COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? *(8 puntos)*

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? *(2 puntos)*

Problema 2. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz $AB-2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2XC=B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & z\end{pmatrix}$ cumple la condición $CD=DC$.

(3 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2+60x+100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? *(3 puntos)*

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? *(4 puntos)*

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? *(3 puntos)*

Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. *(3 puntos)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? *(3 puntos)*

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. *(4 puntos)*

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. *(3 puntos)*

Soluciones

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.
a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? *(8 puntos)*
b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? *(2 puntos)*

a) Llamamos x = número de bolígrafos verdes sencillos e y = número de bolígrafos verdes sofisticados.
Realizamos una tabla.

	Unidades de tinta	Unidades de plástico	Ganancias
Nº bolis sencillos (x)	x	x	0.5x
Nº bolis sofisticados (y)	y	1.5y	0.7y
TOTALES	$x+y$	$x+1.5y$	$0.5x+0.7y$

La función objetivo que deseamos maximizar son las ganancias $G(x,y)=0.5x+0.7y$.

Las restricciones son:

"Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico" → $x+y\le 2500$; $x+1.5y\le 3000$

"No se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos" → $x\le 2000$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 2500 \\ x+1.5y\le 3000 \\ x\le 2000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=2500$

x	$y=2500-x$
0	2500
1500	1000
2000	500
2500	0

$x+1.5y=3000$

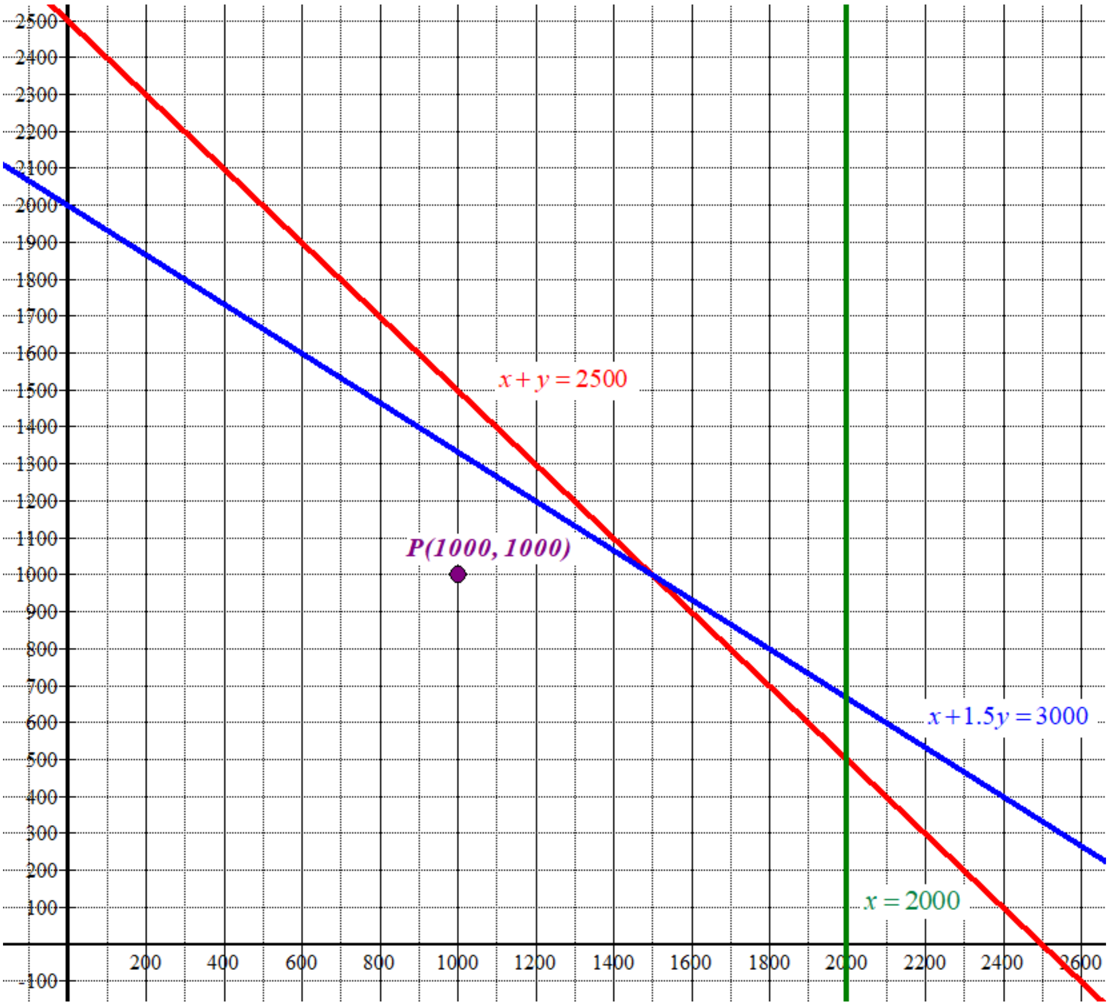
x	$y=\dfrac{3000-x}{1.5}$
0	2000
1500	1000
3000	0

$x=2000$

$x=2000$	y
2000	0
2000	500
2000	1000

$x\ge 0;\ y\ge 0$

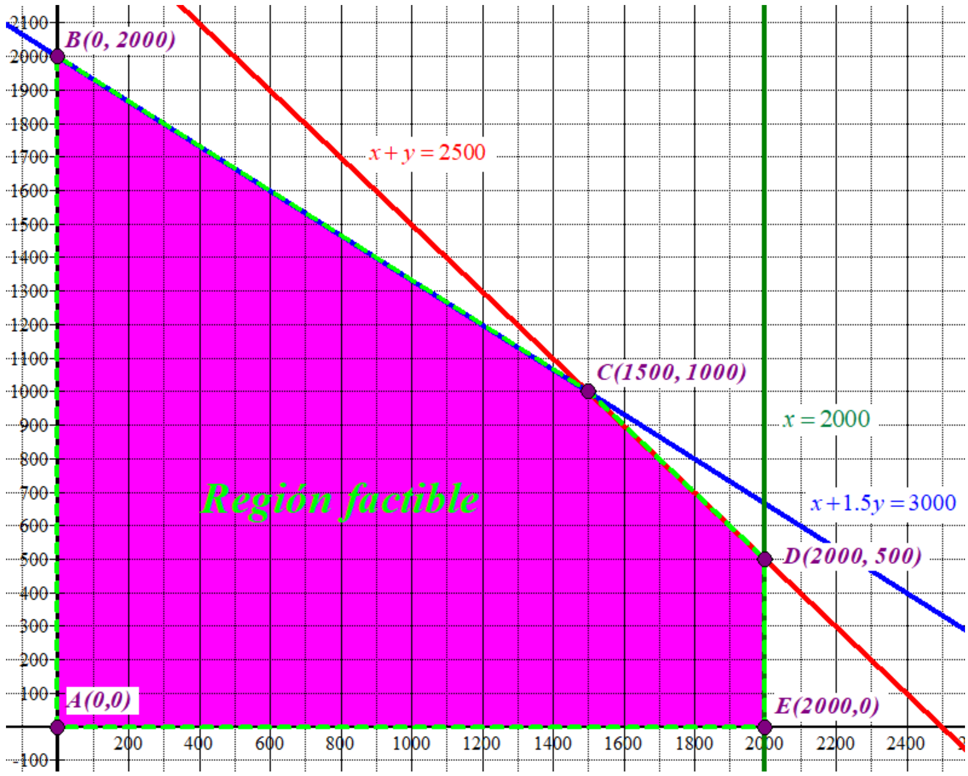
Primer cuadrante



Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 2500 \\ x+1.5y\leq 3000 \\ x\leq 2000 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde. Comprobamos que el punto P(1000, 1000) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1000+1000\leq 2500 \\ 1000+1.5\cdot 1000\leq 3000 \\ 1000\leq 2000 \\ 1000\geq 0; 1000\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 2000), C(1500, 1000), D(2000, 500) y E(2000, 0).

Valoramos la función objetivo ganancias $G(x,y)=0.5x+0.7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $G(0,0)=0$

B(0, 2000) → $G(0,2000)=0.5\cdot 0+0.7\cdot 2000=1400$

C(1500, 1000) → $G(1500,1000)=0.5\cdot 1500+0.7\cdot 1000=1450$ ¡Máximo!

D(2000, 500) → $G(2000,500)=0.5\cdot 2000+0.7\cdot 500=1350$

E(2000, 0) → $G(2000,0)=0.5\cdot 2000+0.7\cdot 0=1000$

El valor máximo de la función ganancias se obtiene en el vértice C(1500, 1000). Se deben producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados para maximizar las ganancias.

b) Las ganancias máximas que se pueden obtener son 1450 €.

Problema 2. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz $AB-2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2XC=B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & z\end{pmatrix}$ cumple la condición $CD=DC$.

(3 puntos)

a) Obtenemos la expresión de la matriz $AB-2I$.

$$AB-2I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -4+6 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB-2I=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

Comprobamos si su determinante es nulo o no.

$$|AB-2I|=\begin{vmatrix}-3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 7\end{vmatrix}=0+12+0-0-0+18=30\neq 0$$

Como el determinante es no nulo la matriz $AB-2I$ es invertible.

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A+2XC=B^t$.

$$A+2XC=B^t\Rightarrow 2XC=B^t-A\Rightarrow XC=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)\Rightarrow X=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)C^{-1}$$

Hallamos la expresión de X.

$$|C|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^t\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$B^t-A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 4-3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$.

c) Veamos cuando se cumple $CD=DC$.

$$CD=DC\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3-1 & -3+z\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1 & 1\\ -3+z & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3+z=1\\ 1=-3+z\end{cases}\Rightarrow-3+z=1\Rightarrow\boxed{z=4}$$

Se cumple lo pedido para $z = 4$.

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.	*(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.	*(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.	*(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.	*(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.	*(2 puntos)*

a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\left(3x^2-1\right)^2=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{+\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Punto de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2} \\ eje\ OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{\left(3\cdot 0^2-1\right)^2}=1 \Rightarrow \boxed{A(0,1)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2} \\ eje\ OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow 1=0 \text{ ¡Imposible!} \Rightarrow \text{Sin punto de corte}$$

El único punto de corte con los ejes es A(0, 1).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -\sqrt{3}/3} f(x)=\lim_{x\to -\sqrt{3}/3}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical.

¿ $x=\dfrac{+\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to +\sqrt{3}/3} f(x)=\lim_{x\to +\sqrt{3}/3}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x = \frac{+\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(3x^2-1)^2 - 2(3x^2-1)(6x)}{(3x^2-1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-12x}{(3x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{+\sqrt{3}}{3}$ (excluidos del dominio) y 0 (punto crítico).

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f'(-1) = \frac{-12(-1)}{(3(-1)^2-1)^3} = \frac{12}{8} > 0$. La función crece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

  $f'(-0.5) = \frac{-12(-0.5)}{(3(-0.5)^2-1)^3} = -384 < 0$. La función decrece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

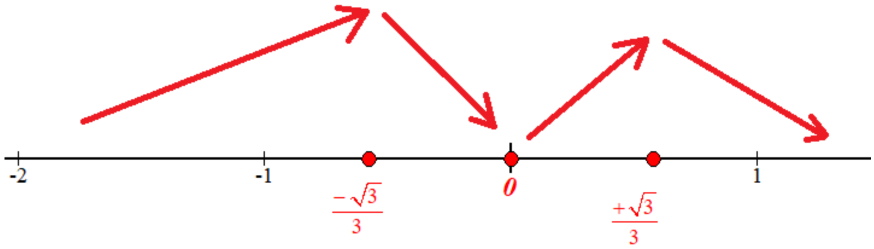
- En el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

  $f'(0.5) = \frac{-12(0.5)}{(3(0.5)^2-1)^3} = 384 > 0$. La función crece en $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $f'(1) = \frac{-12(1)}{(3(1)^2-1)^3} = \frac{-12}{8} < 0$. La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



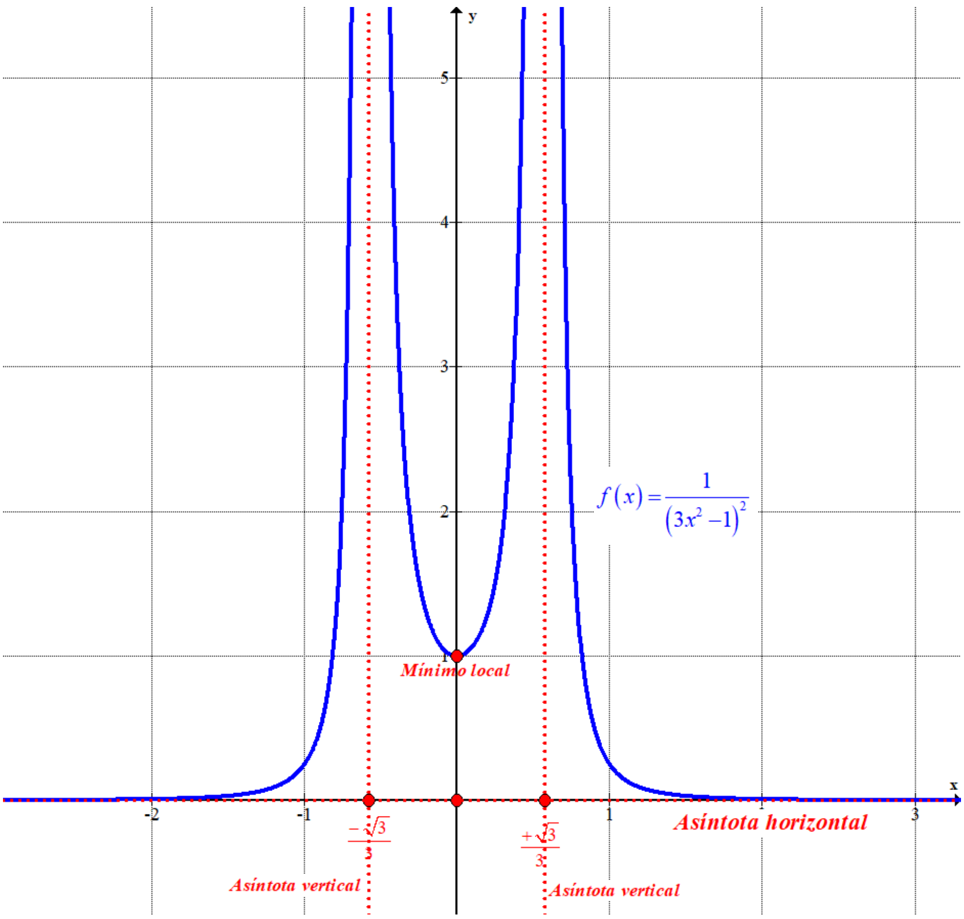
La función crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\,0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\,+\infty\right)$.

d) Observando el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x=0$. Como $f(0)=1$, las coordenadas del mínimo local son $A(0,1)$.

Los valores $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{+\sqrt{3}}{3}$ no pertenecen al dominio. No hay máximo local.

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}$
-1	0.25
-0.5	16
0	1
0.5	16
1	0.25



Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2+60x+100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? *(3 puntos)*

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? *(4 puntos)*

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? *(3 puntos)*

a) Derivamos la función ingresos $I(x)=-x^2+60x+100$ y averiguamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} I'(x)=-2x+60 \\ I'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+60=0 \Rightarrow 2x=60 \Rightarrow \boxed{x=\frac{60}{2}=30}$$

Tenemos un punto crítico de la función en *x = 30*. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$I'(x)=-2x+60 \Rightarrow I''(x)=-2 \Rightarrow I''(30)=-2<0$$

Como el valor de la derivada segunda para *x = 30* es negativo la función ingresos presenta un máximo relativo en *x = 30*. Calculamos los ingresos para este valor.

$$I(30)=-30^2+60\cdot 30+100=1000$$

Con 30 kilos de abono se maximizan los ingresos siendo estos ingresos máximos de 1000 €.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes. Obtenemos su expresión.

$$\left.\begin{array}{l} Costes \rightarrow C(x)=12x \\ I(x)=-x^2+60x+100 \end{array}\right\} \Rightarrow B(x)=I(x)-C(x)=-x^2+60x+100-12x=-x^2+48x+100$$

Derivamos la función $B(x)=-x^2+48x+100$ y buscamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} B'(x)=-2x+48 \\ B'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+48=0 \Rightarrow 2x=48 \Rightarrow \boxed{x=\frac{48}{2}=24}$$

Tenemos un punto crítico de la función en *x = 24*. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x)=-2x+48 \Rightarrow B''(x)=-2 \Rightarrow B''(24)=-2<0$$

Como el valor de la derivada segunda para *x = 24* es negativo la función beneficio presenta un máximo relativo en *x = 24*. Calculamos los beneficios para este valor.

$$B(24)=-24^2+48\cdot 24+100=676$$

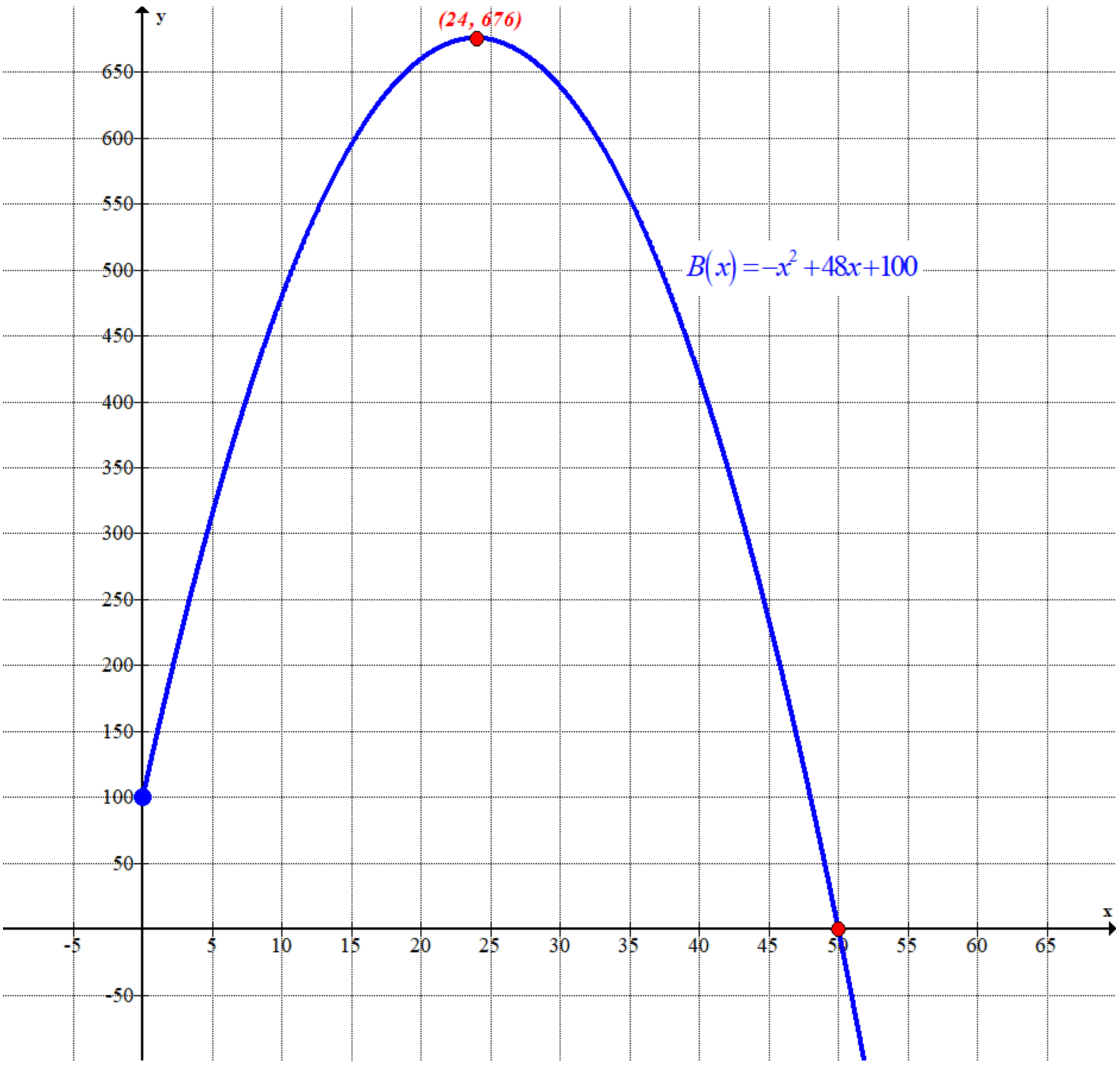
Con 24 kilos de abono se maximiza el beneficio siendo este beneficio máximo de 676 €.

c) Buscamos cuando se anulan los beneficios.

$$\left.\begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 48x + 100 \\ B(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 48x + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(-1)(100)}}{2(-1)} = \frac{-48 \pm 52}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-48+52}{-2} = -2 < 0 \quad \text{¡No válido!} \\ \dfrac{-48-52}{-2} = 50 = x \end{cases}$$

La función beneficio es continua, tiene un punto máximo (30, 676) y para $x = 50$ la función vale 0. A partir de este valor el beneficio es negativo y entre 0 y 50 kg de abono el beneficio es positivo.



Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música". *(3 puntos)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"? *(3 puntos)*

Realizamos una tabla de contingencia.

	Futbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60		310
Alumnos de Bachillerato (A^C)			8	
	300			400

Completamos la tabla.

	Futbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60	**20**	310
Alumnos de Bachillerato (A^C)	**70**	**12**	8	**90**
	300	**72**	**28**	400

a) Nos piden calcular $P(A \cup M)$. Hay 400 alumnos en el instituto, de los cuales 310 son de ESO y 8 alumnos de Bachillerato han elegido música. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A \cup M) = \frac{310+8}{400} = \boxed{\frac{159}{200} = 0.795}$$

La probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música" tiene un valor de 0.795.

b) Hay 300 + 72 = 372 alumnos que han elegido extraescolar deportiva. De ellos 230 + 60 = 290 son alumnos de ESO. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A/(F \cup B)) = \frac{290}{372} = \boxed{\frac{145}{186} \simeq 0.7796}$$

La probabilidad de que un alumno que ha elegido extraescolar deportiva sea alumno de ESO es de $\frac{145}{186} \simeq 0.7796$.

c) Los sucesos A^C y B^C son independientes si se cumple $P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A^C\right)=\dfrac{90}{400}=\dfrac{9}{40} \\ P\left(B^C\right)=\dfrac{300+28}{400}=\dfrac{41}{50} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(A^C\right)P\left(B^C\right)=\frac{9}{40}\cdot\frac{41}{50}=\frac{369}{2000}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A^C\cap B^C\right)=\dfrac{70+8}{400}=\dfrac{39}{200}=\dfrac{390}{2000} \\ P\left(A^C\right)P\left(B^C\right)=\dfrac{369}{2000} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(A^C\cap B^C\right)=\frac{390}{2000}\neq\frac{369}{2000}=P\left(A^C\right)P\left(B^C\right)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. *(3 puntos)*

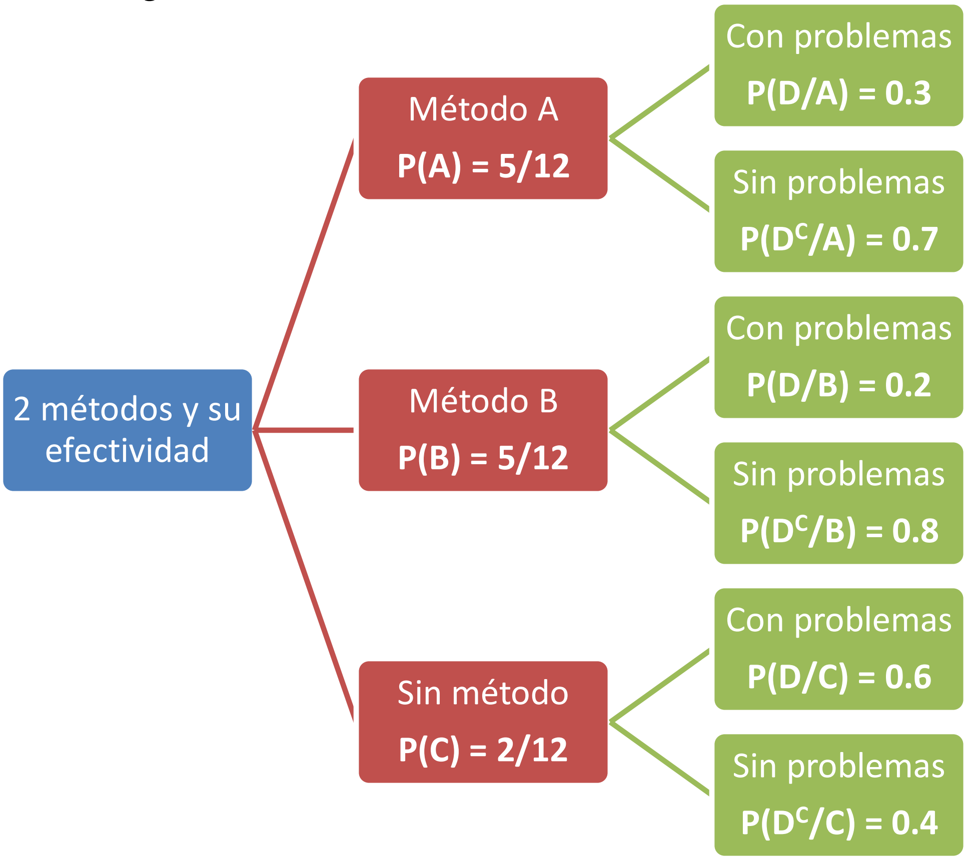
b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. *(4 puntos)*

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios". *(3 puntos)*

Llamamos A = "a la vaca se le aplica el método A", B = "a la vaca se le aplica el método B", C = "a la vaca no se le aplica ningún método" y D a "la vaca tiene problemas respiratorios durante los 4 meses siguientes".

Sabemos que $P(A)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$, $P(B)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$, $P(C)=\frac{100}{600}=\frac{2}{12}$, $P(D/A)=0.3$, $P(D/B)=0.2$, $P(D/C)=0.6$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=\frac{5}{12}\cdot 0.3+\frac{5}{12}\cdot 0.2+\frac{2}{12}\cdot 0.6=\boxed{\frac{37}{120}\simeq 0.3083}$$

La probabilidad de que una res elegida al azar hay tenido problemas respiratorios tiene un valor de $\frac{37}{120} \simeq 0.3083$.

b) Nos piden calcular $P\left(B/D^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/D^C\right)=\frac{P\left(B\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P(B)P\left(D^C/B\right)}{1-P(D)}=\frac{\frac{5}{12}\cdot 0.8}{1-\frac{37}{120}}=\boxed{\frac{40}{83}\simeq 0.4819}$$

La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B es de $\frac{40}{83} \simeq 0.4819$.

c) Nos piden calcular $P(C\cap D)$.

$$P(C\cap D)=P(C)P(D/C)=\frac{2}{12}\cdot 0.6=\boxed{\frac{1}{10}=0.1}$$