CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	ABAU Convocatoria extraordinaria 2024 **MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**	CÓDIGO 40

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.
b) Justifique cual es el rango de A si $k=-5$.
c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k=-2$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.
a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La función $f(x)=ax^2+bx+c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).
a) Calcule los valores de a, b, c.
b) Realice la representación gráfica de la función *f(x)* y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x)=-\frac{x^2}{20}+x+55, \quad 0\le x\le 30.$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.
a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.
b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.
Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:
a) Escuche música y no lea.
b) Lea y no escuche música.
c) Haga solamente una de las dos cosas.
d) ¿Son independientes los sucesos "escuchar música" y "leer"? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 3 & k\end{pmatrix}.$$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.
b) Justifique cual es el rango de A si $k=-5$.
c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k=-2$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 3 & k\end{vmatrix}=k-24-6+3-4k+12=-3k-15$$

$$|A|=0\Rightarrow -3k-15=0\Rightarrow -3k=15\Rightarrow \boxed{k=\frac{15}{-3}=-5}$$

Su determinante se anula para $k = -5$. La matriz A no tiene inversa para $k = -5$.

b) Si $k=-5$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}$, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-5+12=7\neq 0$.

Para $k=-5$ el rango de A es 2.

c) Para $k=-2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}$, su determinante es no nulo y existe la inversa. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=-2-24-6+3+8+12=-9\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}}{-9}=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.
a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

a) Llamamos "x" al número de metros que se compra al distribuidor A e "y" al número de metros de tela que se compra al distribuidor B.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700" → $200 \le x \le 700;\ 200 \le y \le 700$.
"La fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros" → $x+y \ge 600$.
"La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B" → $x \le 2y$.
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \le x \le 700 \\ 200 \le y \le 700 \\ x+y \ge 600 \\ x \le 2y \end{array}\right\}$$

La función que queremos minimizar son los costes: $C(x,y) = 2x+3y$.

b) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=600$

x	$y=600-x$
0	600
400	200
600	0

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
200	100
400	200

$x=200$

$x=200$	y
200	0
200	200
200	400

$x=700$

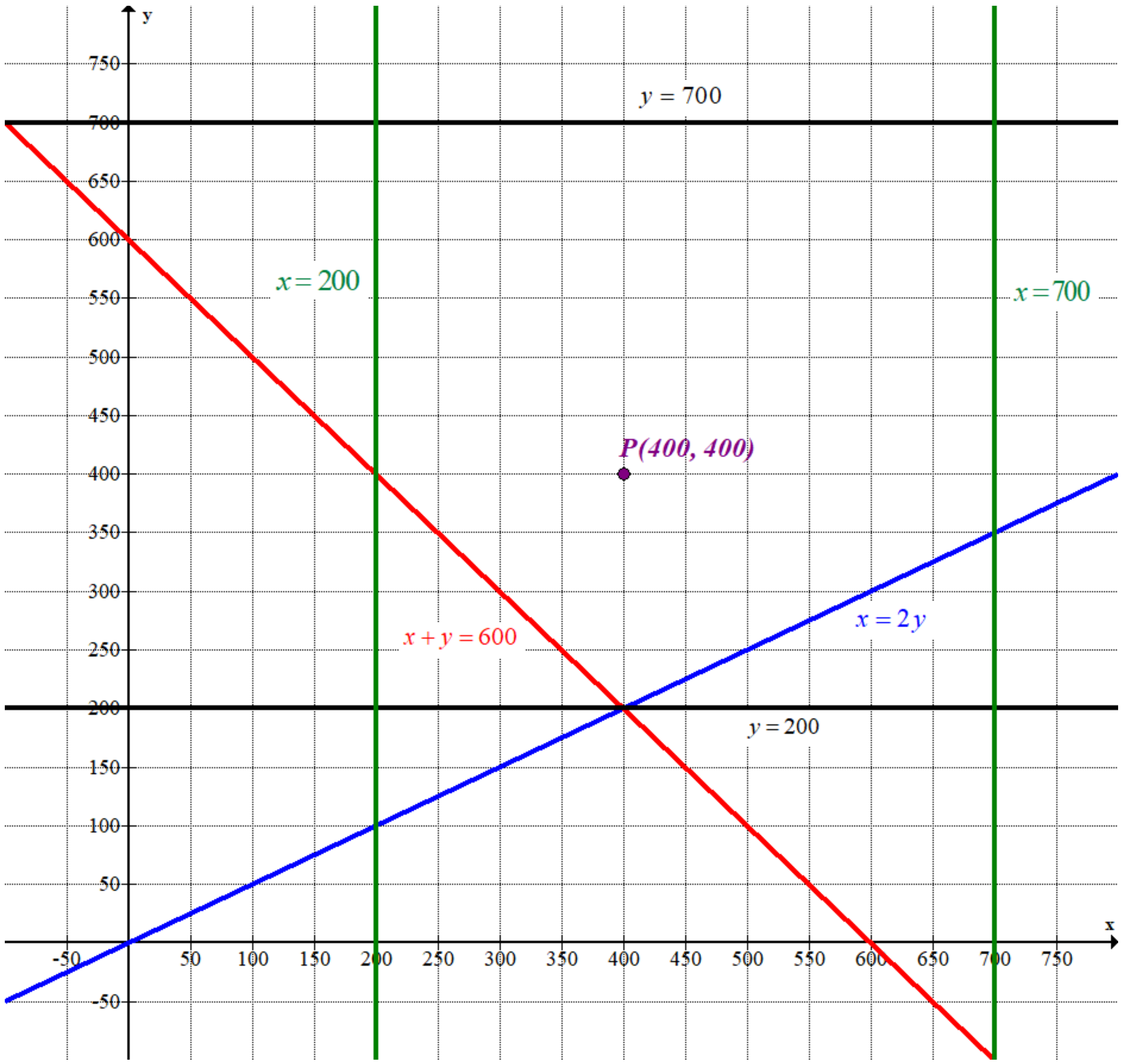
$x=700$	y
700	0
700	200
700	300

$y=200$

x	$y=200$
0	200
100	200
400	200

$y=700$

x	$y=700$
0	700
100	700
400	700

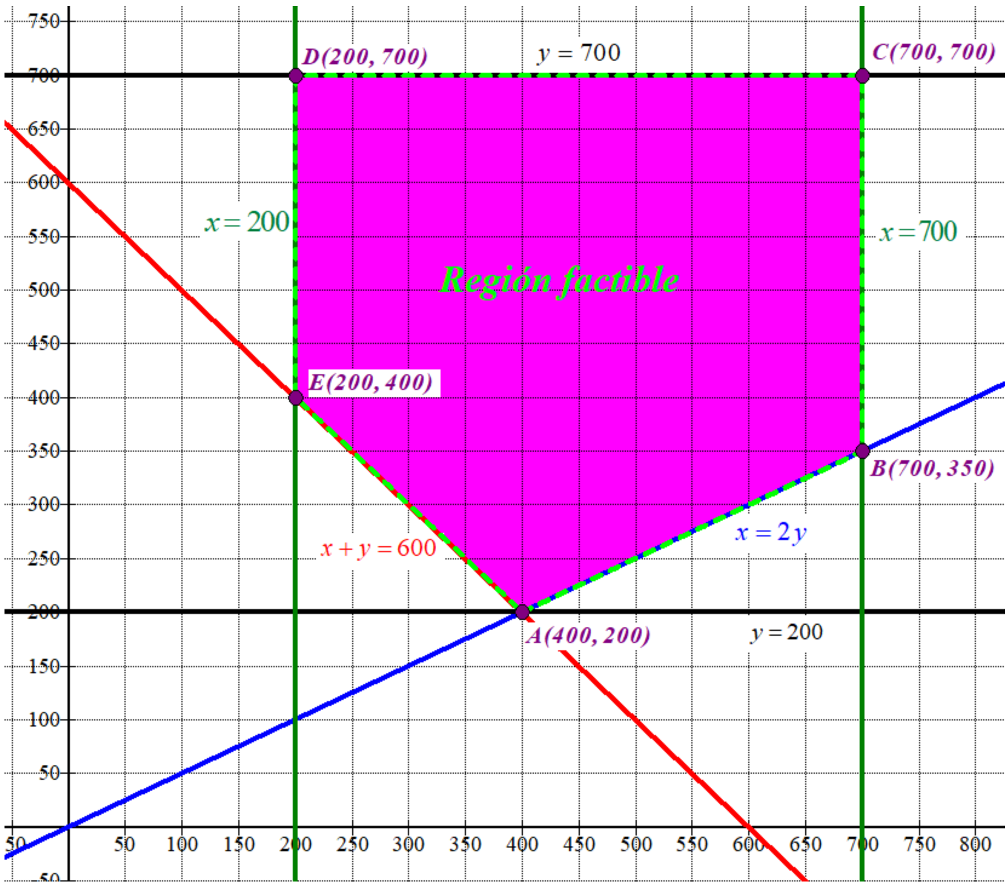


Como las restricciones son $\left.\begin{matrix} 200 \le x \le 700 \\ 200 \le y \le 700 \\ x + y \ge 600 \\ x \le 2y \end{matrix}\right\}$ la región factible es la región del plano situada entre las rectas verticales verdes y las rectas horizontales negras, por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(400, 400) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{matrix} 200 \le 400 \le 700 \\ 200 \le 400 \le 700 \\ 400 + 400 \ge 600 \\ 400 \le 2 \cdot 400 \end{matrix}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(400, 200), B(700, 350), C(700, 700). D(200, 700) y E(200, 400).

c) Valoramos la función costes $C(x, y) = 2x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(400, 200) → $C(400, 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 1400$ ¡Mínimo!

B(700, 350) → $C(700, 350) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 350 = 2450$

C(700, 700) → $C(700, 700) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 700 = 3500$

D(200, 700) → $C(200, 700) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 700 = 2500$

E(200, 400) → $C(200, 400) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 400 = 1600$

El coste mínimo es 1400 € y se alcanza en el punto A(400, 200) que significa comprar 400 metros de tela al distribuidor A y 200 al distribuidor B.

EJERCICIO 3. Análisis. La función $f(x)=ax^2+bx+c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).
a) Calcule los valores de a, b, c.
b) Realice la representación gráfica de la función *f(x)* y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

a) Si la función pasa por el origen de coordenadas (0, 0) debe cumplir *f(0) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+c \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=c}$$

La función queda $f(x)=ax^2+bx$. Si la función tiene un máximo en el punto P (4, 16) significa que *f(4) = 16*, que $f'(4)=0$ y que $f''(4)<0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx \\ f(4)=16 \end{array}\right\} \Rightarrow 16=a\cdot 4^2+b\cdot 4 \Rightarrow 16=16a+4b \Rightarrow 4=4a+b \Rightarrow \boxed{b=4-4a}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx \rightarrow f'(x)=2ax+b \\ f'(4)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=8a+b \Rightarrow \boxed{b=-8a}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b=4-4a \\ b=-8a \end{array}\right\} \Rightarrow 4-4a=-8a \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-4}{4}=-1} \Rightarrow \boxed{b=-8(-1)=8}$$

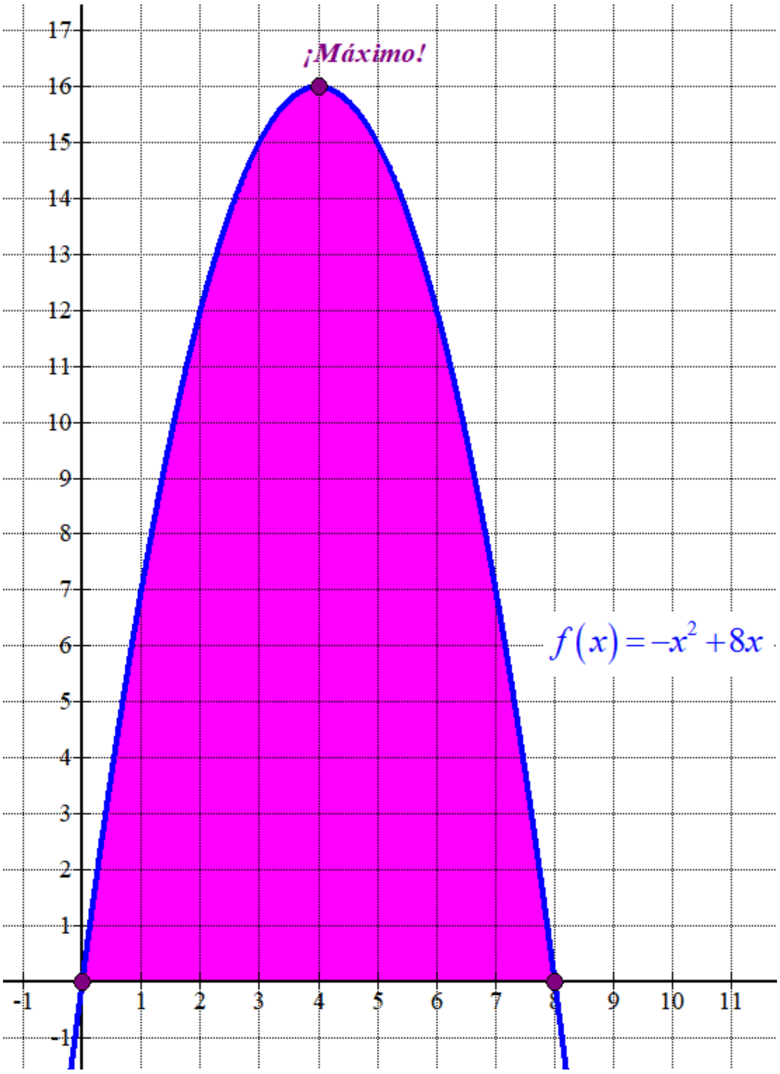
Los valores buscados son *a = –1*, *b = 8* y *c = 0*.
La función queda $f(x)=-x^2+8x$, por lo que la segunda derivada es $f''(x)=-2$ y $f''(4)=-2<0$.

b) La gráfica de la función $f(x)=-x^2+8x$ es una parábola. Sabemos que tiene un máximo en el punto (4, 16).
Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+8x \\ eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+8x=0 \Rightarrow -x(x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, representamos su gráfica y la región del plano encerrada entre la gráfica y el eje OX.

x	$f(x)=-x^2+8x$
0	0
2	12
4	16 *Máximo*
6	12
8	0



El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX es el valor de la integral definida entre 0 y 8 de la función.
Por el dibujo observamos que el área va a tener un valor grande.

$$Área = \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^8 -x^2 + 8x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^8 =$$

$$= \left[-\frac{8^3}{3} + 4 \cdot 8^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2 \right] = \boxed{\frac{256}{3} \simeq 85.333\ u^2}$$

El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX tiene un valor aproximado de 85.33 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \le x \le 30.$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

a) El coste de la fabricación de x unidades es $C(x) = 80 + 11.25x$.

Los ingresos son el producto del número de unidades por su precio.

$$I(x) = x \cdot P(x) = x \cdot \left(-\frac{x^2}{20} + x + 55 \right) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x, 0 \le x \le 30$$

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x - (80 + 11.25x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \quad 0 \le x \le 30$$

b) Derivamos la función beneficio y buscamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \Rightarrow B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 40x + 875 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-3)(875)}}{2(-3)} = \frac{-40 \pm 110}{-6} = \begin{cases} \dfrac{-40+110}{-6} = \dfrac{-20}{3} \notin [0,30] \\ \dfrac{-40-110}{-6} = 25 \in [0,30] \end{cases}$$

La función beneficio tiene un punto crítico en $x = 25$, averiguamos si es máximo o mínimo sustituyendo este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 \Rightarrow B''(x) = \frac{-6x}{20} + 2 \Rightarrow B''(25) = \frac{-6 \cdot 25}{20} + 2 = \frac{-11}{2} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficio tiene un valor máximo relativo en $x = 25$. Como esta función crece entre 0 y 25 y decrece entre 25 y 30 este máximo será máximo absoluto.

Calculamos el beneficio máximo: $B(25) = \dfrac{-25^3}{20} + 25^2 + 43.75 \cdot 25 - 80 = 857.5$.

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 857.5 € con la producción de 25 unidades.

Calculamos el precio por unidad para $x = 25$: $P(25) = -\dfrac{25^2}{20} + 25 + 55 = 48.75$ euros por unidad.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.
Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:
a) Escuche música y no lea.
b) Lea y no escuche música.
c) Haga solamente una de las dos cosas.
d) ¿Son independientes los sucesos "escuchar música" y "leer"? Justifique la respuesta.

Llamamos L al suceso "ser lector", M al suceso "escuchar música".
Con los datos que nos proporcionan tenemos que el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, por lo que el restante 20 % ni lee ni escucha música.
Realizamos una tabla de contingencia.

	Escucha música	No escucha música	
Lee	35		
No lee		20	60
			100

Completamos la tabla.

	Escucha música	No escucha música	
Lee	35	**5**	**40**
No lee	**40**	20	60
	75	**25**	100

Con los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) Hay un 40 % de los entrevistados que escucha música y no lee. La probabilidad de que al elegir una persona al azar escuche música y no lea es de 0.4.

b) Hay un 5 % de los entrevistados que lee y no escucha música. La probabilidad de que al elegir una persona al azar lea y no escuche música es de 0.05.

c) Que haga solamente una de las dos cosas es escuchar música y no leer o no escuchar música y leer. Sería 40 % + 5 % = 45 % de los entrevistados. La probabilidad de que al elegir una persona al azar solo haga una de las cosas es de 0.45.

d) Para que sean independientes los sucesos L y M debe cumplirse $P(L \cap M) = P(L)P(M)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(L \cap M) = 0.35 \\ P(L)P(M) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(L \cap M) = 0.35 \neq 0.3 = P(L)P(M)$$

Los sucesos "escuchar música" y "leer" no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.
a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.
b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

a) X = La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria.
X = N(μ, 6)
Tamaño de la muestra = n = 9.
Media muestral $\overline{x} = 244$ centímetros.
Con un nivel de confianza del 98 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$$

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}} = 4.66 \text{ centímetros}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(244 - 4.66, 244 + 4.66\right) = \left(239.34, 248.66\right)$$

b) X = La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria.
X = N(244, 6)

$$X = N(244, 6) \rightarrow \overline{X_{16}} = N\left(244, \frac{6}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \overline{X_{16}} = N\left(244, 1.5\right)$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{16}} \leq 242\right)$.

$$P\left(\overline{X_{16}} \leq 242\right) = \begin{Bmatrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{Bmatrix} = P\left(Z \leq \frac{242-244}{1.5}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq -1.33\right) = P\left(Z \geq 1.33\right) = 1 - P\left(Z \leq 1.33\right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{Bmatrix} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

La probabilidad de la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros es de 0.0918.