| | | |
|---|---|---|
| uc3m Universidad Carlos III de Madrid | **UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**<br>EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS<br>UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO<br>Curso **2023-2024**<br>**MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II** | E |

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

**TIEMPO:** 90 minutos.

---

**1.** (2 puntos) Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M\cdot N=2N \text{ y } \left(N^t\cdot M\right)^t+M\cdot P=N.$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2=M+2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2 × 2, y utilice dicha igualdad para calcular $M^{-1}$ y $M^3$.

**2.** (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real $a$ tal que

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}-a\right)dx=\frac{2}{3}.$$

b) Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & si\ x<0 \\ 3x+2 & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

Determine para que valores del parámetro $b\in\mathbb{R}$ se tiene que *f(x)* es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro *b*.

**3.** (2 puntos) Sea *f(x)* una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+a.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* pase por los puntos (1, 3) y (2, 7/2). Escriba la expresión de la función *f(x)*.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, clasificando sus extremos relativos, si procede.

**4.** (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

**5.** (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

**6.** (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda seria de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

**7.** (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 3*.

**8.** (2 puntos) La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el dia está nublado en un 50% de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7% de los días. Además, el 35% de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un dia de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

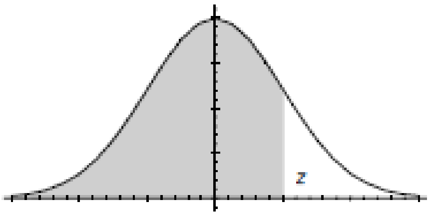
**9.** (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99% para $\mu$.
b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

**10.** (2 puntos) Según los datos del INE, el 45, 68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23, 98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%.
Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:
a) Viaje por vacaciones.
b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

### ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.




| z | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | ,06 | ,07 | ,08 | ,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| **2,1** | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| **2,2** | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| **2,3** | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| **2,5** | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| **2,6** | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| **3,0** | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

# SOLUCIONES

**1.** (2 puntos) Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a,b,c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M\cdot N=2N \text{ y } \left(N^t\cdot M\right)^t+M\cdot P=N.$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2=M+2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2 × 2, y utilice dicha igualdad para calcular $M^{-1}$ y $M^3$.

a) Sustituimos en las ecuaciones matriciales y las resolvemos.

$$M\cdot N=2N \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b=-2 \rightarrow \boxed{2b+2=a} \\ -c+2=4 \rightarrow 2-4=c \rightarrow \boxed{c=-2} \end{cases}$$

$$\{c=-2\} \Rightarrow N^t\cdot M=\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a-4 & -b+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(N^t\cdot M\right)^t=\begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left(N^t\cdot M\right)^t+M\cdot P=N \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a-3b \\ 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a-3b-4 \\ -b+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a-3b-4=-1 \rightarrow -2a-3b=3 \\ -b+1=2 \rightarrow -b=1 \rightarrow \boxed{b=-1} \end{cases} \Rightarrow -2a+3=3 \Rightarrow -2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Con los valores *a = 0, b = –1* y *c = –2* también se cumple la primera ecuación obtenida ( $2b+2=a$ ). Los valores buscados son *a = 0, b = –1* y *c = –2.*

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$ la matriz M queda $M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=M+2I$$

Calculamos $M^3$.

$$M^3 = M^2 \cdot M = \left\{M^2 = M + 2I\right\} = \left(M + 2I\right)M = M^2 + 2I \cdot M = \left\{M^2 = M + 2I\right\} =$$

$$= \left(M + 2I\right) + 2M = 3M + 2I = 3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos $M^{-1}$.

$$M^2 = M + 2I \Rightarrow M^2 - M = 2I \Rightarrow M\left(M - I\right) = 2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\frac{1}{2}\left(M - I\right) = I \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\left(M - I\right) \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.** (2 puntos)
a) Encuentre el valor del parámetro real *a* tal que

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-a\right)dx = \frac{2}{3}.$$

b) Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & si \ x<0 \\ 3x+2 & si \ x\geq 0 \end{cases}$$

Determine para que valores del parámetro $b\in\mathbb{R}$ se tiene que *f(x)* es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro *b*.

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int\left(\sqrt{x}-a\right)dx=\int\sqrt{x}dx-\int adx=\int x^{1/2}dx-\int adx=\frac{x^{1/2+1}}{1+\frac{1}{2}}-ax=\frac{2}{3}x^{3/2}-ax+C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}-a\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-ax\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}1^{3/2}-a\right]-\left[\frac{2}{3}0^{3/2}-a\cdot 0\right]=\frac{2}{3}-a$$

Igualamos este resultado a $\frac{2}{3}$ y obtenemos el valor de *a*.

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}-a\right)dx=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}-a=\frac{2}{3}\Rightarrow -a=0\Rightarrow\boxed{a=0}$$

El valor buscado es *a = 0*.

b) Para que la función sea continua debe serlo en *x = 0*.

- Existe $f(0)=0+2=2$.
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2-b=0-b=-b$.
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x+2=2$.
- Los tres valores son iguales → *–b = 2* → *b = –2.*

El valor del parámetro que hace que la función sea continua es *b = –2.*

Para *b* = –2 la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \ x<0 \\ 3x+2 & si \ x\geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de la función.
En el intervalo $(-\infty,0)$ la función es $f(x)=x^2+2$ y es derivable con derivada $f'(x)=2x$.
En el intervalo $(0,+\infty)$ la función es $f(x)=3x+2$ y es derivable con derivada $f'(x)=3$.
Estudiamos la derivabilidad en *x = 0* comprobando si coinciden las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x=0 \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 3=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=0\neq 3=f'(0^+)$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en *x = 0*.
La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

**3.** (2 puntos) Sea *f(x)* una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+a.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* pase por los puntos (1, 3) y $(2,7/2)$. Escriba la expresión de la función *f(x)*.

b) Para *a = 1*, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, clasificando sus extremos relativos, si procede.

a) La función es la integral de la derivada.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{-1}{x^2}+adx=\int -x^{-2}+adx=\frac{-x^{-2+1}}{-2+1}+ax+C=\frac{1}{x}+ax+C$$

La función pasa por (1, 3) y $(2,7/2)$, lo que implica que $f(1)=3$ y $f(2)=\frac{7}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x}+ax+C \\ f(1)=3 \\ f(2)=\frac{7}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=\frac{1}{1}+a+C \\ \frac{7}{2}=\frac{1}{2}+2a+C\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=a+C \\ 3=2a+C\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-a=C \\ 3=2a+C\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3=2a+2-a\Rightarrow \boxed{1=a}\Rightarrow \boxed{C=2-1=1}$$

El parámetro debe tomar el valor *a = 1*. La función queda $f(x)=\frac{1}{x}+x+1$.

b) Para *a = 1* la función queda $f(x)=\frac{1}{x}+x+C$ y su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

La derivada es $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+1$. Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{-1}{x^2}+1 \\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-1}{x^2}+1=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=-1\Rightarrow -1=-x^2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *x = –1*, *x = 0* y *x = 1*.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

  $f'(-2)=\frac{-1}{(-2)^2}+1=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale

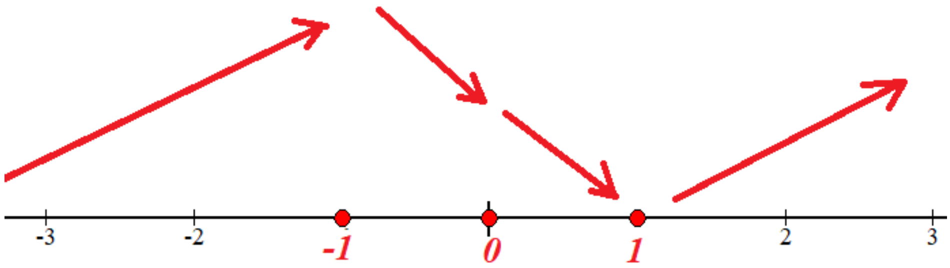
  $f'(-0.5)=\frac{-1}{(-0.5)^2}+1=-3<0$. La función decrece en $(-1,0)$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-1}{0.5^2}+1=-3<0$.

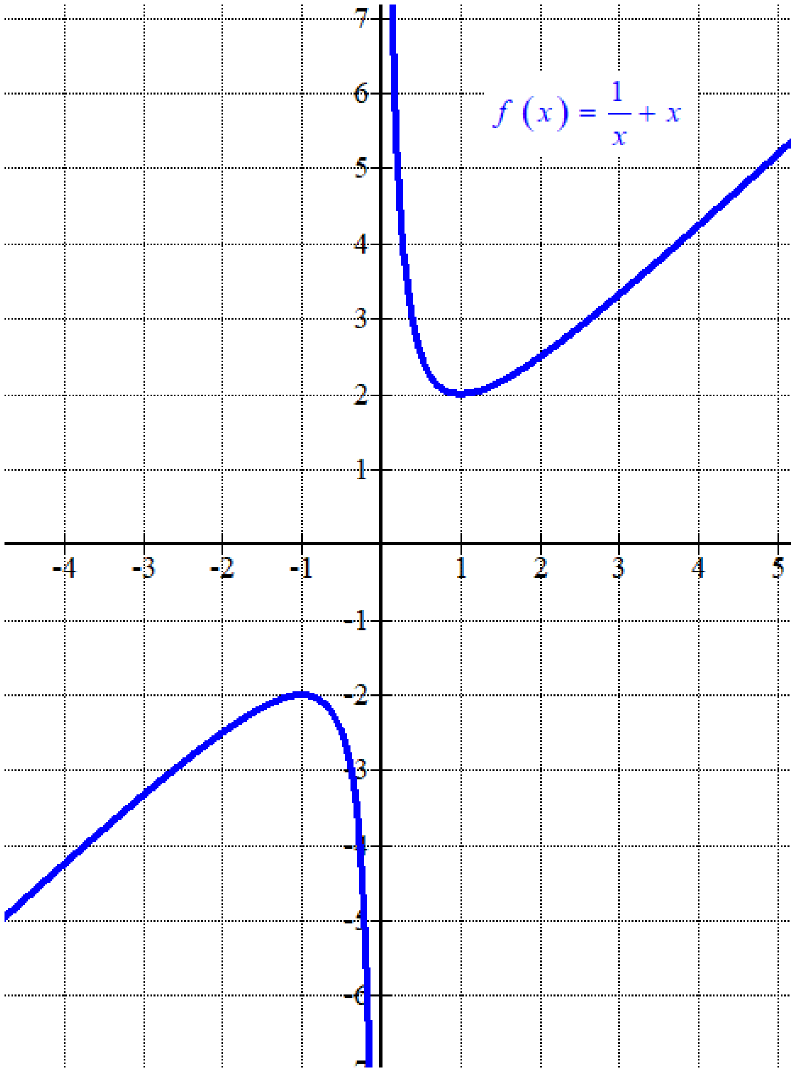
  La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-1}{2^2}+1=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.




La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)\cup(0,1)$.
La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.



**4.** (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

**Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4}{x^2-4}=\frac{4+4}{4-4}=\frac{8}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-4}=\frac{4+4}{2^2-4}=\frac{8}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

**Asíntota horizontal.** $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=1$ es la asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.** $y=mx+n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

b) La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4} \Rightarrow f(1)=\frac{1+4}{1-4}=\frac{-5}{3}$$

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4)-2x(x^2+4)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-8x}{(x^2-4)^2}=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(1)=\frac{-16}{(1^2-4)^2}=\frac{-16}{9}$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y+\frac{5}{3}=\frac{-16}{9}(x-1) \Rightarrow y=\frac{-16}{9}x+\frac{16}{9}-\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-16}{9}x+\frac{1}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y=\frac{-16}{9}x+\frac{1}{9}$.

**5.** (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Llamamos $x$ e $y$ a los números que buscamos.
Las restricciones del problema son:

Sabemos que $0 \le x, y \le 10$
"El doble del primero menos el segundo no pase de 10" → $2x - y \le 10$.
"El triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12" → $3x + 2y \ge 12$.

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y \le 10 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \\ x \le 10 \\ y \le 10 \end{array}\right\}$$

Deseamos minimizar el valor de su suma $S(x, y) = x + y$.
Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x - y = 10$

| $x$ | $y = 2x - 10$ |
|---|---|
| 0 | $-10$ |
| 5 | 0 |
| 10 | 10 |

$3x + 2y = 12$

| $x$ | $y = \frac{12 - 3x}{2}$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 2 | 3 |
| 4 | 0 |

$x = 10$

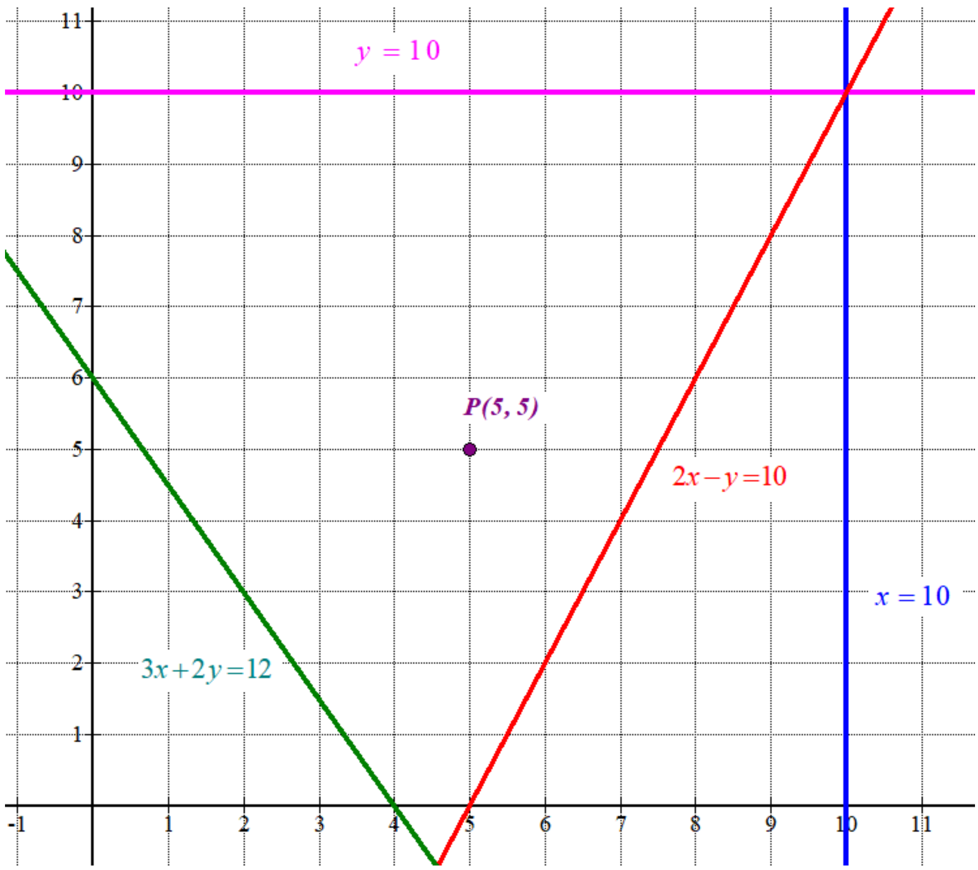
| $x = 10$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 0 |
| 10 | 5 |
| 10 | 10 |

$y = 10$

| $x$ | $y = 10$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 5 | 10 |
| 10 | 10 |

$x \ge 0;\ y \ge 0$

*Primer cuadrante*

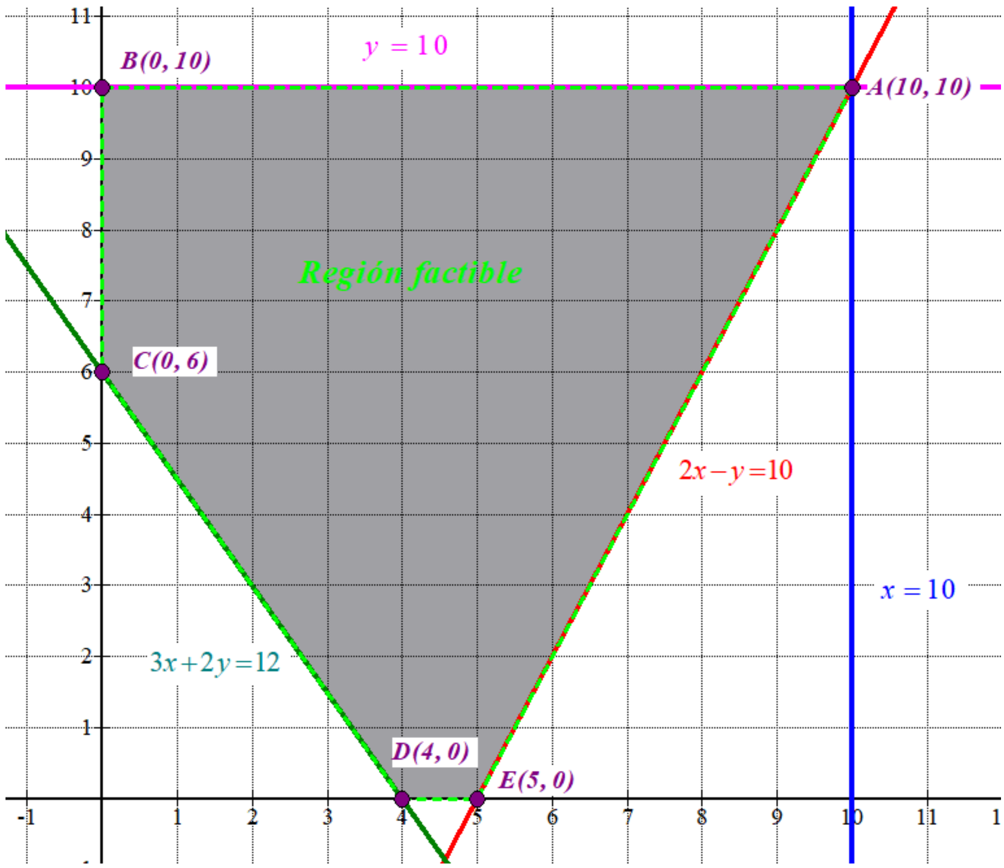


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x-y\le 10 \\ 3x+2y\ge 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \\ x\le 10 \\ y\le 10 \end{array}\right\}$ la región está situada en el primer cuadrante por debajo de la recta horizontal rosa y por encima de las rectas verde y roja.

Lo comprobamos viendo si el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 5-5\le 10 \\ 3\cdot 5+2\cdot 5\ge 12 \\ 5\ge 0;\ 5\ge 0 \\ 5\le 10 \\ 5\le 10 \end{array}\right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.




Valoramos la función suma $S(x,y)=x+y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(10, 10) → $S(10,10)=10+10=20$

B(0, 10) → $S(0,10)=0+10=10$

C(0, 6) → $S(0,6)=0+6=6$

D(4, 0) → $S(4,0)=4+0=4$ ¡Mínimo!

E(5, 0) → $S(5,0)=5+0=5$

El valor mínimo es 4 y se consigue en el vértice D(4, 0). Los números buscados son 4 y 0. Siendo la suma mínima 4.

**6.** (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda seria de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Llamamos "x" al número de guitarras, "y" al número de pianos y "z" al número de violines.

"En una tienda de música se tienen 70 instrumentos" → $x+y+z=70$

"La cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras" → $y+z=x$

"Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda seria de 180" →

$$\left.\begin{array}{l} N^o\, violines = z \\ N^o\, pianos = 2y \\ N^o\, guitarras = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x+2y+z=180$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y+z=x \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z+y+z=70 \\ 4(y+z)+2y+z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+2z=70 \\ 4y+4z+2y+z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=35 \\ 6y+5z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=35-y \\ 6y+5z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y+5(35-y)=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y+175-5y=180 \Rightarrow \boxed{y=5} \Rightarrow \boxed{z=35-5=30} \Rightarrow \boxed{x=5+30=35}$$

En la tienda de música tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

**7.** (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 3*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix}=10+8+9a-24-15-2a=7a-21$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow 7a-21=0 \Rightarrow 7a=21 \Rightarrow a=\frac{21}{7}=3$$

Analizamos dos casos diferentes.

**CASO 1.** $a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

**CASO 2.** $a=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot Fila\,1^a - 2\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 6 & 3 & 9 & 6 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 7 & 6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - 4\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{rrrr} 8 & 3 & 5 & 2 \\ -8 & -4 & -12 & -8 \\ \hline 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a + Fila\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

***Resumiendo***: Para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 3$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=2 \\ y+7z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+y+3z=2 \\ \boxed{y=6-7z} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+6-7z+3z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-4z=-4 \Rightarrow x-2z=-2 \Rightarrow \boxed{x=-2+2z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=6-7\lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Para $a = 3$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=6-7\lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

**8.** (2 puntos) La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el dia está nublado en un 50% de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7% de los días. Además, el 35% de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un dia de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Llamamos N a "el día está nublado" y B a "la temperatura baja de los 10º".
Nos proporcionan unos datos que nos permite establecer que $P(N)=0.5$, $P(B)=0.07$ y $P(N\cup B)=0.35$.
Los datos son incoherentes pues tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(N\cup B)=0.35 \\ P(N)=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow P(N\cup B)=0.35<0.5=P(N)$$

Absurdo, pues no es posible que el suceso unión tenga probabilidad menor que la probabilidad de uno de los sucesos. De todas formas lo resolvemos

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(N\cup B)=0.35 \\ P(N)=0.5 \\ P(B)=0.07 \\ P(N\cup B)=P(N)+P(B)-P(B\cap N) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.35=0.5+0.07-P(B\cap N)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B\cap N)=0.57-0.35=0.22$$

También es absurdo el resultado pues la probabilidad de la intersección es mayor que la de uno de los sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(B\cap N)=0.22 \\ P(B)=0.07 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B\cap N)=0.22>0.07=P(B)$$

La probabilidad de que un día esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados (sin pensar en lo ilógico del resultado) es de 0.22.

b) Nos piden calcular $P(\overline{N}/\overline{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{N}/\overline{B})=\frac{P(\overline{N}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{N\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(N\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0.35}{1-0.07}=\boxed{\frac{65}{93}\simeq 0.699}$$

La probabilidad de que no esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados es de $\frac{65}{93}\simeq 0.699$.

**9.** (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ = 8 puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ.

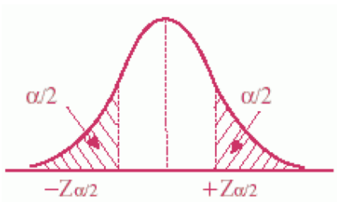
b) Suponga que μ = 67 puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

X = "El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española"
X = N(μ, 8)

a) Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\overline{x} = 65$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$




| z | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | ,06 | ,07 | ,08 | ,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0, |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0, |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0, |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0, |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0, |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0, |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0, |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0, |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0, |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0, |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0, |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0, |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0, |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0, |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0, |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0, |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0, |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0, |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0, |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0, |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0, |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0, |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0, |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0, |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0, |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0, |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | [illegible] | [illegible] | 0, |

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 4.6063$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\overline{x} - Error,\ \overline{x} + Error\right) = \left(65 - 4.6063,\ 65 + 4.6063\right) = \left(60.3937,\ 69.6063\right)$$

b) Suponemos que X = N(67, 8)

La distribución de las medias muestrales de tamaño 10 sigue una distribución normal con la misma media y con desviación típica $\sigma = \frac{8}{\sqrt{10}}$.

$$\overline{X_{10}} = N\left(67, \frac{8}{\sqrt{10}}\right)$$

Nos piden calcular $P\left(65 \leq \overline{X_{10}} \leq 69\right)$.

$$P\left(65 \leq \overline{X_{10}} \leq 69\right) = \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{\overline{X_{10}} - 67}{8/\sqrt{10}} \end{array}\right\} = P\left(\frac{65-67}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{69-67}{8/\sqrt{10}}\right) = P\left(-0.79 \leq Z \leq 0.79\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 0.79\right) - P\left(Z \leq -0.79\right) = P\left(Z \leq 0.79\right) - P\left(Z \geq 0.79\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 0.79\right) - \left[1 - P\left(Z \leq 0.79\right)\right] = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array}\right\} = 0.7852 - 1 + 0.7852 = \boxed{0.5704}$$

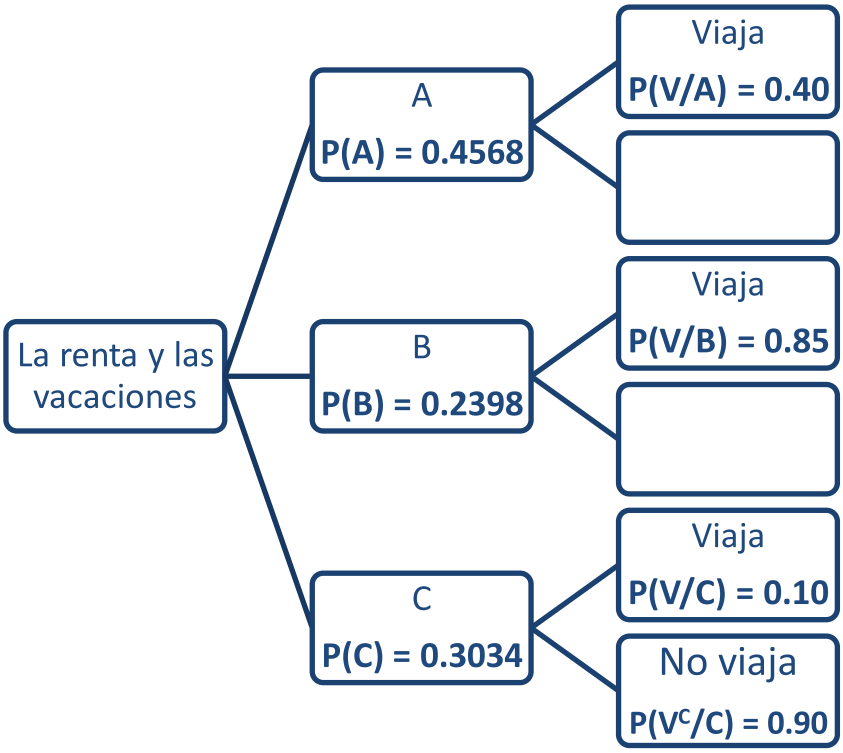
| z | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | ,06 | ,07 | ,08 | ,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | [illegible] |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | [illegible] |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | [illegible] |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | [illegible] |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | [illegible] |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | [illegible] |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | [illegible] |
| **0,7** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | [illegible] |

La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales tiene un valor de $0.5704$.

.

**10.** (2 puntos) Según los datos del INE, el 45,68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%.
Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:
a) Viaje por vacaciones.
b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Llamamos A al suceso "una familia española tiene una renta mensual de 1500 a 3000 euros", B a "una familia española tiene una renta mensual superior a 3000 euros", C a "una familia española tiene una renta mensual inferior a 1500 euros" y V al suceso "la familia viaja por vacaciones". Realizamos un diagrama de árbol.




a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= 0.4568 \cdot 0.4 + 0.2398 \cdot 0.85 + 0.3034 \cdot 0.1 = \boxed{0.41689}$$

La probabilidad de que una familia elegida al azar viaje por vacaciones es de 0.41689.

b) Nos piden calcular $P((A \cup B)/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cup B)/V) = \frac{P((A \cup B) \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A \cap V) + P(B \cap V)}{P(V)} =$$

$$= \frac{P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B)}{P(V)} = \frac{0.4568 \cdot 0.4 + 0.2398 \cdot 0.85}{0.41689} \simeq \boxed{0.9272}$$

La probabilidad de que una familia que viaja por vacaciones tenga una renta mensual superior a 1500 € es de 0.9272.