Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2023-2024

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.
La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & si\ x<-1 \\ 4-x & si\ -1\leq x<1 \\ x^2-6x+8 & si\ x\geq 1 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$. (4 puntos)

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x)=x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)
ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)
iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0) = 5*. (3 puntos)

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

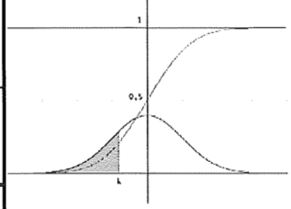
El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

i) Llamamos s al número de sesiones de senderismo, r al de rápel y c a las de ciclismo. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

"Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones" → $s+r+c=45$.
"Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día" → $40s+20r+60c=1700$
"Por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo" →

$$\left.\begin{array}{ccc} \textit{Rápel} & & \textit{Senderismo} \\ r & \longrightarrow & s \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3r=s$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 40s+20r+60c=1700 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\}$$

ii) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3r+r+c=45 \\ 6r+r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4r+c=45 \rightarrow c=45-4r \\ 7r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7r+3(45-4r)=85 \Rightarrow 7r+135-12r=85 \Rightarrow -5r=-50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{-50}{-5}=10} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{s=30} \\ \boxed{c=45-40=5} \end{cases}$$

30 personas hicieron senderismo, 10 hicieron rápel y 5 hicieron ciclismo de montaña.

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.
La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "litros de disolvente diarios procedentes del distribuidor D1", y = "litros diarios procedentes del distribuidor D2".
Hacemos una tabla.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1 (x)	0.8x	0.06x
D2 (y)	y	0.02y
TOTALES	$0.8x+y$	$0.06x+0.02y$

Se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental que viene dado por la expresión:

$$C(x,y)=0.06x+0.02y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente" → $0.8x+y\leq 80$

"El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad" → $y\leq 20;\ x\leq 60$

"La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día" → $x+y\geq 50$.

"La empresa quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2" → $x\geq y+30$.

Además, las cantidades deben ser valores positivos → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0.8x+y\le 80 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+5y\le 400 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$4x+5y=400$

x	$y=\frac{400-4x}{5}$
0	80
50	40
100	0

$y=20$

x	$y=20$
0	20
30	20
70	20

$x=60$

$x=60$	y
60	0
60	10
60	20

$x+y=50$

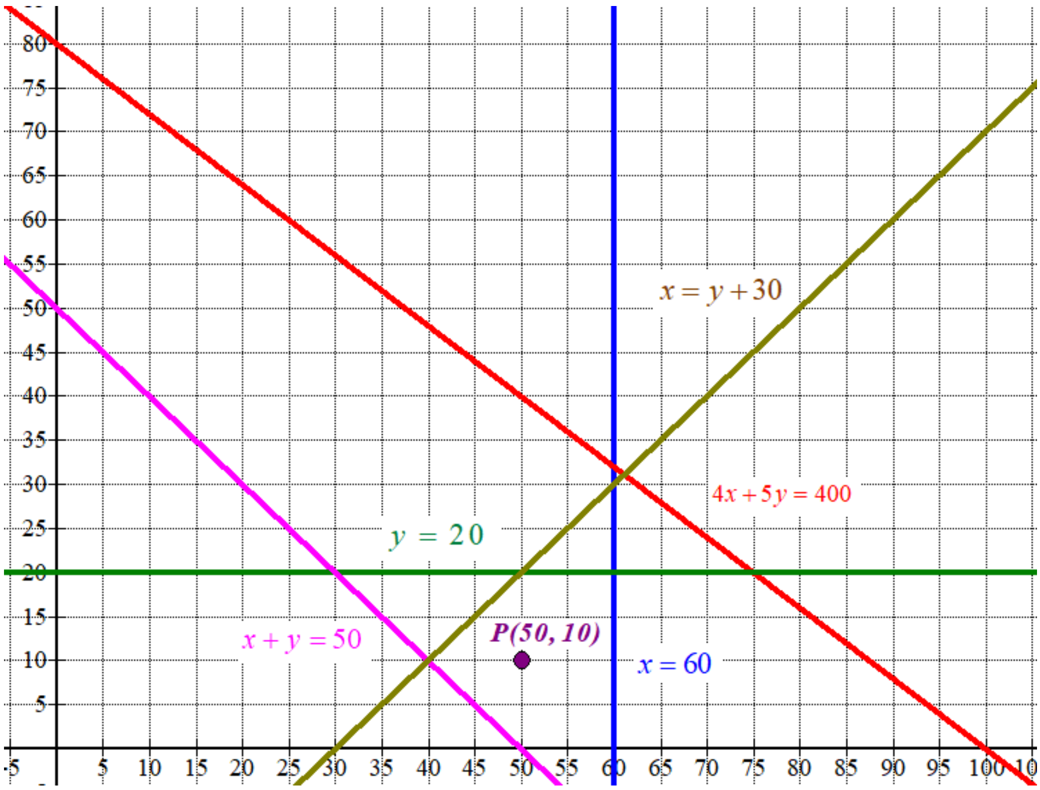
x	$y=50-x$
0	50
30	20
50	0

$x=y+30$

x	$y=x-30$
30	0
50	20
60	30

$x\ge 0;\quad y\ge 0$

Primer cuadrante

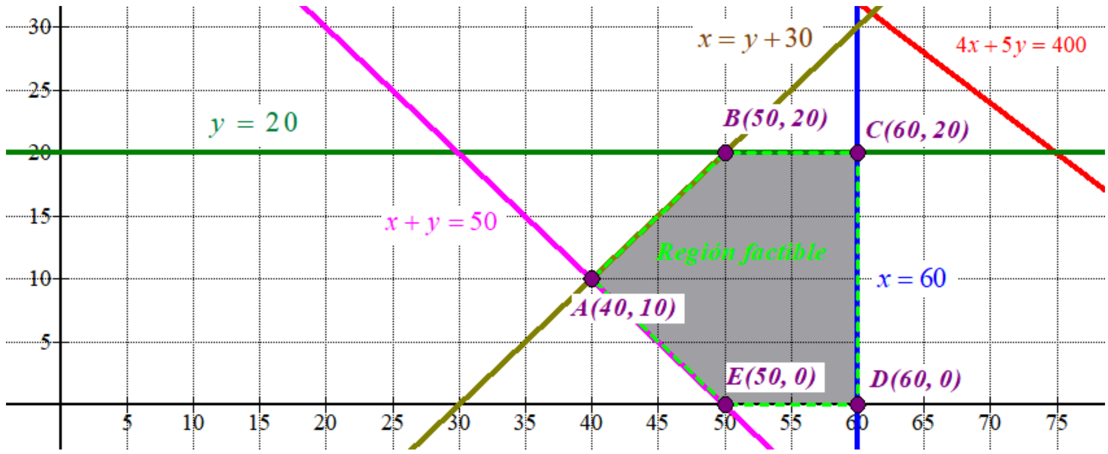


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+5y \leq 400 \\ y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x+y \geq 50 \\ x \geq y+30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, roja y marrón, por encima de la recta rosa y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto P(50,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 50+5\cdot 10 \leq 400 \\ 10 \leq 20 \\ 50 \leq 60 \\ 50+10 \geq 50 \\ 50 \geq 10+30 \\ 50 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos el nivel de contaminación ambiental $C(x,y)=0.06x+0.02y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor mínimo.

A(40,10) → $C(40,10)=0.06\cdot 40+0.02\cdot 10=2.6$ ¡Mínimo!
B(50,20) → $C(50,20)=0.06\cdot 50+0.02\cdot 20=3.4$
C(60,20) → $C(60,20)=0.06\cdot 60+0.02\cdot 20=4$
D(60,0) → $C(60,0)=0.06\cdot 60+0.02\cdot 0=3.6$
E(50,0) → $C(50,0)=0.06\cdot 50+0.02\cdot 0=3$

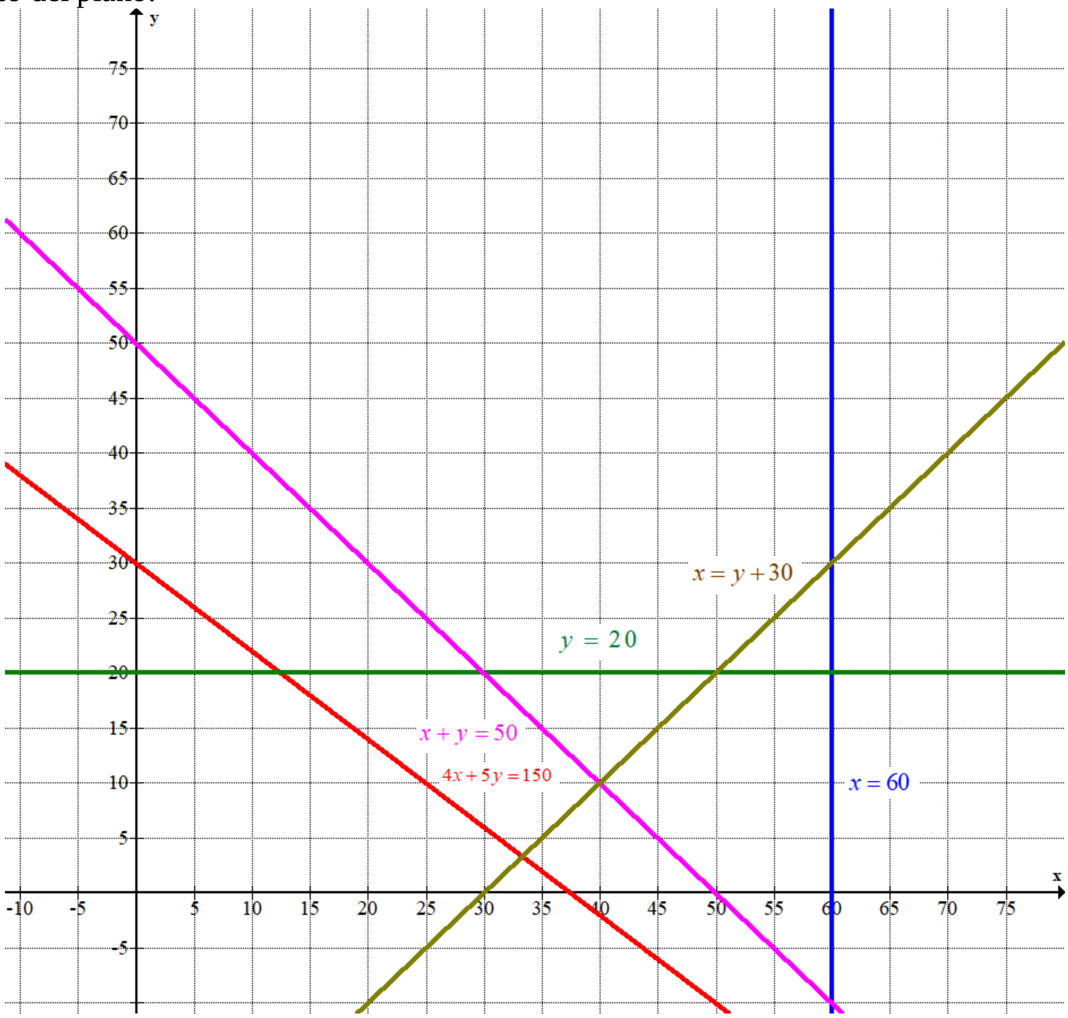
El nivel de contaminación ambiental mínimo es de 2.6 mg/litro y se obtiene en el punto A(40, 10).

Con el envío diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2 la contaminación ambiental es mínima con un valor de 2.6 mg/litro.

iii) En el problema resuelto la condición era: "Si la empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente" y la inecuación asociada era:

$$0.8x+y \leq 80 \Rightarrow 4x+5y \leq 400.$$

Con la nueva condición: "Si la empresa no quiere gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente" la inecuación asociada es $0.8x+y\leq 30 \Rightarrow 4x+5y\leq 150$. La nueva región factible no existe. Es un conjunto de restricciones que no cumple ningún punto del plano.



No existe ningún punto en el primer cuadrante por debajo de la línea roja y por encima de la línea rosa. Son unas condiciones imposibles de cumplir.

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & si\ x<-1 \\ 4-x & si\ -1\le x<1 \\ x^2-6x+8 & si\ x\ge 1 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii)Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$. (4 puntos)

i) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.
¿La función es continua en *x = –1*?

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=4-(-1)=5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -x^2-4x=-(-1)^2-4(-1)=-1+4=3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 4-x=4-(-1)=5 \end{array}\right\}$$

Como $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=5\neq 3=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ la función no es continua en *x = –1*. Esta discontinuidad es inevitable de salto finito.
¿La función es continua en *x = 1*?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-6\cdot 1+8=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 4-x=4-1=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-6x+8=1^2-6\cdot 1+8=3 \end{array}\right\}$$

Como $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ la función es continua en *x = 1*.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$. Presentando una discontinuidad inevitable de salto finito en *x = –1*.

ii) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases} -2x-4 & si\ x<-1 \\ -1 & si\ -1<x<1 \\ 2x-6 & si\ x>1 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en los cambios de definición.
¿La función es derivable en *x = –1*? No es derivable pues no es continua.
¿La función es derivable en *x = 1*?
Investigamos si son iguales las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-6 = 2-6 = -4$$

Como $f'(1^-) = -1 \neq -4 = f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1,-1\}$.

iii) La función en el intervalo (0, 2) se expresa de dos formas distintas. Calculamos la integral definida pedida como la integral definida entre 0 y 1 más la integral definida entre 1 y 2.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 4-xdx + \int_1^2 x^2-6x+8dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_1^2 = \left[4-\frac{1^2}{2}\right] - \left[0-\frac{0^2}{2}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - 12 + 16\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 + 8\right] =$$

$$= 4 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 5 = 3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{26}{9}}$$

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x) = x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)

ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)

iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0)* = 5. (3 puntos)

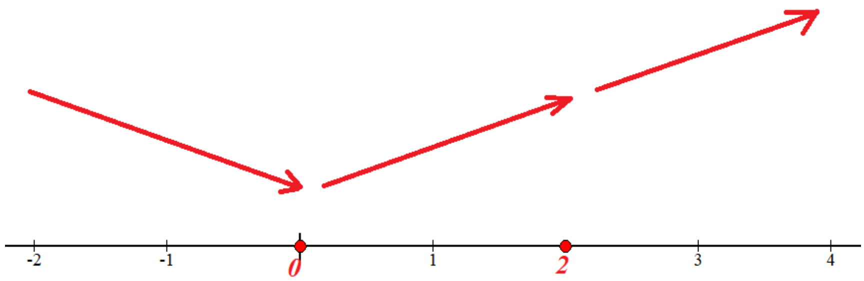
i) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x(x-2)^2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-2=0 \to x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1) = (-1)(-1-2)^2 = -9 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1) = (1)(1-2)^2 = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale $f'(3) = (3)(3-2)^2 = 3 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0*.

ii) Buscamos los valores que anulan la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = x(x-2)^2 = x(x^2+4-4x) = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La función presenta dos posibles puntos de inflexión. Comprobamos si la derivada tercera es no nula para dichos valores.

$$f''(x)=3x^2-8x+4 \Rightarrow f'''(x)=6x-8 \Rightarrow \begin{cases} f'''(2)=6\cdot 2-8=4\neq 0 \\ f'''\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{2}{3}-8=-4\neq 0 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de inflexión: $x=2$ y $x=\frac{2}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ tomo *x = 0* y la derivada segunda vale

  $f''(0)=3\cdot 0^2-8\cdot 0+4=4>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$ tomo *x = 1* y la derivada segunda vale

  $f''(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1+4=-1<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo *x = 3* y la derivada segunda vale

  $f''(3)=3\cdot 3^2-8\cdot 3+4=7>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(2,+\infty)$.

La función es convexa en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

iii) La integral de la derivada *f ´(x)* es la función *f(x)* → $\int f'(x)dx=f(x)$. Lo aplicamos para calcular la función *f(x)*.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^3-4x^2+4xdx=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C$$

Como *f(0) = 5* sustituimos en la función obtenida y determinamos el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C \\ f(0)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5=\frac{0^4}{4}-4\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2+C \Rightarrow \boxed{C=5}$$

La función tiene la expresión $f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+5$.

EJERCICIO 5:
En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.
i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %		40 %
No consulta libros			
	55 %		100 %

Completamos la tabla.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %	25 %	40 %
No consulta libros	40 %	20 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

Respondemos a las preguntas planteadas.

i) Hay un 40 % que solo consulta videos, un 25 % que solo consulta libros y un 15 % que consulta ambos formatos. Hay un 40 + 25 + 15 = 80 % que consulta alguno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos es de 0.8.

ii) Hay un 40 % que solo consulta videos y un 25 % que solo consulta libros. Hay un 40 + 25 = 65 % que consulta solamente uno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte solo uno de los dos formatos es de 0.65.

iii) Hay un 45 % de los universitarios que no consulta videos y un 20 % que no consulta videos ni libros. Aplicando la regla de Laplace tenemos $\frac{20}{45}=\frac{4}{9}\simeq 0.4444$ es la probabilidad de que no consulte libros sabiendo que no consulta videos con tutoriales.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Llamamos L a "el joven consulta libros en la biblioteca" y T a "el joven consulta videos con tutoriales". Sabemos que P(L) = 0.40, P(T) = 0.55 y $P(L\cap T)=0.15$.

i) $P(L\cup T)=P(L)+P(T)-P(L\cap T)=0.40+0.55-0.15=\boxed{0.80}$

ii) $P(\overline{L}\cap T)+P(L\cap\overline{T})=P(T)-P(L\cap T)+P(L)-P(L\cap T)=0.55-0.15+0.4-0.15=\boxed{0.65}$

iii) $P(\overline{L}/\overline{T})=\frac{P(\overline{L}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(\overline{L\cup T})}{1-P(T)}=\frac{1-P(L\cup T)}{1-P(T)}=\frac{1-0.8}{1-0.55}=\boxed{\frac{4}{9}\simeq 0.4444}$

EJERCICIO 6:
El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

X = El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios.

Como la varianza es 2500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{2500} = 50$ días.

$X = N(\mu, 50)$

i) El tamaño de la muestra es $n = 10$. Calculamos la media de la muestra obtenida.

$$\bar{x} = \frac{101+200+187+69+237+125+173+235+24+60}{10} = 141.1 \, días$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1-\alpha = 0.92 \to \alpha = 0.08 \to \frac{\alpha}{2} = 0.04 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.96 \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 0.96 \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$$

k	0	1	2	3	4	5
[illegible]	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
[illegible]	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
[illegible]	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004
[illegible]	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
[illegible]	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008
[illegible]	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011
[illegible]	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016
[illegible]	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022
[illegible]	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030
[illegible]	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040
[illegible]	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054
[illegible]	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071
[illegible]	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094
[illegible]	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122
[illegible]	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158
[illegible]	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202
[illegible]	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256
[illegible]	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322
[illegible]	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401
[illegible]	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
[illegible]	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
[illegible]	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
[illegible]	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
[illegible]	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
[illegible]	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
[illegible]	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801

k	0	1	2	3	4	5
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
[illegible]	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \simeq 27.67 \text{ días}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(141.1 - 27.67, 141.1 + 27.67\right) = \left(113.43,\ 168.77\right)$$

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

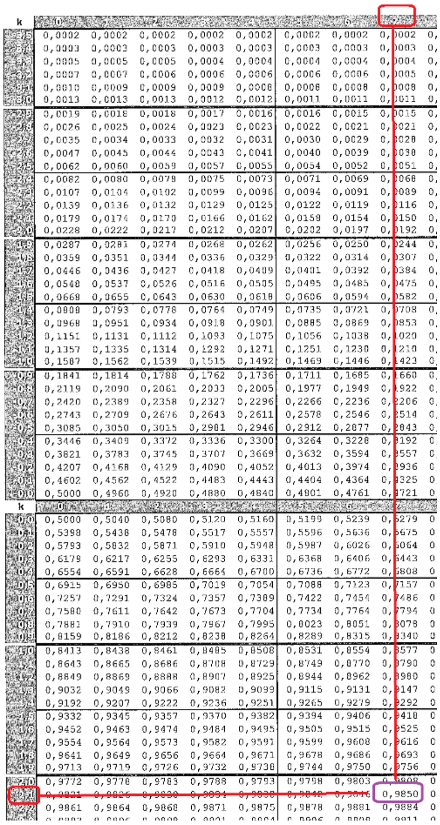
$$Error = \frac{68.62143}{2} = 34.310715 \text{ } días$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “ $z_{\alpha/2}$ ”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 34.310715 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{34.310715 \cdot \sqrt{10}}{50} = 2.17$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 2.17$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < 2.17\right) \end{matrix} \right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$



El nivel de confianza es del 97 %.