

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Dues companyies de taxi, A i B, ofereixen tarifes diferents. La companyia A ofereix un cost fix de 20 € més 0,4 € per kilòmetre recorregut, mentre que el preu de la companyia B segueix la funció $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$, en què x representa el nombre de kilòmetres recorreguts.

a) Quina de les dues companyies ofereix la tarifa més econòmica si fem un recorregut de 10 km? I si en fem un de 80 km? Calculeu la diferència de preu en cada cas. Hi ha cap cost fix en la tarifa de la companyia B només pel sol fet de pujar al taxi?

[1 punt]

- b)** Determineu per a quin nombre de kilòmetres recorreguts les dues tarifes coincideixen. Si considerem només els trajectes inferiors a aquesta quantitat, per a quin nombre de kilòmetres la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és màxima? Quina és aquesta diferència màxima de preu?

[1,5 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

2. Una empresa de mobles disposa de tres fàbriques que produeixen un model de sofà determinat. El mes passat es van fabricar un total de 1.260 unitats d'aquest model i sabem que la segona fàbrica va produir tants sofàs com les altres dues juntes.
- a)** Amb aquesta informació, podem determinar quants sofàs va produir cadascuna de les fàbriques? Justifiqueu la resposta. A continuació, calculeu, només amb aquesta informació, quants sofàs va produir la segona fàbrica.

[1,25 punts]

- b)** També sabem que un 10 % dels sofàs produïts per la primera fàbrica, un 30 % dels produïts per la segona i un 20 % dels produïts per la tercera eren de color gris, i que en total es van fabricar 284 sofàs d'aquest color. Trobeu quants sofàs va produir cada fàbrica el mes passat.

[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Una pagesa contracta un conductor perquè porti un tractor fins a un poble que es troba a 300 km de distància. Sabem que el gasoil que fa servir el tractor costa 1,96 € per litre i que el conductor cobra 14,70 € l'hora. Suposem que el conductor farà tot el trajecte a una velocitat constant i que el consum de gasoil (en litres per hora), en funció de la velocitat x

(en kilòmetres per hora), és donat per la funció $G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$.

- a) Calculeu el temps que el conductor trigarà a fer el viatge i el cost total del viatge si el tractor fa tot el recorregut a 40 km/h (la velocitat màxima permesa per a aquest tipus de vehicle). Comproveu que la funció que dona el cost total del viatge en funció de la

velocitat del tractor es pot expressar com a $C(x) = \frac{7.350}{x} + 6x$.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu quina és la velocitat que fa que el cost total del viatge sigui mínim. Quin és aquest cost?
[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 3	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

4. Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena *constant màgica*.

El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualssevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

- a) Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu $10 \cdot \mathbf{A} + 3 \cdot \mathbf{B} + 18 \cdot \mathbf{C}$. Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).

[1,25 punts]

- b)** El Martí ha calculat la matriu màgica del seu pare, que fa l'aniversari el 8 de setembre, i ha obtingut que la seva constant màgica és 153. Quina edat té el pare del Martí?
[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

5. El Guiu i el Roc són uns grans aficionats al cinema i miren moltes pel·lícules de la plataforma a la qual estan subscrits. Els agrada tant que, si agafem una pel·lícula de la plataforma a l'atzar, la probabilitat que el Guiu l'hagi vista és de 0,5, la probabilitat que el Roc l'hagi vista és de 0,6 i la probabilitat que l'hagin vista tots dos és de 0,25.
- a)** Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que almenys un dels dos l'hagi vista. Calculeu també la probabilitat que l'hagi vista el Roc però no el Guiu.

[1,5 punts]

- b)** Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista.
[1 punt]

Espai per a la correcció		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Volem saber el percentatge de persones que estarien a favor de la construcció d'un poliesportiu municipal en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 350 persones, 218 de les quals es manifesten a favor de la proposta i la resta, en contra.
- a)** Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu.
- [1 punt]

- b)** Escriviu un interval de confiança del 95 % per al percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu en aquesta població.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recordeu també que, per a mostres grans, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$

és donat per $\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$.

[1,5 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'estudiant



Institut
d'Estudis
Catalans



SÈRIE 1

1.

a)

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0,4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \quad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \quad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b)

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0,4x + 20 = 0,01x^2 + 0,1x + 10$$

$$x^2 - 30x - 1000 = 0 \text{ que té per solucions } x = 50 \text{ i } x = -20.$$

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0, 50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0,4x + 20 - (0,01x^2 + 0,1x + 10) = -0,01x^2 + 0,3x + 10.$$



Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0,02x + 0,3,$$

la igualem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12,25$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor per al qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor per al qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per a distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.



2.

a)

Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z , s'obté el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array} \right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que només tenim dues equacions i en canvi tenim tres incògnites, i, per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix, observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació, i obtenim $y = 630$ sofàs.

b)

Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ 0,1x + 0,3y + 0,2z = 284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem l'última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1260 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre x, y, z , obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array} \right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat, la segona 630 i la tercera 320.



Criteris de correcció:

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.



3.

a)

Si el tractor fa el recorregut a 40 km/h obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{40} = 7,5$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor serà

$$\left(5 + \frac{40^2}{98}\right) \cdot 7,5 \cdot 1,96 + 7,5 \cdot 14,70 = 423,75 \text{ €}$$

Anem ara a buscar la funció que ens dona el cost en funció de la velocitat, en quilòmetres per hora, x :

$$C(x) = \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 1,96 + \frac{300}{x} \cdot 14,70 = \frac{7350}{x} + 6x$$

b)

Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$. Comencem calculant la derivada:

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6$$

Si la igulem a zero obtenim que $x = \pm \sqrt{\frac{7350}{6}} = \pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x = 35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de

$$C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420 \text{ €}$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul del temps necessari a 40 km/h: 0,25 punts. Càlcul del cost a 40 km/h: 0,5 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x : 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.



4.

a)

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$\begin{aligned} 10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C \\ &= 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$$10 + 41 + 3 = 54, 11 + 18 + 25 = 54, 33 - 5 + 26 = 54, 10 + 11 + 33 = 54, 41 + 18 - 5 = 54 \text{ i } 3 + 25 + 26 = 54.$$

La constant màgica del Martí és 54.

b)

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x . Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$\begin{aligned} 8 \cdot A + 9 \cdot B + x \cdot C &= 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -17 + 3x & 9 \\ 1 + x & x & -1 + x \\ -9 + 2x & 17 - x & -8 + 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8 - 17 + 3x + 9 = 153$ i, per tant, obtenim que $x = 51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$: 0,5 punts. Comprovació que la matriu obtinguda és màgica: 0,5 punts. Obtenció de la constant màgica del Martí: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul de la matriu màgica en funció de x : 0,5 punts. Obtenció de l'edat del pare del Martí: 0,25 punts.



5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = el Guiu ha vist la pel·lícula

A_2 = el Roc ha vist la pel·lícula

Sabem que $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,6$ i $P(A_1 \cap A_2) = 0,25$.

a)

La probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = 0,5 + 0,6 - 0,25 = 0,85$$

Així doncs, la probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula és de 0,85.

Ara ens demanen

$$P(A_2 \cap A_1^c) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,6 - 0,25 = 0,35$$

La probabilitat que el Roc hagi vist la pel·lícula però el Guiu no és de 0,35.

b)

Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista:

$$P(A_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0,5}{0,85} = 0,5882$$

La probabilitat que ens demanen és de 0,5882.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts.
Fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts.
Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resultat: 0,5 punts.



6.

a)

La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0,6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

b)

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,6229 - 1,96 \sqrt{\frac{0,6229(1-0,6229)}{350}} = 0,5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,6229 + 1,96 \sqrt{\frac{0,6229(1-0,6229)}{350}} = 0,6737$$

L'interval de confiança demanat és $[57,21\%, 67,37\%]$, és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37% amb una confiança del 95%.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,75 punts. Expressió com a percentatge: 0,25 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 1 punt. Resultat final: 0,5 punts.