uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	F

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2=O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.
b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}\,.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$.
b) Para $a = 1$, calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ k & si\ 0<x<2 \\ -2x^2+x+6 & si\ x\ge 2 \end{cases}.$$

a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.
b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{2x^2-6}{x^2+3}$$

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

5. (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, P1 y P2. Cada kg de P1 contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso P1 le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso P2 de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

6. (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+(a+1)z=1 \\ 2x-az=2 \\ (a+2)x-ay=4 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

8. (2 puntos) El 80% de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35% de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70% de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

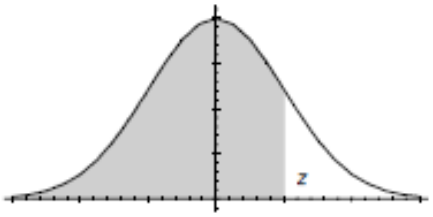
9. (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

10. (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20% de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5% de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50% de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45% de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50%, 40% y 10%, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:
a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.
b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2=O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.

b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

a) Calculamos la expresión de A^2 e igualamos a O.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & -4+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2=O\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & -4+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a^2-4=0\rightarrow a^2=4\rightarrow a=\sqrt{4}=\pm2 \\ -a-b=0\rightarrow -a=b \\ 4a+4b=0\rightarrow a+b=0\rightarrow b=-a \\ -4+b^2=0\rightarrow b^2=4\rightarrow b=\sqrt{4}=\pm2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=2, b=-2 \\ o \\ a=-2,\ b=2 \end{cases}$$

Existen dos soluciones posibles: $a = 2$, $b = -2$ o bien $a = -2$, $b = 2$.

b) Para $a = 2$ y $b = -2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de la matriz B.

$$B=A+I=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las potencias pedidas.

$$B^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9-4 & -3+1 \\ 12-4 & -4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^4=B^2B^2=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25-16 & -10+6 \\ 40-24 & -16+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B^8=B^4B^4=\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 81-64 & -36+28 \\ 144-112 & -64+49 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 32 & -15 \end{pmatrix}$$

$$B^{10}=B^8B^2=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 32 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 85-64 & -34+24 \\ 160-120 & -64+45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}\,.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real *a* para que la derivada de la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1* tome el valor $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Para *a = 1*, calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Obtenemos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2} \Rightarrow f'(x)=a+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=a+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

Hacemos que la derivada en el punto de abscisa *x = 1* tome el valor $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=a+\frac{1}{\sqrt{1^2+2}}=a+\frac{1}{\sqrt{3}} \\ f'(1)=1+\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow a+\frac{1}{\sqrt{3}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor buscado es *a = 1*.

b) Para *a = 1* la función queda $f(x)=x+\sqrt{x^2+2}$.
Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2}=-\infty+\infty=\text{Indeterminación (conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+2\right)}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-2}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-\sqrt{x^2+2}}=\frac{-2}{-\infty-\infty}=\frac{-2}{-\infty}=\boxed{0}$$

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ k & si\ 0<x<2 \\ -2x^2+x+6 & si\ x\ge 2 \end{cases}.$$

a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real *k* para que esta función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando *k = 1*, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas *x = −1* y *x = 1*

a) La función es continua en cada intervalo de definición.
Para que la función sea continua en todo su dominio debe serlo en los cambios de definición: *x = 0* y *x =2*.
La función debe ser continua en *x = 0*.

- Existe $f(0)=e^0=1$.
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1$.
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} k=k$.
- Los tres valores son iguales → $k = 1$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ 1 & si\ 0<x<2 \\ -2x^2+x+6 & si\ x\ge 2 \end{cases}$

Comprobamos si para este valor la función es continua en *x = 2*.

- Existe $f(2)=-2\cdot 2^2+2+6=0$.
- Existe $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 1=1$.
- Existe $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -2x^2+x+6=0$.
- ¿Los tres valores son iguales?

Esta última condición no se cumple.
No existe ningún valor de *k* que haga que la función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando *k = 1* La función queda $f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ 1 & si\ 0<x<2 \\ -2x^2+x+6 & si\ x\ge 2 \end{cases}$.

Vemos si la función corta el eje de abscisas entre –1 y 1.

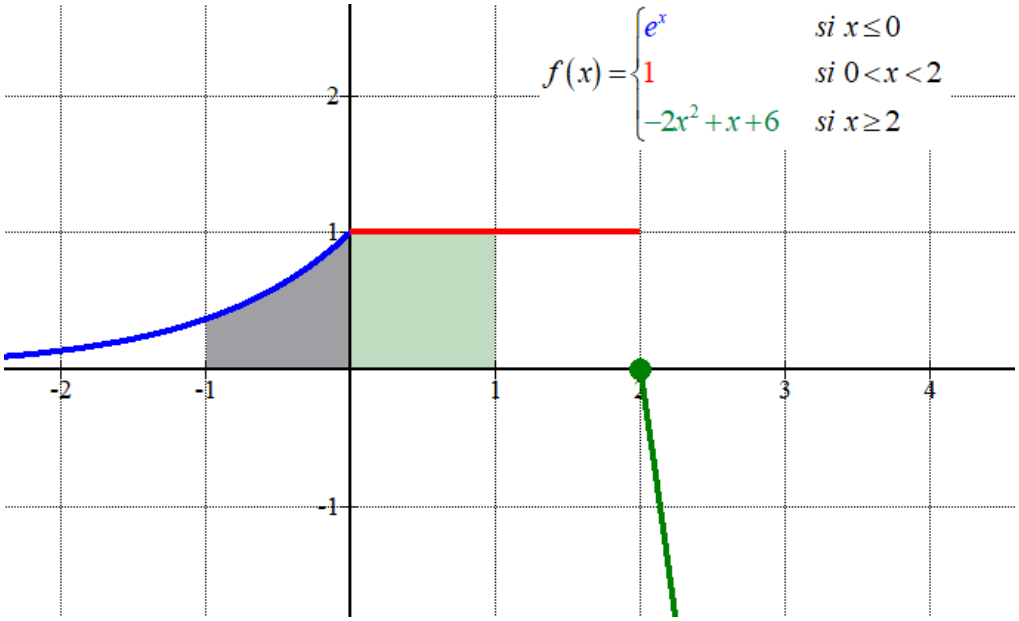
$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases} e^x=0 \text{ ¡Imposible!} \\ 1=0 \text{ ¡Imposible!} \\ -2x^2+x+6 \quad si\ x\ge 2 \text{ No la consideramos} \end{cases}$$

La función no corta el eje de abscisas entre –1 y 1. El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas *x = −1* y *x = 1*

es el valor de la integral de la función entre –1 y 1. Como existe un cambio de definición en el intervalo (–1, 1) calculamos el área como la suma de dos integrales definidas.

$$Área = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{1} 1 dx =$$

$$= \left[e^x\right]_{-1}^{0} + \left[x\right]_{0}^{1} = e^0 - e^{-1} + 1 - 0 = 1 - \frac{1}{e} + 1 = \boxed{2 - \frac{1}{e} \approx 1.63\ u^2}$$



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{2x^2-6}{x^2+3}$$

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2+3=0\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x=\sqrt{-3}=No\,existe$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{4x\left(x^2+3\right)-2x\left(2x^2-6\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{\cancel{4x^3}+12x-\cancel{4x^3}+12x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2}=0\Rightarrow 24x=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{24(-1)}{\left((-1)^2+3\right)^2}=\frac{-24}{16}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{24(1)}{\left(1^2+3\right)^2}=\frac{24}{16}>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

b) La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{2x^2-6}{x^2+3}\Rightarrow f(1)=\frac{2-6}{1+3}=-1$$

$$f'(x)=\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{24}{\left(1^2+3\right)^2}=\frac{3}{2}$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y+1=\frac{3}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-1\Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$.

5. (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, P1 y P2. Cada kg de P1 contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso P1 le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso P2 de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

Llamamos x e y a los kilos de pienso de P1 y P2 que se deben fabricar.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Kg de cereales	Kg de leguminosas	Kg de otros componentes	Beneficio
Kg pienso P1 (x)	0.5x	0.3x	0.2x	x
Kg de pienso P2 (y)	0.6y	0.2y	0.2y	2y
TOTALES	$0.5x+0.6y$	$0.3x+0.2y$	$0.2x+0.2y$	$x+2y$

Las restricciones del problema son:

"Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas" → $0.5x+0.6y\le 30$, $0.3x+0.2y\le 12$.
Las cantidades son positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 0.5x+0.6y\le 30 \\ 0.3x+0.2y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+6y\le 300 \\ 3x+2y\le 120 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Deseamos maximizar el beneficio: $B(x,y)=x+2y$.
Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

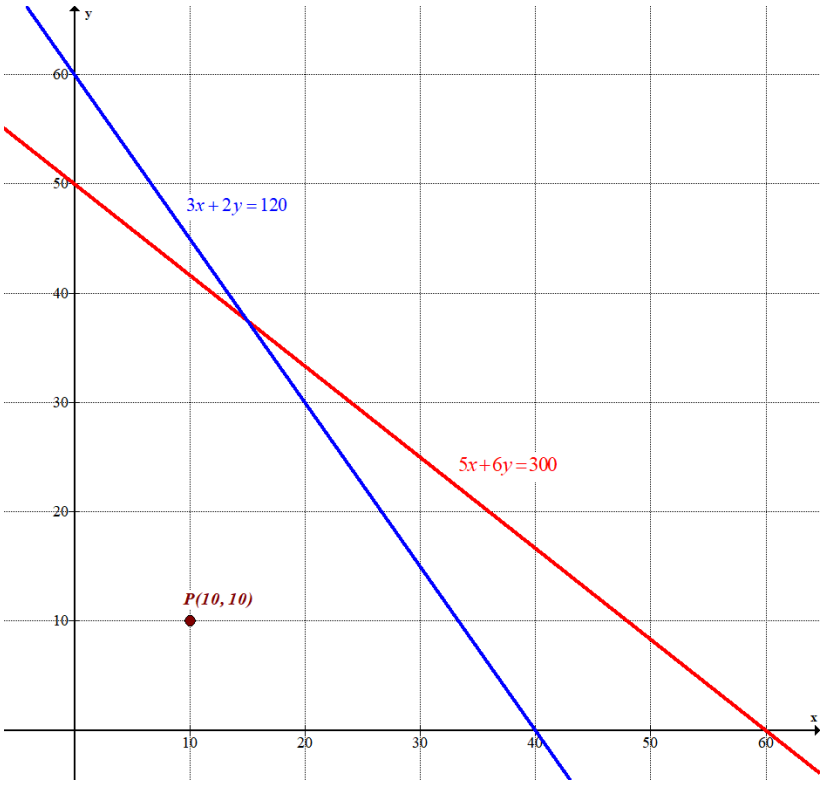
$5x+6y=300$

x	$y=\dfrac{300-5x}{6}$
0	50
30	25
60	0

$3x+2y=120$

x	$y=\dfrac{120-3x}{2}$
0	60
30	15
40	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer cuadrante

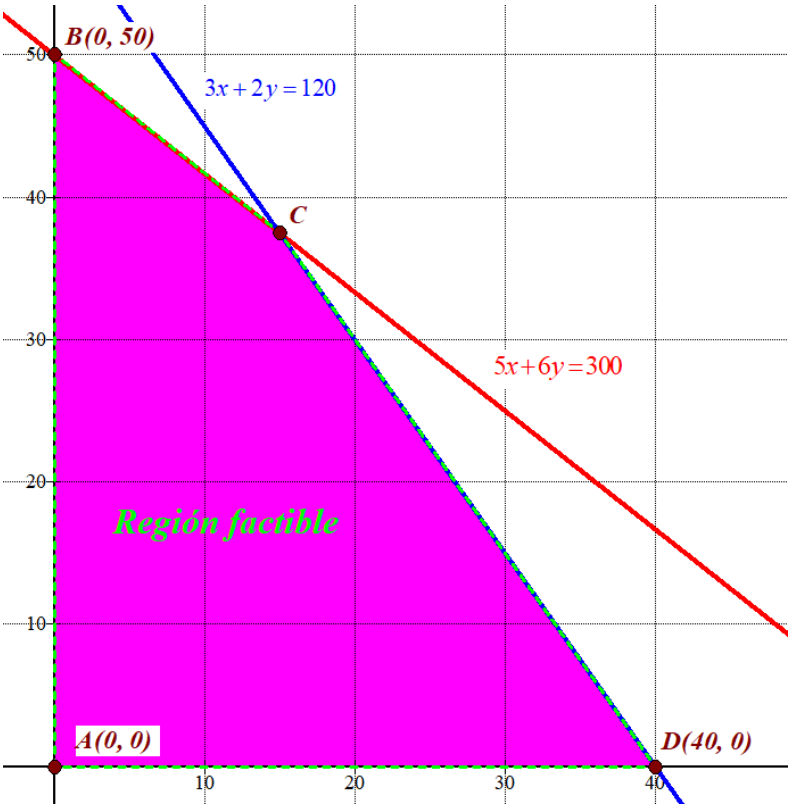


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 5x+6y\le 300 \\ 3x+2y\le 120 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja.

Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot 10+6\cdot 10\le 300 \\ 3\cdot 10+2\cdot 10\le 120 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y=300 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \times(3)\rightarrow\ 15x+18y=900 \\ \times(-5)\rightarrow -15x-10y=-600 \end{array}\right\}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \quad 8y=300 \Rightarrow y=\frac{300}{8}=37.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+6\frac{300}{8}=300 \Rightarrow 5x=75 \Rightarrow x=\frac{75}{5}=15 \Rightarrow \boxed{C(15,37.5)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=x+2y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 50) → $B(0,50)=0+2\cdot 50=100$ *¡Máximo!*

C(15, 37.5) → $B(15,37.5)=15+2\cdot 37.5=90$

D(40, 0) → $B(40,0)=40$

El beneficio máximo es 100 € y se consigue en el vértice D(0, 50). Lo que significa que se deben fabricar 0 kilos del pienso P1 y 50 kilos del pienso P2 para conseguir unos beneficios máximos de 100 €.

6. (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Llamamos "x" al número de novelas prestadas, "y" al número de biografías prestadas y "z" al número de libros de autoayuda prestados.

"Se prestan 90 libros que son novelas, biografías y libros de autoayuda" → $x+y+z=90$

"Los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas" → $z=\frac{x}{2}$

"El número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas" → $y=x-5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ z=\dfrac{x}{2} \\ y=x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ 2z=x \\ y=x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=90 \\ y=2z-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3z+y=90 \\ y=2z-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z+2z-5=90 \Rightarrow 5z=95 \Rightarrow \boxed{z=\frac{95}{5}=19} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=2\cdot 19-5=33} \\ \boxed{x=2\cdot 19=38} \end{cases}$$

En la biblioteca se prestan un 90 % de libros entre novelas, biografías y libros de autoayuda. Las novelas son un 38 %, las biografías son un 33 % y los libros de autoayuda un 19 %.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro *a*:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+(a+1)z&=1\\ 2x-az&=2\\ (a+2)x-ay&=4 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a+1\\ 2 & 0 & -a\\ a+2 & -a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a+1 & 1\\ 2 & 0 & -a & 2\\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array}\right)$.

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & a+1\\ 2 & 0 & -a\\ a+2 & -a & 0 \end{vmatrix}=0+2a(a+2)-2a(a+1)-0-0-a^2=$$

$$=2a^2+4a-2a^2-2a-a^2=-a^2+2a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+2a=0\Rightarrow -a(a-2)=0\Rightarrow \begin{cases}\boxed{a=0}\\ a-2=0\rightarrow \boxed{a=2}\end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0$ y $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,2^a & & & \\ 2 & 0 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 0 & -2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a-2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & 0 & 0 & 2\\ -2 & 4 & -2 & -2\\ \hline 0 & 4 & -2 & 0\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1}^{A/B} & -2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 0\\ \underbrace{0}_{A} & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,2^a - 2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 & -2 \\ \hline 0 & 4 & -8 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,3^a - 4\cdot Fila\,1^a & & & \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -12 & -4 \\ \hline 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2\cdot Fila\,3^a - 3\cdot Fila\,2^a & & & \\ 0 & 12 & -24 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -2 & 3}^{A/B} & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Resumiendo: Para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $a = 0$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = -1$ sabemos que el sistema es compatible determinado (CASO 1).
Obtenemos la solución del sistema.

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x = 4 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 4 - y - 2y = 1 \\ 2(4 - y) + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -3y = -3 \rightarrow \boxed{y = 1} \\ 8 - 2y + z = 2 \rightarrow -2y + z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 + z = -6 \Rightarrow \boxed{z = -4} \\ \boxed{x = 4 - 1 = 3} \end{array} \right.$$

Para $a = -1$ la solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$, $z = -4$.

8. (2 puntos) El 80% de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35% de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70% de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Llamamos A a "la prenda ha sido fabricada en Asia" e I a "la prenda ha sido fabricada usando mano de obra infantil".
Nos proporcionan unos datos que nos permite establecer que $P(A)=0.60$, $P(I)=0.35$ y $P(A\cup I)=0.70$.

a) Nos piden calcular $P(A\cap I)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{r} P(A\cup I)=0.7 \\ P(A)=0.6 \\ P(I)=0.35 \\ P(A\cup I)=P(A)+P(I)-P(A\cap I) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7=0.6+0.35-P(A\cap I)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap I)=0.6+0.35-0.7=\boxed{0.25}$$

La probabilidad de que una prenda se haya fabricado en Asia y usando mano de obra infantil es de 0.25.

b) Nos piden calcular $P(\overline{A}/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{A}/\overline{I})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{I})}{P(\overline{I})}=\frac{P(\overline{A\cup I})}{1-P(I)}=\frac{1-P(A\cup I)}{1-P(I)}=\frac{1-0.7}{1-0.35}=\boxed{\frac{6}{13}\simeq 0.4615}$$

La probabilidad de que una prenda no se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil es de $\frac{6}{13}\simeq 0.4615$.

9. (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 3 minutos.

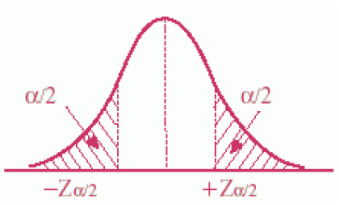
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.

b) Suponga que μ = 32 minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

X = "El tiempo que pasa un cliente en su establecimiento (en minutos)"
X = N(μ, 3)

a) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow\alpha/2=0.025\Rightarrow1-\alpha/2=0.975\Rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0

El error del intervalo de confianza lo igualamos a 1 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow1=1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=3\cdot1.96\Rightarrow n=\left(3\cdot1.96\right)^2=34.5744$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 35 clientes.

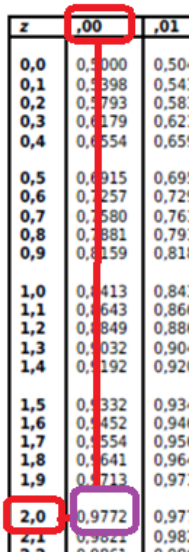
b) Suponemos que X = N(32, 3)
La distribución de las medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media y con desviación típica $\sigma=\frac{3}{\sqrt{16}}=0.75$.

$\overline{X_{16}}=N\left(32,0.75\right)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{16}}\le30.5\right)$.

$$P\left(\overline{X_{16}}\le30.5\right)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\Z=\dfrac{\overline{X_{16}}-32}{0.75}\end{matrix}\right\}=P\left(Z\le\frac{30.5-32}{0.75}\right)=P\left(Z\le-2\right)=P\left(Z\ge2\right)=$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$



z	,00	,01
0,0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1,0	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2,0	0,9772	0,97
2,1		0,98

La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos tiene un valor de 0.0228.

.

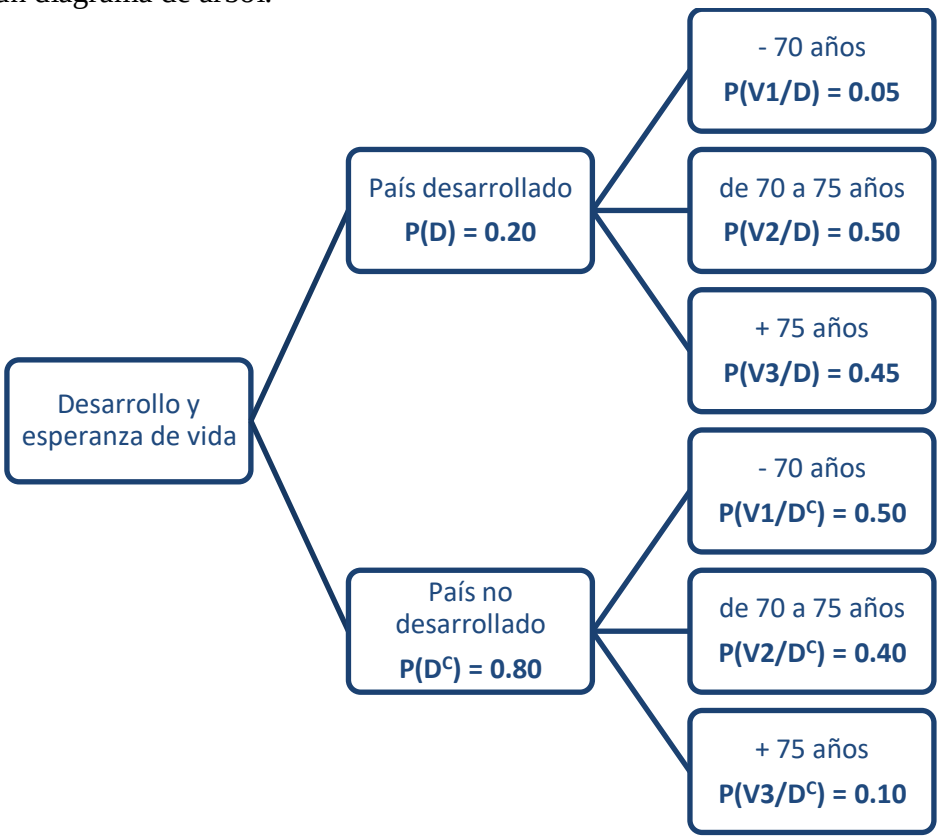
10. (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20% de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5% de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50% de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45% de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50%, 40% y 10%, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Llamamos D al suceso "el país es desarrollado", V1 a "en el país hay una esperanza de vida inferior a 70 años", V2 a "en el país hay una esperanza de vida de 70 a 75 años" y V3 al suceso "en el país hay una esperanza de vida superior a los 75 años".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(V1)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V1) = P(D)P(V1/D) + P(D^C)P(V1/D^C) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.8 \cdot 0.5 = \boxed{0.41}$$

La probabilidad de que la esperanza de vida sea inferior a 70 años es de 0.41.

b) Nos piden calcular $P(D^C/V1)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(D^C/V1) = \frac{P(D^C \cap V1)}{P(V1)} = \frac{P(D^C)P(V1/D^C)}{P(V1)} = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.41} = \frac{40}{41} \simeq 0.9756$$

La probabilidad de que el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados, sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, es de $\frac{40}{41} \simeq 0.9756$.