UNIVERSIDAD DE MURCIA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 AÑOS
2024
184-MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=a \\ 2y+z=1+a \\ 2x+4y+2az=0 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para $a = 1$. **(2,5 puntos)**

CUESTIÓN 2. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (**2,5 puntos**).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}}{x}$. **(1,25 puntos)**

b) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN 4. Dada la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ hallar:

a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**
b) Las asíntotas de la función. **(0,5 puntos)**
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **(1 punto)**
d) Los máximos y mínimos. **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 5. Sea la función $f(x)=2e^{x+1}$:

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que pasa por el punto $x = -1$. **(1,25 puntos)**
b) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica $f(x)$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje de abscisas. **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN 6. Hallar las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(e^{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx$. **(1,25 puntos)**

b) $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx$. **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN 7. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(1,25 puntos)**)

b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN 8. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$ y $P(A/B)=0.5$. Calcular:

a) $P(A\cap B)$ **(1,25 puntos)**

b) $P(A\cup B)$ **(1,25 puntos)**

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=a \\ 2y+z=1+a \\ 2x+4y+2az=0 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para $a = 1$. **(2,5 puntos)**

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & 1+a \\ 2 & 4 & 2a & 0 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2a \end{vmatrix}=4a+2+0+4-0-4=4a+2$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow 4a+2=0 \Rightarrow 4a=-2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq \frac{-1}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = \frac{-1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1-1/2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de *A/B* es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Lo resolvemos para $a = 1$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1).

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2y+z=2 \\ 2x+4y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ z=2-2y \\ 2x+4y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-(2-2y)=1 \\ 2x+4y+2(2-2y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-2+2y=1 \\ 2x+4y+4-4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=3 \\ 2x=-4 \to \boxed{x=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow -2+3y=3 \Rightarrow 3y=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{z=2-2\frac{5}{3}=\frac{-4}{3}}$$

La solución es $x = -2;\ y=\frac{5}{3};\ z=\frac{-4}{3}$.

CUESTIÓN 2. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (**2,5 puntos**).

Llamamos “x” al número de dulces del tipo A e “y” al número de dulces de tipo B.
Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Kgs de azúcar	Nº huevos	Ingresos
Nº dulces A (x)	$0.5x$	$8x$	$15x$
Nº dulces B (y)	y	$6y$	$12y$
TOTALES	$0.5x+y$	$8x+6y$	$15x+12y$

La función objetivo son los ingresos que vienen expresados por la función $I(x,y)=15x+12y$.
Expresamos las restricciones como inecuaciones.

“En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos” → $0.5x+y\le 10;\ 8x+6y\le 120$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0.5x+y\le 10 \\ 8x+6y\le 120 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y\le 20 \\ 4x+3y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

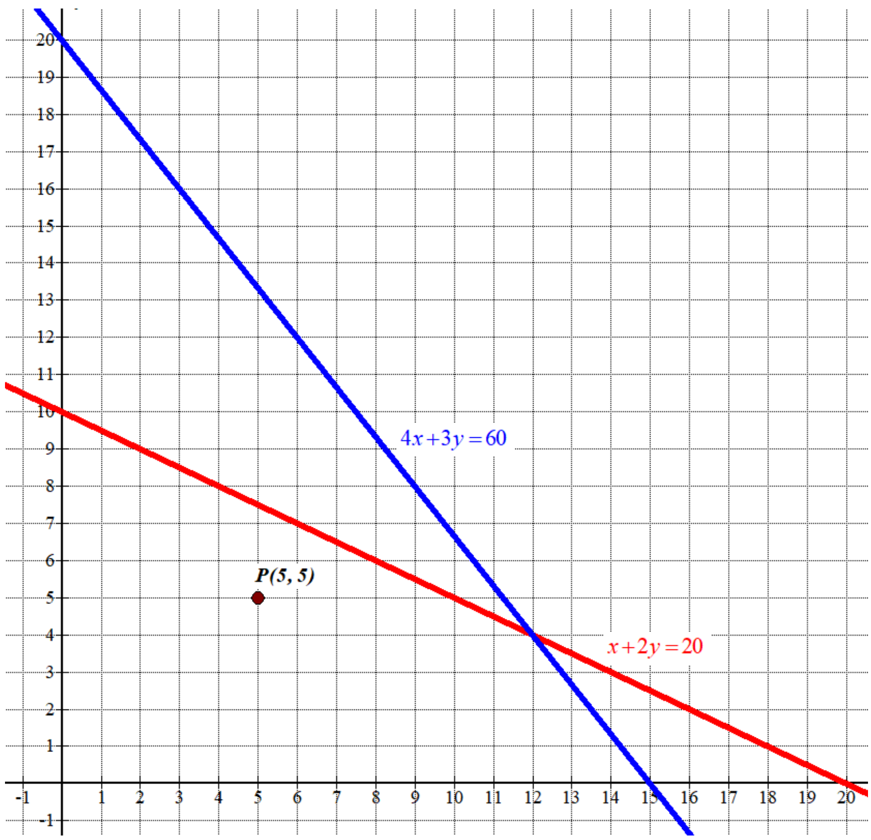
$x+2y=20$

x	$y=\frac{20-x}{2}$
0	10
12	4
20	0

$4x+3y=60$

x	$y=\frac{60-4x}{3}$
0	20
12	4
15	0

$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} Primer\ cuadrante$$

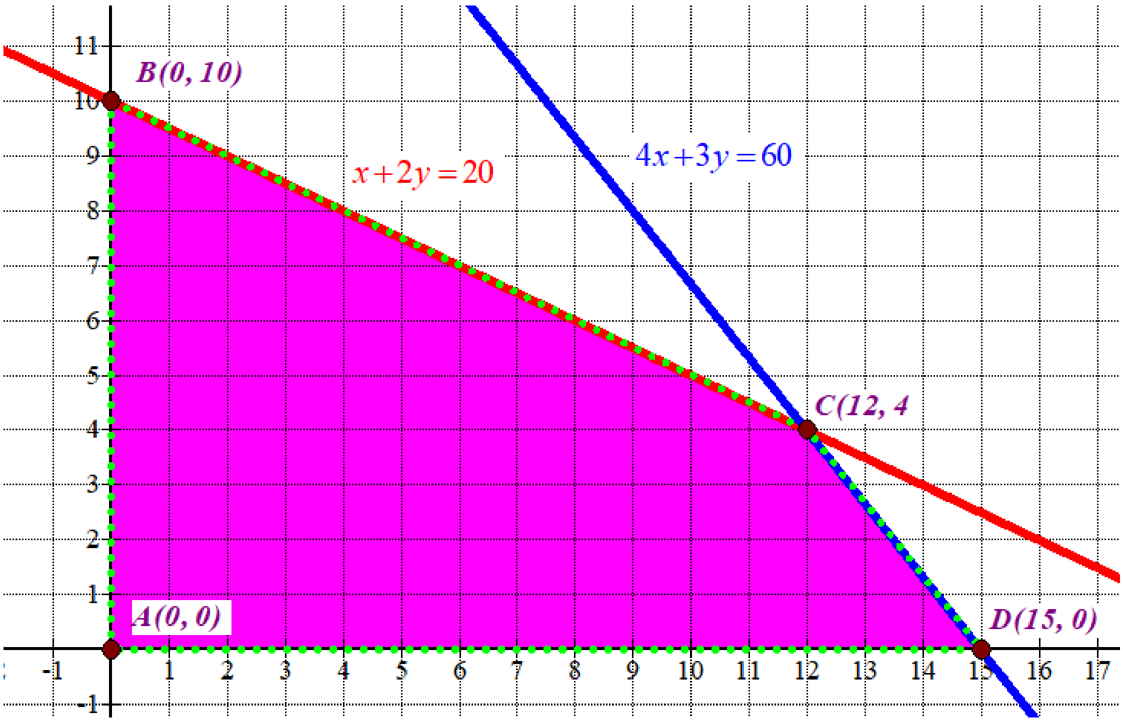


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 20 \\ 4x+3y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+2\cdot 5\leq 20 \\ 4\cdot 5+3\cdot 5\leq 60 \\ 5\geq 0;\ 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreo de rosa la región factible e indico las coordenadas de los vértices de la región factible.



Para resolver el problema de programación lineal valoramos la función que se desea maximizar $I(x,y)=15x+12y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 10) → $I(0,10)=15\cdot 0+12\cdot 10=120$

C(12, 4) → $I(12,4)=15\cdot 12+12\cdot 4=228$ ¡*Máximo*!

D(15, 0) → $I(15,0)=15\cdot 15+12\cdot 0=225$

El máximo valor de los ingresos es 228 € y se alcanza en el punto C(12, 4), lo que significa que ese ingreso máximo de 228 € se consigue elaborando 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}}{x}$. **(1,25 puntos)**

b) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. **(1,25 puntos)**

a) Calculo la derivada de la función aplicando la derivada de un cociente y de una raíz.

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\cdot x-1\cdot\sqrt{3x-2}}{x^2}=\frac{\frac{3x}{2\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}}{x^2}=\frac{\frac{3x-2\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}{2\sqrt{3x-2}}}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3x-2(3x-2)}{2\sqrt{3x-2}}}{x^2}=\frac{\frac{3x-6x+4}{2\sqrt{3x-2}}}{x^2}=\frac{-3x+4}{2x^2\sqrt{3x-2}}$$

a) Simplifico la expresión de la función: $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln x=-\ln x$

Calculo la derivada de la función: $f'(x)=-\frac{1}{x}$

CUESTIÓN 4. Dada la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ hallar:
a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**
b) Las asíntotas de la función. **(0,5 puntos)**
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **(1 punto)**
d) Los máximos y mínimos. **(0,5 puntos)**

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.
$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}$ ¡Imposible! → Dominio = $\mathbb{R}$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.
No tiene pues el dominio son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
No existe pues existe asíntota horizontal.

c) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

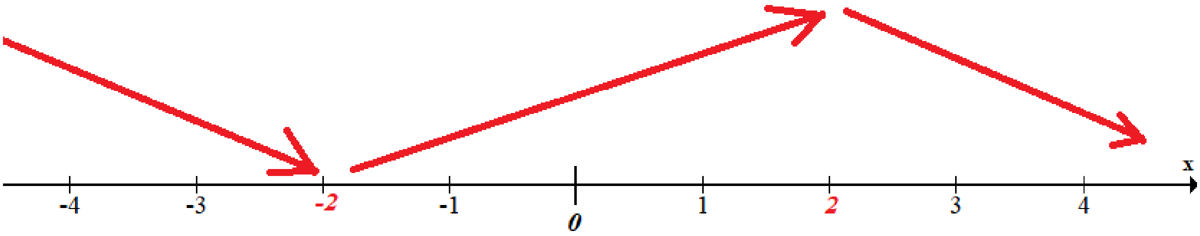
$$f'(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+4\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{2x^2+8-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \Rightarrow 8-2x^2=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x=-2$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{8-2(-3)^2}{\left((-3)^2+4\right)^2}=\frac{-10}{169}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{8-2(0)^2}{\left((0)^2+4\right)^2}=\frac{8}{16}>0$. La función crece en $(-2,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{8-2(3)^2}{\left((3)^2+4\right)^2}=\frac{-10}{169}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



d) Observando el esquema anterior la función presenta un mínimo relativo en $x=-2$ y un máximo relativo en $x=2$.

CUESTIÓN 5. Sea la función $f(x)=2e^{x+1}$:

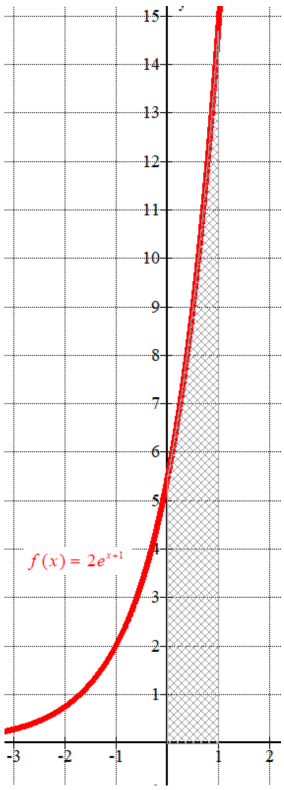
a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que pasa por el punto $x = -1$. **(1,25 puntos)**

b) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica *f(x)*, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje de abscisas. **(1,25 puntos)**

a) La recta tangente en $x = a$ tiene ecuación $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2e^{x+1} \to f(-1)=2e^{-1+1}=2 \\ f'(x)=2e^{x+1} \to f'(-1)=2e^{-1+1}=2 \\ y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=2(x+1) \Rightarrow y-2=2x+2 \Rightarrow \boxed{y=2x+4}$$

b) Debemos hallar el área del recinto coloreado de rosa.



Observando el dibujo el valor aproximado del área estará entre 9 y 10 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\acute{A}rea=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2e^{x+1}dx=\left[2e^{x+1}\right]_0^1=\left[2e^{1+1}\right]-\left[2e^{0+1}\right]=\boxed{2e^2-2e\simeq 9.34\ u^2}$$

CUESTIÓN 6. Hallar las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(e^{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx$. **(1,25 puntos)**

b) $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx$. **(1,25 puntos)**

a) Primero calculo la integral indefinida.

$$\int \left(e^{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx=\int e^{3x}dx-\int \frac{1}{x^2}dx+\int \frac{4}{x}dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx-\int x^{-2}dx+4\int \frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{x^{-1}}{-1}+4\ln x=\boxed{\frac{e^{3x}}{3}+\frac{1}{x}+4\ln x+C}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_1^2 \left(e^{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx=\left[\frac{e^{3x}}{3}+\frac{1}{x}+4\ln x\right]_1^2=\left[\frac{e^{3\cdot 2}}{3}+\frac{1}{2}+4\ln 2\right]-\left[\frac{e^3}{3}+\frac{1}{1}+4\ln 1\right]=$$

$$=\frac{e^6}{3}+\frac{1}{2}+4\ln 2-\frac{e^3}{3}-1=\boxed{\frac{e^6-e^3}{3}-\frac{1}{2}+4\ln 2}$$

b)

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3+4}{x^4+4x}dx=\boxed{\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4x\right|+C}$$

Otra forma de resolverlo (cambio de variable)

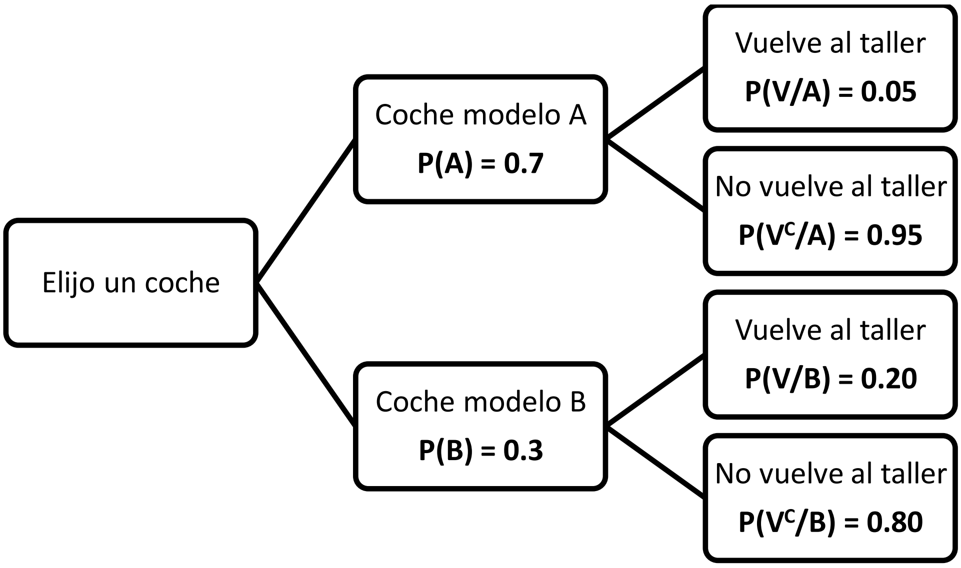
$$\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx=\left\{\begin{array}{l} x^4+4x=t \\ \left(4x^3+4\right)dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{4x^3+4}=\dfrac{dt}{4\left(x^3+1\right)} \end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{x^3+1}}{t}\frac{dt}{4\cancel{\left(x^3+1\right)}}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln t=\boxed{\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4x\right|+C}$$

CUESTIÓN 7. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(1,25 puntos)**)
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(1,25 puntos)**

Llamamos A al suceso "El coche es del modelo A", B al suceso "El coche es del modelo B" y V al suceso "El coche vuelve al taller antes de 6 meses".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V)=P(A)P(V/A)+P(B)P(V/B)=0.7\cdot 0.05+0.3\cdot 0.20=\boxed{0.095}$$

b) Nos piden calcular $P(B/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/V)=\frac{P(B\cap V)}{P(V)}=\frac{P(B)P(V/B)}{P(V)}=\frac{0.3\cdot 0.20}{0.095}=\boxed{\frac{12}{19}\simeq 0.632}$$

CUESTIÓN 8. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.3,\ P(B)=0.2$ y $P(A/B)=0.5$. Calcular:

a) $P(A\cap B)$ **(1,25 puntos)**

b) $P(A\cup B)$ **(1,25 puntos)**

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.3 \\ P(B)=0.2 \\ P(A/B)=0.5 \\ P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=\frac{P(A\cap B)}{0.2} \Rightarrow P(A\cap B)=0.5\cdot 0.2=\boxed{0.1}$$

b) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.3 \\ P(B)=0.2 \\ P(A\cap B)=0.1 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cup B)=0.3+0.2-0.1=\boxed{0.4}$$