

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. L'empresa d'esports aquàtics DiverAqua ofereix tres tipus d'activitats: esquí aquàtic, caiac i moto aquàtica. El preu per sessió i client de cadascuna d'aquestes activitats és de 40 € per l'esquí aquàtic, 20 € pel caiac i 60 € per la moto aquàtica. Sabem que avui DiverAqua ha venut 45 sessions en total. També sabem que el nombre de clients que han escollit esquí aquàtic és el triple dels que han escollit una sessió de caiac. La recaptació total del dia ha estat de 1.700 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que reculli tota aquesta informació.

[1 punt]

- b)** Quantes persones han dut a terme cadascuna de les tres activitats?
[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

2. Un fabricant de vehicles elèctrics ha tret al mercat un model nou amb tant d'èxit que ven tots els que fabrica. El preu de venda de cada cotxe és de 35.000 €. Fabricar un cert nombre de cotxes li suposa unes despeses de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en què x representa el nombre de vehicles fabricats.
- a)** Entre quins valors ha de mantenir la producció per tal de no tenir pèrdues?
- [1,25 punts]

- b)** Quants vehicles ha de fabricar per tal d'obtenir el màxim benefici? Quin valor pren aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

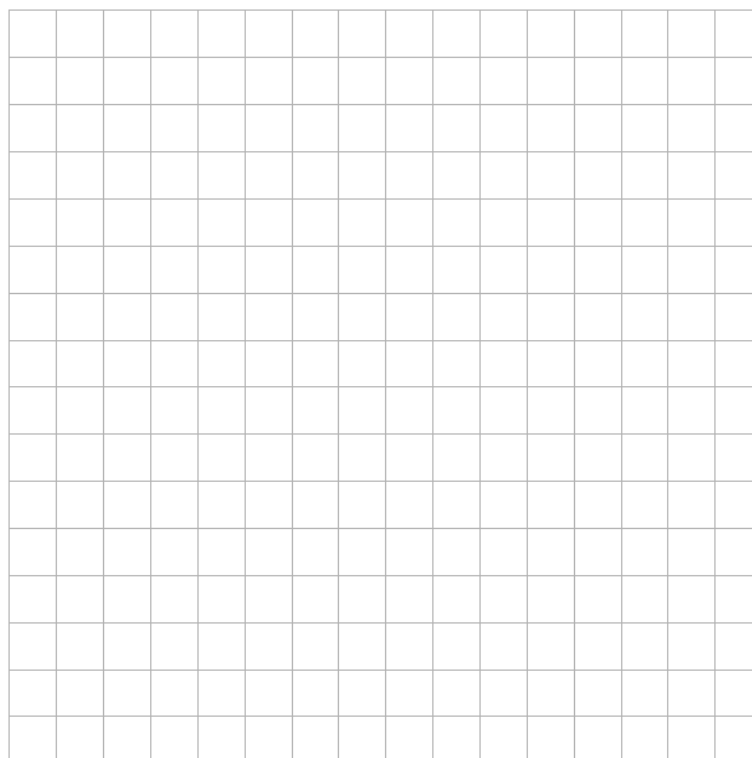
Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Una cooperativa de pagesos ven taronges i mandarines en dos tipus de caixes. La caixa *A* conté 8 kg de taronges i 2 kg de mandarines, i la caixa *B* conté 5 kg de taronges i 5 kg de mandarines. Enguany la producció de taronges ha estat de 24.000 kg i la de mandarines, de 12.000 kg. El preu de venda de les taronges és de 0,60 €/kg i el de les mandarines, de 0,70 €/kg.

Els pagesos de la cooperativa volen saber quantes caixes de cada tipus han de vendre per a maximitzar els ingressos.

- a)** Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]



- b)** Determineu quantes caixes de cada tipus cal vendre per a obtenir el màxim d'ingressos i quins serien aquests ingressos.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

4. El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, \quad t \geq 0$$

en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

- a)** Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants a la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?

[1 punt]

- b)** En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats per aquesta malaltia? Quin és aquest nombre?
[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Si anomenem I la matriu identitat d'ordre 2, trobeu el valor de a per al qual $A^2 = I$.
[1 punt]

- b)** Per a $a = -1$, calculeu A^2 , A^3 i A^4 . Feu servir els càlculs anteriors per a deduir el valor de A^{-1} i de A^{23} .

[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Una botiga ven un tipus determinat d'ampolla d'aigua a 70 cèntims. Aquesta setmana fa una oferta de 4×3 , és a dir, que si comprem quatre ampolles d'aigua només en paguem tres. La botiga també ha anunciat que la propera setmana l'oferta de 4×3 ja no serà vigent, però, en canvi, aplicarà un 20 % de descompte sobre el total de la compra que facin els clients.

a) Calculeu el preu que haurem de pagar per 4 ampolles d'aigua tant aquesta setmana com la propera. En lloc d'un 20 %, quin descompte caldria aplicar per a igualar l'oferta de 4×3 ?

[1,5 punts]

- b)** Calculeu, en general, quin descompte caldria aplicar per a igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; és a dir, que consisteix a vendre m ampolles d'aigua pel preu de $m - 1$ ampolles, en què m és un enter més gran que 1.

[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut
d'Estudis
Catalans



SÈRIE 2

1.

- a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han practicat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 45 \\40x + 20y + 60z &= 1700 \\x &= 3y\end{aligned}$$

- b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

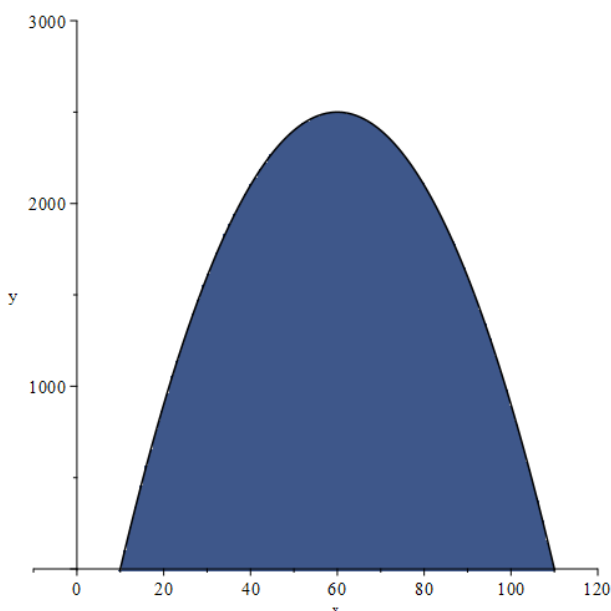
2.

- a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10, 110]$. Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

- b) Per a obtenir el màxim igulem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -2x + 120 \\
 -2x + 120 &= 0 \\
 x &= 60
 \end{aligned}$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	$[0, 60)$	60	$(60, 110]$
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent



Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.



3.

- a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B. El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

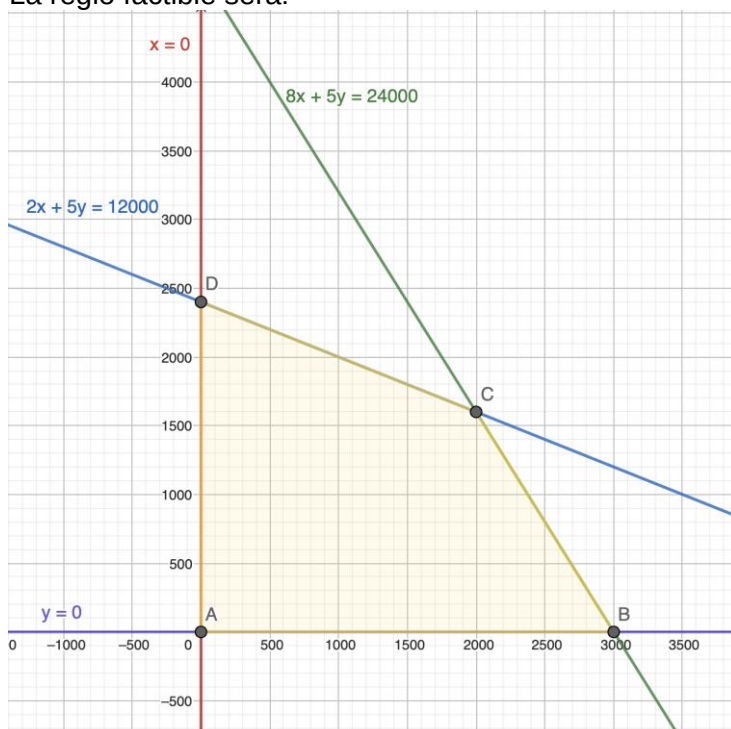
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0,60 + 2 \cdot 0,70 = 6,2$ €, i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0,60 + 5 \cdot 0,70 = 6,5$ €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6,2x + 6,5y$$

La regió factible serà:



- b) Els vèrtexs de la regió factible són: $(0,0)$, $(3000,0)$, $(2000,1600)$ i $(0,2400)$. Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(0,0) = 0$$

$$F(3000,0) = 18600$$

$$F(2000,1600) = 22800$$

$$F(0,2400) = 15600$$



Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.



4.

- a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

- b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.

Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.

Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.



5.

- a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igulem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1+2a=1$ i per tant $a=0$.

- b) Per a $a=-1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.

D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul A^2 : 0,5 punts. Trobar el valor de a : 0,5 punts.

b) Càlcul de A^2, A^3 i A^4 : 0,5 punts en total. Deduir el valor de A^{-1} : 0,5 punts. Deduir el valor de A^{23} : 0,5 punts.



6.

- a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$$0,70 \cdot 3 = 2,10 \text{ euros.}$$

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$$0,70 \cdot 4 = 2,80 \text{ euros}$$

I ara restem al resultat un 20%

$$2,80 \text{ euros} - 0,20 \cdot 2,80 \text{ euros} = 2,24 \text{ euros}$$

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2,80 \text{ euros} - 2,80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2,10 \text{ euros}$$

$$2,80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2,10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

- b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m - 1)$ igulem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0,70 \cdot m - 0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0,70 \cdot (m - 1)$$

$$0,70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0,70 \cdot m - 0,70$$

$$-0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0,70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.



Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4×3 : 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.