

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2013 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\frac{3}{\sqrt{18}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación $-5 \cdot (x+8) \geq \frac{(10+5x)}{3}$.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{(x^3 + 5x^2 + 6x - 1)}{x+1}$.

b) (5 puntos) Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.

b) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x) = \ln(x^3) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}$.

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	39	38.5	38	36.5
Y=Velocidad	100	90	80	65

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

b) (4 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.

b) (5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto $x = 4$, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2013

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\frac{3}{\sqrt{18}}$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} &= \frac{5 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3})}{(\sqrt{8}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3})} = \frac{5 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3})}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3})}{8-3} = \frac{5 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3})}{5} = \\ &= \sqrt{8} + \sqrt{3} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3 \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = \frac{3 \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{18^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2}}{18} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación**

$$-5 \cdot (x+8) \geq \frac{(10+5x)}{3}.$$

$$-5 \cdot (x+8) \geq \frac{(10+5x)}{3} \rightarrow -15 \cdot (x+8) \geq (10+5x) \rightarrow -15x-120 \geq 10+5x \rightarrow$$

$$\rightarrow -15x-5x \geq 10+120 \rightarrow -20x \geq 130 \rightarrow \frac{-20x}{-20} \leq \frac{130}{-20} \rightarrow x \leq -\frac{13}{2}$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es el constituido por todos los números reales menores o iguales que -6.5 lo que también se puede expresar así

$$(-\infty, -6.5]$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x) = \frac{(x^3 + 5x^2 + 6x - 1)}{x + 1}$.

Aplicando la regla de derivación de un cociente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 10x + 6) \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x^3 + 5x^2 + 6x - 1)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^3 + 10x^2 + 6x + 3x^2 + 10x + 6 - x^3 - 5x^2 - 6x + 1}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 8x^2 + 10x + 7}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

b) (5 puntos) **Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.**

Utilizando la fórmula del interés compuesto $C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido, en años,

$$8000 = C_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^8 \rightarrow C_0 = \frac{8000}{(1.03)^8} \cong \frac{8000}{1.26677} \cong 6315.27 \text{ euros.}$$

El interés obtenido al finalizar el primer año se puede obtener considerando interés simple,

$$i = \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow i = \frac{6315.27 \cdot 3 \cdot 1}{100} \cong 189.46$$

Por tanto al final del 1º año el capital obtenido sería $6315.27 + 189.46 = 6504.73$.
Procediendo de forma similar para el 2º año se obtendría el siguiente interés

$$i = \frac{6504.73 \cdot 3 \cdot 1}{100} \cong 195.14$$

En conclusión, interés producido al finalizar el 1º año: 189.46, interés producido durante el 2º año 195.14, interés total producido en los dos primeros años $189.46 + 195.14 = 384.60$.

El capital obtenido al finalizar los dos primeros años sería $6315.27 + 384.60 = 6699.87$, cantidad que podría haberse obtenido utilizando interés compuesto a dos años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.**

En una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Entonces,

$$a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d \rightarrow 128 = 100 + 7 \cdot d \rightarrow 128 - 100 = 7 \cdot d \rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$

Calculando $a_{30} = 100 + 29 \cdot 4 = 216$ y sustituyendo en la expresión anterior de la suma

$$S_{30} = \frac{(100 + 216) \cdot 30}{2} = 4740.$$

b) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x) = \ln(x^3) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}$.

Se trata de derivar una suma en la que el 1º sumando es una función logaritmo neperiano y el 2º una raíz cuadrada,

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}} = \frac{3}{x} + \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}}.$$

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	39	38.5	38	36.5
Y=Velocidad	100	90	80	65

a) (6 puntos) **Obtenga la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?**

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}), \text{ ó también } y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x})$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$,

$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ es la varianza de la variable X ,

s_x , desviación típica de la variable X , es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2 , y, por

último, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ es la media aritmética de la variable X .

En la tabla siguiente se disponen los cálculos previos necesarios para la determinación de los parámetros anteriores:

X	Y	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
39	100	1521	10000	3900
38.5	90	1482.25	8100	3465
38	80	1444	6400	3040
36.5	65	1332.25	4225	2372.5
152	335	5779.25	28725	12777.5

$$\bar{x} = \frac{152}{4} = 38; \quad \bar{y} = \frac{335}{4} = 83.75; \quad s_x^2 = \frac{5779.25}{4} - 38^2 = 1444.875 - 1444 = 0.875$$

$$s_x = \sqrt{0.875} \cong 0.935; \quad s_y^2 = \frac{28725}{4} - 83.75^2 = 7181.25 - 7014.0625 \cong 167.19;$$

$$s_y = \sqrt{167.19} \cong 12.93; \quad s_{xy} = \frac{12777.5}{4} - 38 \cdot 83.75 = 3194.375 - 3182.5 = 11.875$$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es

$$y - 83.75 = \frac{11.875}{0.875} (x - 38)$$

o en forma explícita $y = 13.57x - 431.91$.

La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (velocidad) para valores de la variable X (memoria).

En concreto, para una memoria de 37.5 la velocidad estimada según el modelo anterior sería

$$y = 508.875 - 431.91 = 76.965$$

b) (4 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{11.875}{0.935 \cdot 12.93} = \frac{11.875}{12.08955} \cong 0.9822$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de r va desde -1 a $+1$).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de r y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más memoria más velocidad) muy intensa.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.**

Teniendo en cuenta que hay 10 piezas y, de ellas 3 son tuercas, la probabilidad de que la primera pieza extraída sea una tuerca es el cociente $\frac{3}{10} = 0.3$.

Se pueden formar $C_{10,2} = 45$ parejas posibles con las 10 piezas, extrayendo una y después otra y observando la composición de la pareja obtenida. De esas 45 parejas, $C_{3,2} = 3$ estarían constituidas por 2 tuercas; en consecuencia, la probabilidad de que las dos piezas extraídas sean tuercas es el cociente $\frac{3}{45} = \frac{1}{15} \cong 0.067$

b) (5 puntos) **Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto $x = 4$, de la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 4$ debe cumplirse que

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$$

$$f(4) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = -16 + 36 - 20 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = (4)^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = 0$$

Por tanto la función dada es continua en $x = 4$.

La función derivada de la función dada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ debe cumplirse que

$$f'(4^-) = f'(4^+).$$

En caso de cumplirse la igualdad, éste sería el valor de $f'(4)$.

$$f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$f'(4^+) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = -2 \cdot 4 + 9 = 1$$

En conclusión, existen derivadas laterales en $x = 4$ pero como son distintas la función no es derivable en $x = 4$.

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

Sea X la variable aleatoria “duración de una pila”.

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(100,10)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 100 y desviación típica 10, la variable $Z = \frac{X-100}{10}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La probabilidad de que una pila, elegida al azar, de entre las de ese modelo tenga una duración inferior a 120 horas se puede expresar así:

$$P(X < 120) = P\left(\frac{X-100}{10} > \frac{120-100}{10}\right) = P(Z < 2) = 0.9772.$$

En consecuencia, según este modelo, el 97.72% de las pilas tendría una duración inferior a 120 horas.

b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$\begin{aligned} P(90 \leq X \leq 110) &= P\left(\frac{90-100}{10} \leq \frac{X-100}{10} \leq \frac{110-100}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826. \end{aligned}$$