GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2024	CONVOCATORIA: JUNIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido *247 250* euros por la venta de *220* televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta *1 250* euros y los otros dos modelos son un *10 %* y un *20 %* más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos - Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Consideremos las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A+A=B$. *(4 puntos)*

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y-AY=I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. *(4 puntos)*

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1}=I$. *(2 puntos)*

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+24x & si\ x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $\left]-9/2,-3/2\right[$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(4 puntos)*

Problema 5. Un *30 %* de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el *40 %* de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el *40 %* sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? *(3 puntos)*

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? *(3 puntos)*

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? *(4 puntos)*

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda". *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"? *(3 puntos)*

Soluciones

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido *247 250* euros por la venta de *220* televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta *1 250* euros y los otros dos modelos son un *10 %* y un *20 %* más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Llamamos "x" al número de televisores ULED vendidos, "y" al número de televisores QLED y "z" al número de televisores LD.

"Se han vendido 220 televisores" → $x+y+z=220$.

Un televisor del modelo *ULED* cuesta *1 250* euros y los otros dos modelos son un *10 %* y un *20 %* más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Un televisor QLED cuesta $1250\cdot 0.90=1125$ € y un televisor LD cuesta $1250\cdot 0.80=1000$ €. "Una tienda de televisores ha obtenido *247250* euros por la venta de *220* televisores" → $1250x+1125y+1000z=247250$.

"Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos" → $y+z=3x$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=220 \\ 1250x+1125y+1000z=247250 \\ y+z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=220 \\ 250x+225y+200z=49450 \\ y+z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=220 \\ 50x+45y+40z=9890 \\ y+z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=220 \\ 10x+9y+8z=1978 \\ y+z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=220 \\ 10x+9y+8z=1978 \\ y=3x-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3x-z+z=220 \\ 10x+9(3x-z)+8z=1978 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x=220 \\ 10x+27x-9z+8z=1978 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x=\dfrac{220}{4}=55} \\ 37x-z=1978 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37\cdot 55-z=1978 \Rightarrow \boxed{z=2035-1978=57} \Rightarrow \boxed{y=3\cdot 55-57=108}$$

Se han vendido 55 televisores ULED, 108 televisores QLED y 57 televisores LD.

Problema 2. Consideremos las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A+A=B$. *(4 puntos)*

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y-AY=I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. *(4 puntos)*

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1}=I$. *(2 puntos)*

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X^{-1}A+A=B \Rightarrow X^{-1}A=B-A \Rightarrow XX^{-1}A=X(B-A) \Rightarrow A=X(B-A) \Rightarrow A(B-A)^{-1}=X$$

Hallamos la matriz inversa de $B-A$.

$$B-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|B-A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$(B-A)^{-1}=\frac{Adj\left((B-A)^T\right)}{|B-A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X=A(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

b) Despejamos Y de la ecuación matricial.

$$(A-B)Y-AY=I \Rightarrow AY-BY-AY=I \Rightarrow -BY=I \Rightarrow BY=-I \Rightarrow Y=-B^{-1}I=-B^{-1}$$

Hallamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+0-0-0-0 = 2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz Y.

$$Y = -B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos Z de la ecuación matricial.

$$AZA^{-1} = I \Rightarrow Z = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

La matriz buscada es $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-3)+x+1=0 \Rightarrow x^2-3x+x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$.

Punto de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} \\ eje\ OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2-3\cdot 0}{0(0-3)+(0+1)}=0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} \\ eje\ OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \rightarrow \boxed{B(3,0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 0) y B(3, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\frac{1^2-3}{1(1-3)+(1+1)}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0-0}{1-0-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)\left(x^2-2x+1\right)-(2x-2)\left(x^2-3x\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-4x^2+2x-3x^2+6x-3-\left(2x^3-6x^2-2x^2+6x\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2+2x-3x^2+\cancel{6x}-3-\cancel{2x^3}+6x^2+2x^2-\cancel{6x}}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=\boxed{1=x}\\ \frac{-2-4}{2}=\boxed{-3=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 1 (excluido del dominio) y –3 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos $x=-4$ y la derivada vale

  $f'(-4)=\frac{(-4)^2+2(-4)-3}{\left((-4)^2-2(-4)+1\right)^2}=\frac{5}{+}>0$. La función crece en $(-\infty,-3)$.

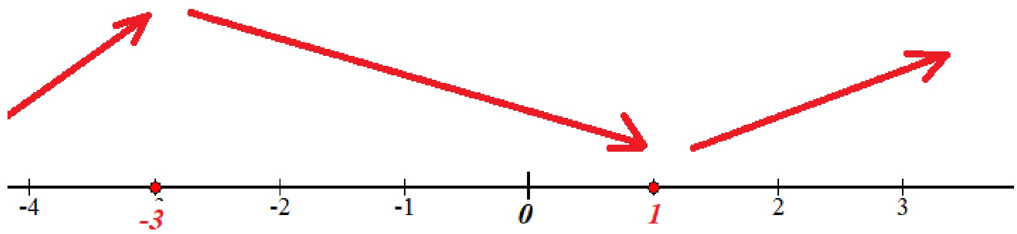
- En el intervalo $(-3,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{0^2+2(0)-3}{\left(0^2-2(0)+1\right)^2}=-3<0$

  . La función decrece en $(-3,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{2^2+2\cdot2-3}{\left(2^2-2\cdot2+1\right)^2}=5>0$.

  La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

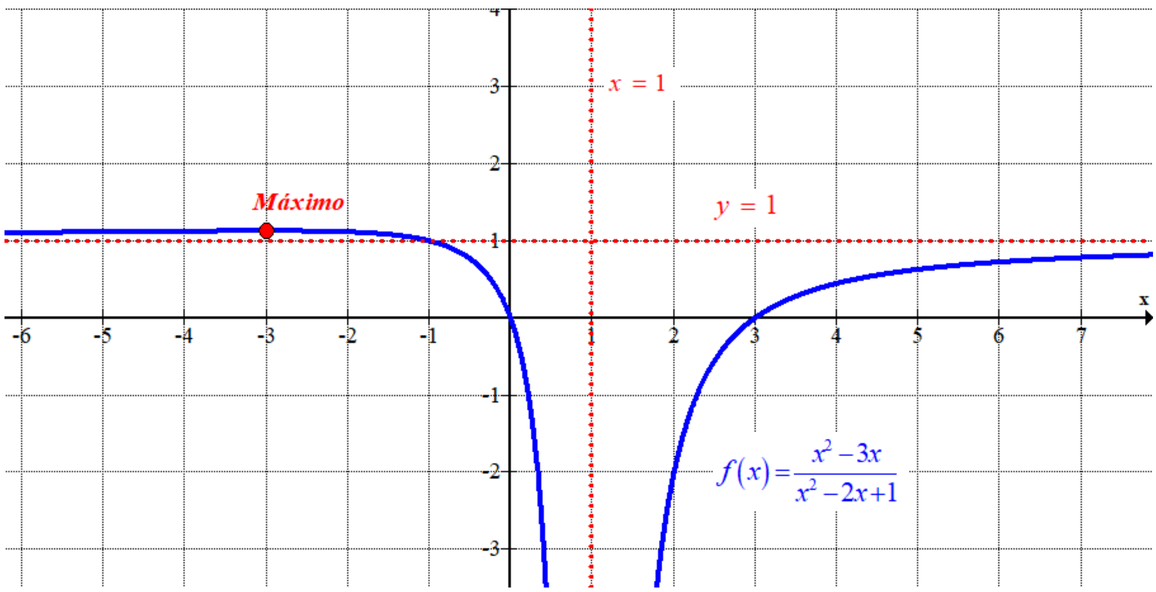


La función crece en $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-3,1)$.

d) Observando el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un máximo local en $x=-3$.
El valor $x = 1$ no pertenece al dominio. No hay mínimo local.
Como $f(-3)=\dfrac{(-3)^2-3(-3)}{(-3)(-3-3)+(-3+1)}=\dfrac{18}{16}=\dfrac{9}{8}$ las coordenadas del máximo local son $(-3,1.125)$.

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$
-4	1.12
-3	1.125
0	0
2	-2
3	0



Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que a = 9. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $\left]-9/2,-3/2\right[$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que a = 0. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación x = 2, la recta de ecuación x = 3 y el eje OX. *(4 puntos)*

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = -1$.

- Existe $f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=-25+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x^3+ax^2+24x=-25+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} (x-1)^2+3=(-1-1)^2+3=7$
- Los tres valores son iguales → $-25+a=7\Rightarrow \boxed{a=32}$

Para que la función sea continua debe ser a = *32*.

b) Si a = *9* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$.

En el intervalo $\left]-9/2,-3/2\right[$ la función es $f(x)=x^3+9x^2+24x$.

Hallamos sus puntos críticos.

$$f(x)=x^3+9x^2+24x\Rightarrow f'(x)=3x^2+18x+24$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+18x+24=0\Rightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(8)}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{-6+2}{2}=-2=x \\ \dfrac{-6-2}{2}=-4=x \end{cases}$$

Sustituimos los valores de los puntos críticos: $x = -4$ y $x = -2$ en la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+18x+24\Rightarrow f''(x)=6x+18\Rightarrow\begin{cases} f''(-4)=6(-4)+18=-6<0 \\ f''(-2)=6(-2)+18=6>0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo local en $x = -4$ y un mínimo local en $x = -2$.

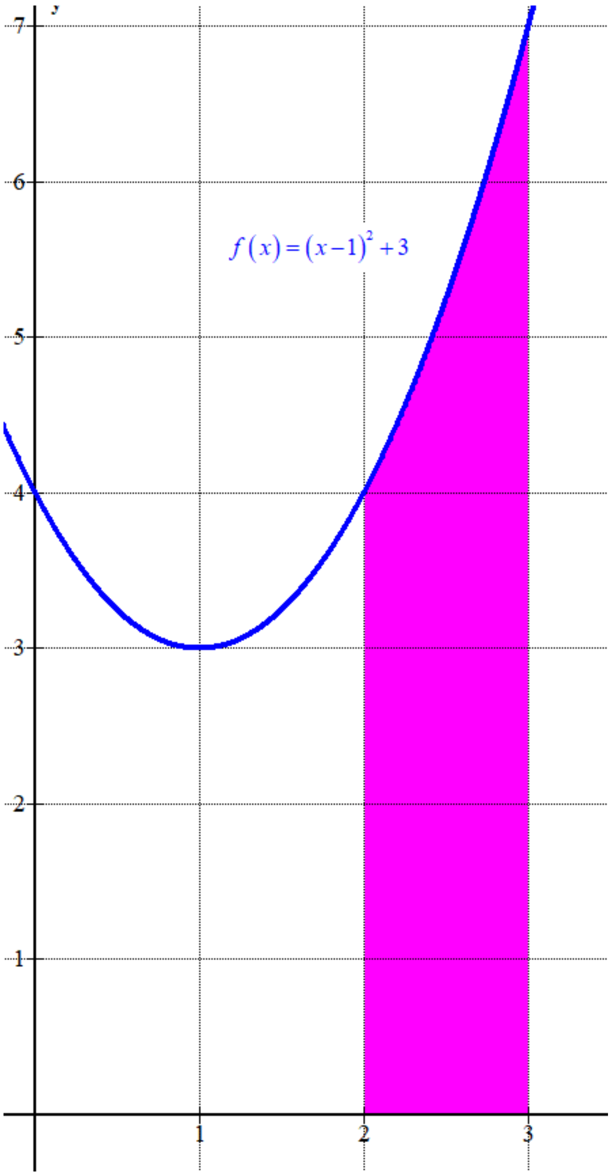
c) Para a = *0* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$.

Entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 + 1 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 4$. En el intervalo (2, 3) la función es positiva.
El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX es el valor de la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$Área = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 x^2 - 2x + 4dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_2^3 =$$

$$= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 4\cdot 3\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 4\cdot 2\right] = 9 - 9 + 12 - \frac{8}{3} + 4 - 8 = \boxed{\frac{16}{3} \simeq 5.33u^2}$$

El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX tiene un valor de 16/3 unidades cuadradas.



Problema 5. Un *30 %* de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el *40 %* de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el *40 %* sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? *(3 puntos)*

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? *(3 puntos)*

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? *(4 puntos)*

a) Llamamos *I* al suceso "El directivo de la empresa sabe inglés", *A* al suceso "El directivo de la empresa sabe alemán".

Sabemos que $P(I \cap A) = 0.30$, $P(I) = 0.40$ y $P(I / A) = 0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I / A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0.40 = \frac{0.30}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

La probabilidad de que un directivo sepa alemán es de 0.75.

b) Realizamos una tabla de contingencia.

	Sabe alemán (A)	No sabe alemán (A^C)	
Sabe inglés (I)	30		40
No sabe inglés (I^C)			
	75		100

Completamos la tabla.

	Sabe alemán (A)	No sabe alemán (A^C)	
Sabe inglés (I)	30	**10**	40
No sabe inglés (I^C)	**45**	**15**	**60**
	75	**25**	100

La probabilidad de que un directivo sepa alemán y no inglés es de 0.45.

c) Nos piden calcular $P(I / A^C)$. Hay un 25 % de directivos que no saben alemán y un 10 % que saben inglés y no alemán.

$$P(I / A^C) = \frac{P(I \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{0.10}{0.25} = 0.4$$

La probabilidad de que un directivo sepa inglés, sabiendo que no habla alemán es de 0.4.

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda". *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"? *(3 puntos)*

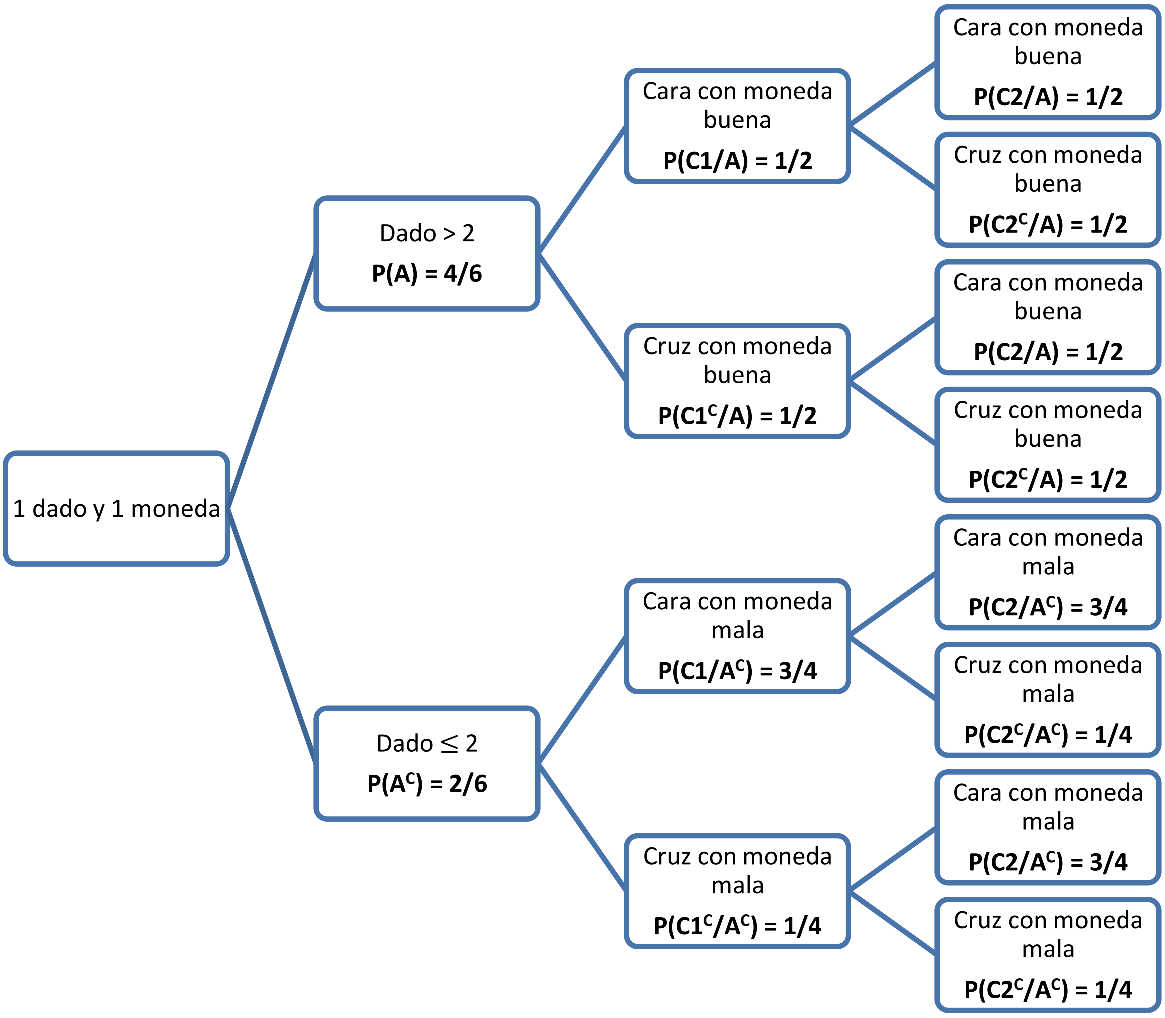
Llamamos A = "sacar un número mayor que 2 al lanzar un dado" y C1, C2 a "sacar cara al lanzar una moneda en un primer o segundo lanzamiento".

Como $A=\{3,4,5,6\} \Rightarrow P(A)=\frac{4}{6};\ P(A^C)=\frac{2}{6}$

Con la moneda buena la probabilidad de sacar cara es 1/2 → $P(C1/A)=P(C2/A)=\frac{1}{2}$.

Con la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor (3x) que la de obtener cruz (x) → $3x + x = 1$ → $4x = 1$ → $x=\frac{1}{4}$. Tenemos que $P(C1/A^C)=P(C2/A^C)=\frac{3}{4}$

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A/(\text{Dos caras})\right)$. Calculamos la probabilidad de sacar dos caras.

$$P(\text{Obtener dos caras}) = P(A\cap C1\cap C2) + P\left(A^C\cap C1\cap C2\right) =$$

$$= P(A)P(C1/A)P(C2/A) + P\left(A^C\right)P\left(C1/A^C\right)P\left(C2/A^C\right) =$$

$$= \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{17}{48}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/(\text{Dos caras})\right) = \frac{P\left(A\cap(\text{Dos caras})\right)}{P(\text{Dos caras})} = \frac{P(A\cap C1\cap C2)}{P(\text{Dos caras})} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{17}{48}} = \boxed{\frac{8}{17}\simeq 0.4706}$$

b) Nos piden calcular $P\left(A^C\cup(\text{Una o dos caras})\right)$. Calculamos la probabilidad de sacar una o dos caras. Utilizamos su suceso complementario "obtener dos cruces".

$$P(\text{Una o dos caras}) = 1 - P(\text{Dos cruces}) = 1 - \left[P\left(A\cap C1^C\cap C2^C\right) + P\left(A^C\cap C1^C\cap C2^C\right)\right] =$$

$$= 1 - \left[P(A)P\left(C1^C/A\right)P\left(C2^C/A\right) + P\left(A^C\right)P\left(C1^C/A^C\right)P\left(C2^C/A^C\right)\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right] = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P\left(A^C\cup(\text{Una o dos caras})\right) = P\left(A^C\right) + P(\text{Una o dos caras}) - P\left(A^C\cap(\text{Una o dos caras})\right) =$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - \left[P\left(A^C\cap \text{C1}\cap \text{C2}\right) + P\left(A^C\cap \text{C1}^C\cap \text{C2}\right) + P\left(A^C\cap \text{C1}\cap \text{C2}^C\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - \left[\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right] = \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - \frac{15}{48} = \boxed{\frac{5}{6}\simeq 0.8333}$$

c) Llamamos S al suceso "obtener 6 al lanzar un dado" y D a "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda".

Tenemos que $P(S) = \frac{1}{6}$. Calculamos $P(D)$ y $P(S\cap D)$.

$$P(S\cap D) = P(S)P\left(C1^C/A\right)P\left(C2^C/A\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$P(D)=P(A)P\left(C1^C/A\right)P\left(C2^C/A\right)+P\left(A^C\right)P\left(C1^C/A^C\right)P\left(C2^C/A^C\right)=$$

$$=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

Comprobamos si se cumple la igualdad $P(S\cap D)=P(S)P(D)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(S\cap D)=\dfrac{1}{24} \\ P(S)P(D)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{16}=\dfrac{1}{32} \end{array}\right\}\Rightarrow P(S\cap D)=\frac{1}{24}\neq\frac{1}{32}=P(S)P(D)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.