

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2011 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\frac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\frac{2}{\sqrt{27}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación

$$3(x-2) \leq \frac{4-2x}{3}.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule las derivadas de las funciones

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{3x} \quad \text{y} \quad g(x) = (x^2 - x)(x^3 + 2x).$$

b) (5 puntos) Halle el valor de la constante a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6 & \text{si } x < 3 \\ \frac{12}{x} - a & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en $x=3$ para ese valor de a .

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

b) (5 puntos) Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.

b) (6 puntos) Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) (3 puntos) Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

c) (4 puntos) Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2011

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\frac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\frac{2}{\sqrt{27}}$.

$$\frac{3}{4\sqrt{3}-3} = \frac{3 \cdot (4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3}-3) \cdot (4\sqrt{3}+3)} = \frac{12\sqrt{3}+9}{(4\sqrt{3})^2-3^2} = \frac{12\sqrt{3}+9}{16 \cdot 3-9} = \frac{12\sqrt{3}+9}{39} = \frac{4\sqrt{3}+3}{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{27^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{27} = \frac{2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3}}{27} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación** $3(x-2) \leq \frac{4-2x}{3}$.

$$3(x-2) \cdot 3 \leq \frac{4-2x}{3} \cdot 3 \rightarrow 9(x-2) \leq 4-2x \rightarrow 9x-18 \leq 4-2x \rightarrow 9x+2x \leq 18+4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x \leq 22 \rightarrow \frac{11x}{11} \leq \frac{22}{11} \rightarrow x \leq 2.$$

Se puede expresar el conjunto solución, de forma equivalente, así $(-\infty, 2]$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las funciones**

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{3x} \quad \text{y} \quad g(x) = (x^2-x)(x^3+2x)$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (2-x) \cdot (-1) \cdot 3x - 3 \cdot (2-x)^2}{(3x)^2} = \frac{(4-2x) \cdot (-3x) - 3 \cdot (4-4x+x^2)}{9x^2} =$$

$$= \frac{-12x+6x^2-12+12x-3x^2}{9x^2} = \frac{3x^2-12}{9x^2} = \frac{3 \cdot (x^2-4)}{3 \cdot 3x^2} = \frac{x^2-4}{3x^2}.$$

$$g'(x) = (2x-1) \cdot (x^3+2x) + (x^2-x) \cdot (3x^2+2) =$$

$$= 2x^4 + 4x^2 - x^3 - 2x + 3x^4 + 2x^2 - 3x^3 - 2x =$$

$$= 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x.$$

b) (5 puntos) **Halle el valor de la constante a para que la función**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6 & \text{si } x < 3 \\ \frac{12}{x} - a & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en $x=3$ para ese valor de a .

Para que sea continua la función en $x = 3$ debe cumplirse $9a - 6 = 4 - a \rightarrow a = 1$.

Para que sea derivable debe cumplirse $2 \cdot 3$ sea igual a $-\frac{12}{9}$, lo que, evidentemente, no es cierto, por lo que la función no es derivable en $x = 3$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.**

Notemos por a_1, a_4, S_{25} , el primer término, cuarto término y la suma de los 25 primeros términos, respectivamente, de esa progresión aritmética y sea d la diferencia o razón de la progresión.

En una progresión aritmética se verifican las siguientes relaciones:

$$a_4 = a_1 + (4-1) \cdot d \qquad S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2}$$

Sustituyendo los datos conocidos en la 1ª igualdad:

$$39 = 30 + 3d \rightarrow 39 - 30 = 3d \rightarrow d = \frac{9}{3} = 3$$

Calculemos a_{25} , término necesario para calcular la suma de los 25 primeros términos:

$$a_{25} = a_1 + (25-1)d = 30 + 24 \cdot 3 = 30 + 72 = 102$$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(30 + 102) \cdot 25}{2} = \frac{132 \cdot 25}{2} = 1650$$

b) (5 puntos) **Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.**

$$C_F = C_I \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = C_I \left(1 + \frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22$$

$$C_I \left(1 + \frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22 \rightarrow C_I (1.04)^4 = 6424.22$$

$$1.1698 \cdot C_I = 6424.22 \rightarrow C_I = \frac{6424.22}{1.1698} \cong 5491.72$$

Los intereses producidos son la diferencia entre el capital final obtenido, 6424.22 euros, y el capital inicial desembolsado, 5491.72, es decir: $6424.22 - 5491.72 = 932.5$ euros.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) **Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.**

Del enunciado se desprende que la variable estadística, X , que se estudia es “número de errores por página”. Esta variable toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 puesto que hay páginas en las que hay 0 errores, páginas en las que hay 1 error, así sucesivamente hasta páginas con 5 errores.

El número de páginas que hay con 0 errores, que es 58, es la frecuencia absoluta del valor 0; la frecuencia absoluta del valor 1 es 22 y así sucesivamente.

En consecuencia la tabla estadística correspondiente sería

Nº de errores: X	Nº páginas: frecuencia absoluta, n_i	Frecuencia Relativa f_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	58	$\frac{58}{100} = 0.58$	0	0
1	22	$\frac{22}{100} = 0.22$	22	22
2	9	$\frac{9}{100} = 0.09$	18	36
3	6	$\frac{6}{100} = 0.06$	18	54
4	3	$\frac{3}{100} = 0.03$	12	48
5	2	$\frac{2}{100} = 0.02$	10	50
Sumas →	100	1	80	210

b) (6 puntos) **Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.**

Las dos últimas columnas de la tabla anterior disponen los cálculos previos para determinar la media aritmética, $\bar{x}$, la varianza, s^2 , y la desviación típica, s .

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{210}{100} - 0.8^2 = 2.1 - 0.64 = 1.46$$

$$s = \sqrt{1.46} \cong 1.21.$$

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) **Describe el espacio muestral de este experimento aleatorio.**

Teniendo en cuenta que el espacio muestral consta de los resultados posibles del experimento aleatorio y denotando por “r” extraer bola roja, “b” blanca y “n” negra y teniendo en cuenta que cada resultado sería una pareja de bolas en un determinado orden, tendríamos como espacio muestral:

$$r r, r b, r n, b r, b b, b n, n r, n b$$

b) (3 puntos) **Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**

Puesto que hay 2 bolas rojas en un total de 6, si extraemos una bola, la probabilidad de que esta sea roja es $\frac{2}{6} \cong 0.33$.

c) (4 puntos) **Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

Es la suma de la probabilidad de extraer r r con la probabilidad de extraer b b, es decir:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \cong 0.27$$

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) **¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?**

Sea X la variable aleatoria “peso de las manzanas producidas en la huerta”. Si X sigue una ley Normal de media 150 y desviación típica 20, la variable $\frac{X-150}{20}=Z$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1.

Teniendo en cuenta lo anterior, la probabilidad de que esa variable X tome valores inferiores a 115 viene dada por

$$P(X < 115) = P\left(\frac{X-150}{20} < \frac{115-150}{20}\right) = P(Z < -1.75) = P(Z > +1.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401 \cong 4.01\%.$$

b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.**

$$P(165 < X < 220) = P\left(\frac{165-150}{20} < \frac{X-150}{20} < \frac{220-150}{20}\right) =$$

$$= P(0.75 < Z < 3.5) = P(Z < 3.5) - P(Z < 0.75) = 0.99977 - 0.7734 = 0.22637.$$