uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	H

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

a) Calcule $A\cdot B$ y $A^3\cdot B$.

b) Determine el valor del determinante de la matriz $A-2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

2. (2 puntos) La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t)=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.

b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & si \quad x\leq 1\\ \dfrac{-x^2}{x-2} & si \quad x>1\end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.

b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^5-1}{x^4-16}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

6. (2 puntos) Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+az=2 \\ x+y+z=a \\ -2x+2ay+8z=-13 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

8. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0.7$ y $P(B)=0.15$. Además, se sabe que $P(\overline{B}/A)=0.8$ donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(A\cup B)$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

9. (2 puntos) El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas.

10. (2 puntos) En la base de datos de Spotify el 80% de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30% de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20% como música urbana y el 50% restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10%, 50% y 40% respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:
a) La canción pueda clasificarse como música urbana.
b) Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

a) Calcule $A\cdot B$ y $A^3\cdot B$.

b) Determine el valor del determinante de la matriz $A-2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

a) Realizamos el producto $A\cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0+1\\ -1+0+1\\ -2+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$$

Realizamos el producto $A^3\cdot B$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2+2 & -2+0-2 & -1+2+0\\ -1+0+2 & 2+0-2 & 1+0+0\\ -2-2+0 & 4+0+0 & 2-2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+4-2 & -10+0+2 & -5+4+0\\ 1+0-2 & -2+0+2 & -1+0+0\\ -4-4+0 & 8+0+0 & 4-4+0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}7 & -8 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -8 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3\cdot B=\begin{pmatrix}7 & -8 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -8 & 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+0+1\\ -1+0+1\\ -8+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 0\\ -8\end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz $A-2I$.

$$A-2I=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\{\text{Columna 1}^{\text{a}}=\text{Columna 3}^{\text{a}}\}=0$$

Al tener la matriz $A-2I$ dos columnas iguales su determinante vale 0**.**

2. (2 puntos) La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t)=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.

b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

a) La función *f(t)* es la primitiva de la derivada $f'(t)$.

$$f(t)=\int f'(t)dt=\int \frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)dt=\int \frac{3}{2}t-\frac{3}{4}t^2dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{t^3}{3}=\frac{3t^2}{4}-\frac{t^3}{4}+C$$

Como para $t = 0$ la función vale 0 entonces $f(0)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(t)=\dfrac{3t^2}{4}-\dfrac{t^3}{4}+C \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\frac{3\cdot 0^2}{4}-\frac{0^3}{4}+C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

La función *f(t)* tiene la expresión $f(t)=\dfrac{3t^2}{4}-\dfrac{t^3}{4}$.

b) Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(t)=\dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}t^2\right) \\ f'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)=0 \Rightarrow t-\frac{1}{2}t^2=0 \Rightarrow t\left(1-\frac{1}{2}t\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{t=0} \\ 1-\dfrac{1}{2}t=0 \Rightarrow 2-t=0 \Rightarrow \boxed{t=2} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos. Determinamos si son máximos o mínimos sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(t)=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow f''(t)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}2t\right)=\frac{3}{2}(1-t) \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=\dfrac{3}{2}(1-0)=\dfrac{3}{2}>0 \\ f''(2)=\dfrac{3}{2}(1-2)=\dfrac{-3}{2}<0 \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en $t = 0$ y un máximo relativo en $t = 2$.

La sustancia disuelta es máxima a las 2 horas de la preparación de la disolución.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{-x^2}{x-2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de *f(x)* y estudie la continuidad en el punto *x = 1*.
b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

a) En el intervalo $(-\infty,1]$ la función es una exponencial y existe. En el intervalo $(1,+\infty)$ la función tiene una expresión racional cuyo denominador se anula para *x = 2*.
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Para que la función sea continua en *x = 1* deben ser iguales el valor de la función en *x = 1* y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=e^0=1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{x-1}=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \dfrac{-x^2}{x-2}=\dfrac{-1^2}{1-2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

La función es continua en *x = 1*.

b) Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2x(x-2)-1(-x^2)}{(x-2)^2}=\dfrac{-2x^2+4x+x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}=0 \to \text{¡Imposible!} \\ \dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}=0 \to -x^2+4x=0 \to -x(x-4)=0 \to \begin{cases} x=0 \notin (1,+\infty) \\ x=4 \in (1,+\infty) \end{cases} \end{cases}$$

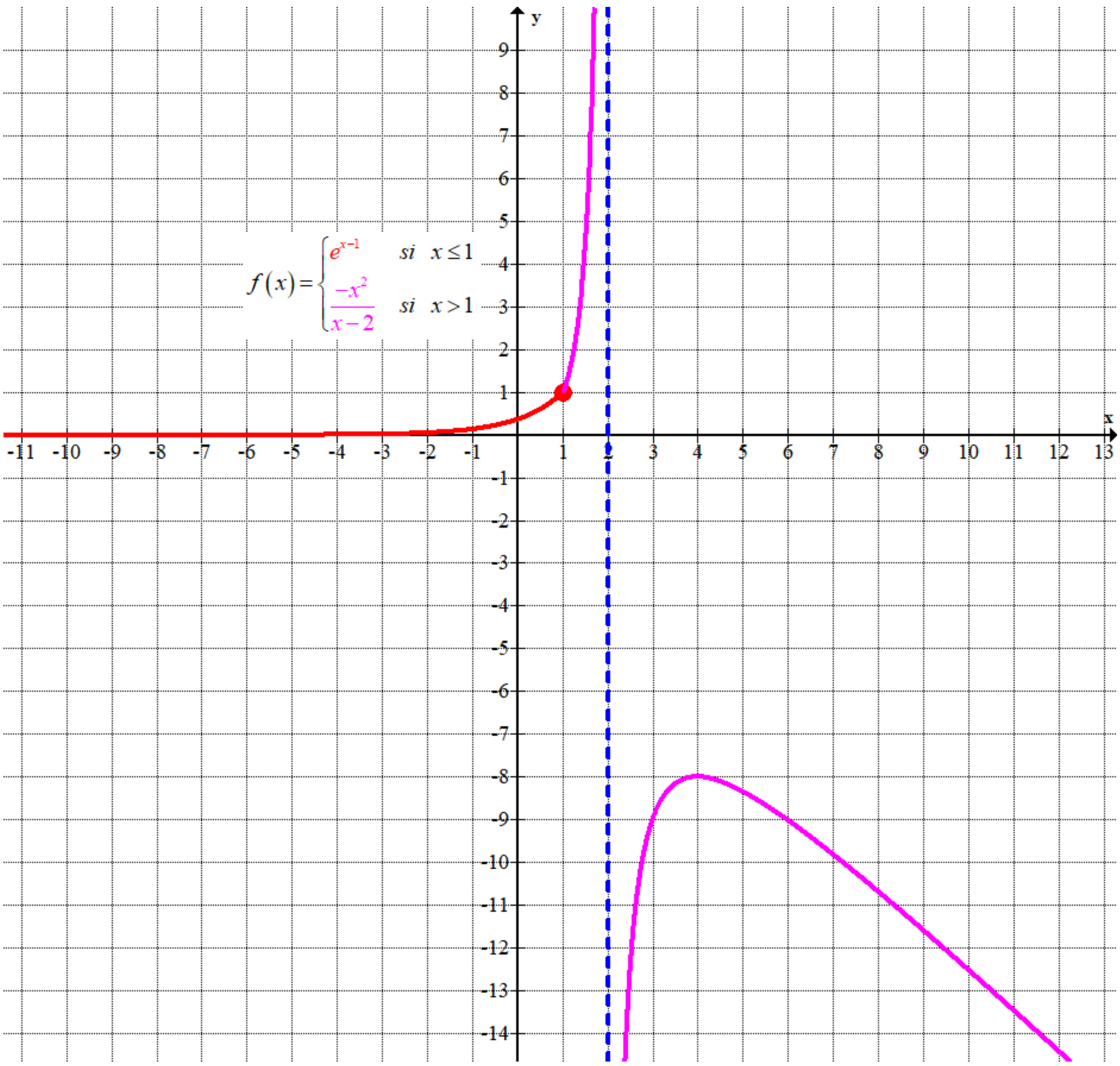
Hemos encontrado un punto crítico en *x = 4*.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores *x = 1*, *x = 2* y *x = 4*.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=e^{0-1}=e^{-1}>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $f'(1.5)=\dfrac{-1.5^2+4\cdot 1.5}{(1.5-2)^2}=15>0$. La función crece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,4)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-3^2+4\cdot 3}{(3-2)^2}=3>0$. La función crece en $(2,4)$.

- En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5)=\frac{-5^2+4\cdot 5}{(5-2)^2}=\frac{-5}{9}<0$.

  La función decrece en $(4,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,2)\cup(2,4)$ y decrece en $(4,+\infty)$.



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^5-1}{x^4-16}$$

a) Determine las asíntotas de la función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^4-16=0 \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow x=\sqrt[4]{16}=\pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^5-1}{x^4-16}=\frac{(-2)^5-1}{(-2)^4-16}=\frac{-33}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^5-1}{x^4-16}=\frac{2^5-1}{2^4-16}=\frac{31}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^4-16}=\{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5-1}{x^4-16}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^5-16x}=$$

$$=\{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5-1}{x^4-16}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}-1-\cancel{x^5}+16x}{x^4-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x-1}{x^4-16}=$$

$$=\{\text{Grado del numerador} < \text{grado del denominador}\}=0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x$.

b) La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

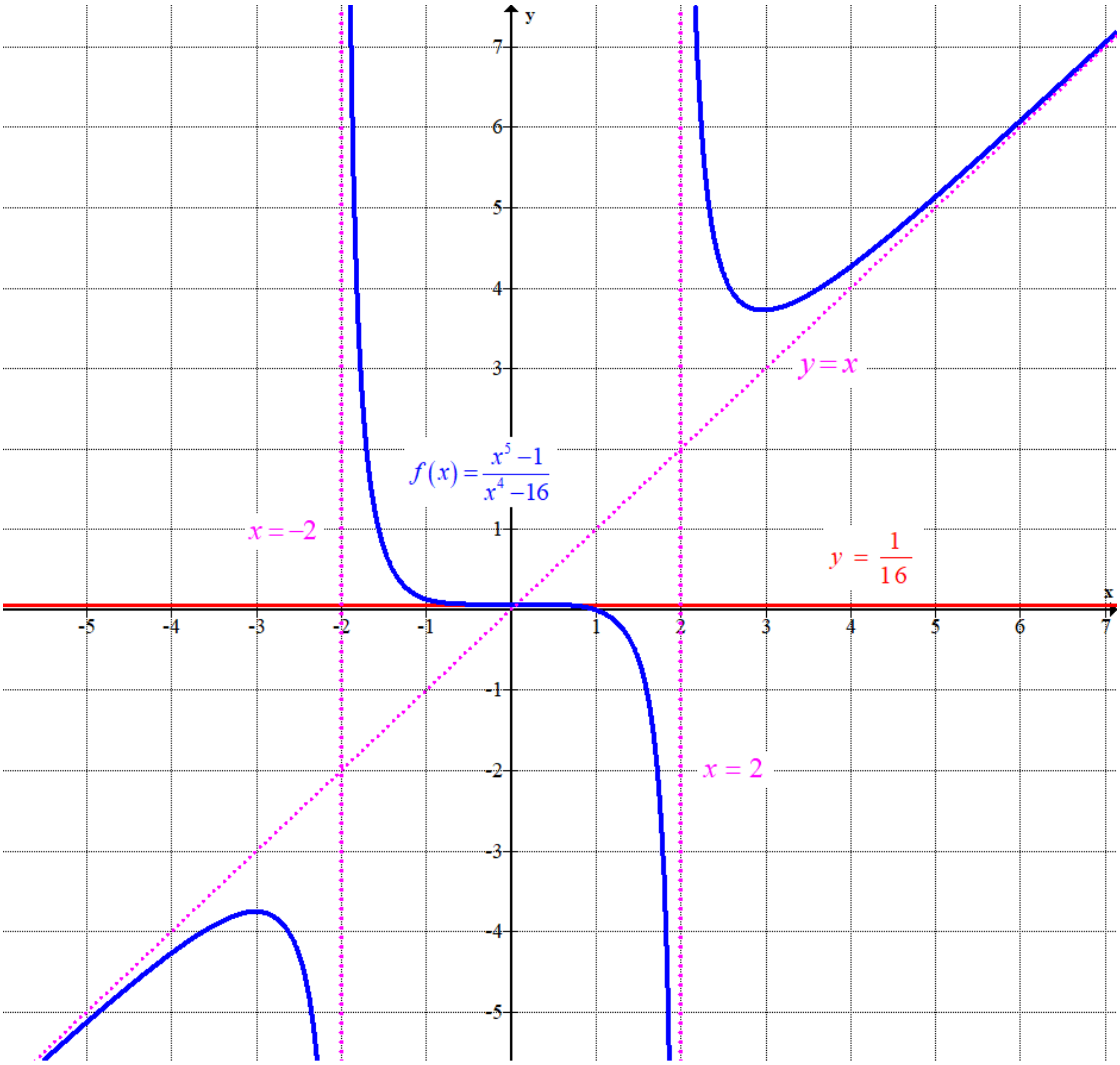
$$f(x)=\frac{x^5-1}{x^4-16} \Rightarrow f(0)=\frac{0^5-1}{0^4-16}=\frac{1}{16}$$

$$f(x)=\frac{x^5-1}{x^4-16} \Rightarrow f'(x)=\frac{5x^4\left(x^4-16\right)-4x^3\left(x^5-1\right)}{\left(x^4-16\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{5\cdot 0^4\left(0^4-16\right)-4\cdot 0^3\left(0^5-1\right)}{\left(0^4-16\right)^2}=\frac{0}{16^2}=0$$

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-\frac{1}{16}=0x \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{16}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y=\frac{1}{16}$.



5. (2 puntos) Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

Llamemos x = "número de litros de limonada", y = "número de litros de naranjada".
Hacemos una tabla para organizar la información proporcionada.

	Limones	Naranjas	Gramos de azúcar	Ingresos
Litros de limonada (x)	4x		80x	2x
Litros de naranjada (y)	y	6y	50y	2.5y
	$4x+y$	$6y$	$80x+50y$	$2x+2.5y$

Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x,y)=2x+2.5y$.
Las restricciones del problema son:

"Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración" → $4x+y\leq 80;\ 6y\leq 72;\ 80x+50y\leq 1720$

Las cantidades son positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y\leq 80 \\ 6y\leq 72 \\ 80x+50y\leq 1720 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y\leq 80 \\ y\leq 12 \\ 8x+5y\leq 172 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$4x+y=80$

x	$y=80-4x$
0	20
19	4
20	0

$y=12$

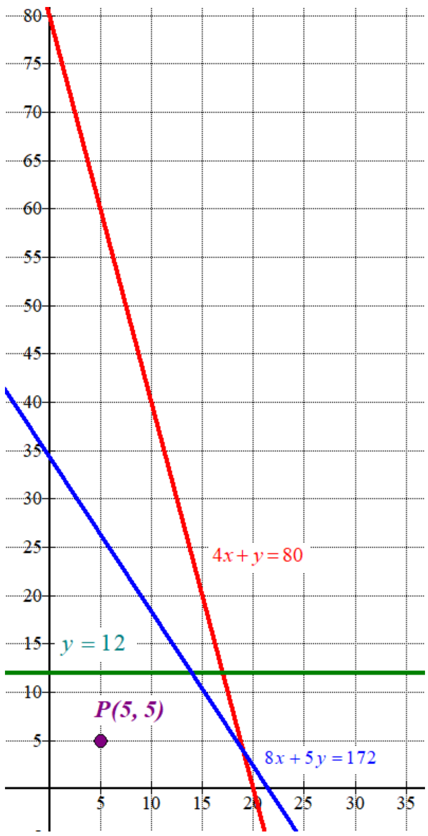
x	$y=12$
0	12
14	12
20	12

$8x+5y=172$

x	$y=\dfrac{172-8x}{5}$
0	$172/5=34.4$
14	12
19	4

$x\geq 0;\ y\geq 0$

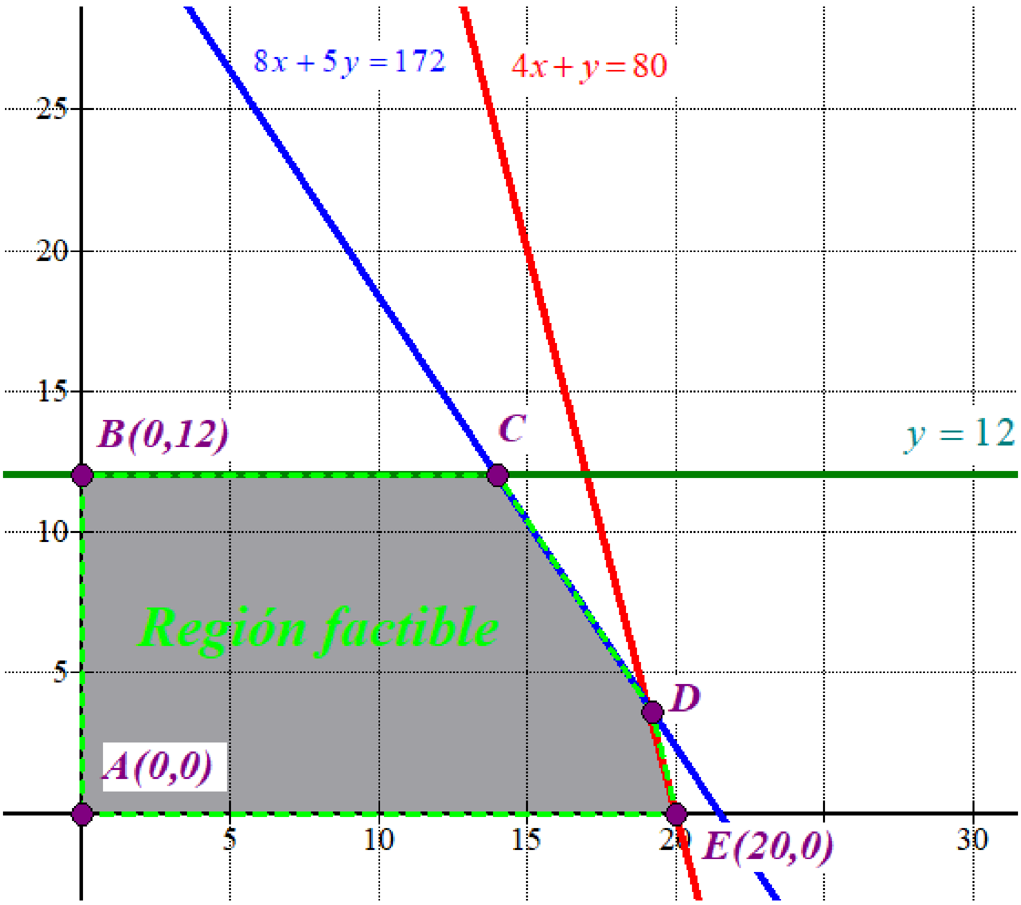
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+y\leq 80 \\ y\leq 12 \\ 8x+5y\leq 172 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región es la zona del primer cuadrante situada por debajo de la recta horizontal **verde** y las rectas **azul** y **roja**. Lo comprobamos viendo que el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 5+5\leq 80 \\ 5\leq 12 \\ 8\cdot 5+5\cdot 5\leq 172 \\ 5\geq 0;\ 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C\rightarrow\begin{cases} 8x+5y=172 \\ y=12 \end{cases}\Rightarrow 8x+60=172\Rightarrow 8x=112\Rightarrow x=\frac{112}{8}=14\Rightarrow C(14,12)$$

$$D\rightarrow\begin{cases} 8x+5y=172 \\ 4x+y=80\rightarrow y=80-4x \end{cases}\Rightarrow 8x+5(80-4x)=172\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x+400-20x=172\Rightarrow -12x=-228\Rightarrow x=\frac{228}{12}=19\Rightarrow y=80-76=4\Rightarrow D(19,4)$$

Valoramos la función ingresos $B(x,y)=1.5x+y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$
B(0, 12) → $I(0,12)=2\cdot 0+2.5\cdot 12=30$
C(14, 12) → $I\left(14,12\right)=2\cdot 14+2.5\cdot 12=58$ € ¡*Máximo*!
D(19, 4) → $I(19,4)=2\cdot 19+2.5\cdot 4=48$
E(20, 0) → $I(20,0)=2\cdot 20+2.5\cdot 0=40$

Los máximos ingresos son de 58 € y se consigue en el vértice C(14, 12), que significa elaborar 14 litros de limonada y 12 litros de naranjada.

6. (2 puntos) Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Llamamos "x" al dinero recibido por Alba, "y" al recibido por Benito y "z" al recibido por Charo.

"Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado" → $x+y+z=6200$.

"La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios" → $x=y+z+200$.

"Para que Alba (x) y Benito (y) percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros" → $x-600=y+600$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6200 \\ x=y+z+200 \\ x-600=y+600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=6200 \\ x=y+z+200 \\ x=y+1200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z+200+y+z=6200 \\ y+z+200=y+1200 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+2z=6000 \\ \boxed{z=1000} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2000=6000 \Rightarrow 2y=4000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{4000}{2}=2000} \Rightarrow \boxed{x=2000+1200=3200}$$

Alba recibió 3200 €, Benito recibió 2000 € y Charo 1000 €.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+az=2 \\ x+y+z=a \\ -2x+2ay+8z=-13 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2a & 8 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2a & 8 \end{vmatrix}=\cancel{8}-2+2a^2+\cancel{2a}-\cancel{8}-\cancel{2a}=2a^2-2$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2-2=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a + 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \\ \hline 0 & 0 & 6 & -9 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - 3\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a + 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 2 & 8 & -13 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 10 & -9 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ Fila\,2^a \xrightarrow[\longleftarrow]{Intercambiamos} Fila\,3^a \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}}^{A/B} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 4 & 10 & -9 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & -1 \end{array} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

Resumiendo: Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a=1$ es incompatible (sin solución) y para $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x+y+z=0 \\ -2x+8z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2-y \\ x+y+z=0 \\ -2x+8z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2-y+y+z=0 \\ -2(2-y)+8z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{z=-2} \\ -4+2y+8z=-13 \to 2y+8z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y-16=-9 \Rightarrow 2y=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{2}} \Rightarrow \boxed{x=2-\frac{7}{2}=\frac{-3}{2}}$$

Para $a=0$ la solución del sistema es $x=\frac{-3}{2};\ y=\frac{7}{2};\ z=-2$.

8. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0.7$ y $P(B)=0.15$. Además, se sabe que $P(\overline{B}/A)=0.8$ donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(A\cup B)$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

Utilizamos la regla de Bayes para obtener $P(B\cap A)$.

$$P(\overline{B}/A)=0.8\Rightarrow\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=0.8\Rightarrow\frac{P(A)-P(B\cap A)}{P(A)}=0.8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{0.7-P(B\cap A)}{0.7}=0.8\Rightarrow 0.7-P(B\cap A)=0.8\cdot 0.7\Rightarrow\boxed{P(B\cap A)=0.7-0.8\cdot 0.7=0.14}$$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.15-0.14=\boxed{0.71}$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\{\text{Leyes de Morgan}\}=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.14=\boxed{0.86}$

9. (2 puntos) El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 2 semanas.

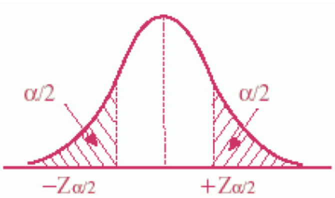
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95%.

b) Suponga que μ = 5 semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas.

X = El tiempo que las películas permanecen en cartelera (en semanas)
X = N(μ, 2)

a) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \alpha/2=0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2=0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 1.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1=1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=1.96\cdot 2 \Rightarrow n=(1.96\cdot 2)^2=15.3664$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al hallado. El tamaño mínimo de la muestra es de 16 películas.

b) La variable es X = N(5, 2).
La variable de las medias muestrales de tamaño 16 es una normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{16}}=0.5$, $\overline{X_{16}}=N(5,0.5)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{16}}>6\right)$.

$$P\left(\overline{X_{16}} > 6\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{6-5}{0.5}\right) = P\left(Z > 2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5[illegible]00	0.5040
0.1	0.5[illegible]98	0.5438
0.2	0.5[illegible]93	0.5832
0.3	0.6[illegible]79	0.6217
0.4	0.6[illegible]54	0.6591
0.5	0.6[illegible]15	0.6950
0.6	0.7[illegible]57	0.7291
0.7	0.7[illegible]80	0.7611
0.8	0.7[illegible]81	0.7910
0.9	0.8[illegible]59	0.8186
1.0	0.8[illegible]13	0.8438
1.1	0.8[illegible]43	0.8665
1.2	0.8[illegible]49	0.8869
1.3	0.9[illegible]32	0.9049
1.4	0.9[illegible]92	0.9207
1.5	0.9[illegible]32	0.9345
1.6	0.9[illegible]52	0.9463
1.7	0.9[illegible]54	0.9564
1.8	0.9[illegible]41	0.9649
1.9	0.9[illegible]13	0.9719
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826

La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas es de 0.0228.

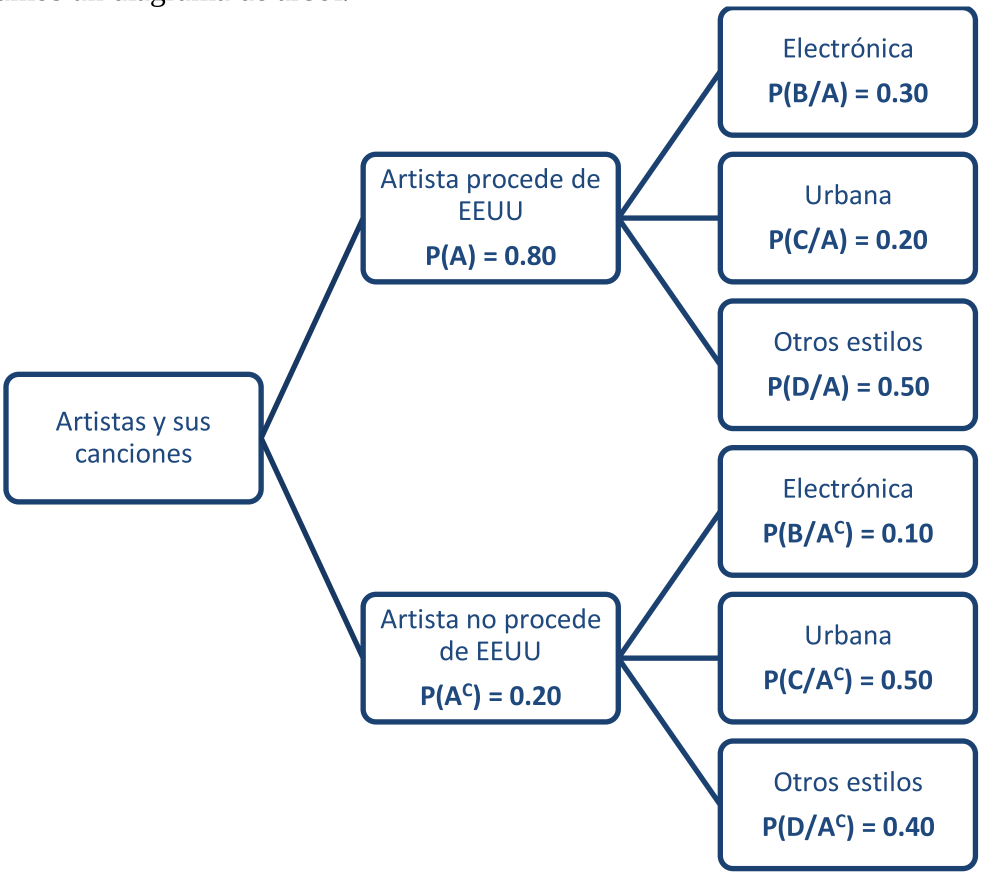
10. (2 puntos) En la base de datos de Spotify el 80% de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30% de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20% como música urbana y el 50% restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10%, 50% y 40% respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

a) La canción pueda clasificarse como música urbana.

b) Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

Llamamos A al suceso "el artista es procedente de EEUU", B al suceso "la canción es música electrónica", C a "la canción es música urbana" y D a "la canción es de otros estilos musicales".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right) = 0.80 \cdot 0.20 + 0.20 \cdot 0.50 = \boxed{0.26}$$

La probabilidad de que la canción pueda clasificarse como música urbana es de 0.26.

b) Nos piden calcular $P\left(A^C/C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A^C/C\right) = \frac{P\left(A^C \cap C\right)}{P(C)} = \frac{P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)}{P(C)} = \frac{0.20 \cdot 0.5}{0.26} = \boxed{\frac{5}{13} \simeq 0.3846}$$

La probabilidad de que sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU es de 0.3846.