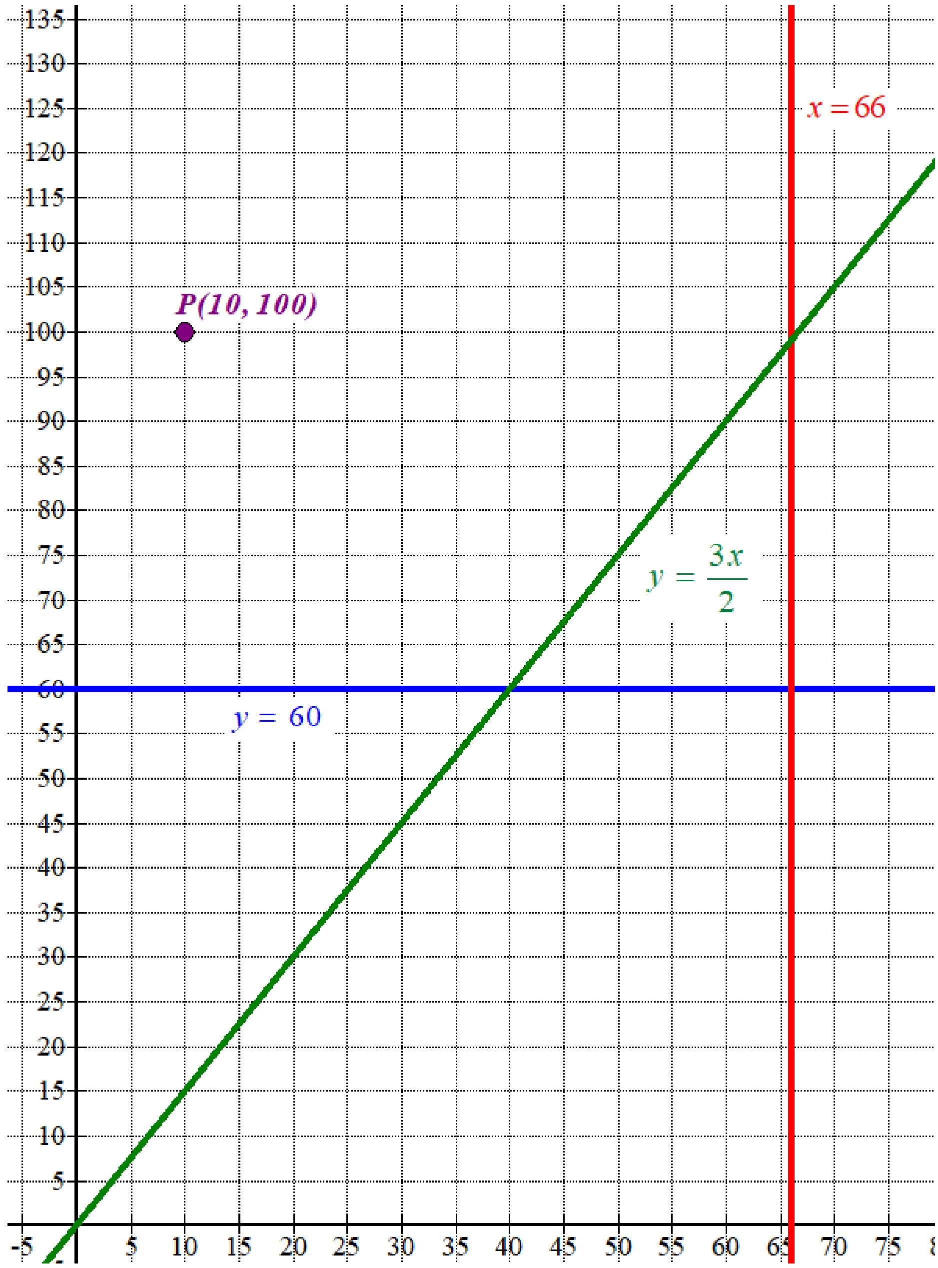
x	$y=60$
0	60
40	60
66	60

$y=\frac{3x}{2}$

x	$y=\frac{3x}{2}$
0	0
40	60
66	99

$x \geq 0;\ y \geq 0$

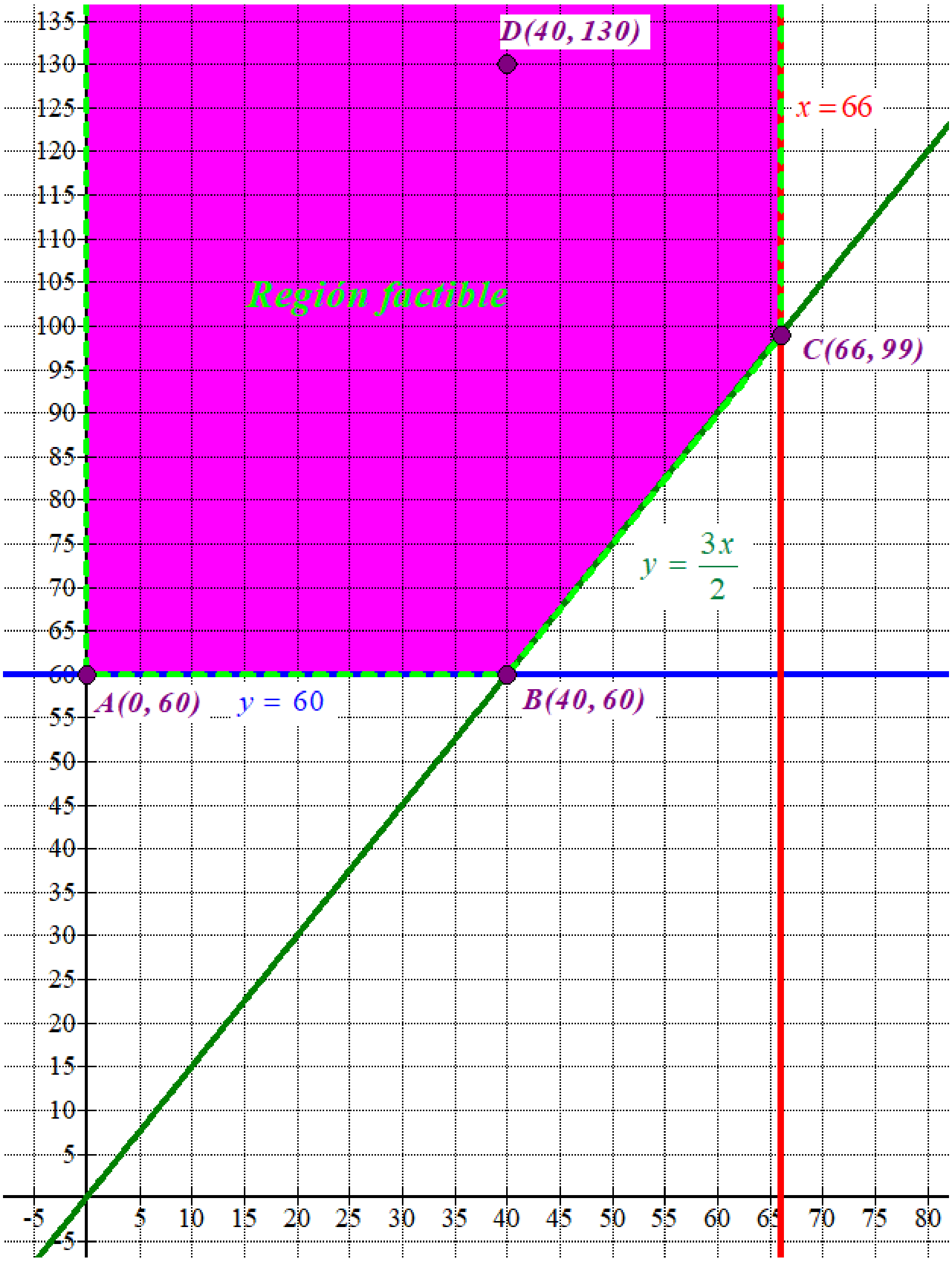
Primer cuadrante



Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ \dfrac{3x}{2} \leq y \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta horizontal azul y de la recta verde, y a la izquierda de la recta vertical roja. Comprobamos que el punto P(10, 100) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \leq 66 \\ 100 \geq 60 \\ \dfrac{3 \cdot 10}{2} \leq 100 \\ 10 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 60); B(40, 60) y C(66, 99). Al ser una región no acotada añadimos el punto D(40, 130) para considerarlo en la búsqueda del valor máximo de la función.

Valoramos la función objetivo $B(x,y)=145x+150y$ en cada vértice y en el punto D en busca del valor máximo.

A(0, 60) → $B(0,60)=145\cdot 0+150\cdot 60=9000$

B(40, 60) → $B(40,60)=145\cdot 40+150\cdot 60=14800$

C(66, 99) → $B(66,99)=145\cdot 66+150\cdot 99=24420$

D(40, 130) → $B(40,130)=145\cdot 40+150\cdot 130=25300$ ¡*Máximo*!

El valor máximo de la función beneficio se sitúa fuera de los vértices, por lo que cuanto más alejado tomemos el punto de la región factible mayor será el beneficio. No existe solución que optimice el beneficio.

P2.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a:*

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.
b) Resolver el sistema para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 1 & 5 & -2a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6a + 2a - 15a - 1 + 4a = -3a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = \frac{-6}{3} = -2$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$

En este caso la matriz A tiene determinante no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.
Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular la matriz y que sea más fácil obtener el rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ \hline 0 & 6 & 6 & -2 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - 3 \cdot \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 6 & -9 \\ \hline 0 & 5 & 5 & -8 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 6\cdot \text{Fila } 3^a - 5\cdot \text{ Fila } 2^a \\ 0 \quad 30 \quad 30 \quad -48 \\ 0 \quad -30 \quad -30 \quad 10 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -38 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ -38 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq -2$ el sistema tiene una única solución y si $a = -2$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = -1$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y + z \\ x + 5y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + y + z + 5y + 2z = 1 \\ 3(3 + y + z) + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6y + 3z = -2 \\ 5y + 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\times 5) \quad \to \quad 30y + 15z = -10 \\ (\times(-6)) \to -30y - 12z = 48 \end{cases}$$

$$3z = 38 \Rightarrow \boxed{z = \frac{38}{3}} \Rightarrow 6y + 3\frac{38}{3} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y + 38 = -2 \Rightarrow 6y = -40 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-40}{6} = \frac{-20}{3}} \Rightarrow \boxed{x = 3 - \frac{20}{3} + \frac{38}{3} = 9}$$

La solución del sistema es $x = 9$, $y = \frac{-20}{3}$ y $z = \frac{38}{3}$.

P3.
Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto (2, – 8).

b) Si a = 0 y b = –11, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo [4, 5].

a) Si la función tiene un extremo en el punto (2, – 8) significa que la función pasa por dicho punto, es decir, $f(2) = -8$ y también que la derivada primera se anula en x = 2, es decir, $f'(2) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4 \\ f(2) = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow -8 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 = 8a + 12 + 2b - 4 \Rightarrow 8a + 2b = -16 \Rightarrow 4a + b = -8 \Rightarrow \boxed{b = -8 - 4a}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x + b \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a + 12 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -12 - 12a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b = -8 - 4a \\ b = -12 - 12a \end{array}\right\} \Rightarrow -8 - 4a = -12 - 12a \Rightarrow 4 = -8a \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -8 - 4\frac{-1}{2} = -8 + 2 = -6}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{2}$ y $b = -6$.

Comprobamos que para estos valores la función tiene un extremo en (2, –8).

La función queda $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x - 4$.

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = -3x + 6 \Rightarrow f''(2) = -6 + 6 = 0$$

$$f'''(x) = -3 \Rightarrow f'''(2) = -3 \neq 0$$

Para los valores hallados la función presenta un punto de inflexión en el punto (2, –8).
La respuesta correcta es que no existen los valores a y b que hagan posible lo pedido.

b) Si a = 0 y b = –11 la función queda $f(x) = 3x^2 - 11x - 4$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3x^2-11x-4 \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-11x-4=0 \Rightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{6}=$$

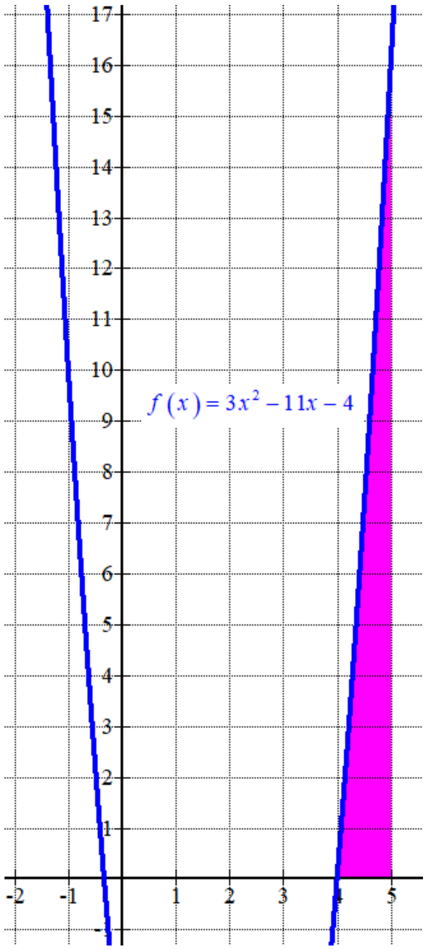
$$=\frac{11\pm 13}{6}=\begin{cases} \dfrac{11+13}{6}=4=x \\ \dfrac{11-13}{6}=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}=x \end{cases}$$

La gráfica corta el eje OX en dos puntos, pero ninguno de ellos está en el intervalo (4, 5). El área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo [4, 5] es el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 5 de la función.

$$\int_4^5 f(x)\,dx=\int_4^5 3x^2-11x-4dx=\left[x^3-11\frac{x^2}{2}-4x\right]_4^5=$$

$$=\left[5^3-11\frac{5^2}{2}-4\cdot 5\right]-\left[4^3-11\frac{4^2}{2}-4\cdot 4\right]=125-\frac{275}{2}-20-64+88+16=\frac{15}{2}=7.5$$

El área pedida tiene un valor de 7.5 unidades cuadradas.



P4.
Una empresa tiene un gran servidor *web* cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x)=8.5+\dfrac{3x}{1+x^2}$ para $x\geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. **(2 puntos)**

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? **(1 punto)**

a) Utilizamos la derivada para estudiar la monotonía de la función.

$$f'(x)=\frac{3(1+x^2)-(2x)(3x)}{(1+x^2)^2}=\frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow 3-3x^2=0\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Como la función solo está definida para $x\geq 0$ solo consideramos el punto crítico $x=1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $x = 0.5$ y la derivada vale

  $f'(0.5)=\dfrac{3-3\cdot 0.5^2}{(1+0.5^2)^2}=\dfrac{36}{25}>0$. La función crece en $[0,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

  $f'(2)=\dfrac{3-3\cdot 2^2}{(1+2^2)^2}=\dfrac{-9}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La velocidad de respuesta del servidor crece de 0 a 1 terabyte, decrece a partir de 1 terabyte.

La respuesta máxima es para $x = 1$. Calculamos $f(1)$: $f(1)=8.5+\dfrac{3}{1+1^2}=8.5+1.5=10$.

La velocidad máxima es de 10 Gbps.

b) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}8.5+\frac{3x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}8.5+\frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}8.5+\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=$$

$$=8.5+\frac{\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1}=8.5+\frac{0}{0+1}=8.5$$

A medida que aumenta la memoria requerida la velocidad de respuesta se acerca a 8.5 Gbps.

P5.
El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:
a) La probabilidad de que el test resulte positivo.
b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

a) Llamamos A = "La persona padece cierta enfermedad", T+ = "El test da positivo" y T– = "el test da negativo".
Sabemos que P(A) = 0.10, P(T+/A) = 0.97, P(T+/A^C) = 0.01.
Nos piden calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(A)P(T+/A) + P\left(A^C\right)P\left(T+/A^C\right) = 0.1\cdot 0.97 + 0.9\cdot 0.01 = \boxed{0.106}$$

La probabilidad de que el test resulte positivo es de 0.106.

b) Nos piden calcular $P(A/T-)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T-) = \frac{P(A\cap T-)}{P(T-)} = \frac{P(A)P(T-/A)}{1-P(T+)} = \frac{0.1(1-0.97)}{1-0.106} = \boxed{\frac{1}{298} \simeq 0.0034}$$

La probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad sabiendo que el test es negativo es de 1 de cada 298 pruebas.

P6.
Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.
a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?
b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

a) X = El peso (en kg) de cada saco de cemento. X = N(24, 2.25)

La distribución de la media de los pesos de muestras de 36 sacos sigue una ley normal de media la misma (24 kg) y desviación típica $\sigma = \frac{2.25}{\sqrt{36}} = 0.375$. $\overline{X_{36}} = N(24, 0.375)$

Nos piden calcular $P(\overline{X_{36}} > 25.125)$.

$$P(\overline{X_{36}} > 25.125) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{25.125-24}{0.375}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \le 3) = \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

	0,00
0,0	[illegible]
0,1	[illegible]
0,2	[illegible]
0,3	[illegible]
0,4	[illegible]
0,5	[illegible]
0,6	[illegible]
0,7	[illegible]
0,8	[illegible]
0,9	[illegible]
1,0	[illegible]
1,1	[illegible]
1,2	[illegible]
1,3	[illegible]
1,4	[illegible]
1,5	[illegible]
1,6	[illegible]
1,7	[illegible]
1,8	[illegible]
1,9	[illegible]
2,0	[illegible]
2,1	[illegible]
2,2	[illegible]
2,3	[illegible]
2,4	[illegible]
2,5	[illegible]
2,6	[illegible]
2,7	[illegible]
2,8	[illegible]
2,9	[illegible]
3,0	0,9987
3,1	0,9990

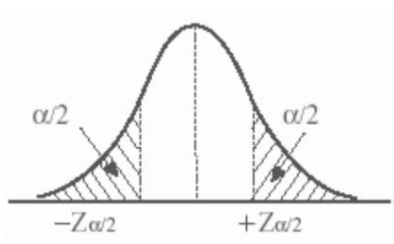
La probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg es de 0.0013.

b) El tamaño de la muestra es n = 15. La media muestral es 25.65 kg.

Con un nivel de confianza del 97 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2.25}{\sqrt{15}} \simeq 1.26\, kg$$

El error es de 1.26 kg.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(25.65 - 1.26,\ \ 25.65 + 1.26\right) = \left(24.39,\ 26.91\right)$$

C1.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $\left(A+B^t\right)\cdot X=C$.

Si X es una matriz de dimensiones $m\times n$ para que sean posibles las operaciones de la ecuación matricial.debería cumplirse:

$$A+B^t \text{ es una matriz } 2\times 3$$

$$\left(A+B^t\right)\cdot X=C$$
$$2\times\boxed{3\quad\cdot\, m}\times n\to 2\times n$$

Para poder realizar el producto debe ser *m* = *3*. Como el resultado del producto es una matriz de dimensiones $2\times n$ y debe ser igual a la matriz C de dimensiones 2×1 debe ser $n=1$.

La matriz X debe tener dimensiones 3×1.

C2.

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x\left(x^2-1\right)}$? Justificar la respuesta.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0\to x^2=1\to x=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

El dominio de definición de la función es $\mathbb{R}-\left\{-1,0,1\right\}$.

C3.

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Se pueden formar 1000 papeletas (000 a 999). De todas ellas hay 10 que acaban en 55:

055, 155, 255, 355, 455, 555, 655, 755, 855 y 955.

Dado que cada papeleta tiene la misma probabilidad de ser premiada aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que el número premiado acabe en 55 es $\dfrac{10}{1000}=0.01$.