



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2024 - JULIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- El producto $A \cdot B$. (0,5 puntos)
- La inversa C^{-1} . (0,5 puntos)
- La diferencia $D - A \cdot B$. (0,5 puntos)
- Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot B + C \cdot X = D$; es decir calcula la matriz X . (1 punto)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
- Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \leq x \leq 5$. Determine:

- ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)
- ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)
- ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
- b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, calcule:

- a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$:

- a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)
- b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$. (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

- a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
- Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
 - Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
 - Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)
- b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

SOLUCIONES**CUESTIÓN 1.** (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) El producto $A \cdot B$. (0,5 puntos)
 b) La inversa C^{-1} . (0,5 puntos)
 c) La diferencia $D - A \cdot B$. (0,5 puntos)
 d) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot B + C \cdot X = D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

a) Realizamos el producto indicado.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+0 & -1+0+0 \\ 2+0+0 & -1+0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que existe la inversa de C y la calculamos.

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la diferencia.

$$D - A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

d) Despejamos X de la ecuación matricial y determinamos su expresión.

$$A \cdot B + C \cdot X = D \Rightarrow C \cdot X = D - A \cdot B \Rightarrow X = C^{-1} (D - A \cdot B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 6-24 \\ -3+5 & -9+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 10$$

x	y = $\frac{10-x}{2}$
0	5
8	1
10	0

$$x + y = 2$$

x	y = 2 - x
0	2
2	0
4	-2

$$x = 0$$

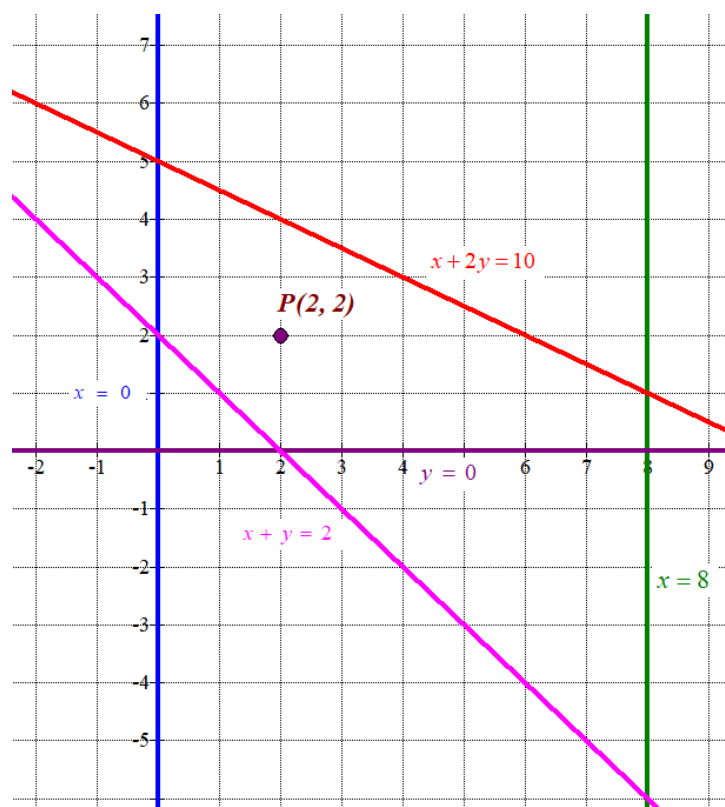
Eje Y

$$x = 8$$

x = 8	y
8	0
8	1
8	2

$$y = 0$$

Eje X



Como las restricciones son:

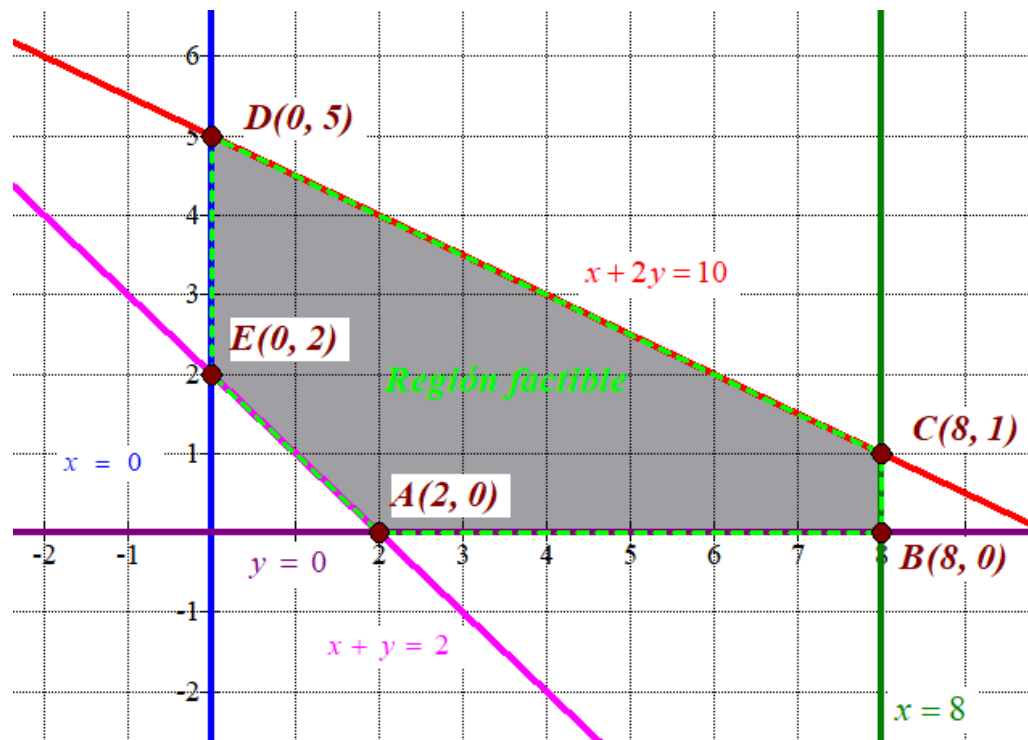
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante que}$$

está a la izquierda de la recta vertical **verde**, por debajo de la recta **roja** y por encima de las rectas **rosa** y **violeta**.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 2 \cdot 2 \leq 10 \\ 2 + 2 \geq 2 \\ 0 \leq 2 \leq 8 \\ 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: $A(2,0)$, $B(8,0)$, $C(8,1)$, $D(0,5)$ y $E(0,2)$

- b) Valoramos la función $f(x,y) = 2x + y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

$$A(2, 0) \rightarrow f(2,0) = 2 \cdot 2 + 0 = 4$$

$$B(8, 0) \rightarrow f(8,0) = 2 \cdot 8 + 0 = 16$$

$$C(8, 1) \rightarrow f(8,1) = 2 \cdot 8 + 1 = 17 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(0, 5) \rightarrow f(0,5) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$E(0, 2) \rightarrow f(0,2) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \text{ ; Mínimo!}$$

El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto $E(0, 2)$.

El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto $C(8, 1)$.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \leq x \leq 5$. Determine:

- ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)
- ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)
- ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

a) Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4 \Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $[1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $[1, 3)$.
- En el intervalo $(3, 5]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $P'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, 5]$.

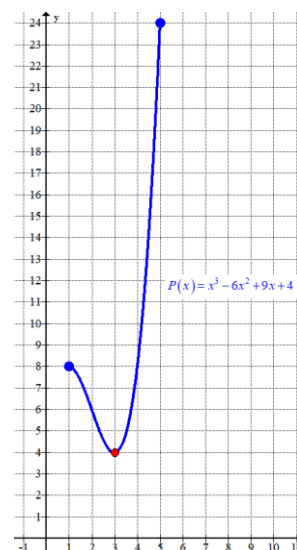
El número de espectadores aumenta de la hora 3 hasta la hora 5.

b) Valoramos el número de espectadores en los extremos del intervalo $[1, 5]$ y en el punto crítico $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 8 \\ P(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 4 \\ P(5) &= 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 24 \end{aligned} \right\}$$

El mayor número de espectadores se produce en la quinta hora con 24000 espectadores.

El menor número de espectadores se produce en la tercera hora con 4000 espectadores.



CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)
- b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$. (1 punto)

- a) Para que sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+b}{x} = a+b \\ f(1) &= \frac{a+b}{1} = a+b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

Para que sea continua en $x = 2$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax+b}{x} = \frac{2a+b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^3+1} = 3 \\ f(2) &= \frac{2a+b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2a+b}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{2a+b=6}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a+b &= 2 \\ 2a+b &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 2-a \\ 2a+b &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a+2-a=6 \Rightarrow \boxed{a=4} \Rightarrow \boxed{b=2-4=-2}$$

La función es continua para $a = 4$ y $b = -2$.

- b) Para $x > 2$ la función es $f(x) = \sqrt{x^3+1}$. Hallamos la expresión de su derivada.

$$f(x) = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, calcule:

- El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0 - 4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow A\left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

Eje Y $\rightarrow x = 0$

$$\left. f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Eje X $\rightarrow y = 0$

El único punto de corte con los ejes es el punto $A\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$.

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(-2)^2 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2^2 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 4) - 2x(1)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -2$, $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{-2(-3)}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{6}{25} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -2)$.

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-2(-1)}{((-1)^2 - 4)^2} = \frac{2}{9} > 0$. La

función crece en $(-2, 0)$.

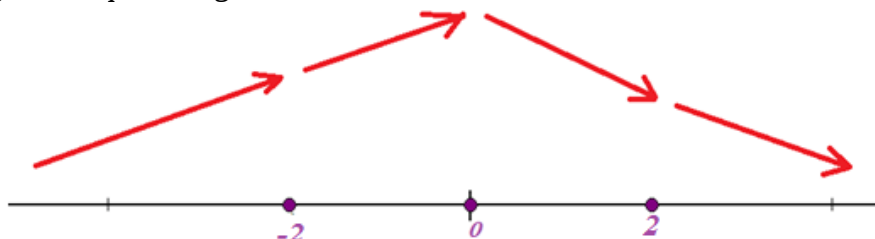
- En el intervalo $(0, 2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2(1)}{(1^2 - 4)^2} = \frac{-2}{9} < 0$. La función

decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-2(3)}{(3^2 - 4)^2} = \frac{-6}{25} < 0$. La

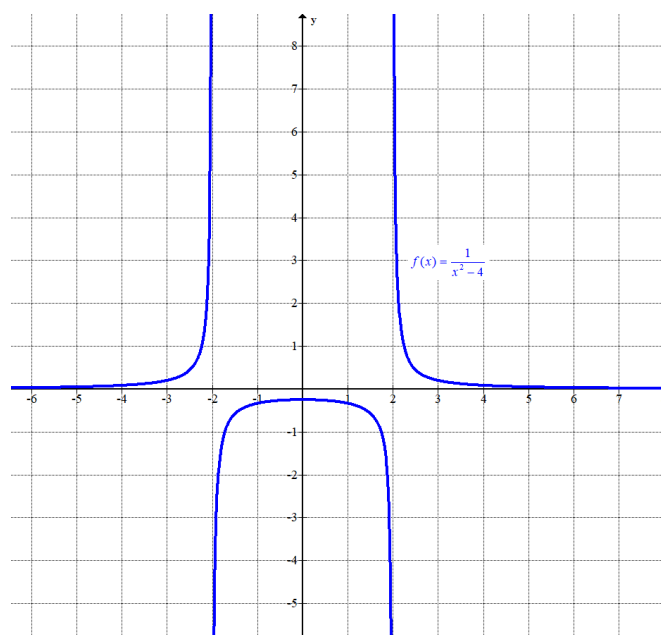
función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

- d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.



CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$:

- a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)
- b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$. (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} \Rightarrow f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 2} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 2) - 2x(2x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4 - 4x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{4 - 2 \cdot 1^2}{(1^2 + 2)^2} = \frac{2}{9}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene la ecuación $y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$.

b) Averiguamos donde corta el eje de abscisas la gráfica de la función.

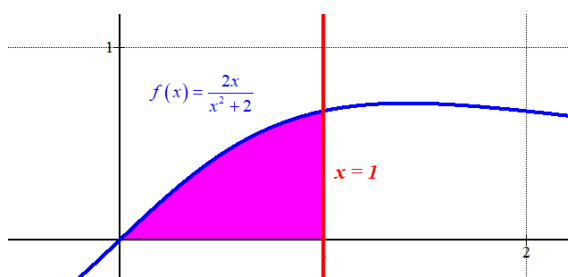
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$.

El área de la región es el valor de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$.

$$\text{Área} = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \left[\ln(x^2 + 2) \right]_0^1 = \ln(1^2 + 2) - \ln(0^2 + 2) = \ln(3) - \ln 2 \approx \boxed{0.405u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

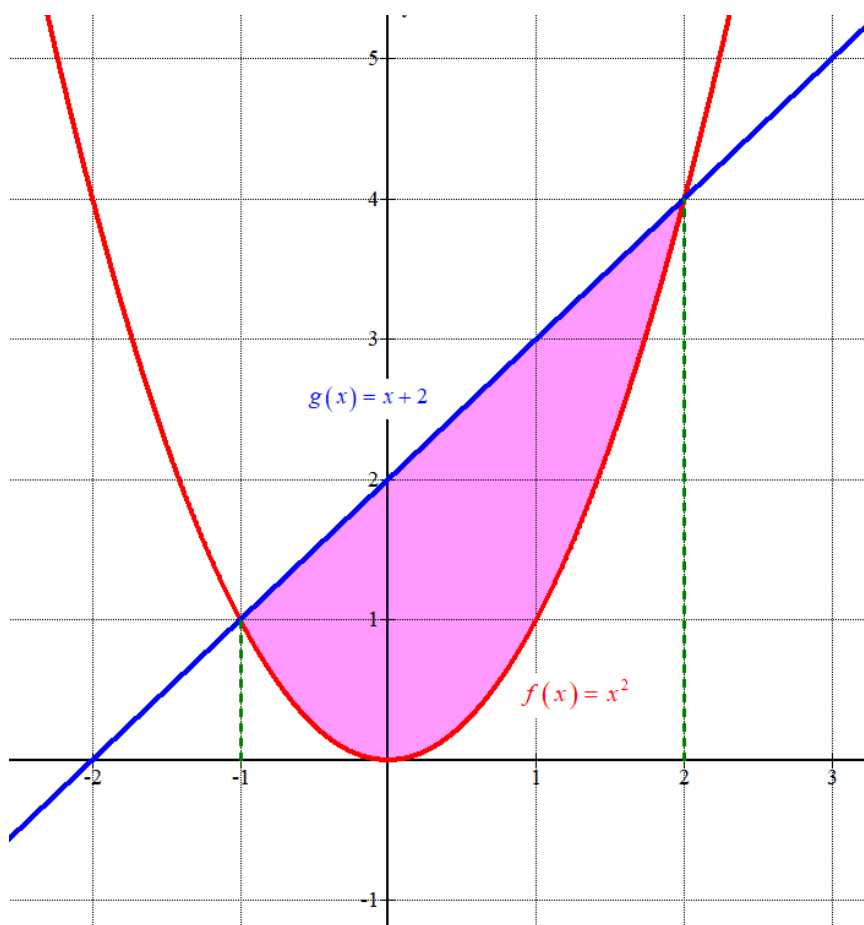
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y = x^2$
-1	1
0	0 Vértice
1	1
2	4

x	$g(x) = x + 2$
-1	1
0	2
1	3
2	4



La función $g(x)$ toma valores superiores a los de $f(x)$ en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el de la integral definida entre $x = -1$ y $x = 2$ de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \\ &= \left[\frac{2^2}{2} + 4 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \boxed{4.5u^2} \end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:

- Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
- Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
- Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

a) Llamamos C al suceso “al socio le gusta jugar a las cartas” y D al suceso “al socio le gusta jugar al domino”.

Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el problema.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\bar{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23		45
No juega a las cartas ($\bar{C}$)			
	40		100

Completamos la tabla.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\bar{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23	22	45
No juega a las cartas ($\bar{C}$)	17	38	55
	40	60	100

- i. Nos piden calcular $P(C \cup D)$. Hay un 23 % de socios que juegan a las cartas y al domino, un 22 % que solo juega a las cartas y un 17 % que solo juega al domino. Utilizamos la regla de Laplace para obtener la probabilidad pedida.

$$P(C \cup D) = \frac{23 + 22 + 17}{100} = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas o al domino es de 0.62.

- ii. Nos piden calcular $P(\bar{C} \cap \bar{D})$. Hay un 38 % de los socios que no juega ni a las cartas ni al domino. La probabilidad de que un socio elegido al azar no juegue a las cartas ni al domino es de 0.38.

- iii. Nos piden calcular $P(C / D)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.23}{0.40} = \boxed{0.575}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino es de 0.575.

- b) Sea X la variable aleatoria que da la altura de los estudiantes de una clase en centímetros. Sabemos que sigue una $N(\mu, 4)$.

La muestra es de tamaño $n = 16$ estudiantes y la media muestral es $\bar{x} = 172$ centímetros.

Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9942	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 2.575$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (172 - 2.575, 172 + 2.575) = (169.425, 174.575)$$

La estatura media de un grupo de 16 estudiantes con un nivel de confianza del 99 % se sitúa entre 169.425 cm y 174.575 cm.