Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2023-2024

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos**. **El estudiante ha de elegir 5 problemas.**
En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.
Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A\cdot X+I=B \\ 2\cdot X+Y=B \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro *x* para los que la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para *x* = *–1*, calcular la matriz Y tal que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, *N(x)* en días, depende de la cantidad de dinero, *x* en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases} -x^2+3Ax+3B & 0\le x<4 \\ -x+39 & 4\le x\le 10 \end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x)=30+6x^2-x^3 \qquad 1\le x\le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=-x^2+1$ y el eje OX entre los valores $x=-2$ y $x=3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**

b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**

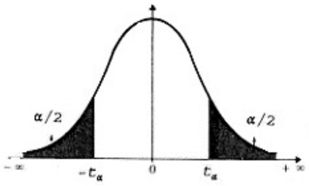
b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A\cdot X+I=B \\ 2\cdot X+Y=B \end{cases}$$

Despejamos X de la primera ecuación matricial.

$$A\cdot X+I=B\Rightarrow A\cdot X=B-I\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-I\right)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=A^{-1}\left(B-I\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2-1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y hallamos la matriz Y.

$$2\cdot X+Y=B\Rightarrow Y=B-2\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema de ecuaciones matriciales son $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y = 2\cdot I$. **(1 punto)**

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & -1+2\\ x+x-2 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{vmatrix}=3(x-1)-(2x-2)=3x-3-2x+2=x-1$$

$$\left|A\cdot B^t\right|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de 1.

b) Para $x = -1$ la matriz $A\cdot B^t$ queda $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}-1-1 & 1\\ -2-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de $A\cdot B^t$ para $x = -1$.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-6+4=-2\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{-2}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la ecuación matricial y obtenemos la expresión de Y.

$$\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I \Rightarrow Y=\left(A\cdot B^t\right)^{-1}2I=2\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

La matriz Y solución de la ecuación matricial es $Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Llamamos "x" al número de carteras vendidas, "y" al de bolsos y "z" al de mochilas.

"El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Por esta venta ingresa un total de 450 euros" → $10x+15y+20z=450$.

"Cierto día vende 35 artículos" → $x+y+z=35$

"El número de carteras vendidas es el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas" → $x=y+2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 10x+15y+20z=450 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 2x+3y+4z=90 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+2z+y+z=35 \\ 2(y+2z)+3y+4z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+3z=35 \\ 5y+8z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \times(-5) \rightarrow -10y-15z=-175 \\ \times(2) \rightarrow \quad 10y+16z=180 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{z=5} \Rightarrow 2y+15=35 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{20}{2}=10} \Rightarrow \boxed{x=10+2\cdot 5=20}$$

Ese día se vendieron 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Llamamos "x" al número de lotes A e "y" al número de lotes B.
Realizamos una tabla.

	Nº chorizos	Nº salchichones	Beneficio
Nº lotes A (x)	6x	6x	20x
Nº lotes B (y)	10y	16y	36y
TOTALES	$6x+10y$	$6x+16y$	$20x+36y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=20x+36y$.
Las restricciones del problema son:

"Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta" → $6x+10y\le 390;\ 6x+16y\le 480$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}6x+10y\le 390\\ 6x+16y\le 480\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+5y\le 195\\ 3x+8y\le 240\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+5y=195$

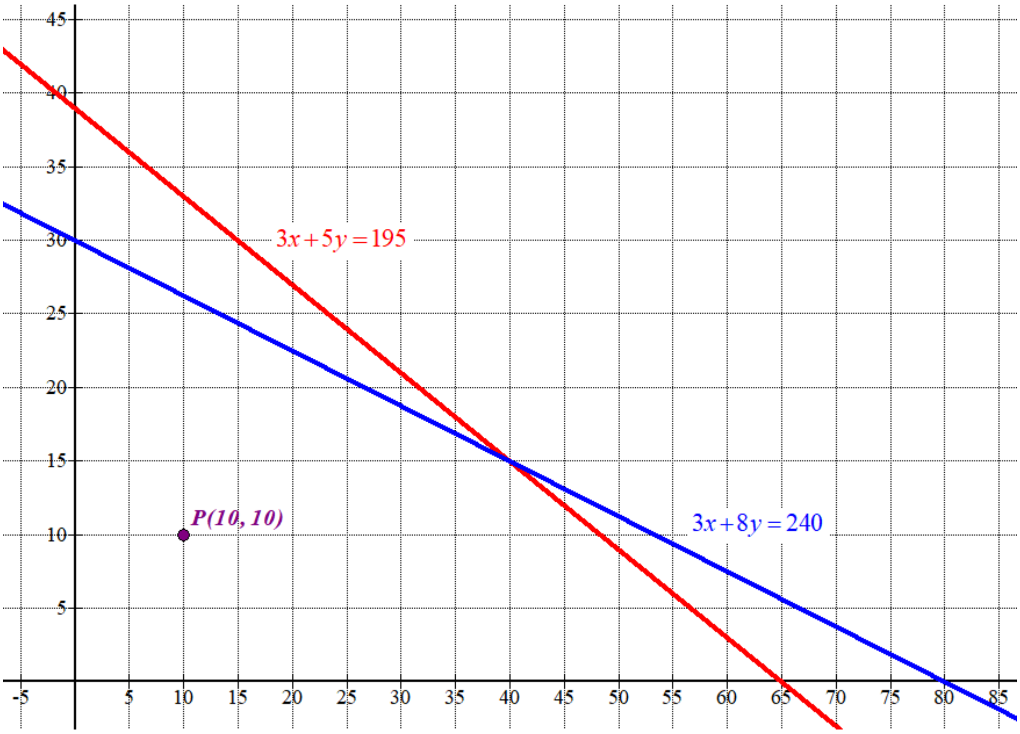
x	$y=\dfrac{195-3x}{5}$
0	39
40	15
65	0

$3x+8y=240$

x	$y=\dfrac{240-3x}{8}$
0	30
40	15
80	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

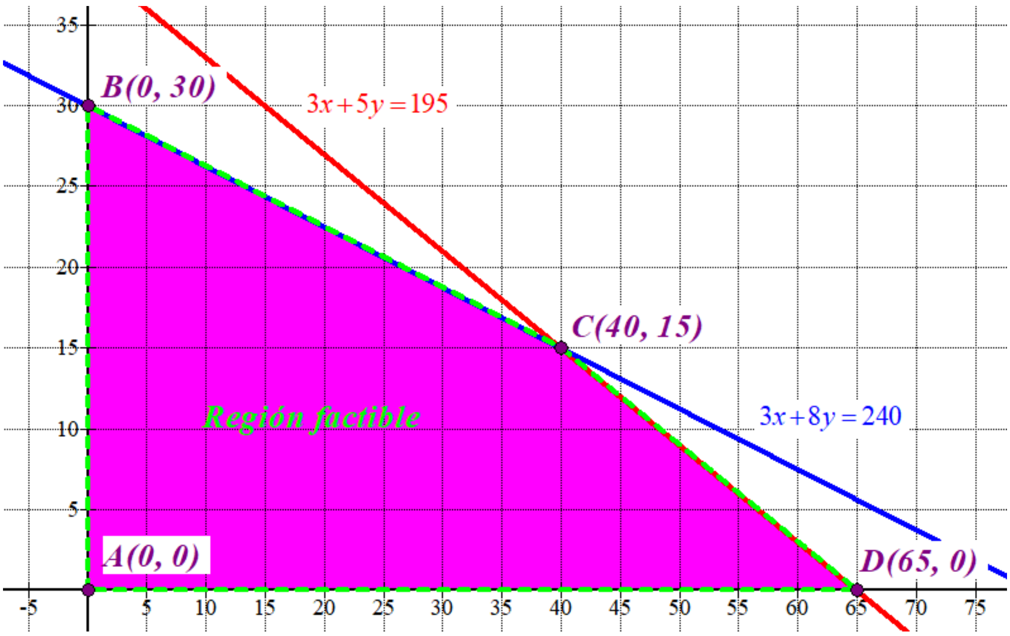


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+5y\leq 195 \\ 3x+8y\leq 240 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+50\leq 195 \\ 30+80\leq 240 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función beneficio $B(x, y) = 20x + 36y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 30) → $B(0,30) = 20 \cdot 0 + 36 \cdot 30 = 1080$

C(40, 15) → $B(40,15) = 20 \cdot 40 + 36 \cdot 15 = 1340$ ¡Máximo!

D(65, 0) → $B(65,0) = 20 \cdot 65 + 36 \cdot 0 = 1300$

El beneficio máximo es de 1340 euros y se obtiene en el vértice C(40, 15).
El beneficio máximo que se puede conseguir es de 1340 euros, obteniéndose con la venta de 40 lotes A y 15 lotes B.

PROBLEMA 5 (2 puntos)
En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, *N(x)* en días, depende de la cantidad de dinero, *x* en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

La función es continua en $x = 4$, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+3Ax+3B=-4^2+12A+3B=-16+12A+3B\\ \lim\limits_{x\to 4^+} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} -x+39=-4+39=35\\ \lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} N(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+12A+3B=35\Rightarrow 12A+3B=51\Rightarrow \boxed{4A+B=17}$$

Cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Esto implica que $N(3)=36$

$$\left.\begin{array}{r}N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}\\ N(3)=36\end{array}\right\}\Rightarrow -3^2+9A+3B=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9A+3B=45\Rightarrow \boxed{3A+B=15}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r}4A+B=17\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}B=17-4A\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow 3A+17-4A=15\Rightarrow -A=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=2}\Rightarrow \boxed{B=17-4\cdot 2=9}$$

Los valores buscados son $A = 2$ y $B = 9$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x)=30+6x^2-x^3 \qquad 1\le x\le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:
a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**
b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} C'(x)=12x-3x^2 \\ C'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(4-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\notin[1,6] \\ x=4\in[1,6] \end{cases}$$

Hemos encontrado un punto crítico: $x = 4$.
Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo es.

$$C'(x)=12x-3x^2 \Rightarrow C''(x)=12-6x \Rightarrow C''(4)=12-6\cdot 4=-12<0$$

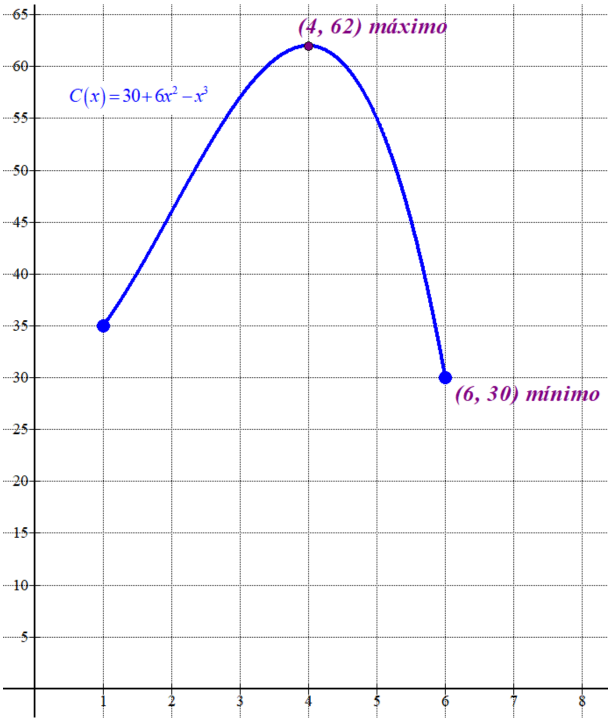
Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 4$.
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si este extremo relativo es absoluto y para encontrar el valor mínimo de la función.

$$C(1)=30+6\cdot 1^2-1^3=35$$
$$C(4)=30+6\cdot 4^2-4^3=62 \text{ ¡}Máximo!$$
$$C(6)=30+6\cdot 6^2-6^3=30 \text{ ¡}Mínimo!$$

Para 4 gramos de aditivo se consigue un consumo máximo de 62 litros. Para 6 gramos de aditivo se consigue un consumo mínimo de 30 litros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$C(x)=30+6x^2-x^3 \quad 1\le x\le 6$
1	35
2	46
3	57
4	62
5	55
6	30



PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola usando la derivada.

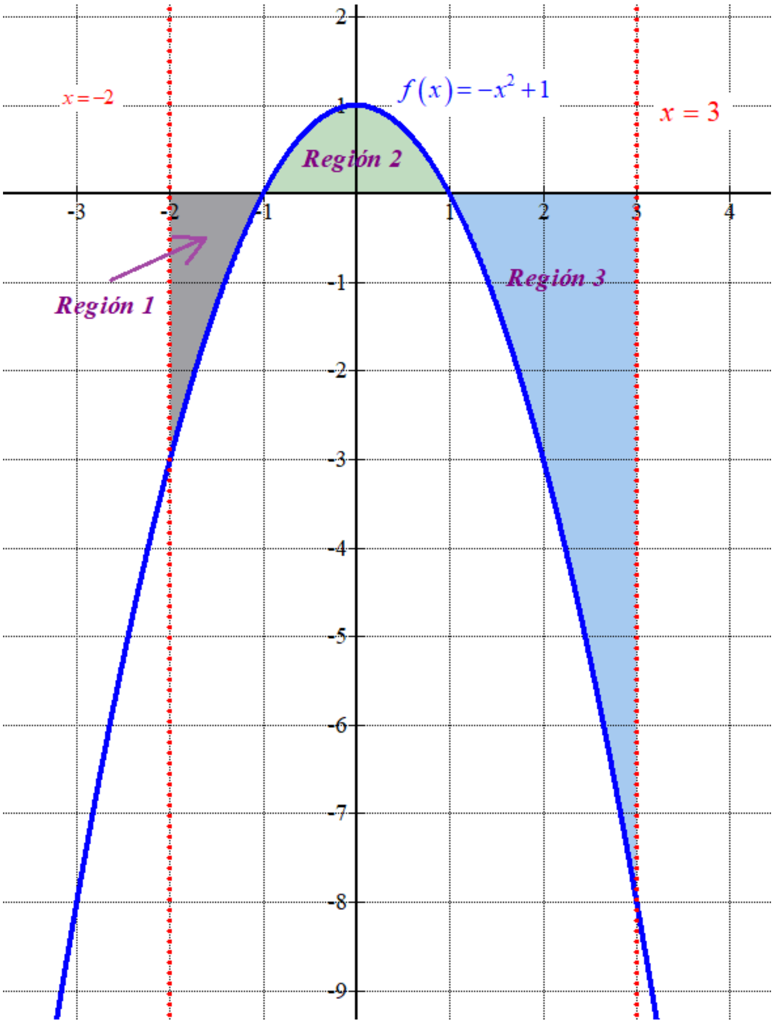
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 1 = 1 \Rightarrow V(0,1)$$

Como $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(1) = -2 < 0$ la función tiene un punto máximo relativo en $x = 0$.
Las coordenadas del vértice de la parábola son V(0, 1).
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 1 \\ eje\,OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Como los dos puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas pertenecen al intervalo $[-2,3]$ el área la dividimos en tres regiones calculando por separado el área de cada una de ellas.
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 3$.

x	$f(x) = -x^2 + 1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
3	-8



Hallamos el área de la región 1.

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-2\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-1-\frac{8}{3}+2=1-\frac{7}{3}=\frac{-4}{3}\Rightarrow \acute{A}rea\,1=\frac{4}{3}\ u^2$$

Hallamos el área de la región 2.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1^3}{3}+1\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow \acute{A}rea\,2=\frac{4}{3}\ u^2$$

Hallamos el área de la región 3.

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{1}^{3} = \left[-\frac{3^3}{3}+3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+1\right]=$$

$$=-9+3+\frac{1}{3}-1=-7+\frac{1}{3}=\frac{-20}{3}\Rightarrow \acute{A}rea\,3=\frac{20}{3}\ u^2$$

El área de la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x=-2$ y $x=3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}\simeq 9.33$ unidades cuadradas.

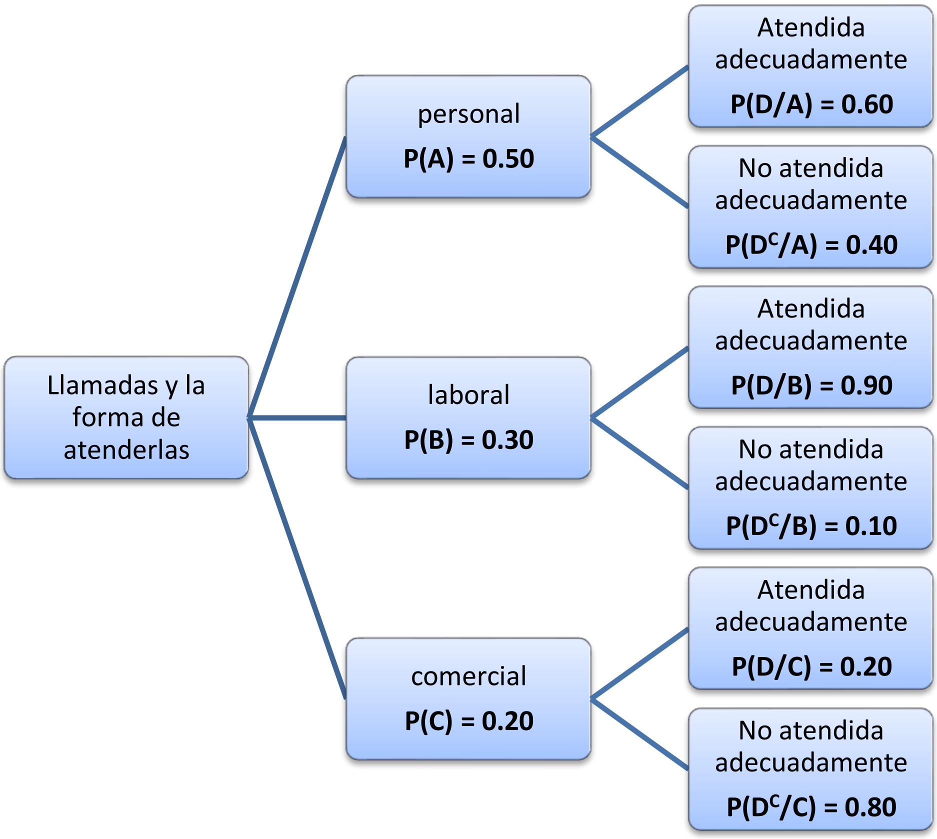
PROBLEMA 8 (2 puntos)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**

b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(D^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P(A)P\left(D^C/A\right)+P(B)P\left(D^C/B\right)+P(C)P\left(D^C/C\right)=$$

$$=0.5\cdot 0.4+0.3\cdot 0.1+0.2\cdot 0.8=\boxed{0.39}$$

La probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente es de 0.39.

b) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D/C)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.2\cdot 0.2}{1-0.39}=\boxed{\frac{4}{61}\simeq 0.06557}$$

La probabilidad de que una llamada sea comercial sabiendo que ha sido bien atendida tiene un valor aproximado de 0.06557.

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:
a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**
b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

a) Lo contratan el 20 % del 75% → $0.20 \cdot 0.75 = 0.15$. El 15 % de los clientes contratan ambos tipos de productos de ahorro.

b) Llamamos A al suceso "contrata producto conservador" y B al suceso "contrata producto de riesgo".
Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos entonces el 10 % restante no contrata ninguno de los dos tipos de productos de ahorro.
Realizamos una tabla de contingencia.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15		75
No producto conservador		10	
			100

Completamos la tabla.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15	**60**	75
No producto conservador	**15**	10	**25**
	30	**70**	100

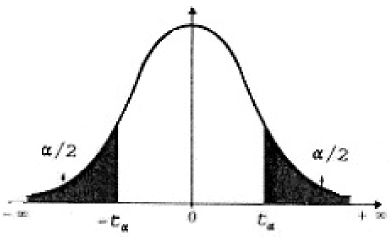
Observando los datos obtenidos al completar la tabla observamos que un 30 % de los clientes contrata un producto de ahorro de riesgo.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:
a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**
b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

X = El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad.
X = N(μ,16)

a) La muestra es de tamaño n = 81. La media muestral es $\bar{x} = 72$ euros.
El nivel de confianza del 90% significa que 1 – ∝ = 0.90 → ∝ = 0.10 →



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 1.645**

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} \simeq 2.924 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(72 - 2.924, 72 + 2.924\right) = \left(69.076,\ 74.924\right)$$

b) 70 euros de gasto medio pertenece al intervalo de confianza obtenido, al igual que 71, 72, 73, 74, pero no pertenece al intervalo ningún valor superior a 75 euros.
No podemos asegurar con el nivel de confianza del apartado anterior que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad.
Sería más adecuado afirmar que el gasto mensual en electricidad está entre 70 y 74 euros.

.