# Números racionales

1

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Descompón en factores primos.**

a) 210 b) 270 c) 66 d) 92

a) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

b) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$

c) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

d) $92 = 2^2 \cdot 23$

**2. Descompón estos números en factores primos y calcula su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.**

a) 18 y 20 d) 18 y 32
b) 28 y 42 e) 48 y 32
c) 18 y 4 f) 21 y 28

a) $18 = 2 \cdot 3^2$ y $20 = 2^2 \cdot 5 \rightarrow$ m.c.d. (18, 20) = 2 y m.c.m. (18, 20) = 180

b) $28 = 2^2 \cdot 7$ y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow$ m.c.d. (28, 42) = 14 y m.c.m. (28, 42) = 84

c) $18 = 2 \cdot 3^2$ y $4 = 2^2 \rightarrow$ m.c.d. (18, 4) = 2 y m.c.m. (18, 4) = 36

d) $18 = 2 \cdot 3^2$ y $32 = 2^5 \rightarrow$ m.c.d. (18, 32) = 2 y m.c.m. (18, 32) = 288

e) $48 = 2^4 \cdot 3$ y $32 = 2^5 \rightarrow$ m.c.d. (48, 32) = 16 y m.c.m. (48, 32) = 96

f) $21 = 3 \cdot 7$ y $28 = 2^2 \cdot 7 \rightarrow$ m.c.d. (21, 28) = 7 y m.c.m. (21, 28) = 84

## VIDA COTIDIANA

**Para conseguir un paquete de papel es necesario un tronco de unos 90 cm de alto y 20 cm de diámetro. Si el papel es reciclado, se consume $\frac{3}{5}$ de la energía y $\frac{3}{7}$ del agua necesaria para producir papel nuevo.**

- **Para fabricar una tonelada de papel se requieren 15 m³ de agua dulce y 9 600 kWh de electricidad. ¿Qué cantidad de agua y electricidad se ahorraría si el papel fuese reciclado?**

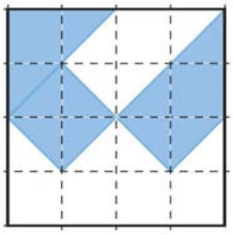
Cantidad de agua necesaria: $\frac{3}{7} \cdot 15 = 6{,}43$ m$^3$

Cantidad de energía necesaria: $\frac{3}{5} \cdot 9\,600 = 5\,760$ kWh

## RESUELVE EL RETO

**¿Qué fracción del cuadrado está coloreada?**

Cuadriculando el dibujo en 16 cuadritos, y contando cuántos de ellos están coloreados, se obtiene que la fracción coloreada es $\frac{7}{16}$ .



**Quitando una sola cifra de cada una de estas fracciones las conviertes en irreducibles.**
**19/95, 26/65, 16/64**

$\frac{19}{95} \to \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} \to \frac{1}{5}$ $\frac{26}{65} \to \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} \to \frac{2}{5}$ $\frac{16}{64} \to \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} \to \frac{1}{4}$

**¿Qué hora del día es si queda del día $\frac{1}{3}$ de las horas que han pasado?**

$x + \frac{1}{3}x = 24 \to \frac{4x}{3} = 24 \to x = 18$

Son las 18:00 h.

**El frutero vendió la mitad de los melones que llevaba más medio melón. Después se comió el melón que le quedó. ¿Cuántos melones tenía?**

$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + 1 \to x = 3$

El frutero tenía 3 melones.

## ACTIVIDADES

**1. Escribe, en cada caso, la fracción que cumple estas características.**

a) El numerador es 3 y el denominador es 4 unidades menor que el numerador.
b) El numerador es −5 y el denominador es 7 unidades mayor que el numerador.

a) $\frac{3}{-1} = -3$ b) $\frac{-5}{2}$

**2. Determina si estas fracciones son equivalentes.**

a) $\frac{8}{7}$ y $\frac{4}{17}$ b) $\frac{-6}{5}$ y $\frac{-18}{15}$

a) $\frac{8}{7}$ y $\frac{4}{17} \rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 17 = 136 \\ 7 \cdot 4 = 28 \end{cases}$ → No son equivalentes.

b) $\frac{-6}{5}$ y $\frac{-18}{15} \rightarrow \begin{cases} -6 \cdot 15 = -90 \\ 5 \cdot (-18) = -90 \end{cases}$ → Son equivalentes.

**3. Indica las fracciones que sean equivalentes.**

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{-5}{15}, \frac{-3}{9}, \frac{6}{15}, \frac{4}{12}, \frac{-24}{-40}$

$\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ y $\frac{-24}{-40}$ $\frac{-5}{15}$ y $\frac{-3}{9}$

**4. Escribe cuatro fracciones equivalentes a estas.**

a) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{-3}$

b) $\frac{-4}{3}$ d) $\frac{-4}{-3}$

a) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{80}{60} = \frac{24}{18}$

b) $\frac{-4}{3} = \frac{-8}{6} = \frac{-12}{9} = \frac{-80}{60} = \frac{-24}{18}$

c) $\frac{4}{-3} = \frac{20}{-15} = \frac{120}{-90} = \frac{400}{-300} = \frac{48}{-36}$

d) $\frac{-4}{-3} = \frac{-60}{-45} = \frac{-1200}{-900} = \frac{-28}{-21} = \frac{-32}{-24}$

**5. Calcula el valor desconocido.**

a) $\frac{18}{11} = \frac{72}{x}$ d) $\frac{8}{x} = \frac{72}{9}$

b) $\frac{7}{15} = \frac{x}{60}$ e) $\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$

c) $\frac{x}{5} = \frac{12}{15}$ f) $\frac{9}{x} = \frac{45}{25}$

a) $x = \frac{11 \cdot 72}{18} = 44$

b) $x = \frac{60 \cdot 7}{15} = 28$

c) $x = \frac{5 \cdot 12}{15} = 4$

d) $x = \frac{8 \cdot 9}{72} = 1$

e) $x = \frac{32 \cdot 2}{16} = 4$

f) $x = \frac{9 \cdot 25}{45} = 5$

**6.** **Da una fracción equivalente a $\frac{8}{16}$ que tenga:**

a) Como denominador 48.

b) Como numerador 32.

c) Como denominador 4.

d) Como numerador 2.

a) $\frac{8}{16}=\frac{24}{48}$ b) $\frac{8}{16}=\frac{32}{64}$ c) $\frac{8}{16}=\frac{2}{4}$ d) $\frac{8}{16}=\frac{2}{4}$

**7.** **Halla el valor desconocido en cada caso y completa en tu cuaderno.**

a) $-2=\frac{\square}{5}$ d) $8=\frac{48}{\square}$

b) $6=\frac{\square}{7}$ e) $-11=\frac{165}{\square}$

c) $-7=\frac{\square}{10}$ f) $-15=\frac{225}{\square}$

a) $-2=\frac{-10}{5}$ c) $-7=\frac{-70}{10}$ e) $-11=\frac{165}{-15}$

b) $6=\frac{42}{7}$ d) $8=\frac{48}{6}$ f) $-15=\frac{225}{-15}$

**8.** **Escribe cinco fracciones equivalentes a 3 y otras cinco equivalentes a −4.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3=\frac{6}{2}=\frac{90}{30}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5}=\frac{45}{15}$ b) $-4=\frac{-8}{2}=\frac{-160}{40}=\frac{-12}{3}=\frac{-20}{5}=\frac{-60}{15}$

**9.** **Halla el valor de *x* e *y*.**

a) $\frac{x}{24}=\frac{5}{6}=\frac{y}{30}$ c) $\frac{x}{4}=\frac{-21}{28}=\frac{6}{y}$

b) $\frac{9}{x}=\frac{-27}{6}=\frac{y}{10}$ d) $\frac{40}{x}=\frac{8}{3}=\frac{32}{y}$

a) $\begin{cases} x=\frac{5\cdot 24}{6}=20 \\ y=\frac{5\cdot 30}{6}=25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=\frac{-21\cdot 4}{28}=-3 \\ y=\frac{28\cdot 6}{-21}=-8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=\frac{9\cdot 6}{-27}=-2 \\ y=\frac{-27\cdot 10}{6}=-45 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\frac{3\cdot 40}{8}=15 \\ y=\frac{3\cdot 32}{8}=12 \end{cases}$

**10.** **Determina los valores desconocidos y completa en tu cuaderno.**

a) $\frac{5}{3}=\frac{15}{\square}=\frac{\square}{24}=\frac{-30}{\square}=\frac{\square}{12}$

b) $\frac{2}{11}=\frac{\square}{121}=\frac{-18}{\square}=\frac{30}{\square}=\frac{\square}{-77}$

c) $\frac{8}{\square}=\frac{\square}{12}=\frac{-4}{3}=\frac{40}{\square}=\frac{\square}{-45}$

d) $\frac{120}{\square}=\frac{-84}{\square}=\frac{\square}{26}=\frac{-6}{13}=\frac{\square}{78}$

a) $\frac{5}{3}=\frac{15}{9}=\frac{40}{24}=\frac{-30}{-18}=\frac{20}{12}$

b) $\frac{2}{11}=\frac{22}{121}=\frac{-18}{-99}=\frac{30}{165}=\frac{-14}{-77}$

c) $\frac{8}{-6}=\frac{-16}{12}=\frac{-4}{3}=\frac{40}{-30}=\frac{60}{-45}$

d) $\frac{120}{-260}=\frac{-84}{182}=\frac{-12}{26}=\frac{-6}{13}=\frac{-36}{78}$

**11.** **Escribe una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ y otra equivalente a $\frac{9}{4}$ tales que tengan el mismo:**

a) Denominador. b) Numerador.

a) $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ ; $\frac{9}{4}=\frac{45}{20}$

b) $\frac{2}{5}=\frac{18}{45}$ ; $\frac{9}{4}=\frac{18}{8}$

**12.** **Obtén dos fracciones equivalentes por amplificación y otras dos por simplificación.**

a) $\frac{42}{54}$ b) $\frac{-3}{7}$ c) $\frac{18}{6}$ d) $\frac{100}{-40}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Amplificación: $\frac{42}{54}=\frac{48}{104}=\frac{210}{270}$ Simplificación: $\frac{42}{54}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$

b) Amplificación: $\frac{-3}{7}=\frac{-45}{105}=\frac{24}{-56}$ Simplificación: No es posible

c) Amplificación: $\frac{18}{6}=\frac{54}{18}=\frac{108}{36}$ Simplificación: $\frac{18}{6}=\frac{9}{3}=3$

d) Amplificación: $\frac{100}{-40}=\frac{200}{-80}=\frac{-300}{120}$ Simplificación: $\frac{100}{-40}=\frac{50}{-20}=\frac{-5}{2}$

**13.** **Comprueba si son irreducibles.**

a) $\frac{34}{93}$ b) $\frac{-132}{48}$ c) $\frac{165}{87}$ d) $\frac{15}{83}$

a) $\frac{34}{93}$ es irreducible porque $34=2\cdot 17$ y $93=3\cdot 31$ no tienen divisores comunes.

b) $\frac{-132}{48}$ es reducible porque $132=2^2\cdot 3\cdot 11$ y $48=2^4\cdot 3$ tienen divisores comunes.

c) $\frac{165}{87}$ es reducible porque $165=3\cdot 5\cdot 11$ y $87=3\cdot 29$ tienen divisores comunes.

d) $\frac{15}{83}$ es irreducible porque $15=3\cdot 5$ y 83 no tienen divisores comunes.

**14. Obtén fracciones equivalentes a estas que tengan un denominador menor.**

a) $\frac{-300}{750}$ b) $\frac{242}{726}$ c) $\frac{32}{80}$

a) $\frac{-300}{750}=\frac{-60}{150}=\frac{-30}{75}=\frac{-10}{25}=\frac{-2}{5}$

b) $\frac{242}{726}=\frac{121}{363}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$

c) $\frac{32}{80}=\frac{16}{40}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

**15. Si en una fracción uno de los términos es un número primo, ¿se puede asegurar que es irreducible?**

No, ya que si el otro término es múltiplo de dicho número primo, se podría simplificar. Por ejemplo:

Si el numerador es primo: $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

Si el denominador es primo: $\frac{165}{11}=15$

**16. Obtén la fracción irreducible de estas fracciones.**

a) $\frac{50}{60}$ d) $\frac{28}{16}$

b) $\frac{-92}{18}$ e) $\frac{-26}{13}$

c) $\frac{-50}{36}$ f) $\frac{14}{98}$

a) $\frac{50}{60}=\frac{50:10}{60:10}=\frac{5}{6}$

d) $\frac{28}{16}=\frac{28:4}{16:4}=\frac{7}{4}$

b) $\frac{-92}{18}=\frac{-92:2}{18:2}=\frac{-46}{9}$

e) $\frac{-26}{13}=-2$

c) $\frac{-50}{36}=\frac{-50:2}{36:2}=\frac{-25}{18}$

f) $\frac{14}{98}=\frac{14:14}{98:14}=\frac{1}{7}$

**17. Indica cuáles de las siguientes fracciones no son irreducibles y, en esos casos, calcula la fracción irreducible.**

a) $\frac{40}{6}$ d) $\frac{7}{2}$

b) $\frac{28}{15}$ e) $\frac{-25}{16}$

c) $\frac{-9}{18}$ f) $\frac{-50}{3}$

a) $\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

d) $\frac{7}{2}$ es irreducible

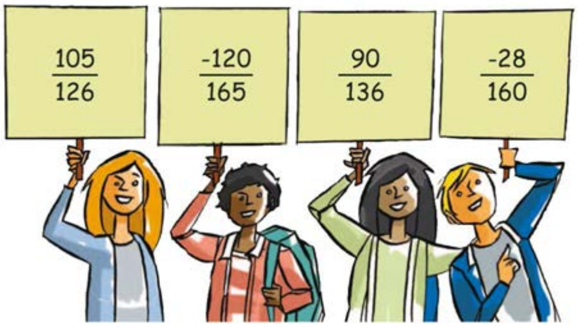
b) $\frac{28}{15}$ es irreducible

e) $\frac{-25}{16}$ es irreducible

c) $\frac{-9}{18}=\frac{-1}{2}$

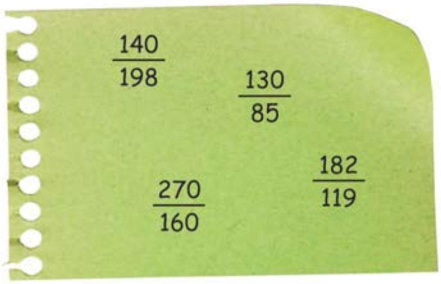
f) $\frac{-50}{3}$ es irreducible

**18.** **Simplifica todo lo que se pueda estas fracciones.**




$\frac{105}{126}=\frac{5}{6}$ $\qquad \frac{-120}{165}=\frac{-8}{11}$ $\qquad \frac{90}{136}=\frac{45}{68}$ $\qquad \frac{-28}{160}=\frac{-7}{40}$

**19.** **¿De cuál de estas fracciones es $\frac{26}{17}$ la fracción irreducible?**




De $\frac{130}{85}$ y de $\frac{182}{119}$

**20.** **Encuentra tres fracciones cuya fracción irreducible sea cada una de las siguientes.**

a) $\frac{2}{9}$ $\qquad$ d) $\frac{-9}{4}$

b) $\frac{-3}{8}$ $\qquad$ e) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{7}{6}$ $\qquad$ f) $\frac{-2}{3}$

Respuesta abierta:

a) $\frac{2}{9}=\frac{4}{18}=\frac{8}{36}=\frac{40}{180}$

b) $\frac{-3}{8}=\frac{-9}{24}=\frac{-12}{32}=\frac{-15}{40}$

c) $\frac{7}{6}=\frac{14}{12}=\frac{28}{24}=\frac{70}{60}$

d) $\frac{-9}{4}=\frac{-90}{40}=\frac{-18}{8}=\frac{-45}{20}$

e) $\frac{8}{5}=\frac{16}{10}=\frac{80}{50}=\frac{56}{35}$

f) $\frac{-2}{3}=\frac{-8}{12}=\frac{-30}{45}=\frac{-200}{300}$

**21.** **Agrupa las fracciones que tengan la misma fracción irreducible.**

a) $\frac{50}{75}$ $\frac{12}{18}$ $\frac{15}{10}$ $\frac{18}{27}$ $\frac{36}{24}$ $\frac{90}{60}$ $\frac{30}{20}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{45}{30}$

b) $-\frac{42}{24}$ $-\frac{56}{40}$ $-\frac{28}{20}$ $-\frac{45}{36}$ $-\frac{21}{12}$ $-\frac{20}{16}$ $-\frac{15}{12}$ $-\frac{21}{15}$ $-\frac{10}{8}$

a) $\frac{50}{75}$ y $\frac{10}{15}$ $\qquad \frac{12}{18}$ y $\frac{18}{27}$ $\qquad \frac{15}{10}, \frac{36}{24}, \frac{30}{20}, \frac{45}{30}$ y $\frac{90}{60}$

b) $-\frac{42}{24}$ y $-\frac{21}{12}$ $\qquad \frac{-56}{40}, \frac{-28}{20}$ y $\frac{-21}{15}$ $\qquad \frac{-45}{36}, \frac{-20}{16}, \frac{-15}{12}$ y $\frac{-10}{8}$

**22.** **Reduce a común denominador estas fracciones y ordena de menor a mayor.**

a) $\frac{2}{5}, \frac{5}{4}$ y $\frac{3}{8}$ $\qquad$ d) $\frac{4}{15}, \frac{6}{8}$ y $\frac{3}{16}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}$ y $\frac{6}{4}$ $\qquad$ e) $\frac{4}{9}, \frac{1}{27}$ y $\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{7}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{5}$ $\qquad$ f) $\frac{3}{14}, \frac{12}{21}$ y $\frac{1}{7}$

a) $\frac{3}{8}=\frac{15}{40}<\frac{2}{5}=\frac{16}{40}<\frac{5}{4}=\frac{50}{40}$ $\qquad$ d) $\frac{3}{16}=\frac{45}{240}<\frac{4}{15}=\frac{64}{240}<\frac{6}{8}=\frac{180}{240}$

b) $\frac{2}{9}=\frac{8}{36}<\frac{1}{2}=\frac{18}{36}<\frac{6}{4}=\frac{54}{36}$ $\qquad$ e) $\frac{1}{27}=\frac{2}{54}<\frac{4}{9}=\frac{24}{54}<\frac{5}{6}=\frac{45}{54}$

c) $\frac{1}{6}=\frac{35}{210}<\frac{2}{7}=\frac{60}{210}<\frac{3}{5}=\frac{126}{210}$ $\qquad$ f) $\frac{1}{7}=\frac{6}{42}<\frac{3}{14}=\frac{9}{42}<\frac{12}{21}=\frac{24}{42}$

**23.** **Ordena de menor a mayor.**

$\frac{4}{5}$ $\frac{-10}{4}$ $\frac{-21}{6}$ $\frac{-15}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{9}$

$\frac{-21}{6}<\frac{-10}{4}<\frac{-15}{9}<\frac{1}{3}<\frac{7}{9}<\frac{4}{5}$

**24.** **Encuentra un valor de *a* que cumpla estas condiciones.**

a) $\frac{6}{5}<\frac{a}{5}<\frac{8}{5}$ $\qquad$ b) $\frac{a}{2}>-\frac{1}{2}$

a) $a = 7$ $\qquad$ b) $a = 1$, por ejemplo.

**25.** **Realiza estas sumas y restas.**

a) $\frac{5}{3}+\frac{4}{18}+\frac{6}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{18}{5}+\frac{7}{5}+\frac{8}{5}$ $\qquad$ c) $\frac{-3}{10}-\frac{9}{10}-\frac{7}{10}$ $\qquad$ d) $\frac{23}{6}-\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$

a) $\frac{35}{9}$ $\qquad$ b) $\frac{33}{5}$ $\qquad$ c) $\frac{-19}{10}$ $\qquad$ d) $\frac{11}{6}$

**26.** **Halla el resultado de estas operaciones.**

a) $\frac{5}{9}+\frac{3}{10}-3$ b) $\frac{-18}{25}-\frac{1}{5}+2$ c) $\frac{25}{6}-\frac{11}{8}+\frac{1}{3}$ d) $-5-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}$

a) $\frac{-193}{90}$ b) $\frac{27}{25}$ c) $\frac{25}{8}$ d) $\frac{-181}{36}$

**27.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $\frac{7}{\square}=1+\frac{3}{4}$ d) $\frac{\square}{3}=3+\frac{1}{3}$

b) $\frac{16}{9}=\square+\frac{1}{6}$ e) $\frac{25}{7}=3+\frac{\square}{7}$

c) $\frac{14}{5}=2+\square$ f) $\frac{25}{8}=3+\frac{1}{\square}$

a) $\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$ d) $\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$

b) $\frac{16}{9}=\frac{29}{18}+\frac{1}{6}$ e) $\frac{25}{7}=3+\frac{4}{7}$

c) $\frac{14}{5}=2+\frac{4}{5}$ f) $\frac{25}{8}=3+\frac{1}{8}$

**28.** **Encuentra el error y corrígelo.**

a) $\frac{28}{6}=4+\frac{1}{6}$ b) $\frac{36}{8}=4+\frac{3}{4}$

a) $4+\frac{1}{6}=\frac{25}{6}$ b) $4+\frac{3}{4}=\frac{19}{4}=\frac{38}{8}$

**29.** **Efectúa estas operaciones.**

a) $\frac{-4}{5}\cdot\frac{20}{8}$ e) $\frac{8}{12}\cdot\left(-\frac{20}{38}\right)$

b) $\frac{9}{10}:\frac{8}{14}$ f) $\frac{6}{17}:\left(-\frac{6}{27}\right)$

c) $\frac{-32}{9}\cdot\frac{18}{16}$ g) $\left(-\frac{4}{80}\right):\left(-\frac{8}{46}\right)$

d) $\frac{15}{6}:\frac{2}{4}$ h) $\left(-\frac{7}{22}\right)\cdot\left(-\frac{33}{42}\right)$

a) $\frac{-80}{40}=-2$ e) $\frac{-160}{456}=\frac{-20}{57}$

b) $\frac{126}{80}=\frac{63}{40}$ f) $\frac{-162}{102}=\frac{-27}{17}$

c) $\frac{-576}{144}=-4$ g) $\frac{184}{640}=\frac{23}{80}$

d) $\frac{60}{12}=5$ h) $\frac{231}{924}=\frac{1}{4}$

**30.** **Calcula y simplifica el resultado.**

a) $\frac{9}{12}\cdot\frac{4}{21}\cdot\frac{7}{33}$

b) $\frac{56}{14}\cdot\frac{70}{24}:\left(-\frac{6}{28}\right)$

c) $(-5)\cdot\frac{26}{38}$

d) $\left(-\frac{2}{90}\right):(-26)$

a) $\frac{1}{33}$

b) $\frac{-490}{9}$

c) $\frac{-65}{19}$

d) $\frac{1}{1170}$

**31.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{\square}{\square}=1$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{\square}{10}\right):\frac{10}{3}=1$

a) $\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{\square}{\square}=1\rightarrow\frac{17}{15}\cdot\frac{\boxed{15}}{\boxed{17}}=1$

b) $\frac{3}{5}-\frac{\square}{10}=\frac{10}{3}\rightarrow\frac{3}{5}-\frac{10}{3}=\frac{\square}{10}\rightarrow-\frac{41}{15}=\frac{\boxed{-82/3}}{10}$

**32.** **Realiza estas operaciones.**

a) $\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$

b) $\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}$

d) $\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{3}:\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$

f) $\frac{5}{3}:\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)$

g) $\frac{2}{7}:\frac{1}{4}-\frac{3}{14}$

h) $\frac{2}{7}:\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{14}\right)$

i) $-\frac{4}{7}+\frac{12}{5}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

j) $-\frac{4}{7}+\left(\frac{12}{5}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

k) $\frac{4}{7}+\left(-\frac{12}{5}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)$

l) $\left(\frac{4}{7}+\left(-\frac{12}{5}\right)\right):\left(-\frac{3}{4}\right)$

m) $\frac{2}{7}:\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{6}{4}\right)$

n) $\frac{2}{7}:\left(\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{6}{4}\right)$

ñ) $\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{8}{5}:\left(-\frac{6}{4}\right)$

o) $\frac{3}{5}-\left(\frac{7}{2}-\frac{8}{5}\right):\left(-\frac{6}{4}\right)$

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{37}{12}$

e) $\frac{91}{6}$

f) 6

g) $\frac{13}{14}$

h) 8

i) $\frac{687}{280}$

j) $-\frac{109}{56}$

k) $\frac{132}{35}$

l) $\frac{256}{105}$

m) $\frac{-61}{14}$

n) $\frac{-45}{196}$

ñ) $\frac{-11}{6}$

o) $\frac{28}{15}$

**33. Calcula el resultado de las operaciones. Observa los diferentes resultados cuando se modifica la posición de los paréntesis.**

a) $2\cdot\frac{9}{5}-\frac{3}{2}:\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{6}\right)$

b) $2\cdot\left(\frac{9}{5}-\frac{3}{2}\right):\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$

c) $2\cdot\frac{9}{5}-\left(\frac{3}{2}:\frac{7}{4}+\frac{5}{6}\right)$

d) $\left(2\cdot\frac{9}{5}-\frac{3}{2}\right):\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$

a) $\frac{468}{155}$ b) $\frac{247}{210}$ c) $\frac{401}{210}$ d) $\frac{61}{30}$

**34. Efectúa estas operaciones.**

a) $\frac{11}{6}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\cdot 6$

b) $\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{5}-2$

c) $\frac{4}{9}:\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)$

d) $\left(2-\frac{1}{2}\right):\left(4+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-6}{5}\right)$

a) $\frac{-2}{3}$ b) $\frac{-31}{35}$ c) $\frac{5}{108}$ d) $\frac{-27}{65}$

**35. Clasifica estos números decimales.**

a) 9,090909...
b) 45,7
c) 2,3333...
d) 0,0025
e) 321,03333...
f) 1,121122111222...
g) 5,24678678...
h) −3,65
i) 1,11223344...
j) 3,2458458...

a) Decimal periódico puro.
b) Decimal exacto.
c) Decimal periódico puro.
d) Decimal exacto.
e) Decimal periódico mixto.
f) Decimal no exacto y no periódico.
g) Decimal periódico mixto.
h) Decimal exacto.
i) Decimal no exacto y no periódico.
j) Decimal periódico mixto.

**36. Indica qué números decimales representan estas fracciones.**

a) $\frac{7}{100}$ b) $\frac{13}{990}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{99}$

a) $\frac{7}{100}=0{,}07\rightarrow$ Decimal exacto.

b) $\frac{13}{990}=0{,}013131313...\rightarrow$ Decimal periódico mixto.

c) $\frac{2}{3}=0{,}6666...\rightarrow$ Decimal periódico puro.

d) $\frac{4}{99}=0{,}04040404...\rightarrow$ Decimal periódico puro.

**37. Escribe un número decimal no exacto y no periódico con las cifras 3, 5 y 8.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

El número 3,58558855588855558888…. es decimal no exacto y no periódico.

**38. Sin realizar la división, clasifica los números decimales que equivalen a estas fracciones.**

$\frac{5}{9}$ $\frac{14}{20}$ $\frac{18}{300}$ $\frac{35}{10}$ $\frac{7}{210}$ $\frac{9}{40}$

$\frac{5}{9}=\frac{5}{3^2}\rightarrow$ Periódico.

$\frac{18}{300}=\frac{3}{50}=\frac{3}{5^2\cdot 2}\rightarrow$ Exacto.

$\frac{7}{210}=\frac{1}{30}=\frac{1}{3\cdot 5\cdot 2}\rightarrow$ Periódico

$\frac{14}{20}=\frac{7}{10}=\frac{7}{2\cdot 5}\rightarrow$ Exacto.

$\frac{35}{10}=\frac{7}{2}\rightarrow$ Exacto.

$\frac{9}{40}=\frac{9}{2^3\cdot 5}\rightarrow$ Exacto.

**39. Determina los números decimales que expresan estas fracciones y di cuántas cifras decimales tienen.**

a) $\frac{3}{10}$ c) $-\frac{9}{3}$ e) $\frac{1}{20}$ g) $\frac{16}{55}$

b) $\frac{56}{100}$ d) $\frac{73}{8}$ f) $\frac{2}{40}$ h) $\frac{8}{88}$

a) $\frac{3}{10}=0,3\rightarrow$ Una cifra decimal.

b) $\frac{56}{100}=0,56\rightarrow$ Dos cifras decimales.

c) $\frac{-9}{3}=-3\rightarrow$ Ninguna cifra decimal.

d) $\frac{73}{8}=9,125\rightarrow$ Tres cifras decimales.

e) $\frac{1}{20}=0,05\rightarrow$ Dos cifras decimales.

f) $\frac{2}{40}=0,05\rightarrow$ Dos cifras decimales.

g) $\frac{16}{55}=0,29090...\rightarrow$ Infinitas cifras decimales.

h) $\frac{8}{88}=0,090909...\rightarrow$ Infinitas cifras decimales.

**40. Indica las cifras que forman el período y el anteperíodo, cuando exista, de los números decimales que se expresan con estas fracciones.**

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{13}{6}$ e) $\frac{25}{45}$ g) $\frac{37}{12}$

b) $\frac{1}{45}$ d) $\frac{1}{600}$ f) $\frac{1}{90}$ h) $\frac{49}{18}$

a) $\frac{1}{3}=0,333...=0,\widehat{3}\rightarrow$ Período de una cifra.

b) $\frac{1}{45}=0,0222...=0,0\widehat{2}\rightarrow$ Período y anteperíodo de una cifra cada uno.

c) $\frac{13}{6}=2,16666...=2,1\widehat{6}\rightarrow$ Período y anteperíodo de una cifra cada uno.

d) $\frac{1}{600}=0,001666...=0,001\widehat{6}\rightarrow$ Período de una cifra y anteperíodo de tres cifras.

e) $\frac{25}{45}=0,555...=0,\widehat{5}\rightarrow$ Período de una cifra.

f) $\frac{1}{90}=0,0111...=0,0\widehat{1}\rightarrow$ Período y anteperíodo de una cifra cada uno.

g) $\frac{37}{12}=3,08333...=3,08\widehat{3}\rightarrow$ Período de una cifra y anteperíodo de dos cifras.

h) $\frac{49}{18}=2,7222...=2,7\widehat{2}\rightarrow$ Período y anteperíodo de una cifra cada uno.

**41.** **Determina el tipo de número decimal que equivale a estas fracciones.**

a) $\frac{27}{18}$ c) $\frac{14}{35}$ e) $\frac{2\,600}{1\,800}$ g) $\frac{1\,050}{1\,485}$

b) $\frac{2\,100}{3\,000}$ d) $\frac{196}{140}$ f) $\frac{48}{120}$ h) $\frac{240}{4\,800}$

a) $\frac{27}{18} = 1{,}5 \longrightarrow$ Decimal exacto.

b) $\frac{2100}{3000} = 0{,}7 \longrightarrow$ Decimal exacto.

c) $\frac{14}{35} = 0{,}4 \longrightarrow$ Decimal exacto.

d) $\frac{196}{140} = 1{,}4 \longrightarrow$ Decimal exacto.

e) $\frac{2600}{1800} = 1{,}\widehat{4} \longrightarrow$ Decimal periódico puro.

f) $\frac{48}{120} = 0{,}4 \longrightarrow$ Decimal exacto.

g) $\frac{1050}{1485} = 0{,}\widehat{70} \longrightarrow$ Decimal periódico puro.

h) $\frac{240}{4800} = 0{,}05 \longrightarrow$ Decimal exacto.

**42.** **Encuentra la fracción irreducible que corresponde a estos números decimales.**

a) 0,6
b) 2,08
c) 12,5
d) 42,06
e) 28,542
f) 5,94
g) 652,5
h) 0,148
i) 100,48
j) 0,0008

a) $0{,}6 = \frac{3}{5}$

b) $2{,}08 = \frac{52}{25}$

c) $12{,}5 = \frac{25}{2}$

d) $42{,}06 = \frac{2103}{50}$

e) $28{,}542 = \frac{14271}{500}$

f) $5{,}94 = \frac{297}{50}$

g) $652{,}5 = \frac{1305}{2}$

h) $0{,}148 = \frac{37}{250}$

i) $100{,}48 = \frac{2512}{25}$

j) $0{,}0008 = \frac{1}{1250}$

**43.** **Los números decimales de cada grupo tienen una característica común. Exprésalos en forma de fracción y determina esa característica.**

a) $\{0{,}\widehat{3};\ 0{,}\widehat{6}\}$

b) $\{0{,}\widehat{1};\ 0{,}\widehat{2};\ 0{,}\widehat{3};\ 0{,}\widehat{4};\ 0{,}\widehat{5};\ 0{,}\widehat{6};\ 0{,}\widehat{7};\ 0{,}\widehat{8}\}$

c) $\{0{,}0\widehat{1};\ 0{,}0\widehat{2};\ 0{,}0\widehat{3};\ 0{,}0\widehat{4};\ 0{,}0\widehat{5};\ \ldots\}$

d) $\{0{,}\widehat{01};\ 0{,}\widehat{02};\ 0{,}\widehat{03};\ 0{,}\widehat{04};\ 0{,}\widehat{05};\ \ldots\}$

a) $0,\hat{3}=\frac{1}{3}$ $\qquad 0,\hat{6}=\frac{2}{3}$

Tienen denominador común, 3, y ambas suman la unidad.

b) $0,\hat{1}=\frac{1}{9}$ $\quad 0,\hat{2}=\frac{2}{9}$ $\quad 0,\hat{3}=\frac{3}{9}$ $\quad 0,\hat{4}=\frac{4}{9}$ $\quad 0,\hat{5}=\frac{5}{9}$ $\quad 0,\hat{6}=\frac{6}{9}$ $\quad 0,\hat{7}=\frac{7}{9}$ $\quad 0,\hat{8}=\frac{8}{9}$

Tienen denominador común, 9, y los numeradores coinciden con la cifra del período.

c) $0,0\hat{1}=\frac{1}{90}$ $\quad 0,0\hat{2}=\frac{2}{90}$ $\quad 0,0\hat{3}=\frac{3}{90}$ $\quad 0,0\hat{4}=\frac{4}{90}$ $\quad 0,0\hat{5}=\frac{5}{90}$ ...

Tienen denominador común, 90, y los numeradores coinciden con la cifra del período.

d) $0,\widehat{01}=\frac{1}{99}$ $\quad 0,\widehat{02}=\frac{2}{99}$ $\quad 0,\widehat{03}=\frac{3}{99}$ $\quad 0,\widehat{04}=\frac{4}{99}$ $\quad 0,\widehat{05}=\frac{5}{99}$ ...

Tienen denominador común, 99, y los numeradores coinciden con la cifra no nula del período.

**44. Encuentra la fracción generatriz de estos números decimales.**

a) $3,4\hat{5}$
b) $0,\widehat{08}$
c) $24,\hat{7}$
d) $0,00\hat{7}$
e) $0,\widehat{008}$
f) $1,3\widehat{56}$
g) $0,12\widehat{58}$
h) $4,\widehat{453}$
i) $5,6\widehat{005}$
j) $0,667\hat{2}$

a) $3,4\hat{5}=\frac{311}{90}$

b) $0,\widehat{08}=\frac{8}{99}$

c) $24,\hat{7}=\frac{223}{9}$

d) $0,00\hat{7}=\frac{7}{900}$

e) $0,\widehat{008}=\frac{1}{125}$

f) $1,3\widehat{56}=\frac{1343}{990}$

g) $0,12\widehat{58}=\frac{623}{4950}$

h) $4,\widehat{453}=\frac{1483}{333}$

i) $5,6\widehat{005}=\frac{55949}{9990}$

j) $0,667\hat{2}=\frac{1201}{1800}$

**45. Escribe, en cada caso, una fracción que cumpla estos requisitos.**

a) Representa un número decimal exacto con dos cifras decimales.
b) Representa un número decimal periódico puro con una cifra decimal de período.
c) Representa un número decimal periódico mixto con una cifra en el anteperíodo y dos cifras periódicas.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $4,85=\frac{97}{20}$ $\qquad$ b) $4,\hat{5}=\frac{41}{9}$ $\qquad$ c) $4,8\widehat{52}=\frac{2402}{495}$

**46.** **Clasifica los siguientes números, indicando todos los grupos a los que pertenecen.**

a) $-4{,}562$

b) $\dfrac{-4}{9}$

c) $24{,}09\widehat{23}$

d) $1{,}23223222322223\ldots$

e) $5{,}\widehat{875}$

f) $\dfrac{10}{5}$

g) $-76{,}43333333\ldots$

h) $4{,}\widehat{9}$

a) –4,562 es racional decimal exacto.

b) $\dfrac{-4}{9}=-0{,}\widehat{4}$ es racional decimal periódico puro.

c) $24{,}09\widehat{23}$ es racional decimal periódico mixto.

d) 1,23223222322223… es irracional.

e) $5{,}\widehat{875}$ es racional decimal periódico puro.

f) 2 es racional entero positivo.

g) –76,43333333… es racional decimal periódico mixto.

h) $4{,}\widehat{9}$ es racional decimal periódico puro.

**47.** **Escribe, en cada caso, tres números racionales que cumplan estas características.**

a) Son mayores que $-1$ y menores que 1.

b) Su parte entera es 1 y tienen período.

c) Son periódicos mixtos menores que 0.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $-0{,}\widehat{4}$, $0{,}05$ y $0{,}5\widehat{7}$ b) $1{,}\widehat{9}$, $1{,}\widehat{05}$ y $1{,}\widehat{923}$ c) $-0{,}3\widehat{9}$, $-0{,}9\widehat{05}$ y $-0{,}0\widehat{625}$

**48.** **Escribe tres números irracionales comprendidos entre 0 y 1.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, 0,01011011101111…; 0,252255222555… y 0,101112131415…

## ACTIVIDADES FINALES

**49.** **Expresa estos enunciados como una fracción.**

a) Ocho de cada quince personas utilizan diariamente el teléfono móvil.

b) Juan pide tres trozos de una pizza de diez raciones.

c) De los treinta alumnos de una clase, diecinueve saben tocar un instrumento musical.

d) Mario ha encestado tres de cada cinco lanzamientos.

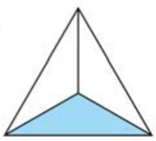
e) Javier no ha sabido resolver dos de siete problemas.

f) De los nueve bolígrafos que tengo, dos no tienen tinta.

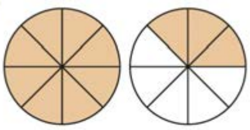
a) $\dfrac{8}{15}$ b) $\dfrac{3}{10}$ c) $\dfrac{19}{30}$ d) $\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{2}{7}$ f) $\dfrac{2}{9}$

**50.** **Escribe la fracción que representa la parte coloreada de cada figura.**

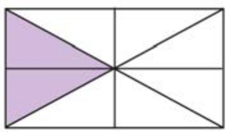
a)



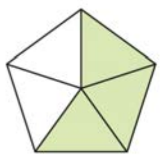
b)



c)



d)



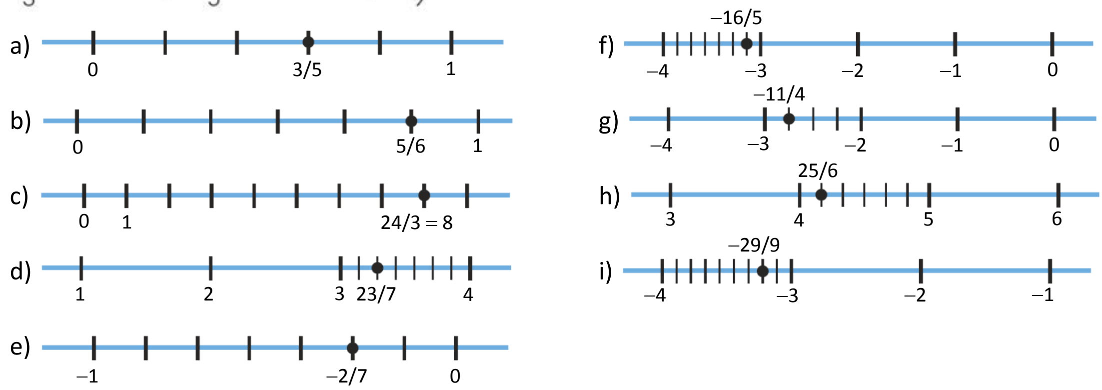
a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{11}{8}$ c) $\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{3}{5}$

**52.** **Representa en la recta numérica estas fracciones.**

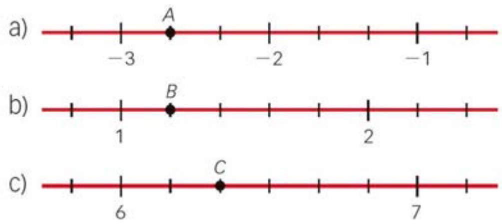
a) $\frac{3}{5}$  d) $\frac{23}{7}$  g) $-\frac{11}{4}$

b) $\frac{5}{6}$  e) $-\frac{2}{7}$  h) $\frac{25}{6}$

c) $\frac{24}{3}$  f) $\frac{-16}{5}$  i) $\frac{-29}{9}$




**53.** **¿Qué fracción representa cada letra?**




a) $-2 - \frac{2}{3} = \frac{-8}{3}$  b) $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$  c) $6 + \frac{2}{6} = \frac{38}{6}$

**54.** **Indica la fracción que representa cada letra.**


$A = \frac{3}{5}$  $B = \frac{6}{5}$  $C = \frac{12}{5}$  $D = \frac{19}{5}$

**55.** **Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes.**

a) $\frac{3}{10}$ y $\frac{21}{70}$  c) $\frac{3}{8}$ y $\frac{24}{64}$  e) $\frac{7}{10}$ y $\frac{21}{15}$  g) $\frac{-4}{5}$ y $\frac{-20}{10}$

b) $\frac{3}{7}$ y $\frac{21}{70}$  d) $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$  f) $\frac{-7}{5}$ y $\frac{-28}{40}$  h) $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{15}$

a) Son equivalentes: $3 \cdot 70 = 210 = 10 \cdot 21$

b) No son equivalentes: $3 \cdot 70 \neq 7 \cdot 21$

c) Son equivalentes: $3 \cdot 64 = 192 = 8 \cdot 24$

d) Son equivalentes: $6 \cdot 5 = 30 = 10 \cdot 3$

e) No son equivalentes: $7 \cdot 15 \neq 10 \cdot 21$

f) No son equivalentes: $-7 \cdot 40 \neq -28 \cdot 5$

g) No son equivalentes: $-4 \cdot 10 \neq -20 \cdot 5$

h) No son equivalentes: $2 \cdot 15 \neq 5 \cdot 8$

**56.** **Calcula el valor de *x* para que las fracciones sean equivalentes.**

a) $\frac{x}{12}=\frac{6}{9}$ c) $\frac{10}{3}=\frac{x}{15}$ e) $\frac{-4}{x}=\frac{32}{16}$ g) $\frac{14}{x}=\frac{42}{9}$

b) $\frac{9}{x}=\frac{6}{4}$ d) $\frac{2}{5}=\frac{120}{x}$ f) $\frac{-1}{7}=\frac{x}{98}$ h) $\frac{-6}{11}=\frac{90}{x}$

a) $x=\frac{12\cdot 6}{9}=8$ c) $x=\frac{10\cdot 15}{3}=50$ e) $x=\frac{-4\cdot 16}{32}=-2$ g) $x=\frac{14\cdot 9}{42}=3$

b) $x=\frac{9\cdot 4}{6}=6$ d) $x=\frac{120\cdot 5}{2}=300$ f) $x=\frac{-98}{7}=-14$ h) $x=\frac{11\cdot 90}{-6}=-165$

**57.** **Completa en tu cuaderno para que se cumpla la igualdad.**

a) $\frac{2}{5}=\frac{6}{\square}=\frac{\square}{40}=\frac{10}{\square}=\frac{\square}{100}$

b) $\frac{-5}{6}=\frac{-75}{\square}=\frac{\square}{42}=\frac{-25}{\square}=\frac{\square}{60}$

a) $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{10}{25}=\frac{40}{100}$ b) $\frac{-5}{6}=\frac{-75}{90}=\frac{-35}{42}=\frac{-25}{30}=\frac{-50}{60}$

**58.** **Obtén, por amplificación, tres fracciones equivalentes a cada una de estas.**

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{-2}{9}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{-3}{7}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{5}{3}=\frac{20}{12}=\frac{60}{36}=\frac{400}{240}$ d) $\frac{1}{8}=\frac{6}{48}=\frac{36}{288}=\frac{360}{2880}$

b) $\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\frac{24}{20}=\frac{120}{100}$ e) $\frac{-3}{7}=\frac{-6}{14}=\frac{-36}{84}=\frac{-144}{336}$

c) $\frac{-2}{9}=\frac{-6}{27}=\frac{-18}{81}=\frac{-90}{405}$

**59.** **Calcula, por simplificación, tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes.**

a) $\frac{-16}{1000}$ c) $\frac{750}{4500}$ e) $\frac{1400}{3430}$

b) $\frac{540}{72}$ d) $\frac{-270}{900}$ f) $\frac{168}{1008}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{-16}{1000}=\frac{-8}{500}=\frac{-4}{250}=\frac{-2}{125}$ d) $\frac{-270}{900}=\frac{-27}{90}=\frac{-9}{30}=\frac{-3}{10}$

b) $\frac{540}{72}=\frac{270}{36}=\frac{135}{18}=\frac{15}{2}$ e) $\frac{1400}{3430}=\frac{700}{1715}=\frac{140}{343}=\frac{20}{49}$

c) $\frac{750}{4500}=\frac{75}{450}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{168}{1008}=\frac{84}{504}=\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$

**60. Calcula fracciones equivalentes a estas con denominador un número comprendido entre 200 y 300.**

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{9}{5}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{-7}{3}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{7}{8}=\frac{175}{200}=\frac{210}{240}=\frac{259}{296}$

b) $\frac{2}{11}=\frac{40}{220}=\frac{50}{275}=\frac{54}{286}$

c) $\frac{9}{5}=\frac{378}{210}=\frac{495}{275}=\frac{522}{290}$

d) $\frac{5}{9}=\frac{115}{207}=\frac{120}{216}=\frac{125}{225}$

e) $\frac{-7}{3}=\frac{-469}{201}=\frac{-539}{231}=\frac{-658}{282}$

**61. Halla la fracción irreducible.**

a) $\frac{20}{8}$ b) $\frac{-4}{48}$ c) $\frac{32}{12}$ d) $\frac{-54}{92}$ e) $\frac{-27}{36}$

a) $\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

b) $\frac{-4}{48}=\frac{-1}{12}$

c) $\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$

d) $\frac{-54}{92}=\frac{-27}{46}$

e) $\frac{-27}{36}=\frac{-3}{4}$

**63. Calcula la fracción irreducible descomponiendo numerador y denominador en factores primos.**

a) $\frac{36}{60}$ b) $\frac{108}{48}$ c) $\frac{-225}{125}$ d) $\frac{252}{441}$

a) $\frac{36}{60}=\frac{2^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3}{5}$

b) $\frac{108}{48}=\frac{2^2\cdot 3^3}{2^4\cdot 3}=\frac{9}{4}$

c) $\frac{-225}{125}=\frac{-3^2\cdot 5^2}{5^3}=\frac{-9}{5}$

d) $\frac{252}{441}=\frac{7\cdot 2^2\cdot 3^2}{7^2\cdot 3^2}=\frac{4}{7}$

**64. Señala cuáles de estas simplificaciones de fracciones están mal hechas y razona por qué.**

a) $\frac{22}{13}=\frac{\cancel{11}+11}{\cancel{11}+2}=\frac{11}{2}$

b) $\frac{22}{14}=\frac{\cancel{2}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 7}=\frac{11}{7}$

c) $\frac{20}{18}=\frac{\cancel{15}+5}{\cancel{15}+3}=\frac{5}{3}$

d) $\frac{40}{80}=\frac{40:\cancel{20}}{80:\cancel{20}}=\frac{2}{4}$

a) Mal, pues no se pueden simplificar sumandos del numerador y del denominador.

b) Bien.

c) Mal, ya que no se pueden simplificar sumandos del numerador y del denominador.

d) Bien, aunque se podría simplificar más.

**65. Escribe una fracción equivalente a $\frac{1}{6}$ y otra a $\frac{4}{7}$ que tengan el mismo denominador.**

$\frac{1}{6}=\frac{7}{42}$ $\frac{4}{7}=\frac{24}{42}$

**66.** **Escribe una fracción equivalente a $\frac{-7}{3}$ y otra a $\frac{-9}{5}$ que tengan el mismo numerador.**

$\frac{-7}{3}=\frac{-63}{27}$ $\qquad$ $\frac{-9}{5}=\frac{-63}{35}$

**67.** **Ordena de menor a mayor estas fracciones.**

a) $\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{5}{3}$ y $-\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{7}{4}$ y $\frac{1}{4}$

c) $\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}$ y $\frac{7}{5}$

d) $-\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}$ y $\frac{5}{6}$

a) $-\frac{5}{3}<-\frac{2}{3}<\frac{4}{3}<\frac{10}{3}<\frac{16}{3}$

b) $-\frac{9}{4}<-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}<\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$

c) $-\frac{8}{5}<-\frac{6}{5}<\frac{7}{5}<\frac{9}{5}<\frac{12}{5}$

d) $-\frac{5}{6}<-\frac{1}{6}<\frac{1}{6}<\frac{5}{6}<\frac{7}{6}$

**68.** **Ordena de menor a mayor estas fracciones.**

a) $\frac{5}{9}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{7}$ y $\frac{5}{8}$

b) $\frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}$ y $-\frac{7}{9}$

c) $-\frac{2}{9}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}$ y $-\frac{2}{11}$

d) $-\frac{3}{16}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{7}$ y $-\frac{3}{10}$

a) $\frac{5}{9}<\frac{5}{8}<\frac{5}{7}<\frac{5}{4}<\frac{5}{3}$

b) $-\frac{7}{9}<\frac{7}{6}<\frac{7}{5}<\frac{7}{3}<\frac{7}{2}$

c) $-\frac{2}{3}<-\frac{2}{7}<-\frac{2}{9}<-\frac{2}{11}<-\frac{2}{15}$

d) $-\frac{3}{5}<-\frac{3}{10}<-\frac{3}{16}<\frac{3}{7}<\frac{3}{4}$

**70.** **Escribe una fracción comprendida entre:**

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{8}$

b) $\frac{9}{7}$ y $\frac{11}{9}$

c) $\frac{7}{6}$ y $\frac{8}{6}$

d) $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{2}{5}$

e) $\frac{-1}{6}$ y $\frac{1}{5}$

f) $-\frac{5}{9}$ y $-\frac{6}{9}$

a) $\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{8}\right):2=\frac{67}{80}$

b) $\left(\frac{9}{7}+\frac{11}{9}\right):2=\frac{158}{126}$

c) $\left(\frac{7}{6}+\frac{8}{6}\right):2=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

d) $\left[-\frac{3}{7}+\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:2=\frac{-29}{70}$

e) $\left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{5}\right):2=\frac{1}{60}$

f) $\left[-\frac{5}{9}+\left(-\frac{6}{9}\right)\right]:2=\frac{-11}{18}$

**71.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $\frac{1}{2} < \frac{\square}{8} < \frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{7} < \frac{3}{\square} < \frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6} < \frac{\square}{\square} < \frac{7}{8}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{1}{2} < \frac{4,5}{8} < \frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8}$

**72.** **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{2} - 1$ c) $3 - \frac{8}{3} - \frac{1}{6} + \frac{2}{9}$

b) $\frac{9}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{2} - 2$ d) $5 - \frac{5}{6} + \frac{5}{12} - \frac{5}{3}$

a) $\frac{17}{8}$ b) $\frac{-17}{5}$ c) $\frac{7}{18}$ d) $\frac{35}{12}$

**73.** **Calcula el resultado de estas operaciones.**

a) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(4 + \frac{2}{7}\right)$ c) $-\frac{3}{7} - \left(4 + \frac{7}{8} - \frac{9}{4}\right)$

b) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)$ d) $\left(9 + \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right)$

a) $\frac{-76}{21}$ b) $\frac{191}{60}$ c) $\frac{-171}{56}$ d) $\frac{437}{45}$

**74.** **Halla el resultado de estas operaciones.**

a) $\frac{5}{9} - \left(\frac{7}{5} - \frac{4}{15}\right) + 2$ c) $-3 - \left(-\frac{6}{5}\right) - \frac{5}{3}$

b) $-\frac{4}{25} - \left(\frac{9}{2} + 5\right) - 3$ d) $\frac{11}{16} - \left(4 - \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)$

a) $\frac{64}{45}$ b) $\frac{-633}{50}$ c) $\frac{-52}{15}$ d) $\frac{-157}{48}$

**75.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $\frac{1}{3} + \square = \frac{1}{4}$ c) $\square + \frac{5}{6} = \frac{10}{3}$

b) $\frac{3}{7} - \square = -\frac{1}{21}$ d) $\square - \frac{5}{12} = -\frac{2}{3}$

a) $\frac{-1}{12}$ b) $\frac{10}{21}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{-1}{4}$

**76.** **Resuelve estas operaciones.**

a) $6-\frac{1}{2}:\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\right)$

b) $\frac{6}{7}-2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$

c) $\frac{4}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{7}{20}$

d) $\frac{1}{4}+\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right):\frac{1}{6}$

e) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{6}\right)\cdot\left(3-\frac{2}{5}\right)$

f) $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{6}\right)$

a) 5 c) $\frac{-17}{20}$ e) $\frac{221}{150}$

b) $\frac{47}{14}$ d) $\frac{-85}{12}$ f) $\frac{-1}{6}$

**77.** **Calcula.**

a) $\frac{5}{4}-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{4}:\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

b) $\frac{7}{2}:\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{8}\right)-1$

c) $\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{2}+4\right)\right]:\frac{2}{3}$

d) $\left[\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{10}\right)\right]:\left(\frac{2}{5}-3\right)$

a) $\frac{-5}{12}$ b) $\frac{233}{12}$ c) $\frac{27}{160}$ d) $\frac{-11}{26}$

**78.** **Halla el resultado de estas operaciones entre fracciones.**

a) $\left(-\frac{10}{3}+3\right)\cdot(-3)+\frac{1}{4}$

b) $1-2:\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{6}\right):\left[8+\frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

d) $\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right):\left(-\frac{3}{2}+\frac{11}{4}\right)$

a) $\frac{5}{4}$ b) 9 c) $\frac{13}{22}$ d) $\frac{8}{15}$

**79.** **Resuelve estas operaciones.**

a) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)-\left(\frac{1}{9}:\frac{4}{3}\right)$

b) $\left(1+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)-2$

c) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

d) $-\frac{2}{7}-\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right)$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{32}{75}$ c) $\frac{-13}{36}$ d) $\frac{-113}{175}$

**80.** **Completa los huecos en tu cuaderno.**

a) $\frac{1}{3} \cdot \square = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{5} : \square = \frac{-4}{6}$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \square = \frac{3}{9}$

d) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \square = \frac{1}{6}$

e) $(-5) \cdot \square = -\frac{10}{3}$

f) $\frac{4}{5} : \square = -2$

a) $\square = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

b) $\square = \frac{4}{5} : \frac{-4}{6} = \frac{-6}{5}$

c) $\square = \frac{3}{9} : \frac{3}{7} : \frac{3}{8} = \frac{56}{27}$

d) $\square = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

e) $\square = \frac{-10}{3} : (-5) = \frac{2}{3}$

f) $\square = \frac{4}{5} : (-2) = \frac{-2}{5}$

**81.** **Efectúa estas operaciones.**

a) $-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} : \left(\frac{5}{9} - 3\right) : \frac{3}{2}$

b) $\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{5}{9} - 3\right) : \frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{4} : \frac{5}{9} - 3\right) : \frac{3}{2}$

d) $\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} : \frac{5}{9}\right) - 3 : \frac{3}{2}$

a) $\frac{-31}{132}$

b) $\frac{-1}{44}$

c) $\frac{-28}{15}$

d) $\frac{-103}{60}$

**82.** **Calcula el resultado de estas operaciones con fracciones.**

a) $\left[\frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)\right] : \left(4 - \frac{2}{3}\right)$

b) $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) : 4 - \frac{2}{3}$

c) $\left[\frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) : 4\right] - \frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left[\left(-\frac{2}{9}\right) : 4 - \frac{2}{3}\right]$

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{-61}{72}$

c) $\frac{43}{24}$

d) $\frac{47}{24}$

**83.** **Indica la parte entera y la parte decimal de estos números. En el caso de los decimales periódicos, señala su período y su anteperíodo.**

a) 1,25
b) −24,777…
c) 0,08999…
d) 19,353535…
e) −5,678678678
f) 4,8456767…
g) 1,010011000111…
h) −752,5

a) Parte entera: 1 Parte decimal: 25

b) Parte entera: –24 Parte decimal: 777…
Período: 7

c) Parte entera: 0 Parte decimal: 08999…
Período: 9 Anteperíodo: 08

d) Parte entera: 19 Parte decimal: 353535…
Período: 35

e) Parte entera: –5 Parte decimal: 678678678

f) Parte entera: 4 Parte decimal: 8456767…
Período: 67 Anteperíodo: 845

g) Parte entera: 1 Parte decimal: 010011000111…

h) Parte entera: –752 Parte decimal: 5

**84.** **Razona qué tipo de número (entero, decimal exacto o periódico) expresan las siguientes fracciones.**

a) $\frac{27}{36}$
b) $-\frac{44}{11}$
c) $\frac{4}{24}$
d) $\frac{51}{20}$
e) $\frac{-34}{30}$
f) $\frac{15}{21}$
g) $\frac{22}{-1}$
h) $\frac{21}{420}$
i) $\frac{19}{90}$

a) $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}\rightarrow$ Decimal exacto, porque el denominador de su fracción irreducible solo tiene 2 como factor.

b) Entero, porque el numerador es múltiplo del denominador.

c) $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}\rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tiene factores distintos de 2 y 5.

d) Decimal exacto, porque el denominador solo tiene como factores 2 y 5.

e) $\frac{-34}{30}=\frac{-17}{15}\rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tiene factores distintos de 2 y 5.

f) $\frac{15}{21}=\frac{5}{7}\rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tiene factores distintos de 2 y 5.

g) Entero, porque el numerador es múltiplo del denominador.

h) $\frac{21}{420}=\frac{1}{20}\rightarrow$ Decimal exacto, porque el denominador de su fracción irreducible solo tiene como factores 2 y 5.

i) Decimal periódico, porque el denominador tiene factores distintos de 2 y 5.

**85.** **Clasifica estos números decimales en racionales e irracionales indicando el criterio que utilizas.**

a) 4,565656…  
b) $-3{,}123456\ldots$  
c) $\frac{5}{9}$  
d) 0,040044000…  
e) $-1{,}285$  
f) $\frac{-6}{5}$  
g) $\frac{53}{90}$  
h) $\frac{13}{99}$

a) Racional, porque es decimal periódico puro.

b) Irracional, porque es decimal no exacto y no periódico.

c) $\frac{5}{9}=0{,}\overset{\frown}{5}$ , es decir, es racional porque es decimal periódico puro.

d) Irracional, porque es decimal no exacto y no periódico.

e) Racional, porque es decimal exacto.

f) $\frac{-6}{5}=-1{,}2$ , es decir, es racional porque es decimal exacto.

g) $\frac{53}{90}=0{,}5\overset{\frown}{8}$ , es decir, es racional porque es decimal periódico mixto.

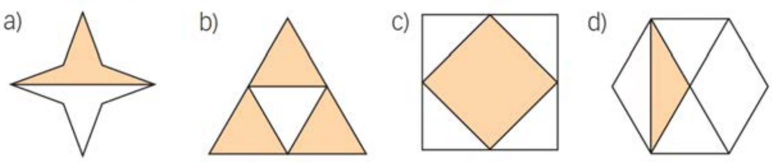
h) $\frac{13}{99}=0{,}\overset{\frown}{13}$ , es decir, es racional porque es decimal periódico puro.

**86.** **Expresa en forma decimal estas fracciones.**

a) $\frac{1}{30}$  
b) $\frac{-2}{9}$  
c) $\frac{4}{5}$  
d) $\frac{7}{12}$  
e) $\frac{-3}{8}$  
f) $\frac{25}{99}$  
g) $\frac{377}{100}$  
h) $\frac{-1}{990}$  
i) $\frac{9}{50}$

a) $\frac{1}{30}=0{,}0\overset{\frown}{3}$  
b) $\frac{-2}{9}=-0{,}\overset{\frown}{2}$  
c) $\frac{4}{5}=0{,}8$  
d) $\frac{7}{12}=0{,}58\overset{\frown}{3}$  
e) $\frac{-3}{8}=-0{,}375$  
f) $\frac{25}{99}=0{,}\overset{\frown}{25}$  
g) $\frac{377}{100}=3{,}77$  
h) $\frac{-1}{990}=-0{,}0\overset{\frown}{01}$  
i) $\frac{9}{50}=0{,}18$

**87.** **Expresa, mediante una fracción y mediante un número decimal, la parte coloreada de cada una de las figuras.**




a) $\frac{1}{2}=0{,}5$  
b) $\frac{3}{4}=0{,}75$  
c) $\frac{1}{2}=0{,}5$  
d) $\frac{1}{6}=0{,}1666\ldots$

**88. Expresa estos números decimales exactos como una fracción irreducible.**

a) 8,4 b) 76,53 c) −9,235 d) 13,0062

a) $8,4=\frac{42}{5}$

c) $-9,235=\frac{-1847}{200}$

b) $76,53=\frac{7653}{100}$

d) $13,0062=\frac{65031}{5000}$

**89. Ordena de menor a mayor los números de cada uno de los grupos.**

a) $\frac{4}{7}$; $0,\widehat{54}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{2}$; $0,5\widehat{54}$ b) $\frac{6}{5}$; $1,\widehat{24}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{13}{9}$; $1,2\widehat{34}$

a) $\frac{1}{2}<0,\widehat{54}<0,5\widehat{54}<\frac{5}{9}<\frac{4}{7}$

b) $\frac{5}{6}<\frac{6}{5}<1,2\widehat{34}<1,\widehat{24}<\frac{13}{9}$

**90. Encuentra la fracción que corresponde a estos números decimales.**

a) 2,777… b) 5,67878… c) 95,2525… d) 0,076444…

a) $2,\widehat{7}=\frac{25}{9}$

b) $5,6\widehat{78}=\frac{937}{165}$

c) $95,\widehat{25}=\frac{9430}{99}$

d) $0,07\widehat{64}=\frac{86}{1125}$

**91. Expresa en forma de fracción estos números.**

a) −5 d) 5,84 g) 74

b) $8,\widehat{7}$ e) $0,45\widehat{6}$ h) $2,68\widehat{25}$

c) $5,6\widehat{34}$ f) −0,752 i) $0,\widehat{0125}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $-5=\frac{-10}{2}$

d) $5,84=\frac{146}{25}$

g) $74=\frac{148}{2}$

b) $8,\widehat{7}=\frac{79}{9}$

e) $0,45\widehat{6}=\frac{137}{300}$

h) $2,68\widehat{25}=\frac{26557}{9900}$

c) $5,6\widehat{34}=\frac{2789}{495}$

f) $-0,752=\frac{-94}{125}$

i) $0,\widehat{0125}=\frac{125}{9999}$

**93. Transforma estos números decimales en fracciones y realiza la operación.**

a) 5,9 + 8,333… d) 9,5777… + 3,75

b) 2,333… + 56,444… e) 4,8999… + 2,565656…

c) 34,666… − 7,888… f) 3,1818… + 0,0606…

a) $5,9+8,\widehat{3}=\frac{59}{10}+\frac{75}{9}=\frac{427}{30}$

d) $9,5\widehat{7}+3,75=\frac{862}{90}+\frac{375}{100}=\frac{2399}{180}$

b) $2,\widehat{3}+56,\widehat{4}=\frac{21}{9}+\frac{508}{9}=\frac{529}{9}$

e) $4,8\widehat{9}+2,\widehat{56}=\frac{441}{90}+\frac{254}{99}=\frac{7391}{990}$

c) $34,\widehat{6}-7,\widehat{8}=\frac{312}{9}-\frac{71}{9}=\frac{241}{9}$

f) $3,\widehat{18}+0,\widehat{06}=\frac{315}{99}+\frac{6}{99}=\frac{107}{33}$

**94. Calcula el resultado en forma de fracción.**

a) $4,\widehat{7} - 2,\widehat{83} \cdot 1,5$

b) $(5,7\widehat{24} + 1,\widehat{9}) : 0,\widehat{54}$

c) $12,6\widehat{4} + 4,\widehat{2} : 0,6$

d) $15,75 - (1,8\widehat{6} - 0,\widehat{2}) \cdot 3,8$

a) $4,\widehat{7} - 2,\widehat{83} \cdot 1,5 = \frac{43}{9} - \frac{281}{99} \cdot \frac{15}{10} = \frac{103}{198}$

b) $\left(5,7\widehat{24} + 1,\widehat{9}\right) : 0,\widehat{54} = \left(\frac{5667}{990} + \frac{18}{9}\right) : \frac{54}{99} = \left(\frac{7647}{990}\right) : \frac{54}{99} = \frac{2549}{180}$

c) $12,6\widehat{4} + 4,\widehat{2} : 0,6 = \frac{1138}{90} + \frac{38}{9} : \frac{6}{10} = \frac{2657}{135}$

d) $15,75 - \left(1,8\widehat{6} - 0,\widehat{2}\right) \cdot 3,8 = \frac{1575}{100} - \left(\frac{168}{90} - \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{38}{10} = \frac{1575}{100} - \frac{5624}{900} = \frac{8551}{900}$

**95. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta.**

a) Cualquier número decimal puede expresarse en forma de fracción.

b) Un número entero se puede expresar como una fracción.

c) En un número decimal periódico, las cifras decimales se repiten indefinidamente después de la coma.

d) Si un número decimal tiene como período 0, es un número decimal exacto.

a) Falso, porque los decimales no exactos y no periódicos no se pueden expresar como fracción.

b) Verdadero, la fracción será el cociente del número y la unidad.

c) Verdadero en el caso de los decimales periódicos puros, pero no en el de los periódicos mixtos.

d) Verdadero, ya que se puede eliminar la parte decimal.

**96. Alejandro y sus 13 amigos han comido cada uno 2 raciones de tarta. Las tartas se sirven divididas en 10 raciones. Escribe, con una fracción, la cantidad de tartas que han comido.**

Entre todos han comido $\frac{28}{10} = \frac{14}{5}$.

**97. Un profesor propone 5 actividades y asigna un cuarto de hora para realizarlas. Escribe con una fracción el tiempo, en horas, que le corresponde a cada actividad.**


Cada actividad ocupa un tiempo de $\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{20}$ de hora.

**99.** **Según las estadísticas, 7 de cada 12 pacientes mejoran con el primer tratamiento asignado por su médico. Calcula cuántos pacientes no mejorarán con el primer tratamiento si cada médico pasa consulta a 540 enfermos.**

$\frac{7}{12}$ del total mejoran $\longrightarrow 1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ del total no mejoran $\longrightarrow \frac{5}{12}$ de $540 = 225$ pacientes no mejoran.

**100.** **Cuatro de cada cinco electrodomésticos que se venden son de color blanco, y una décima parte son negros. Calcula cuántos electrodomésticos blancos y cuántos negros ha vendido un establecimiento de un total de 140 aparatos.**

$\frac{4}{5}\cdot 140 = 112$ aparatos son blancos.

$\frac{1}{10}\cdot 140 = 14$ aparatos son negros.

**101.** **Unos amigos recorren 105 km en bicicleta. El primer día hacen $\frac{1}{3}$ del camino, y el segundo día, $\frac{4}{15}$, dejando el resto para el tercero. ¿Cuántos kilómetros recorren cada día?**

1.er día $\rightarrow \frac{1}{3}\cdot 105 = 35$ km

2.º día $\rightarrow \frac{4}{15}\cdot 105 = 28$ km

3.er día $\rightarrow 105 - (28 + 35) = 42$ km

**103.** **La octava parte del huerto de Pedro está sembrada con tomates. Si la superficie que no lo está es de 982,5 m², ¿qué superficie total tiene el huerto?**

Sea *x* la superficie del huerto. Entonces:

$\frac{7}{8}\cdot x = 982{,}5$ m$^2 \longrightarrow x = \frac{982{,}5\cdot 8}{7} = 1\,122{,}86$ m$^2$ es la superficie que tiene el huerto.

**104.** **Una piscina que está llena hasta los $\frac{10}{13}$ de su capacidad, necesita 720 litros para estar completamente llena. Calcula la capacidad de la piscina.**

Sea *x* la capacidad de la piscina. Entonces:

$\frac{3}{13}\cdot x = 720$ litros$\longrightarrow x = \frac{720\cdot 13}{3} = 3\,120$ litros.

**105.** **Un trozo de tela mide 5,4 m y representa las tres séptimas partes del total. ¿Cuál es la longitud total de la tela?**

Sea *x* la longitud de la tela. Entonces:

$\frac{3}{7}\cdot x = 5{,}4$ m $\longrightarrow x = \frac{5{,}4\cdot 7}{3} = 12{,}6$ m.

**106.** **Una barrica de 12 000 ℓ de capacidad se vacía hasta que quedan sus tres décimas partes. ¿Cuántos litros se han extraído?**

Se han extraído siete décimas partes, es decir:

$\frac{7}{10}\cdot 12000 = 8\,400$ litros.

**107.** **Los cinco doceavos del total de los alumnos de un instituto son hijos únicos. Si 322 tienen algún hermano, ¿cuántos son hijos únicos?**

Sea *x* el número de alumnos del instituto. Entonces:

$\frac{7}{12}x = 322 \rightarrow x = \frac{322\cdot 12}{7} = 552$ alumnos en total.

Así, $\frac{5}{12}\cdot 552 = 230$ alumnos son hijos únicos.

**108.** **En la clase de Marcos llevan gafas 16 alumnos, que representan las cuatro novenas partes del total. ¿Cuántos alumnos no llevan gafas?**

Sea *x* el número total de alumnos de la clase de Marcos. Entonces:

$\frac{4}{9}x = 16 \rightarrow x = \frac{16\cdot 9}{4} = 36$ alumnos en total.

$\frac{5}{9}\cdot 36 = 20$ alumnos no llevan gafas.

**109.** **¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se necesitan para embotellar 600 ℓ de vino?**

Se necesitan $600 : \frac{3}{4} = 800$ botellas de tres cuartos de litro.

**110.** **¿Cuántas botellas de un tercio de litro de refresco hay en 7 ℓ?**

En 7 litros hay $7 : \frac{1}{3} = 21$ botellas de un tercio de litro.

**111.** **Si una botella de agua pequeña tiene una capacidad de un quinto de litro, ¿cuántas botellas pequeñas podemos llenar con 12 ℓ de agua?**

Con 12 litros de agua podemos llenar $12 : \frac{1}{5} = 60$ botellas de un quinto de litro.

**112.** **El hijo de Isabel tiene la mitad de la séptima parte de la edad de su madre. Si Isabel tiene 42 años, ¿cuántos años tiene su hijo?**

Su hijo tiene $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot 42 = 3$ años.

**113.** **Carlos decide hacer un viaje de 210 km en tres etapas. En la primera recorre dos séptimos del total del trayecto, y en la segunda, la tercera parte de lo que queda. ¿Qué distancia recorrerá en la tercera etapa?**

$210-\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot 210 = 100$ km

**114.** **Héctor gastó en la entrada de cine una tercera parte del dinero con el que salió de casa. Con la cuarta parte del dinero compró una bolsa de palomitas y le quedaron 15 €. ¿Con cuánto dinero salió de casa?**

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ es la fracción del total que gastó. $\rightarrow$ 15 € = $\frac{5}{12}x$ $\rightarrow$ $\frac{15\cdot 12}{5}$ = 36 €.

Salió de casa con 36 €.

**115.** **En la biblioteca hay 5 000 libros. De ellos, una quinta parte son novelas, y del resto, la mitad son literatura infantil. ¿Cuántos libros de literatura infantil hay?**

Hay $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot 5000$ = 2 000 libros de literatura infantil.

**116.** **En un almacén de fruta, verdura y conservas se utilizan cinco octavas partes del espacio para almacenar fruta y dos terceras partes del resto para almacenar verdura. Las conservas ocupan todo el espacio restante. ¿Qué fracción del total ocupan?**

$1-\left(\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8}$ es la fracción del total que ocupan las conservas.

**117.** **Con la cuarta parte de una botella de 2 ℓ y una sexta parte de otra botella de tres cuartos de litro se llenan cinco sextas partes de una vasija. ¿Cuál es la capacidad de la vasija?**

Sea *x* la capacidad en litros de la vasija. Entonces:

$\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$ litros se utilizan para verter en la vasija.

$\frac{5}{8}=\frac{5}{6}x \;\rightarrow\; x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ de litro es la capacidad de la vasija.

## DEBES SABER HACER

**1. Calcula el valor desconocido para que las fracciones sean equivalentes.**

a) $\frac{4}{15}=\frac{x}{60}$ b) $\frac{24}{12}=\frac{8}{x}$ c) $\frac{-3}{10}=\frac{x}{120}$

a) $x=\frac{4\cdot 60}{15}=16$ b) $x=\frac{12\cdot 8}{24}=4$ c) $x=\frac{-3\cdot 120}{10}=-36$

**2. Calcula la fracción irreducible.**

a) $\frac{52}{72}$ b) $\frac{-165}{90}$ c) $\frac{105}{126}$ d) $\frac{-132}{68}$

a) $\frac{52}{72}=\frac{13}{18}$ b) $\frac{-165}{90}=\frac{-11}{6}$ c) $\frac{105}{126}=\frac{5}{6}$ d) $\frac{-132}{68}=\frac{-33}{17}$

**3. Ordena de mayor a menor.**

$\frac{5}{9}$ $-\frac{1}{5}$ $\frac{13}{4}$ $\frac{3}{8}$ $-\frac{8}{3}$ $\frac{13}{5}$

$\frac{-8}{3}<\frac{-1}{5}<\frac{3}{8}<\frac{5}{9}<\frac{13}{5}<\frac{13}{4}$

**4. Ordena de menor a mayor.**

$1{,}6$ $\frac{5}{3}$ $1{,}6\overset{\frown}{65}$ $\frac{72}{45}$ $\frac{16}{9}$ $1{,}\overset{\frown}{65}$

$1{,}6=\frac{72}{45}<1{,}\overset{\frown}{65}<1{,}6\overset{\frown}{65}<\frac{5}{3}<\frac{16}{9}$

**5. Realiza estas operaciones.**

a) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$ b) $\frac{9}{7}-\left[\frac{7}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{10}{9}\right]$

a) $\frac{1}{2}-\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{24}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$

b) $\frac{9}{7}-\left[\frac{7}{2}-\left(\frac{-3}{5}\right)\cdot\frac{10}{9}\right]=\frac{9}{7}-\left[\frac{7}{2}+\frac{2}{3}\right]=\frac{-121}{42}$

**6. Un granjero quiere vallar un terreno de 2 275 m de perímetro. El primer día hace los $\frac{3}{7}$ del trabajo, y el segundo día, los $\frac{2}{5}$. ¿Cuántos metros faltan por vallar?**

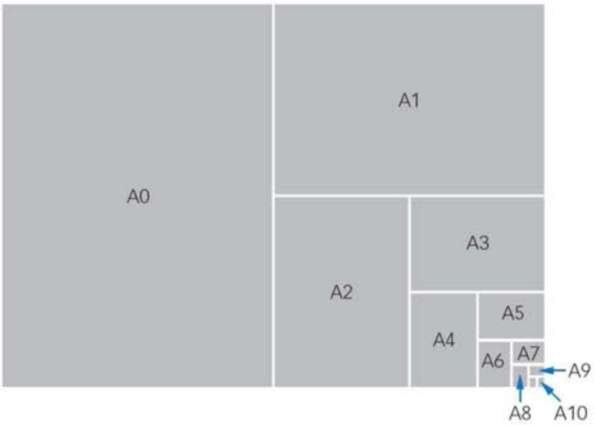
Faltan: $1-\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\right)=1-\frac{29}{35}=\frac{6}{35}\rightarrow\frac{6}{35}\cdot 2\,275=390$ m

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**118.** **La mayoría del papel comercial que se vende corresponde a unos formatos de tamaño establecidos. Son los tamaños DIN A.**

**El formato de referencia es el denominado A0, que es una hoja de papel de 84,1 cm de ancho y 118,9 cm de largo, y cuya superficie mide 1 m². A partir de esta medida se crean las medidas inferiores.**

**Cada formato debe tener un lado igual a $\frac{1}{2}$ del lado mayor del formato inmediatamente superior y el otro igual al lado menor de este.**

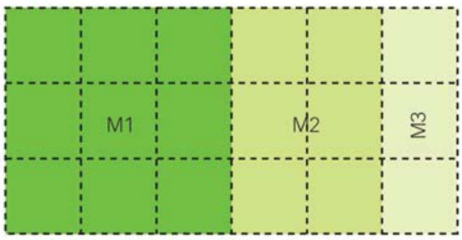




a) Completa en tu cuaderno las medidas de todos los tamaños de DIN A.

| A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 841 × 1189 | | | | | | | | | | |

b) En una empresa de publicidad quieren crear carteles con formatos distintos a los DIN A. Para ello han tomado un DIN A2 y lo han cortado como indica la imagen.
Calcula las dimensiones de los formatos M1, M2 y M3 que han creado.




a) A0 ⟶ 841 × 1 189
A1 ⟶ 594,5 × 841
A2 ⟶ 420,5 × 594,5
A3 ⟶ 297,25 × 420,5
A4 ⟶ 210,25 × 297,25
A5 ⟶ 148,63 × 210,25
A6 ⟶ 105,13 × 148,63
A7 ⟶ 74,31 × 105,13
A8 ⟶ 52,56 × 74,31
A9 ⟶ 37,16 × 52,56
A10 ⟶ 26,28 × 37,16

b) $M_1 \longrightarrow 420{,}5 \times \frac{1}{2} \cdot 594{,}5 = 420{,}5 \times 297{,}25$ cm

$M_2 \longrightarrow 420{,}5 \times \frac{1}{3} \cdot 594{,}5 \text{ cm} = 420{,}5 \times 198{,}17$ cm

$M_3 \longrightarrow 420{,}5 \times \frac{1}{6} \cdot 594{,}5 \text{ cm} = 420{,}5 \times 99{,}084$ cm

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**119. Calcula las siguientes diferencias.**


a) Con los resultados, efectúa esta suma.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

b) A la vista de lo obtenido, ¿cuál crees que será el resultado de esta suma?

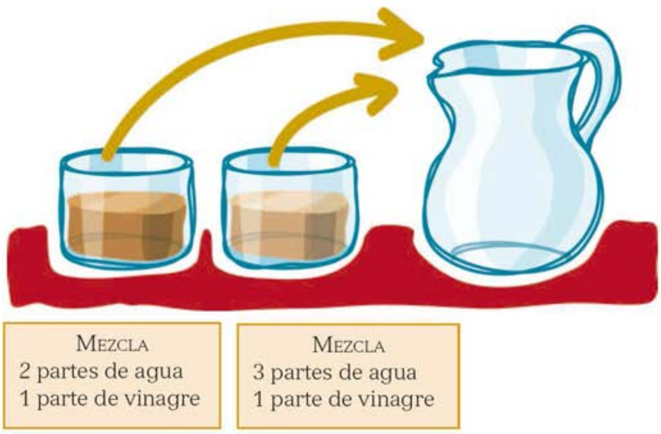
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{1\,001\,000}$$

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ $\quad\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ $\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $\quad\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{1\,001\,000}=\frac{1}{1\,000}-\frac{1}{1\,001}\rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{1\,001\,000}=1-\frac{1}{1\,001}=\frac{1\,000}{1\,001}$

**120. Si vaciamos estos dos recipientes en una jarra, ¿cuál es la proporción de agua y de vinagre en ella?**




Suponiendo la misma cantidad de líquido en ambos recipientes, la cantidad de agua es $\frac{2}{6}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}$ y la cantidad de vinagre es $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$.

## PRUEBAS PISA

**121.** **En una carrera de velocidad, el «tiempo de reacción» es el tiempo que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el taco de salida. El «tiempo final» incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera.**

**En la tabla siguiente figura el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores en una carrera de velocidad de 100 metros.**

| Calle | Tiempo de reacción (s) | Tiempo final (s) |
|---|---|---|
| 1 | 0,147 | 10,09 |
| 2 | 0,136 | 9,99 |
| 3 | 0,197 | 9,87 |
| 4 | 0,180 | No acabó la carrera |
| 5 | 0,210 | 10,17 |
| 6 | 0,216 | 10,04 |
| 7 | 0,174 | 10,08 |
| 8 | 0,193 | 10,13 |

- Identifica a los corredores que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la tabla siguiente.

| Medalla | Calle | Tiempo de reacción (s) | Tiempo final (s) |
|---|---|---|---|
| ORO | | | |
| PLATA | | | |
| BRONCE | | | |

- Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos.

  Si el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, se considera que se ha producido una salida falsa, porque el corredor tiene que haber salido antes de oír la señal.

  Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce fuera menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

*(Prueba PISA 2003)*

| Medalla | Calle | Tiempo de reacción (s) | Tiempo final (s) |
|---|---|---|---|
| ORO | **3** | **0,197** | **9,87** |
| PLATA | **2** | **0,136** | **9,99** |
| BRONCE | **6** | **0,216** | **10,04** |

Para el ganador de la medalla de bronce:

10,04 − 0,216 = 9,824 s es la duración de la carrera.

9,99 − 9,824 = 0,166 s → Para haber ganado la medalla de plata tendría que haber realizado un tiempo de reacción comprendido entre 0,110 y 0,166 segundos.

# Potencias y raíces

2

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Calcula las siguientes potencias.**

a) $(-5)^3$ c) $(-5)^4$ e) $(-1)^9$

b) $5^3$ d) $5^4$ f) $1^9$

a) $-125$ c) $625$ e) $-1$

b) $125$ d) $625$ f) $1$

**2. Calcula estas raíces cuadradas.**

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{36}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{12}$

a) $\sqrt{16} = 4$ c) $\sqrt{36} = 6$ e) $\sqrt{12} = 3{,}46\ldots$

b) $\sqrt{7} = 2{,}65\ldots$ d) $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$

## VIDA COTIDIANA

**Los microscopios electrónicos nos permiten diferenciar objetos separados tan solo por 0,0002 milímetros, es decir, podemos ver objetos más pequeños que las células.**

- **Un científico está observando dos células separadas por $3{,}2 \cdot 10^{-7}$ m. ¿Las puede diferenciar si utiliza un microscopio que permite observar objetos separados por 0,0001 mm?**

$3{,}2 \cdot 10^{-7}$ m $= 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ mm $> 1 \cdot 10^{-4}$ mm $\longrightarrow$ El científico sí puede diferenciar las dos células con el microscopio.

## RESUELVE EL RETO

**$12^2 = 144$ $21^2 = 441$**

**$13^2 = 169$ $31^2 = 961$**

**Encuentra otro número de dos cifras que cumpla la misma propiedad.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$11^2 = 121$ $22^2 = 484$

**Halla un número que al elevarlo al cuadrado y sumarle 2 se convierta en un número al cubo.**

Las dos soluciones que existen son 5 y $-5$.

**Un número racional soy y mi raíz es mayor que yo mismo. Con premura y sin desvío señala dónde estoy.**

Cualquier número racional comprendido entre 0 y 1, ambos sin incluir, cumple la condición dada.

**¿Puedes escribir, solo con unos y ceros, un número irracional?**

Sí, por ejemplo, 1,01001000100001…

## ACTIVIDADES

**1. Escribe en forma de potencia estas multiplicaciones y halla el resultado.**

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

a) $2^9 = 512$ b) $(-4)^5 = -1\,024$ c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$

**2. Corrige los errores.**

a) $5^4 = 5 + 5 + 5 + 5$

b) $(-5)^3 = (-5) \cdot 3$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^7 = \left(\frac{-1}{5}\right)^7$

d) $-5^2 = (-5) \cdot (-5)$

a) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

c) $-\left(\frac{1}{5}\right)^7 = \left(-\frac{1}{5}\right)^7$

d) $-5^2 = -(5 \cdot 5)$

**3. Completa en tu cuaderno.**

a) $(\square)^3 = \frac{-125}{8}$ b) $(\square)^8 = 4^{\square} = 256$

a) $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{-125}{8}$ b) $(2)^8 = 4^4 = 256$ o bien $(-2)^8 = 4^4 = 256$

**4. Calcula estas potencias.**

a) $3^4$ d) $(-3)^0$ g) $(0,2)^0$ j) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}$

b) $(-3)^{-4}$ e) $(-3)^1$ h) $(0,2)^1$ k) $\left(-\frac{7}{8}\right)^{-1}$

c) $(-3)^4$ f) $(0,2)^{-3}$ i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ l) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

a) 81 d) 1 g) 1 j) 625

b) $\frac{1}{81}$ e) $-3$ h) 0,2 k) $-\frac{8}{7}$

c) 81 f) 125 i) $\frac{27}{8}$ l) $\frac{16}{9}$

**5. Resuelve.**

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-0,128)^0 + (-1)^2$

$-2 + 1 + 1 = 0$

**6. Escribe estas fracciones como potencia de exponente entero negativo.**

a) $\frac{1}{49}$ b) $\frac{-27}{8}$ c) $\frac{-1}{243}$ d) $\frac{625}{16}$

a) $7^{-2}$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ c) $(-3)^{-5}$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$

**7. Resuelve estas operaciones entre potencias.**

a) $(-3)^4 \cdot (-3)^5$

b) $5^{-2} \cdot 5^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5}$

e) $\left(\frac{7}{2}\right)^{5} : \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$

f) $2^{-8} : 2^{-3}$

g) $5^0 : 5^4$

h) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}$

a) $(-3)^9$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4$ e) $\left(\frac{7}{2}\right)^{7}$ g) $5^{-4}$

b) $5$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ f) $2^{-5}$ h) $\left(\frac{6}{5}\right)^{0} = 1$

**8. Halla el resultado.**

a) $(-2)^{-3} : (-2)^{-1}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$

b) $(-1)^{-2} \cdot (-1)^6$ d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{3}$

a) $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{81}$

b) $(-1)^4 = 1$ d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = -4$

**9. Señala qué desigualdad es cierta.**

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} < \frac{1}{4}$ b) $[2 \cdot (-1)]^4 < \frac{1}{2}$

a) Verdadera, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

b) Falsa, porque $[2\cdot(-1)]^4 = (-2)^4 = 2^4 = 16 > \frac{1}{2}$

**10. Halla el valor de estas potencias.**

a) $2^5 \cdot 2^3$ d) $(-4)^9 \cdot (-4)^5 \cdot (-4)$

b) $2^5 : 2^3$ e) $(-4)^9 : (-4)^5 : (-4)$

c) $3^7 \cdot 3^2 \cdot 3^4$ f) $(7 \cdot 4)^0$

a) $2^8 = 256$ c) $3^{13} = 1\,594\,323$ e) $(-4)^3 = -64$

b) $2^2 = 4$ d) $(-4)^{15} = -1\,073\,741\,824$ f) $28^0 = 1$

**11. Simplifica estas expresiones hasta expresarlas como una sola potencia.**

a) $7^4 \cdot 2^4$ d) $8^5 : (-2)^5$
b) $8^{-3} : 2^{-3}$ e) $(-3)^{-2} \cdot (-4)^{-2}$
c) $(-5)^6 \cdot 3^6$ f) $(-10)^{-4} : (-5)^{-4}$

a) $14^4$ c) $(-15)^6$ e) $12^{-2}$
b) $4^{-3}$ d) $(-4)^5$ f) $2^{-4}$

**12. Expresa como una sola potencia.**

a) $11^6 \cdot 11^4$ d) $25^4 : 5^3$ g) $14^5 : 2^5$
b) $25^4 \cdot 5^3$ e) $2^5 \cdot 14^5$ h) $8^7 : 8^{-8}$
c) $11^6 : 11^4$ f) $8^7 \cdot 8^{-8}$ i) $7^0 : 21^3$

a) $11^{10}$ d) $5^5$ g) $7^5$
b) $5^{11}$ e) $28^5$ h) $8^{15}$
c) $11^2$ f) $8^{-1}$ i) $21^{-3}$

**13. Expresa el resultado como una sola potencia.**

a) $(3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^8) : 3^9$
b) $(-2)^4 \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^5$
c) $(-7)^8 : (-7)^4 \cdot (-7)^2$
d) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^6$
e) $\left[\left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^3\right] : \left[\left(\frac{-1}{9}\right)^4 : \left(\frac{-1}{9}\right)\right]$
f) $(-5)^8 : [(-5)^3 : (-5)^3]$

a) $3^6$ c) $(-7)^6 = 7^6$ e) $\left(\frac{-1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2$
b) $(-2)^{15}$ d) $\frac{5}{2}$ f) $(-5)^8 = 5^8$

**14. Simplifica estos productos de potencias.**

a) $5^4 \cdot 25^3$ d) $4^7 \cdot 32$ g) $-72^3 \cdot (-4)^7$
b) $8^4 \cdot 16^2$ e) $-12^3 \cdot 18^5$ h) $32^2 \cdot (-24)^3$
c) $6^3 \cdot 12^5$ f) $(-63)^5 \cdot 21^2$ i) $54^2 \cdot (-18)^4$

a) $5^{10}$ d) $2^{19}$ g) $3^6 \cdot 2^{23}$
b) $2^{20}$ e) $-2^{11} \cdot 3^{13}$ h) $-2^{19} \cdot 3^3$
c) $2^{13} \cdot 3^8$ f) $-3^{12} \cdot 7^7$ i) $3^{14} \cdot 2^6$

**15.** **Escribe en notación científica estos números.**

a) 567 000 000
b) 842 300 000 000
c) 493 000 000
d) 315 000 000 000
e) 0,00000000334
f) 0,0000642435
g) 12,00056
h) 253

**a)** $5{,}67\cdot 10^{8}$
**b)** $8{,}423\cdot 10^{11}$
**c)** $4{,}93\cdot 10^{8}$
**d)** $3{,}15\cdot 10^{11}$
**e)** $3{,}34\cdot 10^{-9}$
**f)** $6{,}42435\cdot 10^{-5}$
**g)** $1{,}200056\cdot 10$
**h)** $2{,}53\cdot 10^{2}$

**16.** **Transforma estas operaciones en números escritos en notación científica.**

a) $267{,}8\cdot 10\,000$
b) $0{,}0005\cdot 10^{-3}$
c) $1\,800\cdot 10^{-9}$
d) $0{,}00082\cdot 10^{15}$

**a)** $2{,}678\cdot 10^{6}$
**b)** $5\cdot 10^{-7}$
**c)** $1{,}8\cdot 10^{-6}$
**d)** $8{,}2\cdot 10^{11}$

**17.** **Escribe en notación científica.**

a) $5^{8}\cdot 2^{12}$ b) $750\cdot (5^{4}\cdot 2^{4})^{-1}$ c) $25^{7} : 125^{4} : 10^{-6}$

**a)** $5^{8}\cdot 2^{8}\cdot 2^{4} = 1{,}6\cdot 10^{9}$
**b)** $7{,}5\cdot 10^{2}\cdot 10^{-4} = 7{,}5\cdot 10^{-2}$
**c)** $5^{14} : 5^{12} : 10^{-6} = 2{,}5\cdot 10^{7}$

**18.** **Expresa estos números en notación científica.**

a) 650 000 000
b) 90 000 000 000
c) 44 400 000
d) 12 675 000 000 000
e) 393 000 000 000
f) 1 000 000 000 000

**a)** $6{,}5\cdot 10^{8}$
**b)** $9\cdot 10^{10}$
**c)** $4{,}44\cdot 10^{7}$
**d)** $1{,}2675\cdot 10^{13}$
**e)** $3{,}93\cdot 10^{11}$
**f)** $10^{12}$

**19.** **Expresa estos números en notación científica.**

a) 0,0025
b) 0,0000008
c) 0,000054
d) 0,00000000113
e) 0,000000752
f) 0,000000004

**a)** $2{,}5\cdot 10^{-3}$
**b)** $8\cdot 10^{-7}$
**c)** $5{,}4\cdot 10^{-5}$
**d)** $1{,}13\cdot 10^{-9}$
**e)** $7{,}52\cdot 10^{-7}$
**f)** $4\cdot 10^{-9}$

**20. Expresa estas cantidades en metros y luego escríbelas en notación científica.**

a) 12 000 km
b) 3 820,06 dam
c) 0,0051 mm
d) 28 000 000 000 dm
e) 0,0000000079 hm
f) 31 008 462,5 cm

a) 12 000 km = 12 000 000 m = $1,2 \cdot 10^7$ m

b) 3 820,06 dam = 38 200,6 m = $3,82006 \cdot 10^4$ m

c) 0,0051 mm = 0,0000051 m = $5,1 \cdot 10^{-6}$ m

d) 28 000 000 000 dm = 2 800 000 000 m = $2,8 \cdot 10^9$ m

e) 0,0000000079 hm = 0,00000079 m = $7,9 \cdot 10^{-7}$ m

f) 31 008 462,5 cm = 310 084,625 m = $3,10084625 \cdot 10^5$ m

**21. Corrige los errores cometidos al escribir estos números en notación científica.**

a) $375000 = 375 \cdot 10^3$
b) $375000000 = 375 \cdot 10^8$
c) $3750000 = 3 \cdot 10^6$
d) $0,00375 = 375 \cdot 10^{-5}$
e) $0,00000375 = 3,75 \cdot 10^6$

a) $375\,000 = 3,75 \cdot 10^5$

b) $375\,000\,000 = 3,75 \cdot 10^8$

c) $3\,750\,000 = 3,75 \cdot 10^6$

d) $0,00375 = 3,75 \cdot 10^{-3}$

e) $0,00000375 = 3,75 \cdot 10^{-6}$

**22. Expresa en notación científica.**

a) $2^7 \cdot 5^3$
b) $2^6 : 10^8$
c) $7^3 \cdot 10^{-6}$
d) $3^4 : 10^{-5}$
e) $2^{10} \cdot 5^8$
f) $6^6 \cdot 10^4 : 2^5$

a) $2^4 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 1,6 \cdot 10^4$

b) $64 : 10^8 = 6,4 \cdot 10^{-7}$

c) $343 \cdot 10^{-6} = 3,43 \cdot 10^{-4}$

d) $81 : 10^{-5} = 8,1 \cdot 10^6$

e) $2^2 \cdot 2^8 \cdot 5^8 = 4 \cdot 10^8$

f) $1458 \cdot 10^4 = 1,458 \cdot 10^7$

**23. Completa en tu cuaderno con un número escrito en notación científica.**

a) 10,5 millones de € = □ céntimos de €.
b) 45 700 toneladas de tomate = □ kg de tomate.
c) 600 000 huevos = □ docenas de huevos.

a) 10,5 millones de € = $1,05 \cdot 10^9$ céntimos de €.

b) 45 700 toneladas de tomate = $4,57 \cdot 10^7$ kg de tomate.

c) 600 000 huevos = $5 \cdot 10^4$ docenas de huevos.

**24.** **Halla el resultado de estas operaciones.**

a) $7{,}524 \cdot 10^{-4} + 3{,}1 \cdot 10^{-4}$
b) $4{,}6 \cdot 10^{4} + 5{,}7 \cdot 10^{5}$
c) $3{,}9 \cdot 10^{-3} + 1{,}27 \cdot 10^{-2}$
d) $9{,}6 \cdot 10^{7} - 7{,}31 \cdot 10^{5}$
e) $4{,}85 \cdot 10^{10} - 9{,}58 \cdot 10^{7}$
f) $1{,}8 \cdot 10^{-3} - 4{,}27 \cdot 10^{-4}$
g) $(7{,}2 \cdot 10^{9}) \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-5})$
h) $(5{,}08 \cdot 10^{6}) \cdot (2{,}7 \cdot 10^{4})$
i) $(3{,}25 \cdot 10^{-1}) \cdot (8{,}01 \cdot 10^{4})$
j) $(7{,}2 \cdot 10^{7}) : (2 \cdot 10^{5})$
k) $(2{,}1 \cdot 10^{-3}) : (8{,}4 \cdot 10^{-4})$
l) $(1{,}2 \cdot 10^{-2}) : (6 \cdot 10^{2})$

a) $1{,}0624 \cdot 10^{-3}$
b) $6{,}16 \cdot 10^{5}$
c) $1{,}66 \cdot 10^{-2}$
d) $9{,}5269 \cdot 10^{7}$
e) $4{,}84042 \cdot 10^{10}$
f) $1{,}373 \cdot 10^{-3}$
g) $1{,}008 \cdot 10^{5}$
h) $1{,}3716 \cdot 10^{11}$
i) $2{,}60325 \cdot 10^{4}$
j) $3{,}6 \cdot 10^{2}$
k) $2{,}5$
l) $2 \cdot 10^{-5}$

**25.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $6 \cdot 10^{3} + \square = 9 \cdot 10^{4}$
b) $3{,}4 \cdot 10^{6} - \square = 7{,}6 \cdot 10^{5}$
c) $6{,}42 \cdot 10^{-4} + \square = 9{,}256 \cdot 10^{-3}$

a) $6 \cdot 10^{3} + 8{,}4 \cdot 10^{4} = 9 \cdot 10^{4}$

b) $3{,}4 \cdot 10^{6} - 2{,}64 \cdot 10^{6} = 7{,}6 \cdot 10^{5}$

c) $6{,}42 \cdot 10^{-4} + 8{,}614 \cdot 10^{-3} = 9{,}256 \cdot 10^{-3}$

**26.** **Resuelve esta suma: $7{,}8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99}$. Luego, utiliza la calculadora para realizarla. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que sucede esto?**

$7{,}8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99} = 1{,}28 \cdot 10^{100}$

La calculadora devuelve *error*, porque no es capaz de expresar exponentes mayores que 99.

**27.** **Efectúa estas operaciones con raíces.**

a) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{12} + 5\sqrt{12} - \sqrt{12}$
b) $-\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + \sqrt{7}$
c) $4\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$
d) $-4\sqrt{14} : 2\sqrt{2}$

a) $3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$
b) $\sqrt{7}$
c) $4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$
d) $-2\sqrt{14} \cdot \sqrt{2} = -4\sqrt{7}$

**28.** **Calcula.**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$
b) $\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\right)^{2}$

a) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

b) $6$

**29. Efectúa, respetando la jerarquía de las operaciones:** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}+5\sqrt{6}$.

$3-\sqrt{6}+5\sqrt{6}=3+4\sqrt{6}$

**30. Extrae los factores que sea posible de las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{48}$ e) $\sqrt{54}$ f) $\sqrt{72}$

g) $\sqrt{100}$ h) $\sqrt{216}$ i) $\sqrt{350}$ j) $\sqrt{484}$ k) $\sqrt{504}$ l) $\sqrt{540}$

m) $\sqrt{864}$ n) $\sqrt{1800}$ ñ) $\sqrt{2304}$ o) $\sqrt{2450}$ p) $\sqrt{4375}$ q) $\sqrt{9065}$

a) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

d) $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

e) $\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

f) $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

g) 10

h) $\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

i) $\sqrt{350}=5\sqrt{14}$

j) 22

k) $\sqrt{504}=6\sqrt{14}$

l) $\sqrt{540}=6\sqrt{15}$

m) $\sqrt{864}=12\sqrt{6}$

n) $\sqrt{1800}=30\sqrt{2}$

ñ) 48

o) $\sqrt{2450}=35\sqrt{2}$

p) $\sqrt{4375}=25\sqrt{7}$

q) $\sqrt{9065}=7\sqrt{185}$

**31. Completa en tu cuaderno.**

a) $\sqrt{5^{\square}}=5$

b) $\sqrt{3^{\square}}=3^2$

c) $\sqrt{5^{\square}}=5^3$

d) $\sqrt{7^{\square}}=7^4$

e) $\sqrt{2^{\square}\cdot 3^{\square}}=2\cdot 3^2$

f) $\sqrt{5^{\square}\cdot 7^{\square}}=5^3\cdot 7^2$

g) $\sqrt{11^{\square}\cdot 3^{\square}}=11^5\cdot 3$

h) $\sqrt{2^{\square}\cdot 7^{\square}\cdot 13^{\square}}=2\cdot 7^4\cdot 13$

a) $\sqrt{5^2}=5$

b) $\sqrt{3^4}=3^2$

c) $\sqrt{5^6}=5^3$

d) $\sqrt{7^8}=7^4$

e) $\sqrt{2^2\cdot 3^4}=2\cdot 3^2$

f) $\sqrt{5^6\cdot 7^4}=5^3\cdot 7^2$

g) $\sqrt{11^{10}\cdot 3^2}=11^5\cdot 3$

h) $\sqrt{2^2\cdot 7^8\cdot 13^2}=2\cdot 7^4\cdot 13$

**32.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $\sqrt{2^{\square}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3^{\square}} = 3^2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5^{\square}} = 5^3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7^{\square}\cdot 5^{\square}} = 7\cdot 5\sqrt{5}$

e) $\sqrt{5^{\square}\cdot 3^{\square}} = 5^2\cdot 3\sqrt{5}$

f) $\sqrt{3^{\square}\cdot 7^{\square}\cdot 11^{\square}} = 3^2\cdot 7\sqrt{11}$

g) $\sqrt{2^{\square}\cdot 5^{\square}\cdot 13^{\square}} = 5\sqrt{2\cdot 13}$

a) $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3^5} = 3^2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5^7} = 5^3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7^2\cdot 5^3} = 7\cdot 5\sqrt{5}$

e) $\sqrt{5^5\cdot 3^2} = 5^2\cdot 3\sqrt{5}$

f) $\sqrt{3^4\cdot 7^2\cdot 11} = 3^2\cdot 7\sqrt{11}$

g) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 13} = 5\sqrt{2\cdot 13}$

**33.** **Extrae de la raíz todos los factores que sea posible, sin efectuar las potencias.**

a) $\sqrt{25^2}$

b) $\sqrt{4^7}$

c) $\sqrt{16^3}$

d) $\sqrt{36^4}$

e) $\sqrt{7^5}$

f) $\sqrt{3^9}$

g) $\sqrt{5^7}$

h) $\sqrt{18^5}$

a) $\sqrt{5^4} = 5^2$

b) $\sqrt{2^{14}} = 2^7$

c) $\sqrt{2^{12}} = 2^6$

d) $\sqrt{6^8} = 6^4$

e) $\sqrt{7^5} = 7^2\sqrt{7}$

f) $\sqrt{3^9} = 3^4\sqrt{3}$

g) $\sqrt{5^7} = 5^3\sqrt{5}$

h) $\sqrt{18^5} = \sqrt{3^{10}\cdot 2^5} = 3^5\cdot 2^2\sqrt{2}$

**34.** **Resuelve estas operaciones con raíces sacando factores de las raíces.**

a) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{128}$

b) $2\sqrt{27} - 2\sqrt{243} + \sqrt{2187}$

c) $5\sqrt{6} - 2\sqrt{12} + \sqrt{18} - 8\sqrt{24}$

d) $-\sqrt{125} - 3\sqrt{45} + 6\sqrt{20} - \sqrt{80}$

a) $2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 27\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 16\sqrt{6} = -11\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

d) $-5\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -6\sqrt{5}$

**35.** **Clasifica en racionales o irracionales:**

a) $\sqrt{4{,}2}$

b) $0{,}00\widehat{1234}$

c) $-3{,}67$

d) $0$

e) $-\sqrt{4}$

f) $2\sqrt{9}$

g) $3\sqrt{7}$

h) $2\sqrt{3}$

i) $(\sqrt{3})^2$

j) $2 + \sqrt{7}$

k) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

l) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$

a) Irracional. e) Racional. i) Racional.

b) Racional. f) Racional. j) Irracional.

c) Racional. g) Irracional. k) Racional.

d) Racional. h) Irracional. l) Racional.

**36. Con las cifras 1, 2 y 3, escribe un número:**

a) Irracional. c) Decimal periódico puro.

b) Decimal exacto. d) Decimal periódico mixto.

**¿Cuáles de ellos son números reales?**

a) 1,123123312333… c) 3,12121212…

b) 2,31 d) 2,311111…

Todos son reales.

**37. ¿Existen números irracionales con un número exacto de cifras decimales?**

No. Por definición, son aquellos que tienen un número ilimitado de cifras decimales no periódicas.

**38. Trunca y redondea estos números a las décimas y a las milésimas.**

a) $\frac{1}{7}$ e) 4,90238 i) $\frac{5}{3}$

b) $0,\widehat{62}$ f) 0,012345… j) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{3}$ g) $75,\widehat{3}$ k) 1,999

d) $0,0\widehat{6}$ h) 31,07921 l) $\sqrt{6}$

| | Décimas | | Milésimas | |
|---|---|---|---|---|
| | Truncamiento | Redondeo | Truncamiento | Redondeo |
| **a)** $\frac{1}{7}$ | 0,1 | 0,1 | 0,142 | 0,143 |
| **b)** $0,\widehat{62}$ | 0,6 | 0,6 | 0,626 | 0,626 |
| **c)** $\sqrt{3}$ | 1,7 | 1,7 | 1,732 | 1,732 |
| **d)** $0,0\widehat{6}$ | 0,0 | 0,1 | 0,066 | 0,067 |
| **e)** 4,90238 | 4,9 | 4,9 | 4,902 | 4,902 |
| **f)** 0,012345… | 0,0 | 0,0 | 0,012 | 0,012 |
| **g)** $75,\widehat{3}$ | 75,3 | 75,3 | 75,333 | 75,333 |
| **h)** 31,07921 | 31,0 | 31,1 | 31,079 | 31,079 |
| **i)** $\frac{5}{3}$ | 1,6 | 1,7 | 1,666 | 1,667 |
| **j)** $\sqrt{8}$ | 2,8 | 2,8 | 2,828 | 2,828 |
| **k)** 1,999 | 1,9 | 2,0 | 1,999 | 1,999 |
| **l)** $\sqrt{6}$ | 2,4 | 2,4 | 2,449 | 2,449 |

**39. Halla el error absoluto y relativo cometidos al truncar 3,8976 con dos cifras significativas.**

$E_a = 3,8976 - 3,8 = 0,0976$

$E_r = 0,0976 : 3,8976 = 0,025$

**40. ¿En cuál de los siguientes casos se comete mayor error?**

a) Al aproximar 513,89 kg a 520 kg.

b) Al indicar un peso de 2,57 kg, cuando el objeto pesa realmente 40 g más.

a) $E_r = (520 - 513{,}89) : 513{,}89 = 0{,}0119$

b) $E_r = (2{,}61 - 2{,}57) : 2{,}61 = 0{,}0153$

El error relativo es menor en el apartado b).

**41. Representa estos intervalos e indica dos números racionales y dos irracionales en cada uno.**

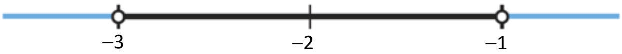
a) [2, 5)
c) [−2, 8]
b) (−3, −1)
d) (0, 7]

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)



Racionales: $3$ y $\frac{5}{2}$ Irracionales: $\sqrt{6}$ y $\pi$

b)



Racionales: $-2$ y $-\frac{3}{2}$ Irracionales: $-\sqrt{5}$ y $-\sqrt{2}$

c)



Racionales: $0$ y $-\frac{3}{2}$ Irracionales: $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{2}$

d)



Racionales: $4$ y $\frac{3}{2}$ Irracionales: $\sqrt{15}$ y $2+\sqrt{7}$

**42. Escribe tres números que pertenezcan a cada uno de estos intervalos.**

a) (0, 1)
c) [−2; 0,5)
b) (−3,5; 2]
d) [1; 1,1]

Respuesta abierta. Por ejemplo:

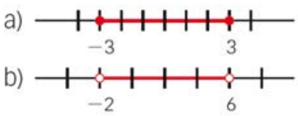
a) 0,5; 0,123 y 0,876

b) −2,43; 0 y 2

c) −1,02; −0,3333… y 0,49

d) 1; 1,01 y 1,1

**43. Indica el intervalo que se representa.**



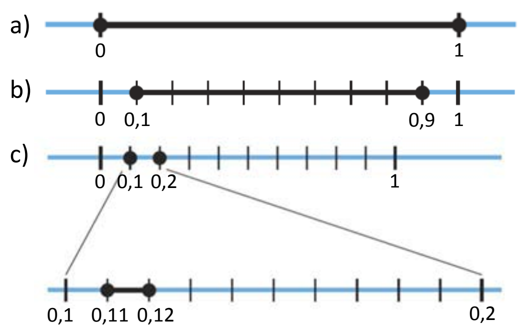

a) [−3, 3] b) (−2, 6)

**44. Representa estos intervalos e indica alguno de sus puntos.**

a) $[0, 1]$ b) $[0{,}1; 0{,}9]$ c) $[0{,}11; 0{,}12]$

**¿Cuántos puntos hay en cada intervalo?**

Respuesta abierta. Por ejemplo:




Puntos: 0; 0,2; 1

Puntos: 0,1; 0,2222…; 0,9

Puntos: 0,11; 0,113333…; 0,12

En cada intervalo hay infinitos puntos.

**45. Escribe en forma de potencia y calcula el resultado.**

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

c) $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

e) $2{,}6 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}6$

a) $3^8 = 6561$

b) $(-2)^3 = -8$

c) $(0{,}7)^5 = 0{,}16807$

d) $\left(\frac{-1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

e) $(2{,}6)^4 = 45{,}6976$

**46. Escribe en forma de producto y calcula el resultado.**

a) $(-5)^3$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ g) $3^6$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ e) $2^7$ h) $(-0{,}5)^4$

c) $(0{,}\widehat{2})^4$ f) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ i) $0{,}16^2$

a) $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$

c) $\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{16}{6561}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

e) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 128$

f) $\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-27}{64}$

g) $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 729$

h) $(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5) = 0{,}0625$

i) $0{,}16\cdot0{,}16 = 0{,}0256$

**47.** **Escribe, si es posible, estas expresiones en forma de potencia.**

a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$
b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
c) $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4$
d) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5$
e) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3)$
f) $(6 + 6 + 6 + 6) \cdot 6$
g) $23 + 23 + 23 + 23$
h) $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

a) $9^5$
b) No es posible.
c) No es posible.
d) No es posible.
e) $6^3$
f) $12^2$
g) No es posible.
h) No es posible.

**48.** **Expresa cada número como potencia de un número positivo.**

a) $\frac{9}{16}$
b) $64$
c) $81$
d) $\frac{27}{64}$
e) $\frac{4}{9}$
f) $\frac{1}{125}$
g) $0{,}25$
h) $100\,000$
i) $0{,}001$

a) $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
b) $64 = 2^6$
c) $81 = 3^4$
d) $\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$
e) $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
f) $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$
g) $0{,}25 = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$
h) $100\,000 = 10^5$
i) $0{,}001 = 10^{-3}$

**49.** **Expresa cada número como potencia de un número negativo.**

a) $-32$
b) $64$
c) $-27$
d) $\frac{-1}{128}$
e) $\frac{-125}{8}$
f) $10\,000$
g) $0{,}49$
h) $\frac{25}{16}$
i) $-\frac{27}{64}$

a) $-32 = (-2)^5$
b) $64 = (-2)^6$
c) $-27 = (-3)^3$
d) $\frac{-1}{128} = \left(\frac{-1}{2}\right)^7$
e) $\frac{-125}{8} = \left(\frac{-5}{2}\right)^3$
f) $10\,000 = (-10)^4$
g) $0{,}49 = (-0{,}7)^2$
h) $\frac{25}{16} = \left(\frac{-5}{4}\right)^2$
i) $\frac{-27}{64} = \left(\frac{-3}{4}\right)^3$

**50.** **Calcula estas potencias.**

a) $-2^4$ d) $-(-2)^4$ g) $(-2)^{-2}$

b) $(-2)^3$ e) $-(-2)^0$ h) $-(-2)^{-3}$

c) $-(-2)^2$ f) $2^{-2}$ i) $-2^{-4}$

a) $-16$ c) $-4$ e) $-1$ g) $\frac{1}{4}$ i) $\frac{-1}{16}$

b) $-8$ d) $-16$ f) $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{8}$

**51.** **Halla el valor de *a* en cada caso.**

a) $(-2)^a = 64$ d) $5^a = 625$

b) $3^{-a} = 9$ e) $a^4 = 16$

c) $(-3)^a = -243$ f) $(-a)^7 = -128$

a) $a = 6$ b) $a = -2$ c) $a = 5$ d) $a = 4$ e) $a = 2$ f) $a = 2$

**52.** **Calcula estas potencias.**

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ g) $(1,\widehat{6})^0$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ e) $0,15^{-2}$ h) $(-1)^{-2}$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ f) $(-0,1)^{-3}$ i) $\left(\frac{-4}{3}\right)^0$

a) $2$ c) $\frac{-27}{8}$ e) $\left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9}$ g) $1$ i) $1$

b) $\frac{5}{2}$ d) $9$ f) $-1\,000$ h) $1$

**53.** **Corrige el error cometido en cada caso.**

a) $(-2^2) = (-2)\cdot(-2)$ d) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-1} = -\left(\frac{-1}{4}\right)$

b) $3^{-3} = (-3)^3$ e) $-(-2)^4 = 2^4$

c) $(-5)^3 = (-5) + (-5) + (-5)$ f) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$

a) $\left(-2^2\right) = -2\cdot 2 = -4 \neq (-2)\cdot(-2) = 4$

b) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \neq (-3)^3 = -27$

c) $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125 \neq (-5)+(-5)+(-5) = -15$

d) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-1} = -4 \neq -\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

e) $-(-2)^4 = -(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -16 \neq 2^4 = 16$

f) $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq \frac{4}{9}$

**54.** **Efectúa estas operaciones.**

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$ d) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

c) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$ f) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$ d) $1-2=-1$ f) $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

**55.** **Calcula el resultado de estas operaciones.**

a) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2$ d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ c) $2+4=6$ e) $9+\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$ d) $\frac{1}{3}-2=\frac{-5}{3}$ f) $9-4=5$

**56.** **Indica el signo del resultado en cada caso.**

a) $(-1,5)^{63}$ d) $-5,6^{26}$

b) $3,75^{-100}$ e) $(-0,3)^{-11}$

c) $(-4,222\ldots)^{-25}$ f) $-(-2,4)^5$

a) Negativo. c) Negativo. e) Negativo.

b) Positivo. d) Negativo. f) Positivo.

**57.** **Determina si estas igualdades son verdaderas o falsas.**

a) $(0,2)^3=5^{-3}$

b) $(0,\widehat{6})^2=\frac{25}{81}$

c) $7^2=0,7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$

d) $(-4)^{-3}=(-64)^{-1}$

a) $(0,2)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3=5^{-3}\rightarrow$ Verdadera. c) $7^2\neq\frac{7}{10}\cdot 7^3\rightarrow$ Falsa.

b) $(0,\widehat{6})^2=\left(\frac{6}{9}\right)^2\neq\frac{25}{81}=\left(\frac{5}{9}\right)^2\rightarrow$ Falsa. d) $(-4)^{-3}=\left(\frac{-1}{4}\right)^3=\frac{-1}{64}=(-64)^{-1}\rightarrow$ Verdadera.

**58.** **Expresa el resultado con una sola potencia.**

a) $2^4 \cdot 2^{-3} \cdot 2^8$

b) $5^{-2} : 5^{-7} : 5^0$

c) $(-3)^{14} : (-3)^8 \cdot (-3)^5$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e) $3^{-3} : 3^{-2} \cdot 3^{-6}$

f) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^{-5}$

g) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6$

h) $7^7 \cdot 7^{-2} \cdot 7^{-5}$

a) $2^9$ c) $(-3)^{11}$ e) $3^{-7}$ g) $\left(\frac{3}{5}\right)^9$

b) $5^5$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$ f) $2^8$ h) $7^0 = 1$

**59.** **Resuelve estas operaciones.**

a) $[(-2)^4 : (-2)^2] \cdot [(-2)^5]^3$

b) $(3^{-2} \cdot 3^{-8})^6$

c) $(-5)^7 \cdot [(-5)^{-2}]^{-2} \cdot (-5)^{-8}$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^{-1}$

e) $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^{12} : \left(\frac{-2}{5}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

a) $(-2)^{17}$ c) $(-5)^3$ e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9$

b) $3^{-60}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$

**60.** **Efectúa dando el resultado en forma de potencia.**

a) $4^3 \cdot (-5)^3$

b) $(-12)^7 : (-3)^7$

c) $\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \cdot 7^2$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^4 : \left(\frac{-1}{4}\right)^4$

e) $(-3)^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5$

f) $16^4 : (-4)^4 \cdot 3^4$

g) $2^6 \cdot (-8)^6 : 4^6$

h) $18^2 : 3^2 : 2^2$

a) $(-20)^3$ c) $\left(\frac{7}{3}\right)^2$ e) $(-30)^5$ g) $4^6$

b) $4^7$ d) $5^4$ f) $12^4$ h) $3^2$

**61. Completa en tu cuaderno.**

a) $2^3 \cdot \square = 2^5$

b) $(-4)^5 \cdot \square = (-4)^{10}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \square = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

d) $(-3)^{12} : \square = (-3)^6$

e) $\square : 5^6 = 5$

f) $\square : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

b) $(-4)^5 \cdot (-4)^5 = (-4)^{10}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

d) $(-3)^{12} : (-3)^6 = (-3)^6$

e) $5^7 : 5^6 = 5$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

**62. Completa estas igualdades en tu cuaderno.**

a) $[(-5)^3]^{\square} : (-5)^7 = (-5)^5$

b) $(\square^2)^5 \cdot \square^4 = (-3)^{14}$

c) $(7^3)^5 : 7^{\square} = 1$

d) $11^9 \cdot (11^2)^3 = 11^{\square}$

a) $[(-5)^3]^4 : (-5)^7 = (-5)^5$

b) $[(-3)^2]^5 \cdot (-3)^4 = (-3)^{14}$

c) $(7^3)^5 : 7^{15} = 1$

d) $11^9 \cdot (11^2)^3 = 11^{15}$

**63. Expresa estas operaciones con una sola potencia.**

a) $27^3 : 9^4$

b) $4^4 : 2^5$

c) $(-7)^3 : (49)^2$

d) $16^{-1} \cdot 8^{-2}$

e) $125^2 \cdot 25^{-2}$

f) $2^{-4} : 32^{-1}$

a) $3$

b) $2^3$

c) $(-7)^{-1}$

d) $2^{-10}$

e) $5^2$

f) $2$

**64. Expresa con una sola potencia.**

a) $(4^2)^3 \cdot 2^4$

b) $(-3^2)^4 \cdot (-3)^2$

c) $(16^{-2})^4 \cdot 8^3$

d) $25^{-1} : (-5)^{-2}$

e) $(-3^2)^2 : (-3^3)^3$

f) $9^4 : 81^{-1}$

g) $(-16)^{-2} : (-4)^5$

h) $(-4^2)^3 : (-2^3)^3$

a) $2^{16}$

b) $3^{10}$

c) $2^{-23}$

d) $5^0 = 1$

e) $(-3)^{-5}$

f) $3^{12}$

g) $-2^{-18}$

h) $2^3$

**65. Resuelve estas operaciones.**

a) $(5^{-1})^3 : 2^5$

b) $(16^{-2})^4 \cdot 8^3$

c) $81^{-2} \cdot 27^4$

d) $49^3 : \left(\frac{1}{7}\right)^5$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{-6}$

f) $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-3} \cdot 3^6$

g) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : 4^{-3}$

h) $25^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

a) $\frac{1}{5^3 \cdot 2^5}$ c) $3^4$ e) $2^{-9}$ g) $4^1 = 4$

b) $2^{-23}$ d) $7^{11}$ f) $(-3)^9$ h) $5^2$

**66. Justifica si son ciertas o no las igualdades.**

a) $9^{-1} = -9$

b) $(-2)^{-4} = 2^4$

c) $(-3)^{-6} = 3^{-6}$

d) $(-3)^{-3} = (-3)^{-2} \cdot 3^{-1}$

e) $4^{-3} = (-4)^{-1} \cdot (-4)^4$

f) $(2^{-5})^{-1} = 2^{-6}$

a) Falsa: un número es positivo y el otro negativo.
b) Falsa: $(-2)^{-4} = 2^{-4}$
c) Verdadera: $(-3)^{-6} = (-1)^{-6} \cdot 3^{-6}$
d) Falsa: $(-3)^{-3} = (-3)^{-2} \cdot (-3)^{-1} \neq (-3)^{-2} \cdot 3^{-1}$
e) Falsa: $(-4)^{-1} \cdot (-4)^4 = (-4)^3 \neq 4^{-3}$
f) Falsa: $(2^{-5})^{-1} = 2^5$

**67. Indica y corrige el error cometido en cada caso.**

a) $0{,}5^2 + 0{,}4^2 = (0{,}5 + 0{,}4)^2 = 0{,}9^2$

b) $(1 - 2)^2 = 1^2 - 2^2 = 1 - 4$

c) $3^2 + 2^2 + 1^2 = (3 + 2 + 1) \cdot (3 + 2 + 1)$

d) $1^{-1} + 2^{-1} = 3^{-2}$

a) Hay que realizar las potencias y después la suma, no al revés:

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{25}{100} + \frac{16}{100} = \frac{41}{100} = 0{,}41 \neq 0{,}9^2 = 0{,}81$$

b) Hay que realizar la operación del paréntesis y luego la potencia, no al revés:

$$(1-2)^2 = 1 \neq 1-4$$

c) Hay que realizar las potencias y después las sumas, no al revés:

$$9+4+1 = 14 \neq (3+2+1)\cdot(3+2+1) = 36$$

d) Hay que realizar las potencias y después la suma, no al revés.

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

**69.** **Expresa el resultado de cada división como una sola potencia.**

a) $3^8 : (-3)^4$

b) $(-9)^{12} : (-9)^4$

c) $(-12)^{15} : 12^3 : 12^5$

d) $31^{40} : (-31)^4 : (-31)$

e) $(-0,5)^{30} : (-0,5)^5 : (-0,5)^3$

a) $3^4$
b) $(-9)^8$
c) $-12^7$
d) $-31^{35}$
e) $(0,5)^{22}$

**71.** **Resuelve estas operaciones.**

a) $[(-12)^2 \cdot 6^{-2}]^3$
b) $[18^{-1} \cdot 3^2]^{-1}$
c) $[5^4 : 30^{-2}]^2$
d) $[(-3)^{-4} \cdot 6^3]^4$
e) $[10^{-5} : 2^{-3}]^{-3}$
f) $[14^3 : 7^{-2}]^4$
g) $[(-50)^{-3} \cdot 20^4]^{-1}$
h) $[(-42)^4 : 14^3]^{-2}$
i) $[15^{-4} : 45^{-2}]^{-3}$
j) $[(-1)^9 \cdot 10^{-3}]^5$
k) $[24^{-6} : 6^{-3}]^3$
l) $[16^3 : 4^{-1}]^5$

a) $\left[12^2 : 6^2\right]^3 = 2^6$

b) $\left[3^2 : 18\right]^{-1} = 2$

c) $\left[5^4 \cdot 30^2\right]^2 = 5^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^4$

d) $\left[6^3 : 3^4\right]^4 = \left[2^3 : 3\right]^4 = 2^{12} \cdot 3^{-4}$

e) $\left[2^3 : (2 \cdot 5)^5\right]^{-3} = 2^6 \cdot 5^{15}$

f) $\left[14^3 \cdot 7^2\right]^4 = 2^{12} \cdot 7^{20}$

g) $\left[20^4 : (-50)^3\right]^{-1} = -2^{-5} \cdot 5^2$

h) $\left[(2 \cdot 3 \cdot 7)^4 : (2 \cdot 7)^3\right]^{-2} = 2^{-2} \cdot 7^{-2} \cdot 3^{-8}$

i) $\left[45^2 : 15^4\right]^{-3} = 5^6$

j) $\left[-1 : 10^3\right]^5 = -10^{-15}$

k) $\left[6^3 : 24^6\right]^3 = 2^{-45} \cdot 3^{-9}$

l) $\left[4^6 : 4^{-1}\right]^5 = 2^{70}$

**72.** **Resuelve.**

a) $(-2)^{-4} \cdot [(-2)^2]^3$
b) $3^4 \cdot [(-3)^2]^{-2}$
c) $(-8)^3 \cdot 2^{-4}$
d) $(-2)^{-3} \cdot 2^{-3}$
e) $-2^{-3} \cdot (-2^{-4})$
f) $(-2^6) \cdot (-2^{-6})$
g) $(-3)^4 \cdot (-3^4)$
h) $4^{-3} \cdot 2^{-2}$

a) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^6 = (-2)^2$
b) $3^4 \cdot 3^{-4} = 3^0 = 1$
c) $(-2)^9 \cdot 2^{-4} = (-2)^5$
d) $-2^{-3} \cdot 2^{-3} = -2^{-6}$
e) $2^{-7}$
f) $2^0 = 1$
g) $-3^8$
h) $2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-8}$

**73.** **Expresa el resultado como una sola potencia.**

a) $(5^2 \cdot 25^2)^3$
b) $[9^2 : (-27)^4]^4$
c) $[(-2)^{12}]^3 \cdot 8^5$
d) $(6^3 \cdot 36^2)^6$
e) $[3^{12}]^3 \cdot [(-27)^5]^2$
f) $(16^2 : 64^3)^5 \cdot 4^4$

a) $\left[5^2 \cdot 5^4\right]^3 = 5^{18}$ c) $2^{36} \cdot 2^{15} = 2^{51}$ e) $3^{36} \cdot 3^{30} = 3^{66}$

b) $\left[3^4 : 3^{12}\right]^4 = 3^{-32}$ d) $\left[6^3 \cdot 6^4\right]^6 = 3^{42} \cdot 2^{42}$ f) $\left[2^8 : 2^{18}\right]^5 \cdot 2^8 = 2^{-42}$

**74.** **Expresa como una única potencia.**

a) $3^3 \cdot 9^4 : 27^{-1}$
b) $(2^{-5} \cdot 2^2)^4$
c) $25^{-3} : 5^5 \cdot 125$
d) $(5^{-1} : 5^3)^{-2}$

a) $3^3 \cdot 3^8 : 3^{-3} = 3^{14}$ b) $2^{-12}$ c) $5^{-6} : 5^5 \cdot 5^3 = 5^{-8}$ d) $5^8$

**75.** **Efectúa las siguientes operaciones entre potencias, simplificando el resultado todo lo que puedas.**

a) $40^{12} : [(-4)^6]^{-6}$
b) $(-45)^{15} \cdot [(-15)^3]^{-6}$
c) $(9^2 : 27^4)^{-4} \cdot (6^{-3} \cdot 36^{-2})$
d) $\left[\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2} \cdot (-4)\right)\right]^{-1}$

a) $5^{12} \cdot 2^{36} : 2^{-72} = 5^{12} \cdot 2^{108}$
b) $-3^{30} \cdot 5^{15} \cdot 3^{-18} \cdot 5^{-18} = -3^{12} \cdot 5^{-3}$
c) $(3^{-8})^{-4} \cdot (2^{-7} \cdot 3^{-7}) = 2^{-7} \cdot 3^{25}$
d) $[1^{-3} : (-2 \cdot 3)]^{-1} = -2 \cdot 3$

**76.** **Simplifica y expresa el resultado en forma de potencia.**

a) $\dfrac{(-2)^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{(-3)^4 \cdot 5^4 \cdot 2^2}$
b) $\dfrac{2^8 \cdot 3^4 \cdot (-2)^3}{(-2^3) \cdot 2^7 \cdot 3^5}$
c) $\dfrac{(-3)^5 \cdot 5^2 \cdot 2^7}{(-2)^8 \cdot 5^4 \cdot (-3)^3}$
d) $\dfrac{11^3 \cdot 5^6 \cdot (-3)}{5^4 \cdot 11 \cdot 3^2}$

a) $\dfrac{-2}{3^2 \cdot 5}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3^2}{5^2 \cdot 2}$ d) $\dfrac{-11^2 \cdot 5^2}{3}$

**77.** **Descompón en factores primos el numerador y el denominador de estas fracciones, y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{36 \cdot 25}{(-15) \cdot 8}$
b) $\dfrac{-45 \cdot 27}{81 \cdot 30}$
c) $\dfrac{(-12) \cdot 90}{40 \cdot (-16)}$
d) $\dfrac{108 \cdot 75}{80 \cdot 243}$

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{-3 \cdot 5 \cdot 2^3} = \dfrac{-3 \cdot 5}{2}$ b) $\dfrac{-3^2 \cdot 5 \cdot 3^3}{3^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} = \dfrac{-1}{2}$ c) $\dfrac{-2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2}{-2^3 \cdot 5 \cdot 2^4} = \dfrac{3^3}{2^4}$ d) $\dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 3}{5 \cdot 2^4 \cdot 3^5} = \dfrac{5}{2^2 \cdot 3}$

**78.** **Expresa como potencia de base 10 el resultado de las siguientes operaciones.**

a) 0,000000001 · 1 000 000

b) 0,0000000010 · 10 000 000

c) 0,00000000001 : 1 000 000 000

d) 0,000001 : 1 000

a) $10^{-3}$ b) $10^{-2}$ c) $10^{-20}$ d) $10^{-9}$

**79.** **Escribe en notación científica.**

a) Tres billones y medio.

b) Doscientas milésimas.

c) Diez millonésimas.

d) Cien mil millones y medio.

a) $3,5 \cdot 10^{12}$ b) $2 \cdot 10^{-1}$ c) $1 \cdot 10^{-5}$ d) $1,000005 \cdot 10^{11}$

**80.** **Escribe, con todas sus cifras, estos números escritos en notación científica.**

a) $4,54 \cdot 10^6$

b) $1,7682 \cdot 10^{-5}$

c) $9,6 \cdot 10^9$

d) $3,005 \cdot 10^{-4}$

e) $2,11 \cdot 10^{-8}$

f) $5,975 \cdot 10^7$

a) 4 540 000 c) 9 600 000 000 e) 0,0000000211

b) 0,000017682 d) 0,0003005 f) 59 750 000

**81.** **Sin hacer las operaciones previamente, ¿sabrías decir cuál es el orden de magnitud del resultado de estas operaciones?**

a) $6,3 \cdot 10^2 + 4,5 \cdot 10^2$

b) $7,7 \cdot 10^4 - 7,2 \cdot 10^4$

c) $(2,6 \cdot 10^3) \cdot (3,1 \cdot 10^4)$

d) $(5 \cdot 10^7) : (2,5 \cdot 10^6)$

a) 3 b) 3 c) 7 d) 1

**82.** **Halla el resultado de estas operaciones.**

a) $5,2 \cdot 10^6 + 7,9 \cdot 10^8$

b) $1,4 \cdot 10^{-6} - 8,6 \cdot 10^{-7}$

c) $3,7 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-6}$

d) $2,9 \cdot 10^{-4} \cdot 3,15 \cdot 10^2$

e) $4,359 \cdot 10^{-5} \cdot 6,1 \cdot 10^{-3}$

f) $[5,6 \cdot 10^{-3}] : [1,6 \cdot 10^{-4}]$

g) $[9,6 \cdot 10^{10}] : [4 \cdot 10^{-5}]$

h) $[4,5 \cdot 10^{-2}] : [1,5 \cdot 10^2]$

a) $7,952 \cdot 10^8$ c) $3,68 \cdot 10^{-4}$ e) $2,65899 \cdot 10^{-7}$ g) $2,4 \cdot 10^{15}$

b) $5,4 \cdot 10^{-7}$ d) $9,135 \cdot 10^{-2}$ f) $3,5 \cdot 10$ h) $3 \cdot 10^{-4}$

**83.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $6 \cdot 10^3 + \square = 9 \cdot 10^4$

b) $3{,}4 \cdot 10^6 - \square = 7{,}6 \cdot 10^5$

c) $6{,}42 \cdot 10^{-4} + \square = 9{,}256 \cdot 10^{-3}$

d) $1{,}85 \cdot 10^{-2} \cdot \square = 5{,}55 \cdot 10^{-6}$

e) $8{,}7 \cdot 10^5 : \square = 2{,}9 \cdot 10^2$

**a)** $9 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^3 = 8{,}4 \cdot 10^4$

**b)** $3{,}4 \cdot 10^6 - 7{,}6 \cdot 10^5 = 2{,}64 \cdot 10^6$

**c)** $9{,}256 \cdot 10^{-3} - 6{,}42 \cdot 10^{-4} = 8{,}614 \cdot 10^{-3}$

**d)** $5{,}55 \cdot 10^{-6} : 1{,}85 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-4}$

**e)** $8{,}7 \cdot 10^5 : 2{,}9 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^3$

**85.** **Resuelve estas operaciones.**

a) $\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 3^2 - \sqrt{25}$

b) $1{,}2^2 + \frac{1}{4} - \sqrt{81} + 3$

c) $\sqrt{4} + \frac{8}{3} - 0{,}4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) $\frac{4}{3} \cdot \sqrt{2{,}25} + 0{,}1^2 : \frac{1}{\sqrt{9}}$

**a)** $\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 9 - 5 = \frac{11}{6}$

**b)** $1{,}44 + \frac{1}{4} - 9 + 3 = -4{,}31$

**c)** $2 + \frac{8}{3} - 0{,}4 + \frac{1}{9} = \frac{197}{45}$

**d)** $\frac{4}{3} \cdot 1{,}5 + 0{,}01 : \frac{1}{3} = 2{,}03$

**86.** **Realiza estas operaciones con raíces.**

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{8} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{8}$

c) $5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}$

d) $8\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$

**a)** $4\sqrt{3}$ **b)** $0$ **c)** $10\sqrt{15}$ **d)** $4\sqrt{2}$

**87.** **Extrae de la raíz todos los factores que sea posible.**

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{40}$

c) $\sqrt{50}$

d) $\sqrt{45}$

e) $\sqrt{75}$

f) $\sqrt{98}$

**a)** $2\sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{2}$ **e)** $5\sqrt{3}$

**b)** $2\sqrt{10}$ **d)** $3\sqrt{5}$ **f)** $7\sqrt{2}$

**88.** **Introduce en la raíz los números que la multiplican.**

a) $7\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{15}$

d) $4\sqrt{6}$

e) $6\sqrt{21}$

f) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

**a)** $\sqrt{147}$ **c)** $\sqrt{\frac{15}{9}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ **e)** $\sqrt{756}$

**b)** $\sqrt{125}$ **d)** $\sqrt{96}$ **f)** $\sqrt{\frac{18}{25}}$

**89.** **Extrae los factores que sea posible de las raíces y simplifica las fracciones.**

a) $\sqrt{\frac{30}{27}}$ b) $\sqrt{\frac{98}{81}}$ c) $\sqrt{\frac{48}{128}}$ d) $\sqrt{\frac{64}{400}}$

a) $\frac{1}{3}\sqrt{10}$ b) $\frac{7}{9}\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ d) $\frac{2}{5}$

**91.** **Extrae de las raíces los factores que sea posible y después realiza las operaciones.**

a) $3\sqrt{8} - 2\sqrt{18}$
b) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{75}$
c) $-\sqrt{32} + 4\sqrt{128}$
d) $7\sqrt{98} - 2\sqrt{8}$
e) $9\sqrt{125} + \sqrt{45}$
f) $-6\sqrt{48} + 8\sqrt{243}$

a) $6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$
b) $6\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 31\sqrt{3}$
c) $-4\sqrt{2} + 32\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$
d) $49\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$
e) $45\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 48\sqrt{5}$
f) $-24\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$

**92.** **Efectúa estas operaciones.**

a) $2\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{27} + \frac{7}{4}\sqrt{48}$
b) $-4\sqrt{27} + 3\sqrt{36} + 5\sqrt{12} - 7\sqrt{64}$
c) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - \sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{2}$
d) $6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{8} - 5\sqrt{27}$
e) $\frac{-1}{3}\sqrt{60} - 4\sqrt{50} + 2\sqrt{32} - \sqrt{15}$
f) $\frac{\sqrt{50}}{3} - \frac{\sqrt{18}}{4} + \frac{\sqrt{32}}{5} - \sqrt{72} + \sqrt{2}$

a) $2\sqrt{3} - \frac{15}{2}\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
b) $-12\sqrt{3} + 18 + 10\sqrt{3} - 56 = -38 - 2\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5} + \frac{18}{5}\sqrt{2}$
d) $6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 16\sqrt{2} - 15\sqrt{3} = -10\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$
e) $\frac{-2}{3}\sqrt{15} - 20\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - \sqrt{15} = -12\sqrt{2} - \frac{5}{3}\sqrt{15}$
f) $\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{197}{60}\sqrt{2}$

**93.** **Indica, de forma análoga al ejemplo, a cuáles de los conjuntos numéricos pertenecen estos números.**

**0,52222… → *Real racional decimal periódico mixto positivo***

a) $-5{,}67$ b) 7,999… c) $\sqrt{5}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $-\sqrt{6}$ f) $3{,}1\widehat{48}$ g) 1,232233222333… h) $\frac{-18}{3}$

a) –5,67 → Real racional decimal exacto negativo.

b) 7,999… → Real racional decimal periódico puro positivo.

c) $\sqrt{5}$ → Real irracional positivo.

d) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ → Real racional decimal exacto positivo.

e) $-\sqrt{6}$ → Real irracional negativo.

f) $3{,}1\widehat{48}$ → Real racional decimal periódico mixto positivo.

g) 1,232233222333… → Real irracional positivo.

h) $\frac{-18}{3} = -6$ → Real racional entero negativo.

**94. Clasifica, en racionales o irracionales, estos números.**

a) $2+\sqrt{7}$
b) $4\sqrt{9}$
c) $8\sqrt{4}+\sqrt{2}$
d) $(\sqrt{3})^4$
e) $5\pi-1$
f) $\sqrt{12+12+12}$

a) Irracional. c) Irracional. e) Irracional.

b) Racional. d) Racional. f) Racional.

**95. Escribe cuatro números irracionales que estén expresados con una raíz y otros cuatro que no tengan raíz.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Irracionales con raíz: $\sqrt{5}, 3-\sqrt{2}, \sqrt{3}+1$ y $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

Irracional sin raíz: 1,010011000111…; 0,12345678…; 4,25255255525555… y 28,303132333435…

**96. Indica si son racionales o irracionales.**

a) La suma de dos irracionales.
b) La suma de un racional y un irracional.
c) La suma de dos racionales.

a) Puede ser racional o irracional. b) Irracional. c) Racional.

**97. Ordena de menor a mayor estos números.**

$2\sqrt{3} \quad 3\sqrt{2} \quad \sqrt{2+3} \quad \sqrt{2}+\sqrt{3} \quad 3\sqrt{3}-2$

$\sqrt{5}<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3\sqrt{3}-2<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$

**98. Trunca y redondea con dos cifras significativas.**

a) $3,0\widehat{6}$
b) 6,935
c) 1,009
d) 0,6785
e) $\sqrt{6}-1$
f) $4-\sqrt{3}$
g) $\sqrt{2}+3$
h) $\sqrt{5}+2,9$

| | | |
|---|---|---|
| a) $3,0\widehat{6}$ | Truncamiento: 3,0 | Redondeo: 3,1 |
| b) 6,935 | Truncamiento: 6,9 | Redondeo: 6,9 |
| c) 1,009 | Truncamiento: 1,0 | Redondeo: 1,0 |
| d) 0,6785 | Truncamiento: 0,6 | Redondeo: 0,7 |
| e) $\sqrt{6}-1=1,449\ldots$ | Truncamiento: 1,4 | Redondeo: 1,4 |
| f) $4-\sqrt{3}=2,267\ldots$ | Truncamiento: 2,2 | Redondeo: 2,3 |
| g) $\sqrt{2}+3=4,414\ldots$ | Truncamiento: 4,4 | Redondeo: 4,4 |
| h) $\sqrt{5}+2,9=5,136\ldots$ | Truncamiento: 5,1 | Redondeo: 5,1 |

**99.** **¿Cuáles son los errores absoluto y relativo que se cometen en estas aproximaciones?**

a) 0,17 como aproximación de $\frac{1}{6}$.

b) 0,13 como aproximación de $\frac{1}{8}$.

c) 2,7778 como aproximación de $\frac{25}{9}$.

d) 3,14 como aproximación de $\pi$.

e) 0,7 como aproximación de $\sqrt{0{,}5}$.

a) $E_a = \frac{1}{300}$ $E_r = 0{,}02$

b) $E_a = \frac{1}{200}$ $E_r = 0{,}04$

c) $E_a = \frac{1}{45\,000}$ $E_r = 8 \cdot 10^{-6}$

d) $E_a = 1{,}59\ldots \cdot 10^{-3}$ $E_r = 5{,}06\ldots \cdot 10^{-4}$

e) $E_a = 7{,}10\ldots \cdot 10^{-3}$ $E_r = 0{,}01\ldots$

**100.** **Escribe un número tal que:**

a) Al redondearlo y truncarlo a las décimas, dé el mismo resultado.

b) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 5,87.

c) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 11,56 y el error absoluto cometido sea 0,003.

d) Al truncarlo a las décimas, dé como resultado 0,7 y el error absoluto sea 0,025.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) 1,23 b) 5,8685 c) 11,563 d) 0,725

**101.** **Escribe y representa los intervalos que correspondan.**

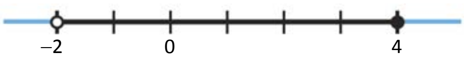
a) Números mayores que −2 y menores o iguales que 4.

b) Números mayores que 3 y menores que 5.

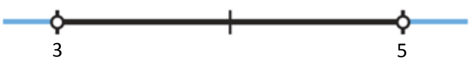
c) Números mayores o iguales que −6 y menores o iguales que 0.

d) Números mayores o iguales que 0 y menores que 2.

a) $-2 < x \leq 4 \rightarrow (-2, 4]$

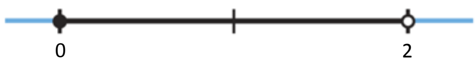



b) $3 < x < 5 \rightarrow (3, 5)$




c) $-6 \leq x \leq 0 \rightarrow [-6, 0]$


d) $0 \leq x < 2 \rightarrow [0, 2)$




**102.** **Escribe dos intervalos que contengan estos números.**

a) 3 y $\frac{17}{4}$ b) $2\sqrt{6}$ y $\frac{25}{3}$ c) $-\frac{21}{5}$ y $1{,}\widehat{4}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(2, 5)$ y $[3; 4{,}5]$ b) $(4, 9)$ y $(2, 10]$ c) $[-5, 2)$ y $(-6, 3]$

**103.** **Indica dos números racionales y otros dos irracionales pertenecientes a estos intervalos.**

a) $(0, 8)$ b) $(-3, 4]$ c) $[-1, 2]$ d) $[3, 6)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Racionales: $2$ y $\frac{5}{3}$

Irracionales: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$

b) Racionales: $\frac{7}{10}$ y $-\frac{1}{4}$

Irracionales: $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$

c) Racionales: $-\frac{1}{2}$ y $1$

Irracionales: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

d) Racionales: $5$ y $\frac{20}{6}$

Irracionales: $\pi$ y $2\sqrt{5}$

**104.** **¿Qué intervalo tienen en común estas parejas de intervalos?**

a) $(-4, 0)$ y $(-2, 1]$

b) $[-3, 2]$ y $[-1, 0)$

c) $(-5, 2]$ y $[-2, 5)$

a) $(-2, 0)$ b) $[-1, 0)$ c) $[-2, 2]$

**105.** **Asocia cada elemento de la columna izquierda con uno de la columna derecha.**

a) $-3 < x < -1$ I. $[-3, 1]$

b) $-3 \leq x < 1$ II. $(-3, 1]$

c) $-3 \leq x \leq 1$ III. $(-3, -1)$

d) $-3 < x \leq 1$ IV. $[-3, 1)$

a) $-3 < x < -1 \rightarrow (-3, -1)$

b) $-3 \leq x < 1 \rightarrow [-3, 1)$

c) $-3 \leq x \leq 1 \rightarrow [-3, 1]$

d) $-3 < x \leq 1 \rightarrow (-3, 1]$

**106.** **En el árbol genealógico se pueden expresar relaciones como potencias. Expresa en forma de potencia cuántos abuelos, bisabuelos y tatarabuelos tienes.**

Abuelos: $2^2$ Bisabuelos: $2^3$ Tatarabuelos: $2^4$

**107.** **Un niño ha ideado una cadena de favores. Su idea es que cada persona realice un favor a otras tres personas y, después, cada una de estas tres haga lo mismo, y así sucesivamente.**

a) ¿Cuántos favores se realizarán en el sexto eslabón de la cadena?

b) ¿En qué eslabón se habrán realizado 59 049 favores?

a) $3^6 = 729$ favores b) 59 049 favores $= 3^{10}$; por tanto, es el décimo eslabón.

**108.** **En un contenedor hay 7 cajas, en cada caja hay 7 bolsas, en cada bolsa hay 7 estuches y en cada estuche 7 lápices. ¿Cuántos lápices hay en 7 contenedores?**

Hay $7^5 = 16\,807$ lápices.

**109.** **¿Cuántos segundos tiene el mes de septiembre? Exprésalo mediante un producto de potencias.**

El mes de septiembre tiene $30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ segundos.

**110.** **¿Cuántos milímetros hay entre Madrid y Valencia sabiendo que 357 km de carretera separan estas dos ciudades? Exprésalo en notación científica.**

357 km $= 3{,}57 \cdot 10^8$ mm

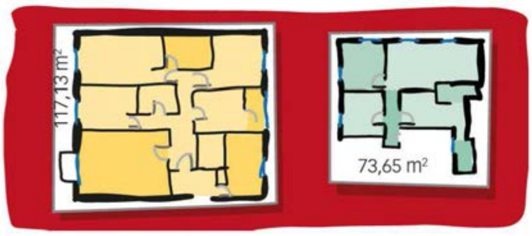
**111.** **Halla el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 3 cm, con un error menor de una centésima.**

Aplicando el teorema de Pitágoras y llamando *h* a la hipotenusa se tiene:

$h^2 = 2^2 + 3^2 \rightarrow h = \sqrt{13} = 3{,}60555...$

Respuesta abierta. Por ejemplo: 3,60 cm

**112.** **Un piso tiene una superficie de 117,13 m² y la de otro es 73,65 m². Redondea y trunca la superficie de cada piso a metros cuadrados. Indica qué aproximación es más precisa.**




En el primer piso, el redondeo y el truncamiento coinciden. Es 117 m². Las dos aproximaciones son igual de precisas ya que el error relativo coincide en los dos casos.
En el segundo piso, el redondeo es 74 m² (el error relativo es $4{,}75 \cdot 10^{-3}$); y el truncamiento, 73 m² (el error relativo es $8{,}83 \cdot 10^{-3}$). Es más precisa la aproximación por redondeo.

**113.** **Marta dice que el lado de un cuadrado de área 27 cm² mide, aproximadamente, 5,2 cm. Pedro dice que el lado de un cuadrado de área 34 cm² mide, aproximadamente, 5,83 cm. ¿Cuál de los dos ha cometido mayor error?**

Cálculo de Marta:

$\text{Área} = l^2 \rightarrow l = \sqrt{27}$ $\quad E_a = \left|\sqrt{27} - 5{,}2\right| = 0{,}00385$ $\quad E_r = \left|\frac{E_a}{\sqrt{27}}\right| = 7{,}407 \cdot 10^{-4}$

Cálculo de Pedro:

$\text{Área} = l^2 \rightarrow l = \sqrt{34}$ $\quad E_a = \left|\sqrt{34} - 5{,}83\right| = 0{,}00095$ $\quad E_r = \left|\frac{E_a}{\sqrt{34}}\right| = 1{,}632 \cdot 10^{-4}$

Marta ha cometido mayor error.

**114. Un litro de gasolina cuesta 1,198 €. ¿Cuánto tengo que pagar por 27 litros?**

$1{,}198 \cdot 27 = 32{,}346$

Tengo que pagar 32,35 €.

**115. Un alumno afirma que la longitud de una circunferencia de diámetro 12 cm mide 37,6992 cm. ¿Qué aproximación del número $\pi$ ha tomado?**

$L = 2\pi r = 12\pi$

$37{,}6992 = 12\pi \rightarrow \pi = 3{,}1416$

Ha tomado la aproximación a las diezmilésimas.

## DEBES SABER HACER

**1. Calcula las siguientes potencias.**

a) $(-2)^2$ c) $-(-8^2)$ e) $-(-2)^3$
b) $(-3)^3$ d) $-4^2$ f) $4^2$

a) 4 c) 64 e) 8
b) –27 d) –16 f) 16

**2. Calcula estas potencias.**

a) $2^{-3}$ d) $4^{-2}$ g) $(-5{,}02)^{-3}$
b) $(1{,}3)^{-2}$ e) $(-3)^{-2}$ h) $(-2)^{-4}$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}$ i) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $\frac{1}{(1{,}3)^2} = \frac{1}{1{,}69} = 0{,}5917159$

c) $2^2 = 4$

d) $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

e) $\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} = 0{,}\widehat{1}$

f) $\frac{5^3}{(-3)^3} = -\frac{125}{27} = -4{,}629$

g) $\frac{1}{(-5{,}02)^3} = \frac{1}{126{,}506008} = 0{,}0079047629$

h) $\frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

i) $(-6)^2 = 36$

**3. Expresa como potencia única.**

a) $(2^3)^4$ c) $[-6^4]^3$ e) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3\right]^5$
b) $[(-3)^3]^2$ d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4$ f) $[-5^2]^4$

a) $2^{12}$ b) $(-3)^6$ c) $-6^{12}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{15}$ f) $5^8$

**4. Realiza las siguientes operaciones con números en notación científica.**

a) $3{,}2 \cdot 10^2 + 2{,}1 \cdot 10^3$ c) $(1{,}5 \cdot 10^3) \cdot (3{,}6 \cdot 10^2)$
b) $1{,}2 \cdot 10^4 - 2{,}1 \cdot 10^3$ d) $(1{,}8 \cdot 10^2) : (7{,}2 \cdot 10^4)$

a) $2{,}42 \cdot 10^3$ b) $9{,}9 \cdot 10^3$ c) $5{,}4 \cdot 10^5$ d) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

**5.** **Extrae factores de las raíces y después realiza las operaciones.**

$6\sqrt{27} + \sqrt{3} - 2\sqrt{243}$

$18\sqrt{3} + \sqrt{3} - 18\sqrt{3} = \sqrt{3}$

**6.** **Trunca y redondea el número $\sqrt{14} = 3{,}7416573...$ a las:**

a) Décimas. b) Centésimas. c) Milésimas.

a) Redondeo: 3,7 Truncamiento: 3,7

b) Redondeo: 3,74 Truncamiento: 3,74

c) Redondeo: 3,742 Truncamiento: 3,741

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**116.** **La mayoría de las células son microscópicas, es decir, no son observables a simple vista. Con relación a su tamaño, las células se pueden dividir en tres grupos:**

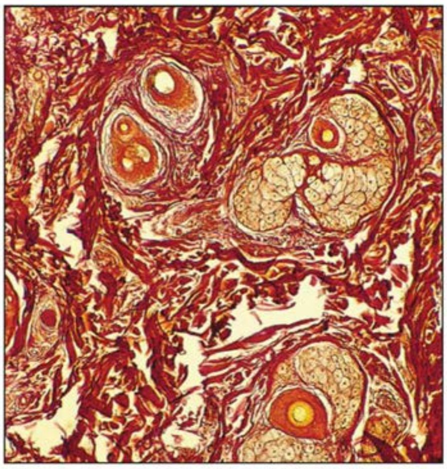
- ***Células macroscópicas*: se observan a simple vista. Por ejemplo, la yema del huevo de las aves, que puede medir hasta 1 centímetro.**
- ***Células microscópicas*: se observan únicamente con el microscopio óptico. Por ejemplo, un glóbulo rojo mide aproximadamente $7 \cdot 10^{-6}$ m.**
- ***Células ultramicroscópicas*: son sumamente pequeñas y solo observables con el microscopio electrónico. Por ejemplo, el virus de la gripe mide $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ m.**

a) ¿Qué tipo de microscopio se necesita para observar los siguientes tamaños de células?

$6 \cdot 10^{-4}$ $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ $4{,}56 \cdot 10^{-10}$ $7{,}1 \cdot 10^{-3}$

b) Las células humanas tienen tamaños muy diferentes: desde los glóbulos rojos, que miden $7 \cdot 10^{-6}$ m; o los espermatozoides, de $5{,}3 \cdot 10^{-5}$ m; hasta algunas neuronas, que pueden llegar a medir 1 m.

**Si colocamos glóbulos rojos en fila, ¿cuántos se necesitan para llegar a cubrir una neurona de un metro?**



a) $6 \cdot 10^{-4} \rightarrow$ Óptico. $1{,}2 \cdot 10^{-4} \rightarrow$ Óptico. $0{,}5 \cdot 10^{-7} \rightarrow$ Electrónico.

$4{,}56 \cdot 10^{-10} \rightarrow$ Electrónico. $7{,}1 \cdot 10^{-3} \rightarrow$ Óptico.

b) $\dfrac{1}{7 \cdot 10^{-6}} = 142857$ glóbulos rojos.

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**117. Una potencia de exponente entero positivo, ¿es siempre mayor que la base? ¿En qué casos?**

No, es mayor que la base solo si la base es mayor que 1.

**118. Sea la serie formada por los números que determinan las superficies de los cuadrados que resultan ser el cuádruple de su anterior, siendo el primero el de superficie *S*.**

a) ¿Cuál es la superficie del cuadrado que ocupa la posición octava en la serie?

b) ¿Cuál es la serie formada por los números que determinan los lados de esos cuadrados?

a) La serie es $S$, $4S$, $4^2S$, $4^3S$, $4^4S$, … La posición octava la ocupa $4^7S = 16\,384 \cdot S$

b) La serie es $\sqrt{S}, 2\sqrt{S}, 4\sqrt{S}, 8\sqrt{S}, 16\sqrt{S}, \ldots$

**119. Una potencia de exponente entero negativo, ¿es mayor que la base? ¿Hay algunos valores de la base para los que la potencia sea menor?**

Estudiamos la potencia $a^b$ según los valores de ***a*** y ***b***.

- Si $a = 1 \rightarrow a^b = a = 1$
- Si $-1 < a < 0 \rightarrow \begin{cases} a^b > a \text{ si } b \text{ par} \\ a^b < a \text{ si } b \text{ impar} \end{cases}$
- Si $0 < a < 1 \rightarrow a^b > a$
- Si $a < -1 \rightarrow a^b > a$
- Si $a > 1 \rightarrow a^b < a$

**120. Reflexiona y responde.**

¿En qué casos ocurre que $\sqrt{a} < a$? ¿Y $\sqrt{a} > a$?

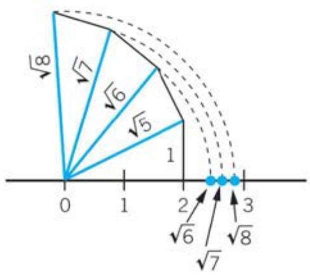
Para que $\sqrt{a} < a$ debe ocurrir que $a > 1$.

Para que $\sqrt{a} > a$ debe ocurrir que $0 < a < 1$.

**121. Utilizando el procedimiento anterior, representa los siguientes números reales.**

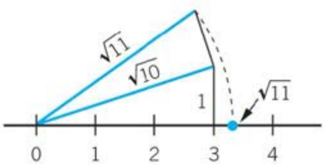
a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{11}$

a), b) y c)




$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + 1^2$$
$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2$$
$$(\sqrt{7})^2 = (\sqrt{6})^2 + 1^2$$
$$(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{7})^2 + 1^2$$

d)




$$(\sqrt{10})^2 = 3^2 + 1^2$$
$$(\sqrt{11})^2 = (\sqrt{10})^2 + 1^2$$

**122. Explica razonadamente la forma de representar los siguientes números reales.**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

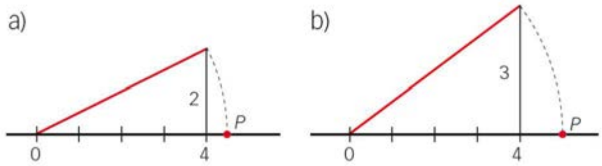
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\frac{1}{2}$.

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $1$.

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

**123. ¿Qué número representa el punto *P* en cada caso?**




Representa de forma exacta el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a) $\sqrt{16+4} = \sqrt{20}$. Por tanto, *P* representa al número $\sqrt{20}$.

b) $\sqrt{16+9} = 5$. Por tanto, *P* representa al número 5.

Para representar de forma exacta el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$:

$1^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1.

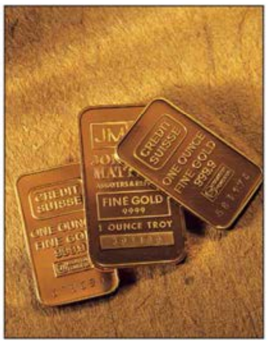
$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ → Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ y $1$.

Trasladamos con el compás la medida de $\sqrt{3}$ a partir del punto que representa $\sqrt{2}$ y obtenemos la representación de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

## PRUEBAS PISA

**124.** **La onza troy es una medida de masa que se usa únicamente en joyería. En el mercado del oro, una onza de este metal se paga a 1 550 €.**

**En una joyería tienen una balanza con precisión de hasta la milésima de gramo.**




**¿A cuántos euros asciende el error que puede cometer esta balanza?**

**¿Merece la pena usar esta balanza?**

**En la misma joyería también trabajan con diamantes. En este caso, la unidad oficial para los diamantes es el quilate, que equivale a $\frac{1}{5}$ de gramo.**

**Si el precio medio del quilate de diamantes es de unos 25 000 €, ¿tiene sentido utilizar ahora la balanza?**

Para el oro:

1 onza troy = 31,1034768 g

Precio de 1 g de oro $= \frac{1550}{31{,}1034768} = 49{,}83$ €

$10^{-3}$ de error supone $10^{-3} \cdot 49{,}83 = 0{,}05$ € de pérdida. → Sí merece la pena usar la balanza.

Para el diamante:

1 quilate = 0,2 g

Precio de 1 g de diamante $= \frac{25\,000}{0{,}2} = 125\,000$ €.

$10^{-3}$ de error supone $10^{-3} \cdot 125\,000 = 125$ € de pérdida. → No merece la pena usar la balanza.

**125.** **Jimena trabaja en una tienda que alquila DVD y juegos de ordenador.**

**En dicha tienda, la cuota anual de socio es de 10 zeds. El precio de alquiler de los DVD para los socios es inferior al precio para los no socios, tal y como se muestra en la siguiente tabla:**

| Precio de alquiler de un DVD para los no socios | Precio de alquiler de un DVD para los socios |
|---|---|
| 3,20 zeds | 2,50 zeds |

- El año pasado, Tomás era socio de la tienda de alquiler de DVD. Gastó un total de 52,50 zeds, incluida la cuota de socio. ¿Cuánto habría gastado Tomás si no hubiese sido socio y hubiese alquilado el mismo número de DVD?
- ¿Cuál es el número mínimo de DVD que tiene que alquilar un socio para cubrir el coste de su cuota? Escribe tus cálculos.

*(Prueba PISA 2006)*

- $x =$ número de DVD alquilados.

  52,50 zeds $= 10 + 2{,}5x \rightarrow x = 17$ DVD alquiló Tomás siendo socio.

  De no haberlo sido, habría gastado $17 \cdot 3{,}20 = 54{,}4$ zeds.

- $10 + 2{,}5x = 3{,}2x \rightarrow 10 = 0{,}70x \rightarrow x = 14{,}28$

  Por tanto, alquilando 15 o más DVD se cubre el coste de la cuota de socio.

# Progresiones

3

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Expresa algebraicamente estas relaciones.**

a) El cuádruple de un número.
b) La tercera parte de un número más 1.
c) La quinta parte de un número impar.
d) El cuadrado de la mitad de un número.

a) $4n$ b) $\frac{n}{3}+1$ c) $\frac{2n+1}{5}$ d) $\left(\frac{n}{2}\right)^2$

**2. Resuelve.**

a) $6^5 : 6^3$
b) $(-2)^5$
c) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$
d) $(-2)^6$
e) $\left(\frac{2}{5}\right)^9 : \left(\frac{2}{5}\right)^3$
f) $((-2)^3)^5$

a) $6^5 : 6^3 = 6^2$

b) $(-2)^5 = -32$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

d) $(-2)^6 = 64$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^9 : \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^6$

f) $\left((-2)^3\right)^5 = -2^{15}$

## VIDA COTIDIANA

**En 1985, Hillebrand tecleó en su máquina de escribir varias frases comunes. Concluyó que la mayoría tenían menos de 160 caracteres, que finalmente se fijó como la longitud máxima para un SMS.**

- **Mandamos el SMS: «MAÑANA VOY A LA FIESTA». El destinatario añade: «Y YO», y lo reenvía, repitiéndose este proceso varias veces. ¿Cuántos amigos se añaden a la fiesta hasta lograr la longitud máxima de un SMS?**

Contando espacios, «MAÑANA VOY A LA FIESTA» tiene 22 caracteres.

Además, hay que contar con un espacio final para la respuesta.

Cada respuesta «Y YO» contiene 4 caracteres.

Además, hay que contar con un espacio final para la siguiente respuesta.

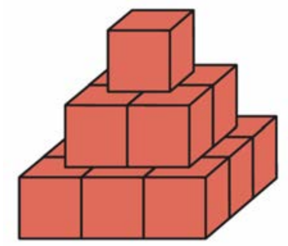
$22 + 1 + 5n = 160$

$5n = 137 \rightarrow n = 27,4$

Como mucho se añaden 27 personas.

## RESUELVE EL RETO

**Construimos pirámides con cubos. Si tenemos una bolsa con 140, ¿hasta qué altura podemos llegar?**



$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140 \rightarrow$ Podemos hacer una torre de 7 pisos.

**Algunos números se pueden expresar como la suma de una sucesión de números consecutivos:**

$$3 = 2 + 1$$
$$18 = 3 + 4 + 5 + 6$$

**¿Puedes escribir las 5 primeras potencias de 2 de esta forma?**

No se puede.

**Una ameba se reproduce cada minuto dividiéndose en dos amebas. Si dos amebas, reproduciéndose, llenan un tubo de ensayo en 2 h, ¿cuánto tardaría una ameba sola?**

Si tenemos 2 amebas, en el primer minuto habrá $2 \cdot 2^1 = 4$ amebas. En el segundo minuto habrá $2 \cdot 2^2 = 8$ amebas, y en el minuto 120 habrá $2 \cdot 2^{120} = 2^{121}$ amebas.

Si al principio hay 1 ameba, en el primer minuto habrá $2^1$ amebas, en el segundo $2^2$, y en el minuto 120 habrá $2^{120}$. Para llegar a $2^{121}$ amebas tienen que pasar 2 horas y 1 minuto. Así, en el minuto 121 habrá $2^{121}$ amebas.

**Si tengo 50 € y cada día gasto la mitad del dinero que tengo, ¿cuándo gastaré mi última moneda?**

| | |
|---|---|
| Gasto día 1: 25 € | Quedan: 25 € |
| Gasto día 2: 12,50 € | Quedan: 12,50 € |
| Gasto día 3: 6,25 € | Quedan: 6,25 € |
| Gasto día 4: 3,125 = 3,13 € | Quedan: 3,12 € |
| Gasto día 5: 1,56 € | Quedan: 1,56 € |
| Gasto día 6: 0,78 € | Quedan: 0,78 € |
| Gasto día 7: 0,39 € | Quedan: 0,39 € |
| Gasto día 8: 0,195 = 0,20 € | Quedan: 0,19 € |
| Gasto día 9: 0,095 = 0,10 € | Quedan: 0,09 € |
| Gasto día 10: 0,045 = 0,05 € | Quedan: 0,04 € |
| Gasto día 11: 0,02 € | Quedan: 0,02 € |
| Gasto día 12: 0,01 € | Quedan: 0,01 € |
| Gasto día 13: 0,005 = 0,01 € | Quedan: 0 € |

La última moneda se gasta el día 13.

## ACTIVIDADES

**1. Di cuáles son los términos $a_1$, $a_3$ y $a_6$ de las siguientes sucesiones.**

a) 6, 7, 8, 9, 10, …
b) 0, −2, −4, −6, −8, …
c) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …
d) −1, −1, −1, −1, −1, …
e) −2, −4, −8, −16, −32, …

a) $a_1 = 6$, $a_3 = 8$, $a_6 = 11$
b) $a_1 = 0$, $a_3 = -4$, $a_6 = -10$
c) $a_1 = 1$, $a_3 = 0{,}01$, $a_6 = 0{,}00001$
d) $a_1 = -1$, $a_3 = -1$, $a_6 = -1$
e) $a_1 = -2$, $a_3 = -8$, $a_6 = -64$

**2. Escribe la regla de formación y los 6 siguientes términos de cada una de las sucesiones.**

a) 3, 6, 12, 24, …
b) 3, 7, 11, 15, …
c) 3, −1, −5, −9, …
d) 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

a) Cada término es el doble que el anterior: $a_5 = 48$, $a_6 = 96$, $a_7 = 192$, $a_8 = 384$, $a_9 = 768$, $a_{10} = 1\,536$.

b) Cada término es igual al anterior más 4: $a_5 = 19$, $a_6 = 23$, $a_7 = 27$, $a_8 = 31$, $a_9 = 35$, $a_{10} = 39$.

c) Cada término es igual al anterior menos 4: $a_5 = -13$, $a_6 = -17$, $a_7 = -21$, $a_8 = -25$, $a_9 = -29$, $a_{10} = -33$.

d) El primer término es 3, el segundo es 4, y el resto es la suma de los dos términos anteriores:
$a_5 = 47$, $a_6 = 76$, $a_7 = 123$, $a_8 = 199$, $a_9 = 322$, $a_{10} = 521$.

**3. Haz una sucesión con términos $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, siendo los siguientes términos la suma de los tres anteriores.**

2, 3, 4, 9, 16, 29, 54, 99, …

**4. Escribe los 8 primeros términos de las sucesiones que tienen como término general las siguientes expresiones.**

a) $a_n = n + 3$
b) $a_n = n^2 - 9$
c) $a_n = \dfrac{n}{2}$
d) $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

a) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

b) −8, −5, 0, 7, 16, 27, 40, 55

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

d) $\frac{6}{3}=2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6}=\frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{11}{8}, \frac{12}{9}=\frac{4}{3}, \frac{13}{10}$

**5. Obtén los términos tercero, quinto y décimo de estas sucesiones.**

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3$ siendo $a_1 = -3$
b) $a_n = a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$ siendo $a_1 = 2$ y $a_2 = 5$

a) $a_3 = -3$, $a_5 = -3$, $a_{10} = -3$

b) $a_3 = 11$, $a_5 = 59$, $a_{10} = 3\,842$

**6.** **Determina el término general de la sucesión 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, …**

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

**7.** **Determina si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.**

a) $-10, -20, -40, -80, \ldots$

b) $-4, 0, 4, 8, \ldots$

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots$

d) $6, 9, 15, 24, 39, \ldots$

a) No es una progresión aritmética.

b) Es una progresión aritmética con $d = 4$.

c) Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{3}$.

d) No es una progresión aritmética.

**8.** **Obtén la diferencia y el término primero de estas progresiones.**

a) $a_n = 5n - 11$

b) $a_n = -3n + 10$

a) La sucesión es –6, –1, 4, … por lo que $d = 5$ y $a_1 = -6$.

b) La sucesión es 7, 4, 1, … por lo que $d = -3$ y $a_1 = 7$.

**9.** **Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene estos dos términos.**

$$a_5 = \frac{-17}{4} \qquad a_{12} = \frac{-45}{4}$$

$$a_{12} = a_5 + 7d \rightarrow -\frac{45}{4} = -\frac{17}{4} + 7d \rightarrow d = -1$$

$$a_5 = a_1 + (n-1)d \rightarrow -\frac{17}{4} = a_1 + (5-1) \cdot (-1) \rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{1}{4} + (n-1) \cdot (-1)$$

**10.** **Halla la diferencia de estas progresiones aritméticas.**

a) $3, 5, 7, 9, \ldots$

b) $-1, -6, -11, -16, \ldots$

c) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \ldots$

a) $d = 2$

b) $d = -5$

c) $d = \frac{2}{3}$

**11.** **Averigua la diferencia de las progresiones aritméticas cuyo término general es:**

a) $a_n = 4n - 5$

b) $a_n = \frac{n+1}{2}$

c) $a_n = -6n + 1$

d) $a_n = \frac{3-n}{4}$

a) $d = 4$

b) $d = \frac{1}{2}$

c) $d = -6$

d) $d = -\frac{1}{4}$

**12.** **Calcula la diferencia de las progresiones, conocidos dos términos.**

a) $\begin{cases} a_4 = 12 \\ a_7 = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = -60 \\ a_{11} = 60 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_6 = -8 \\ a_{13} = 34 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_{20} = 83 \end{cases}$

a) $21 = 12 + 3d \rightarrow d = 3$

c) $60 = -60 + 6d \rightarrow d = 20$

b) $34 = -8 + 7d \rightarrow d = 6$

d) $83 = 3 + 16d \rightarrow d = 5$

**13.** **En una progresión aritmética, el primer término es 5 y la diferencia es −2. Determina $a_n$.**

$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n + 7$

**14.** **En una progresión aritmética, el tercer término es 9 y la diferencia es 7. Halla el primer término y el término general.**

$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d \rightarrow 9 = a_1 + 2 \cdot 7 \rightarrow a_1 = -5$

$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 7 = 7n - 12$

**15.** **Encuentra el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $-7, -2, 3, 8, \ldots$

b) $\frac{-3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3, \ldots$

c) $5, 12, 19, 26, \ldots$

d) $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \ldots$

e) $50, 40, 30, 20, \ldots$

f) $\frac{7}{4}, \frac{7}{2}, \frac{21}{4}, 7, \ldots$

a) $a_n = -7 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 12$

d) $a_n = \frac{1}{10} + (n - 1) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}n$

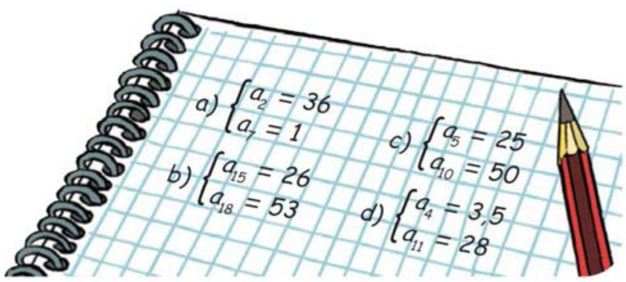
b) $a_n = -\frac{3}{2} + (n - 1) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}n - 3$

e) $a_n = 50 + (n - 1) \cdot (-10) = -10n + 60$

c) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = 7n - 2$

f) $a_n = \frac{7}{4} + (n - 1) \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{4}n$

**16.** **Escribe el término general para cada una de estas progresiones aritméticas.**




a) $1 = 36 + 5d \rightarrow d = -7$; $a_1 = 43$; $a_n = 43 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 50$

b) $53 = 26 + 3d \rightarrow d = 9$; $a_1 = -100$; $a_n = -100 + (n - 1) \cdot 9 = 9n - 109$

c) $50 = 25 + 5d \rightarrow d = 5$; $a_1 = 5$; $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n$

d) $28 = 3,5 + 7d \rightarrow d = 3,5$; $a_1 = -7$; $a_n = -7 + (n - 1) \cdot 3,5 = 3,5n - 10,5$

**17.** **Calcula la suma de los 25 primeros términos de estas progresiones aritméticas.**

a) 2, 6, 10, 14, … c) 50, 40, 30, 20, …

b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \ldots$ d) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \ldots$

**a)** $a_1 = 2 \quad d = 4 \quad a_{25} = 98 \rightarrow S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{(2+98) \cdot 25}{2} = 1250$

**b)** $a_1 = \frac{1}{10} \quad d = \frac{1}{10} \quad a_{25} = \frac{5}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{65}{2}$

**c)** $a_1 = 50 \quad d = -10 \quad a_{25} = -190 \rightarrow S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{(50-190) \cdot 25}{2} = -1750$

**d)** $a_1 = \frac{5}{3} \quad d = \frac{2}{3} \quad a_{25} = \frac{53}{3} \rightarrow S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{\left(\frac{5}{3} + \frac{53}{3}\right) \cdot 25}{2} = \frac{725}{3}$

**18.** **Halla la suma de los 100 primeros términos de las progresiones aritméticas con estos términos generales.**

a) $a_n = 2n - 7$ b) $a_n = \frac{4n+5}{3}$

**a)** $S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} \rightarrow S_{100} = \frac{(-5+193) \cdot 100}{2} = 9400$

**b)** $S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} \rightarrow S_{100} = \frac{(3+135) \cdot 100}{2} = 6900$

**19.** **De una progresión aritmética se sabe que los términos cuarto y quinto suman 28. ¿Cuánto sumarán los 8 primeros términos?**

$a_1 + a_8 = a_4 + a_5 = 28 \rightarrow S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = \frac{(a_4 + a_5) \cdot 8}{2} = 28 \cdot 4 = 112$

**20.** **Halla la suma de los 20 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $\begin{cases} a_1 = 24 \\ d = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_{24} = 82 \\ a_{31} = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 44 \\ a_3 = 40 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_7 = 2 \\ d = 0{,}5 \end{cases}$

**a)** $a_{20} = 24 + 19 \cdot (-3) = -33 \rightarrow S_{20} = \frac{(24-33) \cdot 20}{2} = -90$

**b)** $a_{20} = 44 + 19 \cdot (-2) = 6 \rightarrow S_{20} = \frac{(44+6) \cdot 20}{2} = 500$

**c)** $a_1 = 312 \quad a_{20} = 122 \rightarrow S_{20} = \frac{(312+122) \cdot 20}{2} = 4340$

**d)** $a_1 = -1 \quad a_{20} = \frac{17}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{\left(-1 + \frac{17}{2}\right) \cdot 20}{2} = 75$

**21.** **Halla la suma de los 18 primeros términos de las siguientes progresiones.**

a) 1, 7, 13, 19, …

b) $\frac{5}{2}, \frac{17}{6}, \frac{19}{6}, \frac{7}{2}, \ldots$

c) −12, −9, −6, −3, …

d) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots$

e) $\frac{-3}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-15}{4}, \ldots$

f) 145, 130, 115,100, …

a) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{(1 + 103) \cdot 18}{2} = 936$

b) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \frac{49}{6}\right) \cdot 18}{2} = 96$

c) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{(-12 + 39) \cdot 18}{2} = 243$

d) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{1}{3} + 6\right) \cdot 18}{2} = 57$

e) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{-3}{4} + \frac{-71}{4}\right) \cdot 18}{2} = \frac{-333}{2}$

f) $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{(145 - 110) \cdot 18}{2} = 315$

**22.** **Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.**

$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{(5 - 115) \cdot 25}{2} = 1\,375$

**23.** **Halla la suma de los 45 primeros términos de las progresiones cuyos términos generales son los que se indican a continuación.**

a) $a_n = 4n - 3$

b) $a_n = \frac{n - 4}{3}$

c) $a_n = -3n + 5$

d) $a_n = \frac{8 - n}{5}$

a) $S_{45} = \frac{(a_1 + a_{45}) \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{(1 + 177) \cdot 45}{2} = 4\,005$

b) $S_{45} = \frac{(a_1 + a_{45}) \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{\left(-1 + \frac{41}{3}\right) \cdot 45}{2} = 285$

c) $S_{45} = \frac{(a_1 + a_{45}) \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{(2 - 130) \cdot 45}{2} = -2\,880$

d) $S_{45} = \frac{(a_1 + a_{45}) \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{\left(\frac{7}{5} - \frac{37}{5}\right) \cdot 45}{2} = -135$

**24. Calcula la suma de los 30 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los 15 primeros es 240 y $a_1 = -5$.**

$$S_{15} = 240 = \frac{(-5+a_{15})\cdot 15}{2} \to a_{15} = 37$$

$$a_{15} = 37 = -5+14d \to d = 3, a_{30} = -5+29\cdot 3 = 82$$

$$S_{30} = \frac{(a_1+a_{30})\cdot 30}{2} = \frac{(-5+82)\cdot 30}{2} = 1155$$

**25. Calcula la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los 20 primeros es −160 y $a_{20} = -27$.**

$$S_{20} = -160 = \frac{(a_1-27)\cdot 20}{2} \to a_1 = 11$$

$$a_{20} = -27 = 11+19d \to d = -2, a_{50} = 11+49\cdot(-2) = -87$$

$$S_{50} = \frac{(a_1+a_{50})\cdot 50}{2} = \frac{(11-87)\cdot 50}{2} = -1900$$

**26. Quiero colocar 7 filas de macetas de manera que en la primera fila pondré 3 macetas, y cada una de las siguientes filas tendrá 3 macetas más que la anterior.**

**¿Cuántas macetas colocaré en total?**

$$a_1 = 3, d = 3, a_7 = 3+6\cdot 3 = 21$$

$$S_7 = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(3+21)\cdot 7}{2} = 84$$

**27. ¿Son progresiones geométricas?**

a) 1, 4, 8, 12, …

b) $\frac{-1}{2}, \frac{-5}{4}, \frac{-25}{8}, \frac{-125}{16}, \ldots$

c) 1, −4, 16, −64, …

d) −1, −3, −9, −12, …

e) $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \ldots$

Son progresiones geométricas las sucesiones de los apartados b), c) y e).

**28.** **Obtén el primer y el tercer término de:**

a) $a_n = (-2) \cdot 3^n$

b) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

c) $a_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) $a_n = 3 \cdot (-1)^{n+2}$

a) $a_1 = (-2) \cdot 3^1 = -6$  $a_3 = (-2) \cdot 3^3 = -54$

b) $a_1 = 5 \cdot 2^{1-1} = 5$  $a_3 = 5 \cdot 2^{3-1} = 20$

c) $a_1 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = \frac{1}{20}$  $a_3 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1} = \frac{1}{80}$

d) $a_1 = 3 \cdot (-1)^{1+2} = -3$  $a_3 = 3 \cdot (-1)^{3+2} = -3$

**29.** **Calcula el término general de la progresión geométrica que tiene estos dos términos.**

$a_5 = \frac{8}{5}$  $a_9 = \frac{128}{5}$

$$a_9 = a_5 \cdot r^4 \rightarrow \frac{128}{5} = \frac{8}{5} \cdot r^4 \rightarrow r = 2$$

Habitualmente daremos la solución obtenida tomando la raíz positiva:

Si $r = 2$ y $a_1 = \frac{1}{10} \rightarrow a_n = \frac{1}{10} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n-2}}{5}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa:

Si $r = -2$ y $a_1 = \frac{1}{10} \rightarrow a_n = \frac{1}{10} \cdot (-2)^{n-1} = \frac{-(-2)^{n-2}}{5}$

**30.** **Teniendo en cuenta que son progresiones geométricas, halla el término general y el término $a_6$.**

a) 5, 15, 45, …

b) $3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \ldots$

a) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_6 = 5 \cdot 3^{6-1} = 1215$

b) $a_n = 3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{3}\right)^{n+1} \rightarrow a_6 = \left(\sqrt{3}\right)^7 = 27\sqrt{3}$

**31.** **En una progresión geométrica, $a_2 = 2$ y $a_4 = \frac{1}{2}$; calcula $a_n$ y $a_5$.**

$$\frac{1}{2} = 2r^2 \rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

Si $r = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 4$  $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  $a_5 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

Si $r = -\frac{1}{2} \rightarrow a_1 = -4$  $a_n = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  $a_5 = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}$

**32. Halla la razón de estas progresiones geométricas.**

a) $1, 4, 16, 64, \ldots$

b) $-3, -3\sqrt{2}, -6, -6\sqrt{2}, \ldots$

c) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{-27}{2}, \ldots$

d) $-4, 12, -36, 108, \ldots$

a) $r = \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4$

b) $r = \frac{-3\sqrt{2}}{-3} = \frac{-6}{-3\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{-6} = \sqrt{2}$

c) $r = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{\frac{-9}{2}}{\frac{-3}{2}} = \frac{\frac{-27}{2}}{\frac{-9}{2}} = 3$

d) $r = \frac{12}{-4} = \frac{-36}{12} = \frac{108}{-36} = -3$

**33. Averigua la razón de las progresiones geométricas cuyo término general es el que se da, indicando para cada una de ellas el primer término.**

a) $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

b) $a_n = \frac{1}{7} \cdot 5^n$

c) $a_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

d) $a_n = 3 \cdot 2^{n-2}$

a) $a_1 = 4 \cdot (-2)^0 = 4;\ r = -2$

b) $a_1 = \frac{1}{7} \cdot 5^1 = \frac{5}{7};\ r = 5$

c) $a_1 = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3};\ r = \frac{1}{3}$

d) $a_1 = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2};\ r = 2$

**34. Calcula la razón de estas progresiones geométricas de las que conocemos:**

a) $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_5 = 50 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_6 = \frac{-4}{9} \\ a_{10} = \frac{-9}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_5 = -64 \\ a_8 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_2 = 48 \\ a_7 = \frac{16}{81} \end{cases}$

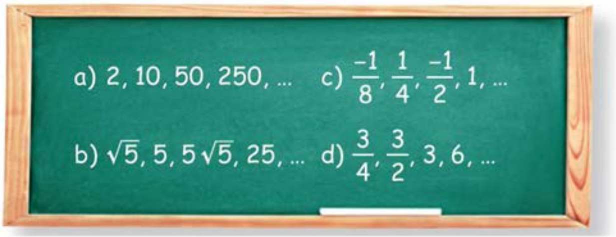
a) $50 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 5$

b) $\frac{-9}{4} = \frac{-4}{9} r^4 \rightarrow \pm\frac{3}{2}$

c) $-1 = -64 \cdot r^3 \rightarrow r = \frac{1}{4}$

d) $\frac{16}{81} = 48 \cdot r^5 \rightarrow r = \frac{1}{3}$

**35.** **Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas.**




a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}$

b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{5}\right)^{n}$

c) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{-1}{8} \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-4}$

d) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$

**36.** **Escribe el término general de estas progresiones geométricas de las que conocemos:**

a) $\begin{cases} a_2 = -32 \\ a_7 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 = -3 \\ a_6 = -48 \end{cases}$

a) $1 = -32 \cdot r^5 \rightarrow r = -\frac{1}{2}$; $a_1 = 64$; $a_n = 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-2)^{7-n}$

b) $-48 = -3 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 4$;

Si $r = 4 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{64}$ $\qquad a_n = -\frac{3}{64} \cdot 4^{n-1} = -3 \cdot 4^{n-4}$

Si $r = -4 \rightarrow a_1 = \frac{3}{64}$ $\qquad a_n = \frac{3}{64} \cdot (-4)^{n-1} = -3 \cdot (-4)^{n-4}$

**37.** **Halla la suma de los 10 primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) 3, −12, 48, −192, … c) $\frac{-1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, 1, …$

b) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, …$ d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, …$

a) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{3 \cdot \left((-4)^{10} - 1\right)}{-4 - 1} = -629145$

b) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{\sqrt{5} \cdot \left(\left(\sqrt{5}\right)^{10} - 1\right)}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3124\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = 781\sqrt{5} + 3905$

c) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{-1}{8} \cdot \left((-2)^{10} - 1\right)}{-2 - 1} = \frac{341}{8}$

d) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = 14762$

**38. Calcula la suma de los 9 primeros términos de las progresiones con términos generales:**

a) $a_n = 7 \cdot (\sqrt{5})^{n+1}$

b) $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-2}$

a) $a_n = 35 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{n-1}$

$$S_9 = \frac{a_1 \cdot (r^9 - 1)}{r - 1} = \frac{35 \cdot \left(\sqrt{5^9} - 1\right)}{\sqrt{5} - 1} = 5460\sqrt{5} + 27335$$

b) $a_n = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^{n-1}$

$$S_9 = \frac{a_1 \cdot (r^9 - 1)}{r - 1} = \frac{-\frac{4}{3} \cdot \left((-3)^9 - 1\right)}{-3 - 1} = -\frac{19684}{3}$$

**39. Una carretera se bifurca tras 3 km en línea recta. Cada una de las ramificaciones se vuelve a bifurcar tras otros 3 km, y así sucesivamente hasta un total de 6 veces. ¿Cuántos kilómetros acumulan todas las bifurcaciones?**

La sucesión es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$$

$189 - 3 = 186 \rightarrow$ Las bifurcaciones acumulan 186 km, sin contar el tramo inicial.

**40. Calcula la suma de los 7 primeros términos de estas progresiones geométricas:**

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_3 = 0,4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2 = -3 \\ a_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

a) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{64}$

b) $0,4 = 0,1 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$

Si $r = 2 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{0,1 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 12,7$

Si $r = -2 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{0,1 \cdot \left((-2)^7 - 1\right)}{2 - 1} = 4,3$

c) $-\frac{1}{3} = -3 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$

Si $r = \frac{1}{3}$, $a_1 = -9 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{-9 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{1093}{81}$

Si $r = -\frac{1}{3}$, $a_1 = 9 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{9 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^7 - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{547}{81}$

**41.** **Halla la suma de los 6 primeros términos de las siguientes progresiones.**

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_3 = 8 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_3 = -2 \\ r = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_5 = 9 \\ r = \sqrt{3} \end{cases}$

a) $S_6 = \dfrac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \dfrac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 364$

b) $8 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \rightarrow a_1 = 32$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \dfrac{32 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\dfrac{1}{2} - 1} = 63$

c) $-2 = a_1 \cdot (-2)^2 \rightarrow a_1 = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \dfrac{-\dfrac{1}{2} \cdot \left((-2)^6 - 1\right)}{-2 - 1} = \dfrac{21}{2}$

d) $9 = a_1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^4 \rightarrow a_1 = 1$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \dfrac{1 \cdot \left(\left(\sqrt{3}\right)^6 - 1\right)}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{26}{\sqrt{3} - 1} = 13\sqrt{3} + 13$

**42.** **Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica con $a_n = 2\left(\sqrt{5}\right)^n$.**

$a_n = 2\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{n-1}$ $\qquad a_1 = 2\sqrt{5}$ $\qquad r = \sqrt{5}$

$$S_{10} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \left(\left(\sqrt{5}\right)^{10} - 1\right)}{\sqrt{5} - 1} = \frac{6248\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = 1562\sqrt{5} + 7810$$

**43.** **La suma de los *n* términos de una progresión geométrica es 504. Calcula el número de términos sabiendo que $a_6 = 256$ y $a_1 = 8$.**

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \longrightarrow 256 = 8 \cdot r^5 \rightarrow r = 2$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \longrightarrow \frac{8 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 504 \longrightarrow n = 6$$

**44.** **El sábado pasado, Paula envió un correo electrónico a tres amigos. Al día siguiente, cada uno de los amigos de Paula que recibieron el correo lo reenvió a otros tres amigos, y así sucesivamente. Si ninguna persona ha recibido el mensaje más de una vez, calcula cuántas personas recibieron el mensaje hasta el sábado siguiente.**

$S_7 = \dfrac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} = \dfrac{3 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = 3279$ personas

**45. Halla la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) 100; 25; 6,25; 1,5625; …

b) 10; 1; 0,1; 0,01; …

c) 20; 4; 0,8; 0,16; …

a) $r=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\rightarrow S=\frac{100}{1-\frac{1}{4}}=\frac{400}{3}$

b) $r=\frac{1}{10}\rightarrow S=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}$

c) $r=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\rightarrow S=\frac{20}{1-\frac{1}{5}}=25$

**46. Calcula la suma de todos los términos de una progresión geométrica con $r = 0{,}2$ y $a_1 = 4$.**

$r=0{,}2\rightarrow S=\frac{4}{1-0{,}2}=5$

**47. Halla la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_n=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

b) $a_n=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

c) $a_n=-8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

d) $a_n=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

a) $a_n=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_1=-\frac{1}{5}$, $r=-\frac{1}{2}\rightarrow S=\frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-2}{15}$

b) $a_1=6$, $r=\frac{2}{3}\rightarrow S=\frac{6}{1-\frac{2}{3}}=18$

c) $a_n=-8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, $a_1=-\frac{8}{25}$, $r=\frac{1}{5}\rightarrow S=\frac{\frac{-8}{25}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{-2}{5}$

d) $a_1=\frac{1}{10}$, $r=\frac{2}{5}\rightarrow S=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{6}$

**48. En una progresión geométrica, $S = 20$ y $a_1 = 5$. ¿Cuánto vale la razón?**

$20=\frac{5}{1-r}\rightarrow r=\frac{3}{4}$

**49. Calcula el capital final que se obtendrá al invertir, con un interés compuesto, 1 200 €:**

a) Al 2 % anual durante 5 años.

b) Al 3 % anual durante 4 años.

c) Al 4,2 % anual durante 8 años.

a) $C_f = 1200 \cdot \left(1+\frac{2}{100}\right)^5 = 1324{,}90$ €

c) $C_f = 1200 \cdot \left(1+\frac{4{,}2}{100}\right)^8 = 1667{,}72$ €

b) $C_f = 1200 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^4 = 1350{,}61$ €

**50. Calcula el capital que hay que invertir con un interés compuesto del 3,4 % anual durante 6 años, 5 meses y 12 días, para que al final de la inversión se obtengan 1 245 €.**

Expresando el tiempo en años $t = 6 + 0{,}417 + 0{,}0329 = 6{,}4499$ años

$$1245 = C \cdot \left(1+\frac{3{,}4}{100}\right)^{6{,}45} \rightarrow C = 1\,003{,}49 \text{ €}$$

**51. ¿Qué da mayores beneficios, un depósito de 5 años al 6 % o uno de 10 años al 3 %?**

$C_f = C \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^5 = C \cdot 1{,}338$ $\qquad$ $C_f = C \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^{10} = C \cdot 1{,}344$

El depósito de 10 años al 3 % genera mayores beneficios.

**52. Escribe más términos en estas sucesiones.**

a) 4, 7, 10, 13, …

b) −6, 12, −24, 48, …

c) 3, 4, 6, 9, 13, …

d) 5, 10, 15, 20, …

e) 3, 33, 333, 3 333, …

f) 1, −2, 3, −4, 5, …

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, …

b) –6, 12, –24, 48, –96, 192, –384, 768, …

c) 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, 48, 58, …

d) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, …

e) 3, 33, 333, 3 333, 33 333, 333 333, 3 333 333, …

f) 1, –2, 3, –4, 5, –6, 7, –8, 9, –10, 11, –12, …

**53. Observa la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, … y responde.**

a) ¿Cuáles son los términos $a_{11}$ y $a_{17}$?

b) ¿Qué posición ocupan los números 11 y 17?

c) ¿Cuántos y qué términos hay entre el número 23 y el número 35?

a) $a_n = 2n - 1 \rightarrow a_{11} = 21$ y $a_{17} = 33$

b) $2n - 1 = 11 \rightarrow n = 6$; $\qquad 2n - 1 = 17 \rightarrow n = 9$

c) $2n - 1 = 23 \rightarrow n = 12$; $\qquad 2n - 1 = 35 \rightarrow n = 18$

Hay 5 términos $a_{13}$, $a_{14}$, $a_{15}$, $a_{16}$ y $a_{17}$ que toman los valores 25, 27, 29, 31 y 33, respectivamente.

**54. Contesta razonadamente si el número 31 es uno de los términos de las siguientes sucesiones y, si lo es, di qué posición ocupa.**

a) 2, 5, 7, 12, 19, … b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, …

La sucesión es recurrente y el término general es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$31 = 12 + 19 = a_6$

La sucesión es aritmética y el término general es: $a_n = 3n + 1$

$31 = 3n + 1 \rightarrow n = 10 \rightarrow a_{10} = 31$

**55. Copia en tu cuaderno y completa estas sucesiones con el término que falta.**

a) 1, 8, 27, □, 125, …

b) −5, −9, −13, □, −21, …

c) 2, 5, □, 11, 14, …

d) 7, □, 21, 28, 35, …

e) 1, 3, 9, □, 81, …

**¿Cuál es su regla de formación?**

a) El término general es $n^3$. El término que falta es 64.

b) El término general es $a_n = -1 - 4n$. El término que falta es −17.

c) El término general es $a_n = 3n - 1$. El término que falta es 8.

d) El término general es $a_n = 7n$. El término que falta es 14.

e) El término general es $a_n = 3^{n-1}$. El término que falta es 27.

**56. Escribe los 4 primeros términos de estas sucesiones dadas por su regla de formación.**

a) Su primer término es −4 y cada término se obtiene sumando 5 al anterior.

b) Su primer término es 7 y cada término se obtiene restando 3 al anterior.

c) Su primer término es 100 y cada término se obtiene dividiendo entre 10 el anterior.

d) Su primer término es −3 y cada término se obtiene elevando al cuadrado el anterior.

a) −4, 1, 6, 11, …

b) 7, 4, 1, −2, …

c) 100; 10; 1; 0,1; …

d) −3, 9, 81, 6 561, …

**57. Siendo $a_1 = 5$, forma las sucesiones tales que cada término es:**

a) El doble del anterior.

b) El resultado de sumar 9 al anterior.

c) El resultado de sumar al anterior su cuadrado.

a) 5, 10, 20, 40, …

b) 5, 14, 23, 32, …

c) 5, 30, 930, 865 830, …

**58.** **Escribe los 7 primeros términos de la sucesión cuyo término general es el que se da.**

a) $a_n = 2n + 1$
b) $a_n = 4n - 3$
c) $a_n = 7 - 3n$
d) $a_n = \dfrac{n+1}{2}$
e) $a_n = 5n - 2 \cdot (3 - n)$
f) $a_n = n^2 + n - 2$
g) $a_n = (n - 3)^2$
h) $a_n = \dfrac{1 - 2n}{3}$

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

b) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25

c) 4, 1, –2, –5, –8, –11, –14

d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

e) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43

f) 0, 4, 10, 18, 28, 40, 54

g) 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16

h) $-\frac{1}{3}, -1, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -3, -\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}$

**59.** **Obtén los 4 primeros términos de la sucesión cuyo término general es el siguiente.**

a) $a_n = (-1) \cdot 2^n$
b) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
c) $a_n = (-2)^{n+1}$
d) $a_n = (n + 1)^2$
e) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
f) $a_n = 4 \cdot (n - 2)^2$

a) –2, –4, –8, –16

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

c) 4, –8, 16, –32

d) 4, 9, 16, 25

e) $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}$

f) 4, 0, 4, 16

**60.** **Comprueba si el número 27 es un término de cada una de las siguientes sucesiones y averigua el lugar que ocupa.**

a) $a_n = 4n + 3$
b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 5n + 7$
d) $a_n = n^2 - n - 3$
e) $a_n = 3(n - 2)^2$
f) $a_n = n^2 + 2n - 8$

a) $4n+3=27 \rightarrow 4n=24 \rightarrow n=6 \rightarrow a_6=27$

b) $2n-1=27 \rightarrow 2n=28 \rightarrow n=14 \rightarrow a_{14}=27$

c) $5n+7=27 \rightarrow 5n=20 \rightarrow n=4 \rightarrow a_4=27$

d) $n^2-n-3=27 \rightarrow n=6 \rightarrow a_6=27$

e) $3\cdot(n-2)^2=27 \rightarrow n=5 \rightarrow a_5=27$

f) $n^2+2n-8=27 \rightarrow n=5 \rightarrow a_5=27$

**61. Escribe los términos que se piden.**

a) $a_3$ y $a_4$, siendo $a_n=(-1)^{n+1}\cdot 3n$

b) $a_2$ y $a_3$, siendo $a_n=\dfrac{1}{n^2}-n$

c) $a_4$ y $a_5$, siendo $a_n=n^3\cdot(-1)^n$

d) $a_6$ y $a_8$, siendo $a_n=2n-n^2+3$

a) $a_3=(-1)^4\cdot 9=9$ $\quad a_4=(-1)^5\cdot 12=-12$

b) $a_2=\dfrac{1}{4}-2=-\dfrac{7}{4}$ $\quad a_3=\dfrac{1}{9}-3=-\dfrac{26}{9}$

c) $a_4=4^3\cdot(-1)^4=64$ $\quad a_5=5^3\cdot(-1)^5=-125$

d) $a_6=12-36+3=-21$ $\quad a_8=16-64+3=-45$

**62. Determina el cuarto y el quinto término de estas sucesiones, de las que conocemos los tres primeros. ¿Puedes escribir el término general?**

a) $a_1$ = primera cifra decimal del número $\pi$.
$a_2$ = segunda cifra decimal del número $\pi$.
$a_3$ = tercera cifra decimal del número $\pi$.

b) $a_1$ = redondeo a las décimas de $\sqrt{3}$.
$a_2$ = redondeo a las centésimas de $\sqrt{3}$.
$a_3$ = redondeo a las milésimas de $\sqrt{3}$.

c) $a_1$ = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.
$a_2$ = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 2 cm.
$a_3$ = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 cm.

a) $\pi=3{,}1415926 \rightarrow a_4=5$ y $a_5=9 \rightarrow$ No se puede escribir el término general.

b) $\sqrt{3}=1{,}732050808... \rightarrow a_4=1{,}7321$ y $a_5=1{,}73205 \rightarrow$ No se puede escribir el término general.

c) La sucesión es: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, ... \rightarrow a_4=4\sqrt{2}$, $a_5=5\sqrt{2}$, $a_n=n\sqrt{5}$

**63. Averigua los primeros términos de estas sucesiones definidas de forma recurrente.**

a) $a_1 = -3, a_2 = 2$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

b) $a_1 = 4, a_2 = 6$ y $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 1$

c) $a_1 = 2, a_2 = 8$ y $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + n$

a) $-3, 2, -5, -4, -23, \ldots$ b) $4, 6, \frac{1}{2}, -\frac{11}{12}, -\frac{17}{6}, \ldots$ c) $2, 8, 7, \frac{15}{2}, \frac{35}{4}, \ldots$

**64. Halla el término general de estas sucesiones.**

a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

c) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

d) $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$

e) $6, 8, 10, 12, 14, \ldots$

f) $-2, -4, -6, -8, -10, \ldots$

g) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

h) $3, -6, 9, -12, 15, \ldots$

a) $a_n = n$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2n - 1$

d) $a_n = 2n - 3$

e) $a_n = 2n + 4$

f) $a_n = -2n$

g) $a_n = 2^n$

h) $a_n = 3n \cdot (-1)^{n-1}$

**66. Halla el término general de las sucesiones.**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}, \frac{1}{33}, \ldots$

e) $4, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \ldots$

f) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$

a) $a_n = \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{1}{n+1}$

c) $a_n = \frac{1}{2^n}$

d) $a_n = \frac{1}{2^n + 1}$

e) $a_n = \frac{n+3}{n}$

f) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

**67. Escribe el término general de la sucesión que se obtiene:**

a) Multiplicando por 3 cada término de la sucesión $a_n = 2n - \frac{1}{3}$.

b) Sumando 3 a cada uno de los términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = 2n - \frac{1}{3}$.

a) $a_n = 6n - 1$ b) $a_n = 2n + \frac{8}{3}$

**68.** **Las siguientes sucesiones están relacionadas con la sucesión de término general $a_n = n^2$. Di cuál es esa relación y, a partir de ella, escribe el término general de las sucesiones.**

a) 2, 8, 18, 32, 50, … c) 3, 6, 11, 18, 27, …

b) 4, 9, 16, 25, … d) $\frac{16}{3}, \frac{25}{3}, 12, \frac{49}{3}, \ldots$

a) Es el doble de la sucesión → $a_n = 2n^2$

b) Empieza en el segundo término → $a_n = (n+1)^2$

c) Suma 2 a cada término → $a_n = n^2 + 2$

d) Empieza en el cuarto término y divide la sucesión por 3 → $a_n = \frac{(n+3)^2}{3}$

**69.** **Comprueba si son progresiones aritméticas y calcula su término general y la diferencia.**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … c) 3, 6, 12, 24, 48, …

b) 2, −2, 2, −2, 2, … d) 3, 0, −3, −6, −9, …

a) Sí es progresión aritmética: $a_n = 3n$ y $d = 3$

b) No es progresión aritmética.

c) No es progresión aritmética.

d) Sí es progresión aritmética: $a_n = 6 - 3n$ y $d = -3$

**70.** **Escribe el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 7$ y $d = 2$ d) $a_1 = -1$ y $d = 4$

b) $a_1 = 3$ y $d = -4$ e) $a_1 = 8$ y $d = -3$

c) $a_1 = -5$ y $d = -2$ f) $a_1 = -9$ y $d = 3$

a) $a_n = 5 + 2n$ d) $a_n = 4n - 5$

b) $a_n = 7 - 4n$ e) $a_n = 11 - 3n$

c) $a_n = -3 - 2n$ f) $a_n = 3n - 12$

**71.** **Calcula la diferencia y el quinto término de las progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$ c) $a_3 = 8$ y $a_6 = 23$

b) $a_3 = 4$ y $a_7 = -8$ d) $a_5 = 0$ y $a_{10} = 5$

a) $d = a_2 - a_1 = 4$ $a_5 = a_1 + 4d = 3 + 16 = 19$

b) $a_7 = a_3 + 4d \rightarrow -8 = 4 + 4d \rightarrow d = -3$ $a_5 = a_3 + 2d = 4 - 6 = -2$

c) $a_6 = a_3 + 3d \rightarrow 23 = 8 + 3d \rightarrow d = 5$ $a_5 = a_3 + 2d = 8 + 10 = 18$

d) $a_{10} = a_5 + 5d \rightarrow 5 = 5d \rightarrow d = 1$ $a_5 = 0$

**72. Encuentra los términos sexto y octavo de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_4 = -6$ y $a_{12} = -22$ c) $a_1 = 7$ y $a_4 = 34$

b) $a_2 = 12$ y $a_7 = 42$ d) $a_3 = 7$ y $a_7 = 3$

a) $a_{12} = a_4 + 8d \rightarrow -22 = -6 + 8d \rightarrow d = -2$

$a_6 = a_4 + 2d = -10$ $a_8 = a_4 + 4d = -14$

b) $a_7 = a_2 + 5d \rightarrow 42 = 12 + 5d \rightarrow d = 6$

$a_6 = a_7 - d = 36$ $a_8 = a_7 + d = 48$

c) $a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 34 = 7 + 3d \rightarrow d = 9$

$a_6 = a_4 + 2d = 52$ $a_8 = a_4 + 4d = 70$

d) $a_7 = a_3 + 4d \rightarrow 3 = 7 + 4d \rightarrow d = -1$

$a_6 = a_7 - d = 4$ $a_8 = a_7 + d = 2$

**73. Averigua el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_5 = 3$ y $d = 2$ d) $a_3 = 24$ y $a_6 = -3$

b) $a_{10} = 70$ y $d = -15$ e) $a_8 = -6$ y $a_{12} = 18$

c) $a_2 = -12$ y $d = 12$ f) $a_4 = 8$ y $a_6 = 28$

a) $a_n = a_5 + (n - 5) \cdot d \rightarrow a_n = 2n - 7$

b) $a_n = a_{10} + (n - 10) \cdot d \rightarrow a_n = 220 - 15n$

c) $a_n = a_2 + (n - 2) \cdot d \rightarrow a_n = 12n - 36$

d) $a_6 = a_3 + 3d \rightarrow -3 = 24 + 3d \rightarrow d = -9$

$a_n = a_3 + (n - 3) \cdot d \rightarrow a_n = 51 - 9n$

e) $a_{12} = a_8 + 4d \rightarrow 18 = -6 + 4d \rightarrow d = 6$

$a_n = a_8 + (n - 8) \cdot d \rightarrow a_n = 6n - 54$

f) $a_6 = a_4 + 2d \rightarrow 28 = 8 + 2d \rightarrow d = 10$

$a_n = a_4 + (n - 4) \cdot d \rightarrow a_n = 10n - 32$

**74. Comprueba que los siguientes términos generales son de progresiones aritméticas, halla su diferencia y los 5 primeros términos.**

a) $a_n = 3n - 1$ c) $a_n = 5n - 5$

b) $a_n = 3 - 4n$ d) $a_n = 4n$

a) 2, 5, 8, 11, 14, … $\rightarrow d = 3$

b) −1, −5, −9, −13, −17, … $\rightarrow d = -4$

c) 0, 5, 10, 15, 20, … $\rightarrow d = 5$

d) 4, 8, 12, 16, 20, … $\rightarrow d = 4$

**75.** **Calcula el lugar que ocupa el número 24 como término de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_n = 3n + 6$
b) $a_n = 2n - 10$
c) $a_n = 8 - n$
d) $a_n = 4n + 12$

a) $24 = 3n + 6 \rightarrow n = 6 \rightarrow a_6 = 24$

b) $24 = 2n - 10 \rightarrow n = 17 \rightarrow a_{17} = 24$

c) $24 = 8 - n \rightarrow n = -16 \rightarrow$ No pertenece a la sucesión.

d) $24 = 4n + 12 \rightarrow n = 3 \rightarrow a_3 = 24$

**76.** **Para las siguientes progresiones aritméticas, calcula $a_1$, $d$ y $a_n$.**

a) $a_4 = 13$ y $a_{11} = 41 - a_2$
b) $a_3 = -1$ y $a_7 - a_5 = -4$
c) $a_3 = 6$ y $a_8 = 21 - a_1$
d) $a_2 = 2$ y $a_6 = 25 + a_1$

a) $a_4 = 13 = a_1 + 3d$

$a_{11} = 41 - a_2 = 41 - a_1 - d = a_1 + 10d \rightarrow 41 = 2a_1 + 11d$

Resolviendo conjuntamente: $a_1 = 4$ y $d = 3 \rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$

b) $a_7 = -4 + a_5 = -4 + a_1 + 4d = a_1 + 6d \rightarrow -4 = 2d \rightarrow d = -2$

$a_3 = -1 = a_1 + 2d \rightarrow a_1 = 3$

Con lo que el término general es: $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n$

c) $a_3 = 6 = a_1 + 2d$

$a_8 = 21 - a_1 = a_1 + 7d \rightarrow 21 = 2a_1 + 7d$

Resolviendo conjuntamente $a_1 = 0$ y $d = 3 \rightarrow a_n = (n - 1) \cdot 3 = 3n - 3$

d) $a_6 = 25 + a_1 = a_1 + 5d \rightarrow 25 = 5d \rightarrow d = 5$

$a_2 = 2 = a_1 + d \rightarrow a_1 = -3$

Con lo que el término general es: $a_n = -3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 8$

**77.** **Sabiendo que estas sucesiones son progresiones aritméticas, completa en tu cuaderno los términos que faltan.**

a) $\square, \frac{1}{2}, \square, \frac{5}{6}, \square, \square$
b) $\square$; 1,5; $\square$; 2,5; $\square$
c) $\square, \frac{1}{4}, \square, \square, \frac{1}{2}, \square$
d) $\square, \square, \square, \frac{5}{3}, \square, \frac{8}{3}$

a) $d = \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{4 - 2} = \dfrac{1}{6} \rightarrow \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{6}, 1, \dfrac{7}{6}$

b) $d = (2{,}5 - 1{,}5) : (4 - 2) = 0{,}5 \rightarrow 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3$

c) $d = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{5 - 2} = \dfrac{1}{12} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{12}$

d) $d = \dfrac{\frac{8}{3} - \frac{5}{3}}{6 - 4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{8}{3}$

**79. Añade el número de términos indicado para que se forme una progresión aritmética.**

a) 3 términos entre 1 y 9.

b) 4 términos entre 3 y 18.

c) 5 términos entre −4 y 20.

d) 6 términos entre 2 y 58.

a) $a_5 - a_1 = 4d = 8 \rightarrow d = 2$ La sucesión es: 1, 3, 5, 7, 9, …

b) $a_6 - a_1 = 5d = 15 \rightarrow d = 3$ La sucesión es: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

c) $a_7 - a_1 = 6d = 24 \rightarrow d = 4$ La sucesión es: −4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, …

d) $a_8 - a_1 = 7d = 56 \rightarrow d = 8$ La sucesión es: 2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, …

**80. Halla la suma de los 12 y de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = -4n + 3$.**

$a_1 = -4 + 3 = -1 \qquad a_{12} = -4 \cdot 12 + 3 = -45 \qquad a_{25} = -4 \cdot 25 + 3 = -97$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (-1 - 45) \cdot 6 = -276$$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(-1 - 97) \cdot 25}{2} = -1225$$

**81. Calcula la suma de los 30 primeros términos para cada progresión aritmética.**

a) $a_4 = 8$ y $a_6 = 28$

b) $a_{10} = 70$ y $d = -15$

c) $a_3 = \frac{1}{2}$ y $a_4 = \frac{5}{6}$

d) $d = -3$ y $a_9 = 4a_4$

a) $a_6 - a_4 = 2d = 20 \rightarrow d = 10$

$a_1 = a_4 - 3d \rightarrow a_1 = 8 - 30 = -22$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = -22 + 290 = 268$

$$S_{30} = \frac{(-22 + 268) \cdot 30}{2} = 3690$$

b) $a_1 = a_{10} - 9d \rightarrow a_1 = 70 + 135 = 205$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = 205 - 435 = -230$

$$S_{30} = \frac{(205 - 230) \cdot 30}{2} = -375$$

c) $a_4 - a_3 = d = \frac{1}{3}$

$a_1 = a_3 - 2d \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \qquad a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = -\frac{1}{6} + \frac{29}{3} = \frac{19}{2}$

$$S_{30} = \frac{\left(\frac{-1}{6} + \frac{19}{2}\right) \cdot 30}{2} = 140$$

d) $a_9 = 4a_4 \rightarrow a_1 + 8 \cdot (-3) = 4 \cdot (a_1 + 3 \cdot (-3)) \rightarrow a_1 = 4$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = 4 + 29 \cdot (-3) = -83$

$$S_{30} = \frac{(4 - 83) \cdot 30}{2} = -1185$$

**82. Averigua el término general de la progresión aritmética en cada caso.**

a) $S_{16} = -528$ y $a_{16} = -3$
b) $S_{35} = 1960$ y $a_3 = 11$
c) $S_{52} = 6682$ y $a_1 = 1$
d) $S_{13} = 0$ y $a_8 = 8$

a) $S_{16} = -528 = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} \rightarrow -66 = a_1 - 3 \rightarrow a_1 = -63$

$a_{16} = a_1 + 15d \rightarrow -3 = -63 + 15d \rightarrow d = 4$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow a_n = -67 + 4n$

b) $a_1 = a_3 - 2d = 11 - 2d$ $\quad a_{35} = a_1 + 34d = 11 - 2d + 34d = 11 + 32d$

$S_{35} = 1960 = \frac{(a_1 + a_{35}) \cdot 35}{2} = \frac{(22 + 30d) \cdot 35}{2} \rightarrow 1960 = (11 + 15d) \cdot 35 \rightarrow d = 3$

$a_1 = 5$ $\quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 3n + 2$

c) $S_{52} = 6682 = \frac{(a_1 + a_{52}) \cdot 52}{2} \rightarrow 6682 = (1 + 1 + 51d) \cdot 26 \rightarrow d = 5$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 5n - 4$

d) $a_1 = a_8 - 7d$ y $a_{13} = a_8 + 5d \rightarrow S_{13} = 0 = \frac{(a_1 + a_{13}) \cdot 13}{2} \rightarrow 0 = 8 - 7d + 8 + 5d \rightarrow d = 8$

$a_1 = 8 - 56 = -48$ $\quad a_n = 8n - 56$

**83. Utiliza las progresiones aritméticas y suma.**

a) Los 50 primeros números naturales.
b) Los números pares menores que 101.
c) Los múltiplos de tres entre 100 y 200.
d) Los números impares menores que 80.
e) ¿Cuántos números pares consecutivos se deben sumar para que el resultado sea 11 130?
f) ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 se deben sumar para obtener 2916?

a) $a_n = n \rightarrow S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = (1 + 50) \cdot 25 = 1\,275$

b) $a_n = 2n \rightarrow 2n = 100 \rightarrow n = 50$

$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = (2 + 100) \cdot 25 = 2\,550$

c) $a_n = 99 + 3n$ $\quad a_1 = 102$ $\quad a_{33} = 198$

$S = \frac{(a_1 + a_{33}) \cdot 33}{2} = 4\,950$

d) $a_n = 2n - 1 \rightarrow 2n - 1 = 79 \rightarrow n = 40$

$S = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = (1 + 79) \cdot 20 = 1\,600$

e) 11 130 : 2 = 5 565. Bastaría con sumar dos pares consecutivos: 5 564 + 5 566 = 11 130. No obstante, si sumamos desde el primer número par, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = 11\,130 \rightarrow n^2 + n - 11\,130 = 0 \rightarrow n = 105$

Habría que sumar los 105 primeros pares.

f) $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = 2\,916 \rightarrow n^2 = 2\,916 \rightarrow n = 54$

**84. Halla 5 términos de una progresión aritmética sabiendo que suman 80 y la diferencia es 4.**

$(a_1+a_5)=(a_2+a_4)=2a_3$

$S_5=80=\dfrac{(a_1+a_5)\cdot 5}{2}=\dfrac{5\cdot 2a_3}{2}\rightarrow 32=2a_3\rightarrow\ a_3=16$

$a_1=8, a_2=12, a_3=16, a_4=20, a_5=24$

**85. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 5, 7, 9, … debemos sumar para que el resultado de la suma sea 780?**

$a_n=2n+3\quad S_n=780=\dfrac{(5+a_n)\cdot n}{2}$; $780\cdot 2=(5+3+2n)\cdot n\rightarrow n^2+4n-780=0\rightarrow n=26$

**86. Escribe los primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1=2$ y $r=3$

b) $a_1=-1$ y $r=3$

c) $a_1=3$ y $r=4$

d) $a_2=-2$ y $r=-2$

a) 2, 6, 18, 54, 162, …

b) –1, –3, –9, –27, –81, …

c) 3, 12, 48, 192, 768, …

d) –2, 4, –8, 16, –32, …

**88. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y cuáles geométricas? Calcula su diferencia o su razón.**

a) $1, 3, 9, 27, \ldots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

c) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

d) $-4, 4, -4, 4, \ldots$

e) $64, 16, 4, 1, \ldots$

f) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \ldots$

a) Geométrica de razón 3.

b) Aritmética de diferencia 2.

c) Geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

d) Geométrica de razón –1.

e) Geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

f) Geométrica de razón 5.

**89. Señala las progresiones geométricas.**

a) $a_1=6$ y $a_n=-2a_{n-1}$

b) $a_1=-3$ y $a_n=(-1)^n\cdot a_{n-1}$

c) $a_1=4$ y $a_n=5+a_{n-1}$

d) $a_1=5, a_2=2$ y $a_n=a_{n-1}+3a_{n-2}$

e) $a_1=256$ y $a_n=\dfrac{7a_{n-1}}{2}$

a) Geométrica de razón –2

Las progresiones b), c) y d) no son geométricas.

e) Geométrica de razón $\frac{7}{2}$

**90. Halla el término general de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1 = -1$ y $r = 2$
b) $a_1 = 3$ y $r = -4$
c) $a_1 = 8$ y $r = -\frac{1}{3}$
d) $a_1 = -2$ y $r = -2$
e) $a_1 = 1$ y $r = 4$
f) $a_1 = -9$ y $r = \frac{2}{3}$

a) $a_n = (-1) \cdot 2^{n-1}$
b) $a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}$
c) $a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
d) $a_n = (-2)^n$
e) $a_n = 4^{n-1}$
f) $a_n = (-9) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

**91. Di cuál es el término general de estas progresiones geométricas.**

a) $a_4 = 270$ y $r = \frac{3}{2}$
b) $a_3 = 5$ y $r = -5$
c) $a_2 = -12$ y $r = \frac{2}{3}$
d) $a_5 = 1$ y $r = 10$

a) $a_n = 270 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2^{n-5}}$

b) $a_n = 5 \cdot (-5)^{n-3}$

c) $a_n = -12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{-2^n}{3^{n-3}}$

d) $a_n = 10^{n-5}$

**92. Calcula los 5 primeros términos y la razón de estas progresiones geométricas.**

a) $a_n = (-3)^n$
b) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n+1}$
c) $a_n = 2^{1-n}$
d) $a_n = \frac{a_{n-1}}{7}$ siendo $a_1 = 2401$

a) $-3, 9, -27, 81, -243, \ldots \rightarrow r = -3$
b) $12, -24, 48, -96, 192, \ldots \rightarrow r = -2$
c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \rightarrow r = \frac{1}{2}$
d) $2\,401, 343, 49, 7, \ldots \rightarrow r = \frac{1}{7}$

**93. Encuentra la razón y el cuarto término de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1 = 3$ y $a_2 = 6$
b) $a_2 = -16$ y $a_3 = 4$
c) $a_3 = 32$ y $a_5 = 2048$
d) $a_5 = 243$ y $a_7 = 2187$

a) $r = 6 : 3 = 2$; $a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

b) $r = 4 : (-16) = -\frac{1}{4}$; $a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow a_4 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

c) $r^2 = 2\,048 : 32 = 64 \rightarrow r = \pm 8$

Si $r = 8 \rightarrow a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow a_4 = 32 \cdot 8 = 256$
Si $r = -8 \rightarrow a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow a_4 = 32 \cdot (-8) = -256$

d) $r^2 = 2\,187 : 243 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

Si $r = 3 \rightarrow a_4 = a_5 : r \rightarrow a_4 = 243 : 3 = 81$
Si $r = -3 \rightarrow a_4 = a_5 : r \rightarrow a_4 = 243 : (-3) = -81$

**94.** **Halla los términos tercero y sexto de estas progresiones geométricas.**

a) $a_5 = 243$ y $a_7 = 27$ c) $a_2 = 12$ y $a_4 = 432$

b) $a_1 = \frac{16}{25}$ y $a_2 = \frac{8}{5}$ d) $a_4 = -1$ y $a_5 = 1$

a) $r^2 = 27 : 243 = \frac{1}{9} \rightarrow r = \pm\frac{1}{3} \rightarrow$ Si $r = \frac{1}{3} \rightarrow a_3 = a_5 : r^2 = 243 : \frac{1}{9} = 2\,187$; $a_6 = a_5 \cdot r = 243 \cdot \frac{1}{3} = 81$

Si $r = -\frac{1}{3} \rightarrow a_3 = a_5 : r^2 = 243 : \left(-\frac{1}{9}\right) = -2\,187$; $a_6 = a_5 \cdot r = 243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -81$

b) $r = \frac{8}{5} : \frac{16}{25} = \frac{5}{2} \rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} = 4$; $a_6 = a_3 \cdot r^3 = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{2}$

c) $r^2 = 432 : 12 = 36 \rightarrow r = \pm 6 \rightarrow$ Si $r = 6 \rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = 12 \cdot 6 = 72$; $a_6 = a_4 \cdot r^2 = 432 \cdot 36 = 15\,552$

Si $r = -6 \rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = 12 \cdot (-6) = -72$; $a_6 = a_4 \cdot r^2 = 432 \cdot 36 = 15\,552$

d) $r = 1 : (-1) = -1 \rightarrow a_3 = a_4 : r = -1 : (-1) = 1$; $a_6 = a_4 \cdot r^2 = -1 \cdot 1 = -1$

**95.** **Calcula el primer término y la razón de estas progresiones geométricas.**

a) $a_4 = 12$ y $a_6 = 3$ c) $a_6 = 128$ y $a_7 = -512$

b) $a_2 = -6$ y $a_3 = 6$ d) $a_3 = 0{,}1$ y $a_5 = 0{,}001$

a) $r^2 = 3 : 12 = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm\frac{1}{2} \rightarrow$ Si $r = \frac{1}{2}$, $a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_1 = 12 : \frac{1}{8} = 96$

Si $r = -\frac{1}{2}$, $a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_1 = 12 : \left(-\frac{1}{8}\right) = -96$

b) $r = 6 : (-6) = -1$; $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow a_1 = (-6) : (-1) = 6$

c) $r = -512 : 128 = -4$; $a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow a_1 = 128 : (-1\,024) = -\frac{1}{8}$

d) $r^2 = 0{,}001 : 0{,}1 = 0{,}01 \rightarrow r = \pm 0{,}1 \rightarrow$ Si $r = 0{,}1 \rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow a_1 = 0{,}1 : 0{,}01 = 10$

Si $r = -0{,}1 \rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow a_1 = 0{,}1 : 0{,}01 = 10$

**96.** **Completa en tu cuaderno con los términos que faltan en las siguientes progresiones geométricas.**

a) 1; 0,1; □; 0,001; □ c) □, $\frac{1}{3}$, □, $\frac{1}{12}$, □

b) □, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, □, $\frac{1}{54}$, □ d) □, $\frac{3}{2}$, □, □, $\frac{81}{4}$

a) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001

b) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \frac{27}{2 \cdot \sqrt[3]{4}}, \frac{81}{4}$

**97.** **El tercer término de una progresión geométrica es $\frac{12}{5}$ y la razón es 10. ¿Qué lugar ocupan estos números dentro de la progresión?**

a) $\frac{12}{500}$ b) 240 000

a) $a_n = a_3 \cdot r^{n-3} \to \frac{12}{500} = \frac{12}{5} \cdot 10^{n-3} \to \frac{1}{100} = 10^{n-3} \to n = 1$

b) $a_n = a_3 \cdot r^{n-3} \to 240\,000 = \frac{12}{5} \cdot 10^{n-3} \to 100\,000 = 10^{n-3} \to n = 8$

**98.** **Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 3 y 4. Averigua qué lugar ocupan sabiendo que $a_1 = \frac{27}{16}$.**

$r = \frac{4}{3}$; $a_n = 3 = \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \to n = 3$ Por tanto, $a_3 = 3$ y $a_4 = 4$.

**99.** **¿Es 3720087 uno de los términos de la progresión aritmética cuya razón es 3 y cuyo término sexto es 1701?**

$a_n = a_6 \cdot r^{n-6} \to 3\,720\,087 = 1\,701 \cdot 3^{n-6} \to 2\,187 = 3^{n-6} \to n = 13$. Es el término $a_{13}$.

**100.** **Calcula la suma de los 5, 10 y 15 primeros términos de la progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$.**

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} \to S_5 = \frac{2 \cdot ((-5)^5 - 1)}{-5 - 1} = 1\,042$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} \to S_{10} = \frac{2 \cdot ((-5)^{10} - 1)}{-5 - 1} = -3\,255\,208$$

$$S_{15} = \frac{a_1 \cdot (r^{15} - 1)}{r - 1} \to S_{15} = \frac{2 \cdot ((-5)^{15} - 1)}{-5 - 1} = 10\,172\,526\,042$$

**101.** **Obtén la suma de los 7 primeros términos de las progresiones geométricas cuyo término general es el que se da a continuación:**

a) $a_n = (-2) \cdot 3^{n+1}$ c) $a_n = (-3) \cdot 2^{n+2}$

b) $a_n = 3^{n-2}$ d) $a_n = (-2)^{n-1}$

a) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} \to S_7 = \frac{-18 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = -19\,674$

b) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} \to S_7 = \frac{\frac{1}{3} \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{1093}{3}$

c) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} \to S_7 = \frac{-24 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = -3\,048$

d) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (r^7 - 1)}{r - 1} \to S_7 = \frac{1 \cdot ((-2)^7 - 1)}{-2 - 1} = 43$

**102.** **Halla las siguientes sumas de términos en progresiones geométricas.**

a) 6 primeros términos si $a_1 = 7$ y $r = 4$.

b) 10 primeros términos si $a_3 = \frac{4}{9}$ y $r = 3$.

c) 8 primeros términos si $a_1 = 10$ y $r = 0{,}2$.

a) $S_6 = \dfrac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r-1} \rightarrow S_6 = \dfrac{7 \cdot (4^6 - 1)}{4-1} = 9555$

b) $a_1 = \dfrac{4}{9} : 3^2 = \dfrac{4}{81}$ $\qquad S_{10} = \dfrac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r-1} \rightarrow S_{10} = \dfrac{\frac{4}{81} \cdot (3^{10} - 1)}{3-1} = \dfrac{118096}{81}$

c) $S_8 = \dfrac{a_1 \cdot (r^8 - 1)}{r-1} \rightarrow S_8 = \dfrac{10 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} = \dfrac{195312}{15625}$

**103.** **Calcula, si es posible, la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) 10; 2; 0,4; 0,08; …

b) 16; 12; 9; 6,75; …

a) $S = \dfrac{a_1}{1-r} \rightarrow S = \dfrac{10}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{25}{2}$

b) $S = \dfrac{a_1}{1-r} \rightarrow S = \dfrac{16}{1 - \frac{3}{4}} = 64$

**104.** **Escribe los 5 primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1 = \frac{1}{3}$ y la suma de todos sus términos es $\frac{4}{9}$.

b) $r = \frac{1}{5}$ y la suma de todos sus términos es $\frac{15}{4}$.

a) $S = \dfrac{a_1}{1-r} \rightarrow \dfrac{4}{9} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-r} \rightarrow r = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ La sucesión es $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{48}, \dfrac{1}{192}, \dfrac{1}{768}, \ldots$

b) $S = \dfrac{a_1}{1-r} \rightarrow \dfrac{15}{4} = \dfrac{a_1}{1 - \frac{1}{5}} \rightarrow a_1 = 3$ $\qquad$ La sucesión es $3, \dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{25}, \dfrac{3}{125}, \dfrac{3}{625}, \ldots$

**105.** **Halla la suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_5 = 160$ y $a_2 = 20$.**

$r^3 = 8 \rightarrow r = 2 \rightarrow a_1 = 10$ $\qquad S_9 = \dfrac{a_1 \cdot (r^9 - 1)}{r-1} \rightarrow S_9 = \dfrac{10 \cdot (2^9 - 1)}{2-1} = 5110$

**106.** **La suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica es $\frac{781}{500}$ y $r = \frac{1}{5}$.**

a) Escribe los primeros términos de la progresión.

b) Calcula la suma de todos los términos de la progresión y compárala con la dada.

a) $S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r-1} \rightarrow \frac{781}{500} = \frac{a_1 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} \rightarrow a_1 = \frac{5}{4}$

Con lo que la sucesión es $\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{500}, \ldots$

b) $S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow S = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{25}{16}$

Ambas sumas son prácticamente iguales: $\frac{781}{500} = 1{,}562$ y $\frac{25}{16} = 1{,}5625$

**107.** **Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,2 cada año. Si al comenzar el año medía 0,75 m, ¿qué altura tendrá dentro de 10 años? ¿Cuánto crecerá en esos 10 años?**

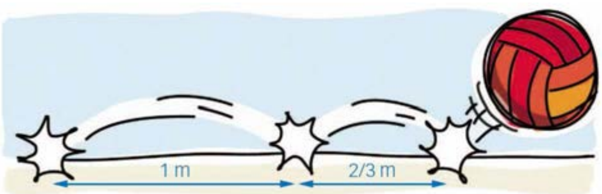
Es una progresión geométrica, con $r = 1{,}2$ y $a_1 = 0{,}75$.

$a_{10} = 0{,}75 \cdot 1{,}2^9 = 3{,}87$ m medirá a los 10 años, por lo que habrá crecido:
$3{,}87 - 0{,}75 = 3{,}12$ m

**108.** **Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada uno de los botes que da sube a una altura igual que la mitad del bote anterior. ¿A qué altura llegará en el quinto bote?**

Es una progresión geométrica, con $r = 0{,}5$ y $a_1 = 1$. El quinto bote es el término sexto de la progresión: $a_6 = 1 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}03125$ m

**109.** **Lanzamos un balón que da botes a lo largo de un pasillo, como se ve en la figura.**

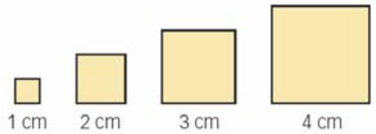



**Si al séptimo bote choca con la pared y se para, ¿qué distancia habrá recorrido?**

Es una progresión geométrica, con $r = \frac{2}{3}$ y $a_1 = 1$.

La suma de los 7 primeros términos es: $S_7 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = 2{,}82$ m

**110. Observa las figuras y responde.**




a) ¿Qué tipo de sucesión es la que se forma con los perímetros de los cuadrados?

b) ¿Y con las diagonales de los cuadrados?

c) ¿Y con las áreas de los cuadrados?

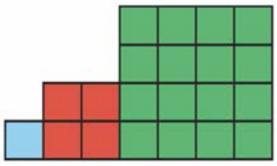
a) La sucesión de los perímetros es 4, 8, 12, 16, … Es una progresión aritmética con $d = 4$.

b) La sucesión de las diagonales es $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$ Es una progresión aritmética con $d = \sqrt{2}$ .

c) La sucesión de las áreas es 1, 4, 9, 16, …

No es ni progresión aritmética ni geométrica. El término general es $a_n = n^2$.

**111. Fíjate en la figura y describe las sucesiones de las medidas que se piden.**



a) Medidas de los lados de los cuadrados.

b) Medidas de las áreas de los cuadrados.

a) La sucesión de las medidas de los lados de los cuadrados es 1, 2, 4, 8, …

Es una progresión geométrica con $r = 2$.

b) La sucesión de las medidas de las áreas de los cuadrados es 1, 4, 16, 64, ...

Es una progresión geométrica con $r = 4$.

**112. Observa estos rectángulos.**


**Describe la sucesión de las medidas de las diagonales y halla la del rectángulo que ocupa el duodécimo lugar.**

La sucesión es $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{26}, \ldots$ y $a_n = \sqrt{1 + (n+1)^2} \;\rightarrow\; a_{12} = \sqrt{170}$

**113. La longitud de los lados de un heptágono están en progresión aritmética. Hállalos sabiendo que el menor mide 2 cm y el perímetro es 77 cm.**

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} \rightarrow 77 = \frac{(2 + a_7)\cdot 7}{2} \rightarrow a_7 = 20$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 20 = 2 + 6d \rightarrow d = 3$$

Con lo que las longitudes de los lados son: 2, 5, 8, 11, 14, 17 y 20.

**114. La suma de las edades de tres hermanos es la tercera parte de la edad de su abuelo. Halla sus edades sabiendo que están en progresión geométrica con $r = 3$ y su abuelo tiene 78 años.**

$$S_3 = \frac{a_1 \cdot (r^3 - 1)}{r - 1} \rightarrow 26 = \frac{a_1 \cdot (3^3 - 1)}{3 - 1} \rightarrow a_1 = 2$$

Las edades de los hermanos son 2, 6 y 18.

**115. Durante los cuatro primeros meses de vida, un bebé ha ido ganando cada mes un 20 % de peso. Si al nacer pesaba 2 900 gramos, ¿cuál ha sido su peso al final del cuarto mes?**

Los valores que toma el peso del bebé cada mes, están en progresión geométrica.

Para averiguar el peso que tenía el bebé al final del cuarto mes, hay que calcular $a_5$.

$a_1 = 2\,900$, $r = 1{,}2$; $a_5 = 2\,900 \cdot 1{,}2^4 = 6\,013{,}44$ g

**116. Una escalera tiene todos los peldaños iguales menos el primero, que mide 20 cm. Al subir 100 escalones, la altura ascendida es de 1 505 cm. ¿Qué altura tiene cada peldaño?**

$h$ = altura de uno de los 99 peldaños iguales.

$$1\,505 - 20 = 99 \cdot h \rightarrow h = \frac{1485}{99} = 15 \text{ cm}$$

Se podría considerar que los 99 escalones forman una progresión aritmética de diferencia $d = 0$.

**117. Un montañero planifica la subida a la cima de una montaña de la siguiente manera: el primer tramo será de 625 m, el segundo de 500 m, el tercero de 400 m, el cuarto de 320 m… Si alcanza la cima el octavo día, ¿cuántos metros mide la montaña?**

La sucesión 625, 500, 400, 320, … es una progresión geométrica de razón $r = \frac{4}{5}$.

Sumamos los 8 primeros términos:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (r^8 - 1)}{r - 1} = \frac{625 \cdot \left[\left(\frac{4}{5}\right)^8 - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = 2600{,}712 \text{ m}$$

**118. Una rana está en el borde de una charca circular de 9 m de radio. Quiere llegar al centro dando saltos. Comprueba si llegaría de alguna de las siguientes formas.**

a) El primer salto es de 3 m, y luego avanza dando saltos cuya medida es la mitad de la medida del salto anterior.

b) El primer salto es de 4 m, y luego avanza dando saltos cuya medida es la mitad de la medida del salto anterior.

c) El primer salto es de 3 m, y después avanza dando saltos cuya medida es dos tercios de la medida del salto anterior.

d) El primer salto es de 2 m, y después avanza dando saltos cuya medida es tres cuartos de la medida del salto anterior.

Los saltos forman una sucesión geométrica y la distancia que recorre la rana es la suma de ellos.

a) La ecuación que resulta de la suma de $n$ términos de la progresión formada por los saltos es:

$9=\dfrac{3\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1}$, que no tiene solución. De esta manera no llega al centro.

b) Análogamente, $9=\dfrac{4\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1}$ tampoco tiene solución. De esta manera tampoco llega al centro.

c) En este caso llegaría dando *infinitos* saltos, ya que $S=\dfrac{3}{1-\frac{2}{3}}=9$.

d) De la misma manera, $9=\dfrac{2\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)}{\frac{3}{4}-1}$ no tiene solución y tampoco llega al centro.

**119. Quique recorre en bici 1 500 m su primer día de entrenamiento. Cada día aumenta en $\frac{1}{3}$ lo que recorre el día anterior. Su objetivo es llegar a recorrer 100 km en total en un mes, entrenando todos los días. ¿Podrá conseguirlo a ese ritmo?**

Las cantidades recorridas cada día forman una sucesión geométrica con $r=\dfrac{4}{3}$.

Hallamos la suma de los 30 primeros términos:

$$S_{30}=\frac{a_1\cdot(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{1500\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{30}-1\right)}{\frac{4}{3}-1}=25193{,}99549\ \text{km}$$

Luego no conseguirá el objetivo.

**120. El primer metro de excavación de un pozo cuesta 20 €, el segundo 5 € más que el primero, el tercero 5 € más que el segundo y así sucesivamente.**

a) ¿Qué profundidad se alcanzará con 1 350 €?

b) ¿Cuánto costaría excavar un pozo de 300 m?

c) Utiliza las progresiones y expresa el gasto de la excavación en función del número de metros de profundidad.

Progresión aritmética con $d=5$ y $a_1=20$.

a) $1350=S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\rightarrow 1350=\dfrac{(20+15+5n)\cdot n}{2}\rightarrow 5n^2+35n-2700=0\rightarrow n=20$

b) $n=300\rightarrow S_{300}=\dfrac{(a_1+a_{300})\cdot 300}{2}=\dfrac{(20+1515)\cdot 300}{2}=230\,250$ €

c) $\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\dfrac{(20+15+5n)\cdot n}{2}=\dfrac{5n^2+35n}{2}$ €

**121. Durante 2015, una empresa de autobuses transportó 500 000 pasajeros. Las previsiones para los próximos 6 años son incrementar en un 4 % anual el número de pasajeros.**
**Si se cumplen las previsiones, ¿cuántas personas transportará la empresa entre 2015 y 2020?**

Las personas que transporta cada año se ajustan a una progresión geométrica con $a_1 = 500\,000$ y $r = 1{,}04$.

La cantidad pedida es la suma de los seis primeros términos de esa progresión.

$$S_6 = \frac{500\,000 \cdot (1{,}04^6 - 1)}{1{,}04 - 1} = 3\,316\,487 \text{ personas}$$

**122. Una empresa de coches tuvo una producción en el mes de enero del año pasado de 25 000 unidades de los modelos que fabrica.**
**A partir de febrero, cada mes, la producción fue un 15 % más alta que el mes anterior. Determina la cantidad total de coches que esta compañía produjo el año pasado.**

Los coches fabricados cada mes forman una progresión geométrica con $a_1 = 25\,000$ y $r = 1{,}15$.

La cantidad pedida es la suma de los 12 primeros términos de esa progresión.

$$S_{12} = \frac{25\,000 \cdot (1{,}15^{12} - 1)}{1{,}15 - 1} = 725\,042 \text{ coches}$$

**123. La población de una ciudad es de 20 000 habitantes. Si esta población crece a un ritmo de un 2 % al año, ¿cuántos habitantes tendrá dentro de 10 años?**

Se pide el término $a_{11}$ de una progresión geométrica con $r = 1{,}02$ y $a_1 = 20\,000$

$a_{11} = 20\,000 \cdot 1{,}02^{10} = 24\,380$ habitantes

**124. La población de un país es de aproximadamente 100 millones de habitantes y se estima que dentro de 20 años será de 144 millones de personas. Calcula su tasa de crecimiento anual (tanto por ciento del crecimiento de población) en ese período.**

$a_{21} = a_1 \cdot r^{20} \rightarrow 144 = 100 \cdot r^{20} \rightarrow r = 1{,}018$ La tasa de crecimiento anual es 1,8 %.

**125. Si depositamos 5 000 € al 4 % anual el 31 de diciembre, ¿qué capital final tendremos al acabar cada año tras cada uno de los siguientes períodos de tiempo?**

a) Tres años. b) Cinco años. c) Seis años.

$C = 5\,000$ €, $r = 4$ %

a) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 5\,624{,}32$ €

b) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 6\,083{,}26$ €

c) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 6\,326{,}60$ €

**126.** **Calcula el capital que a un interés compuesto del 4,5 % produce en cuatro años un capital de 59 626 €.**

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \to 59\,626 = C \cdot 1{,}045^4 \to C = 50\,000 \text{ €}$$

**127.** **En una situación de interés compuesto, un capital de 10 000 € se convierte en 10 527 € al cabo de dos años. ¿Cuál es el interés al que se invirtió el capital inicial?**

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \to 10\,527 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \to r = 2{,}6\,\%$$

**128.** **Calcula el capital inicial que hay que invertir con un interés compuesto del 3 % mensual para obtener finalmente 2 100 € después de 4 años.**

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \to 2100 = C \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{48} \to C = 508{,}20 \text{ €}$$

**129.** **Halla el capital que, con un interés compuesto del 10 % anual, produce 133,10 € en 3 años.**

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \to 133{,}10 = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 \to C = 100 \text{ €}$$

**130.** **Si un capital de 5 000 € se convierte en 6 000 € en una situación de interés compuesto al cabo de 2 años, ¿cuál es el interés al que ha estado invertido el capital inicial?**

$$6\,000 = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \to \sqrt{\frac{6}{5}} = 1 + \frac{r}{100} \to \frac{r}{100} = \sqrt{\frac{6}{5}} - 1$$

$$\to \frac{r}{100} = 0{,}095 \to \text{El interés será del } 9{,}5\,\%.$$

## DEBES SABER HACER

**1.** **Escribe los 5 primeros términos para:**

a) Una sucesión en la que el primer término es 5 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

b) Una sucesión en la que el primer término es 2, el segundo es $2 \cdot 0{,}5 = 1$; el tercero es $1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

a) 5, 7, 9, 11, 13 b) 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125

**2.** **Obtén los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) $b_1 = 2, b_2 = 4, b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

a) 1, 3, –2, 5, –7 b) 2; 4; 2; 0,5; 0,25

**3. En estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 13$ y $a_2 = 5$, calcula $d$, $a_8$ y $a_n$.

b) $b_1 = 4{,}5$ y $b_2 = 6$, calcula $d$, $b_{10}$ y $b_n$.

a) $d = 5 - 13 = -8$; $a_n = 13 + (n-1)\cdot(-8) = 21 - 8n$; $a_8 = 21 - 64 = -43$

b) $d = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$; $b_n = 4{,}5 + (n-1)\cdot 1{,}5 = 3 + 1{,}5n$; $b_{10} = 3 + 15 = 18$

**4. En una progresión aritmética $a_1 = 8$ y $d = 5$. ¿Qué número de término es el 133? Halla la suma de todos los términos hasta él.**

$a_n = 133 = 8 + (n-1)\cdot 5 = 3 + 5n \to n = 26 \to a_{26} = 133$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \to S_{26} = \frac{(8+133)\cdot 26}{2} = 1833$$

**5. En una progresión geométrica $a_2 = 60$ y $a_4 = 3\,840$. Calcula:**

a) La razón y el término general.

b) La suma y el producto de los 8 primeros términos.

a) $r^2 = \dfrac{a_4}{a_2} = 64 \to r = \pm 8 \to$ Si $r = 8 \to a_1 = 60 : 8 = \dfrac{15}{2} \to a_n = \dfrac{15}{2}\cdot 8^{n-1} = 15\cdot 2^{3n-4}$

$\to$ Si $r = -8 \to a_1 = 60 : (-8) = -\dfrac{15}{2} \to a_n = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^{n-1} = 15\cdot(-2)^{3n-4}$

b) Si $r = 8 \to S_8 = \dfrac{7{,}5\cdot(8^8 - 1)}{8-1} = 17\,975\,587{,}5$  Si $r = -8 \to S_8 = \dfrac{7{,}5\cdot\left((-8)^8 - 1\right)}{-8-1} = -13\,981\,012{,}5$

Para obtener el producto multiplicamos todos los términos.

Si $r = 8 \to a_1 = \dfrac{15}{2}$, $a_2 = \dfrac{15}{2}\cdot 8$, $a_3 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^2$, $a_4 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^3$, $a_5 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^4$, $a_6 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^5$, $a_7 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^6$, $a_8 = \dfrac{15}{2}\cdot 8^7$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8 = \left(\frac{15}{2}\right)^8\cdot 8^{1+2+3+4+5+6+7} = \left(\frac{15}{2}\right)^8\cdot 8^{28}$$

Si $r = -8 \to a_1 = -\dfrac{15}{2}$, $a_2 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)$, $a_3 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^2$, $a_4 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^3$, $a_5 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^4$, $a_6 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^5$,

$a_7 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^6$, $a_8 = -\dfrac{15}{2}\cdot(-8)^7 \to a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8 = \left(-\dfrac{15}{2}\right)^8\cdot(-8)^{1+2+3+4+5+6+7} = \left(\dfrac{15}{2}\right)^8\cdot 8^{28}$

**6. En un aparcamiento cobran 0,25 € por la primera hora de estacionamiento, y por cada hora siguiente, el doble de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto se pagará por 8 horas?**

Se trata de una progresión geométrica de razón 2 y $a_1 = 0{,}25$. La cantidad pedida es la suma de los 8 primeros términos.

$$S_8 = \frac{0{,}25\cdot(2^8 - 1)}{2-1} = 63{,}75\ €$$

**7. Calcula el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce en 4 años un capital final de 1 500 €.**

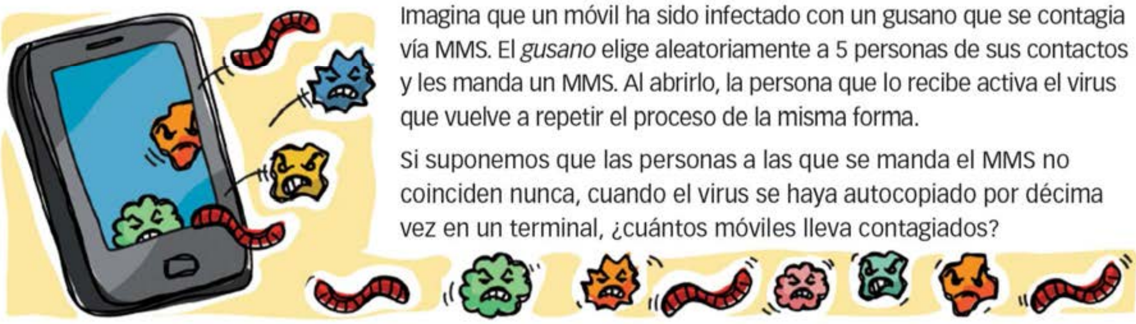
$1\,500 = C = 1{,}05^4 \to C = 1\,234{,}05$ €

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**131.** **Con la aparición de los nuevos teléfonos inteligentes o *smartphones* han empezado a proliferar los virus telefónicos.**

**Existen varios tipos de virus, uno de ellos es el denominado *gusano*, que se transmite a través de SMS o MMS y no requiere la interacción de los usuarios para ser ejecutado. Su principal objetivo es reproducirse y propagarse a través de otros móviles, por lo que puede copiarse infinitas veces infectando todos los terminales que tenga a su alcance.**

**Por ahora el riesgo real de que un móvil sea infectado es muy bajo debido a la variedad de sistemas operativos de nuestros terminales (Android, Apple, Windows Mobile…).**



Imagina que un móvil ha sido infectado con un gusano que se contagia vía MMS. El *gusano* elige aleatoriamente a 5 personas de sus contactos y les manda un MMS. Al abrirlo, la persona que lo recibe activa el virus que vuelve a repetir el proceso de la misma forma.

Si suponemos que las personas a las que se manda el MMS no coinciden nunca, cuando el virus se haya autocopiado por décima vez en un terminal, ¿cuántos móviles lleva contagiados?

Los contagiados serán la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica con $r = 5$ y $a_1 = 1$.

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (5^{10} - 1)}{5 - 1} = 2\,441\,406 \text{ móviles contagiados}$$

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**132.** **¿Puede ser el número 0 el primer término de una progresión geométrica? ¿Y de una progresión aritmética?**

Si el primer término de una progresión geométrica es 0, todos los términos serán 0, ya que los demás términos se calculan multiplicando el primero por la razón elevada a una cierta potencia. Por otra parte, no hay ningún inconveniente para que el primer término de una progresión aritmética sea 0.

**133.** **Razona si puede existir una sucesión que sea, al mismo tiempo, progresión aritmética y progresión geométrica. En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Es posible si todos los términos de la sucesión son el mismo.

Sería una progresión aritmética con $d = 0$ y, a la vez, una progresión geométrica con $r = 1$.

Por ejemplo:

a) 3, 3, 3, 3, … b) $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ c) −1, −1, −1, −1, …

**134. Discute si el término general de una progresión aritmética o geométrica puede ser de la forma $a_n = n^p$, con $p > 1$ un número natural.**

Para que fuera aritmética $a_{n+1} - a_n$ debería ser constante y no lo es porque depende de $n$.

Para $p = 2 \rightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Para $p = 3 \rightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ Y así sucesivamente.

Para que fuera geométrica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ debería ser constante y no lo es porque también depende de $n$.

Para $p = 2 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

Para $p = 3 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ Y así sucesivamente.

**135. La suma de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética ($n > 1$) es 153 y la diferencia de la progresión es 2. Si $a_1$ es un número entero, ¿qué valores puede tomar $n$?**

La diferencia es $d = 2$.

Y la suma es: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} =$

$= \frac{[2a_1 + 2 \cdot (n-1)] \cdot n}{2} = (a_1 + n - 1) \cdot n = 153$

El valor de $n$ debe ser entero y, por tanto, será divisor de 153.

$$\text{Div}(153) = \{1, 3, 9, 17, 51, 153\}$$

Hallamos qué valores sirven como solución.

- $n = 3 \rightarrow a_1 + 3 - 1 = 51 \rightarrow a_1 = 49, a_2 = 51, a_3 = 53$
  y la suma hasta $a_3$ es 153.
- $n = 9 \rightarrow a_1 + 9 - 1 = 17 \rightarrow a_1 = 9, a_2 = 11, a_3 = 13\ldots$
  y la suma hasta $a_9$ es 153.
- $n = 17 \rightarrow a_1 + 17 - 1 = 9 \rightarrow a_1 = -7, a_2 = -5, a_3 = -3\ldots$
  y la suma hasta $a_{17}$ es 153.
- $n = 51 \rightarrow a_1 + 51 - 1 = 3 \rightarrow a_1 = -47, a_2 = -45, a_3 = -43\ldots$
  y la suma hasta $a_{51}$ es 153.
- $n = 153 \rightarrow a_1 + 153 - 1 = 1 \rightarrow a_1 = -151, a_2 = -149, a_3 = -147\ldots$
  y la suma hasta $a_{153}$ es 153.

**136. Expresa de forma fraccionaria el número periódico $0,\widehat{3}$; para ello escríbelo de la forma:**

**$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$**

**y halla la suma de la progresión.**

$0,\widehat{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

Se puede expresar como la suma de los términos de una progresión geométrica con $r = 0{,}1$ y $a_1 = 0{,}3$.

$0,\widehat{3} = S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{1}{3}$

**137. Obtén la fracción generatriz de $2,\widehat{8}$ utilizando la suma de una progresión.**

Como $2,\widehat{8} = 2,8888\ldots = 2 + \underbrace{0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008\ldots}_{\text{Suma de una progresión geométrica cuyo primer término es } a_1 = 0,8 \text{ y } r = 0,1}$

$$2,\widehat{8} = 2 + \frac{0,8}{1-0,1} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

**138. Consideramos una progresión geométrica con $a_1 \neq 0$ y $r \neq 0$, y una progresión aritmética con $a_1 = 0$. Sumando, término a término, estas dos progresiones obtenemos la sucesión: 1, 1, 2, … ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos?**

La progresión geométrica es $a_n$ y la aritmética es $b_n$ (con $b_1 = 0$). Y la suma es $a_n + b_n$.

$a_1 + b_1 = 1$, y como $b_1 = 0$, entonces $a_1 = 1$.

Por tanto, tenemos que: $a_n = r^{n-1}$ y $b_n = (n-1)\cdot d$.

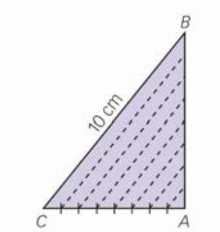
$$\left.\begin{array}{r} a_2 + b_2 = r + d = 1 \} \to d = 1 - r \\ a_3 + b_3 = r^2 + 2d = 2 \} \end{array}\right\} \to r^2 + 2\cdot(1-r) = 2 \to r^2 - 2r = 0 \to r = 0 \ \text{ y } \ r = 2$$

Como $r$ no puede ser 0, $r = 2$ y $d = -1$.

La suma de los 10 primeros términos es la suma de los 10 términos de cada una de las sucesiones.

$$\left.\begin{array}{l} S'_{10} = \dfrac{1\cdot(2^9-1)}{2-1} = 511 \\ S''_{10} = \dfrac{(0+(-1)\cdot 9)\cdot 10}{2} = -45 \end{array}\right\} \to S_{10} = S'_{10} + S''_{10} = 466$$

**139. Dividimos el lado $AC$ de un triángulo rectángulo $ABC$ en 8 partes iguales, levantando desde los puntos de división paralelas al lado $BC$. Si $BC$ mide 10 cm, calcula la suma de las longitudes de los otros 7 segmentos.**



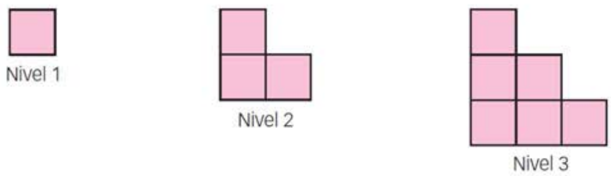

La distancia de $A$ a cada división $n$ de $AC$ es $\frac{n}{8}\overline{AC}$ y, por semejanza de triángulos, el lado paralelo a $BC$ que pasa por esa división será:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{n}{8}\overline{AC} \to \overline{AC} \\ x \to 10 \end{array}\right\} \to x = \frac{10n}{8} = \frac{5n}{4}$$, por lo que forman una progresión aritmética con $d = \frac{5}{4}$ y $a_1 = \frac{5}{4}$.

Así, $S_8 = \dfrac{\left(\frac{5}{4}+10\right)\cdot 8}{2} = \left(\frac{5}{4}+10\right)\cdot 4 = 45$

## PRUEBAS PISA

**140.** **Roberto construye el esquema de una escalera usando cuadrados. He aquí los pasos que sigue:**




**Como se puede ver, utiliza un cuadrado para el Nivel 1, tres cuadrados para el Nivel 2, y seis para el Nivel 3.**

**¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir hasta el cuarto nivel?**

*(Prueba PISA 2003)*

Para pasar de nivel añade el mismo número de cuadrados que el nivel al que accede.

Deberá usar 10 cuadrados: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

**141.** **Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle y le dijo:**

***«Pídeme lo que quieras, que te lo daré».***

**El inventor del ajedrez, sorprendido, pidió:**

***«Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64».***

**La sorpresa fue cuando calcularon la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor. ¿Cuántos granos de trigo pedía aproximadamente?**

**Expresa el resultado en notación científica.**

Se tiene la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, …

Los granos pedidos serán la suma de los 64 primeros términos de esta progresión:

$$S_{64} = \frac{a_1 \cdot (r^{64} - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 1{,}84 \cdot 10^{19}$$

# Proporcionalidad numérica

4

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Averigua qué razones de cada grupo forman proporción.**

a) $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{12}{15}, \frac{20}{25}$ y $\frac{18}{21}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{28}{35}, \frac{10}{12}$ y $\frac{10}{15}$

a) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} = \frac{20}{25}$ $\quad \frac{6}{7} = \frac{18}{21}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\quad \frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ $\quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$

**2. Calcula el término que falta en cada proporción.**

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{40}$

b) $\frac{8,5}{2} = \frac{51}{x}$

c) $\frac{x}{10} = \frac{8,4}{12}$

d) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

a) $x = \frac{40 \cdot 3}{5} = 24$

b) $x = \frac{51 \cdot 2}{8,5} = 12$

c) $x = \frac{10 \cdot 8,4}{12} = 7$

d) $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

**3. Calcula.**

a) 30 % de 28

b) 28 % de 30

c) 8,5 % de 400

d) 25 % de 8,4

e) 7,5 % de 1,2

f) 4,5 % de 4,5

a) $\frac{30 \cdot 28}{100} = 8,4$

b) $\frac{28 \cdot 30}{100} = 8,4$

c) $\frac{8,5 \cdot 400}{100} = 34$

d) $\frac{25 \cdot 8,4}{100} = 2,1$

e) $\frac{7,5 \cdot 1,2}{100} = 0,09$

f) $\frac{4,5 \cdot 4,5}{100} = 0,2025$

## VIDA COTIDIANA

**Al sacar dinero en un cajero con una tarjeta de crédito, si lo hacemos en un cajero de nuestra entidad no suele tener comisiones. Pero si la operación la realizamos en un cajero de otra entidad, la comisión que nos cobran suele oscilar entre el 4,5 % y el 5 % del dinero que saquemos del cajero, con un mínimo de entre 3 € y 4 €.**

- **¿Cuánto es el mínimo y el máximo que nos cobrarían de comisión por sacar 450 € en un cajero que no sea de nuestra entidad?**

Mínima comisión = 4,5 % de 450 = $\frac{4,5 \cdot 450}{100} = 20,25$ €

Máxima comisión = 5 % de 450 = $\frac{5 \cdot 450}{100} = 22,50$ €

## RESUELVE EL RETO

**Si 2 conejos se comen diariamente 3 lechugas, ¿cuántos conejos se comerían 90 lechugas en 30 días?**

$3 \cdot 30 = 90$ lechugas. En 30 días, 2 conejos comerían 90 lechugas.

**Trece náufragos tienen agua para 13 días bebiendo 1 ℓ diario por persona. El quinto día uno de ellos se marcha y se lleva una cantimplora llena. El agua duró exactamente lo que se esperaba. ¿Cuánta agua se llevó?**

Suponiendo que se marcha el quinto día después de haber bebido su litro diario, se llevó el agua que le correspondía para 8 días (desde el sexto día hasta el decimotercero, ambos incluidos), es decir, 8 litros de agua.

**Encuentra dos números tales que al repartirles 100 € de forma directa o inversamente proporcional, las cantidades sean iguales.**

$$\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{100}{a+b} \rightarrow P_1 = \frac{100 \cdot a}{a+b}, P_2 = \frac{100 \cdot b}{a+b}$$

$$P_1 \cdot a = P_2 \cdot b = \frac{100}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{100 \cdot ab}{a+b} \rightarrow P_1 = \frac{100 \cdot ab}{(a+b)a} = \frac{100 \cdot b}{a+b}, P_2 = \frac{100 \cdot ab}{(a+b)b} = \frac{100 \cdot a}{a+b}$$

$$P_1 = \frac{100 \cdot a}{a+b} = \frac{100 \cdot b}{a+b} \rightarrow a = b \rightarrow P_1 = \frac{100 \cdot a}{2a} = 50 \qquad P_2 = \frac{100 \cdot b}{a+b} = \frac{100 \cdot a}{a+b} \rightarrow a = b \rightarrow P_2 = \frac{100 \cdot a}{2a} = 50$$

Basta con que *a* y *b* sean iguales.

**Si un bollo cuesta un 25 % menos que una napolitana, ¿qué tanto por ciento cuesta más una napolitana que un bollo?**

bollo $= \frac{3}{4}$ de la napolitana $\rightarrow$ napolitana $= \frac{4}{3}$ del bollo $\rightarrow$ La napolitana cuesta un 33,33 % más que el bollo.

## ACTIVIDADES

1. **Comprueba si las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales.**

| Magnitud *A* | 5 | 25 | 45 |
|---|---|---|---|
| Magnitud *B* | 15 | 50 | 90 |

| Magnitud *A* | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| Magnitud *B* | 7 | 8,75 | 10,5 |

a) No son proporcionales porque $\frac{5}{15} \neq \frac{25}{50}$. b) Sí son proporcionales porque $\frac{4}{7} = \frac{5}{8,75} = \frac{6}{10,5}$.

2. **Completa en tu cuaderno, sabiendo que las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales con constante de proporcionalidad $k = 3,2$.**

| Magnitud *A* | **8,32** | 14,4 | 19,2 | 32 |
|---|---|---|---|---|
| Magnitud *B* | 2,6 | **4,5** | **6** | **10** |

**3. Indica dos magnitudes directamente proporcionales y haz su tabla de proporcionalidad.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

| Cerezas compradas (kg) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Precio (€)** | 3,50 | 7,00 | 10,50 | 14,00 |

**4. Luisa utiliza 6 kg de harina para hacer 5 empanadas iguales.**

a) ¿Cuántas empanadas podrá hacer con 18 kg de harina?

b) ¿Cuántos kilos de harina necesitará para hacer 20 empanadas?

a) $\frac{6}{18} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 5}{6} = 15$ empanadas.

b) $\frac{6}{x} = \frac{5}{20} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 20}{5} = 24$ kg

**5. Mateo utiliza medio kilo de pasta para hacer macarrones para 5 personas.**

a) ¿Cuántas personas pueden comer con 4,5 kg de pasta?

b) ¿Cuánta pasta se necesita para 12 personas?

a) $\frac{0,5}{4,5} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 4,5}{0,5} = 45$ personas

b) $\frac{0,5}{x} = \frac{5}{12} \rightarrow x = \frac{0,5 \cdot 12}{5} = 1,2$ kg

**6. En un mapa, 14 cm representan 238 km en la realidad.**

a) ¿Por qué longitud vienen representados 306 km?

b) Una longitud de 10 cm en el mapa, ¿qué longitud real representa?

a) $\frac{14}{x} = \frac{238}{306} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 306}{238} = 18$ cm

b) $\frac{14}{10} = \frac{238}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 238}{14} = 170$ km

**7. El coche de Pedro consume, por término medio, 5,4 ℓ de gasoil cada 100 km. Si 1 litro de gasoil cuesta 1,44 €, calcula.**

a) El gasto en combustible en un viaje de 245 km.

b) Los kilómetros que puede recorrer con los 56 ℓ de gasoil que caben en el depósito.

c) Los kilómetros que puede recorrer con 120,60 €.

a) $\frac{5,4}{x} = \frac{100}{245} \rightarrow x = \frac{5,4 \cdot 245}{100} = 13,23$ litros. 13,23 · 1,44 = 19,05 € se gasta en combustible.

b) $\frac{5,4}{56} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{56 \cdot 100}{5,4} = 1\,037,04$ km

c) $\frac{5,4 \cdot 1,44}{120,60} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 1\,550,93$ km

**8.** **En un restaurante, el precio de un menú degustación es tres veces y media el del menú del día.**

a) ¿Cuántos menús del día se pueden consumir por el precio de 14 menús degustación?

b) ¿Cuántos menús degustación se pueden consumir por el precio de 21 menús del día?

a) $\frac{1}{14} = \frac{3{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 3{,}5}{1} = 49$ menús del día.

b) $\frac{1}{x} = \frac{3{,}5}{21} \rightarrow x = \frac{21}{3{,}5} = 6$ menús degustación.

**9.** **Comprueba si las magnitudes *A* y *B* son inversamente proporcionales.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Magnitud *A* | 2 | 6 | 3 |
| Magnitud *B* | 6 | 2 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Magnitud *A* | 5 | 6 | 7 |
| Magnitud *B* | 15 | 14 | 13 |

a) Sí son inversamente proporcionales porque $2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$.

b) No son inversamente proporcionales porque $5 \cdot 15 \neq 6 \cdot 14$.

**10.** **Completa en tu cuaderno, sabiendo que las magnitudes *A* y *B* son inversamente proporcionales con constante de proporcionalidad $k = 24$.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Magnitud *A* | **2** | 6 | **4** | 8 |
| Magnitud *B* | **12** | **4** | 6 | **3** |

**11.** **Indica dos magnitudes inversamente proporcionales y haz su tabla de proporcionalidad.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, suponiendo que se va a recorrer una distancia fija:

| Velocidad (km/h) | 45 | 60 | 15 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| **Tiempo (h)** | 2 | 1,5 | 6 | 1 |

**12.** **Para construir un edificio, 28 obreros trabajaron durante 120 días.**

a) ¿Cuántos obreros habrían hecho falta para terminar el edificio en 90 días?

b) ¿Cuántos días tardarían 40 obreros?

a) $\frac{28}{x} = \frac{90}{120} \rightarrow x = \frac{28 \cdot 120}{90} = 37{,}3 \rightarrow 38$ obreros

b) $\frac{28}{40} = \frac{x}{120} \rightarrow x = \frac{28 \cdot 120}{40} = 84$ días.

**13. Un grupo de 6 montañeros ha comenzado una escalada por los Pirineos. Van provistos de comida para 15 días.**

a) Si fuesen 10 montañeros, ¿para cuántos días tendrían comida?

b) Para que la comida les durase 18 días, ¿cuántos montañeros deberían ir?

a) $\frac{10}{6} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 6}{10} = 9$ días.

b) $\frac{6}{x} = \frac{18}{15} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 6}{18} = 5$ montañeros.

**14. Un grifo que arroja 3 ℓ de agua por minuto tarda 8 horas en llenar un depósito.**

a) ¿Cuánto se tardaría en llenar el depósito si el grifo vertiera 4 ℓ por minuto?

b) ¿Cuántos litros debe arrojar por minuto para llenar el depósito en 6 horas?

a) $\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$ horas.

b) $\frac{3}{x} = \frac{6}{8} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$ litros por minuto.

**15. Hay que pintar un edificio de 8 pisos. Se contrata a 12 pintores para esta labor. Tardan 15 días en acabar el trabajo.**

a) ¿Cuántos días tardarían 20 pintores?

b) ¿Cuántos trabajadores se habrían necesitado si se hubiese tenido que terminar de pintar el edificio en 10 días?

c) ¿Cuánto habrían tardado los 12 pintores si el edificio hubiera tenido 6 pisos de altura?

a) $\frac{20}{12} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9$ días.

b) $\frac{12}{x} = \frac{10}{15} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 15}{10} = 18$ pintores.

c) La proporcionalidad es directa: $\frac{6}{8} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{8} = 11{,}25$ días.

**16. Establece la proporción correspondiente a repartir 100 € entre 8 y 14.**

a) De forma directamente proporcional.

b) De forma inversamente proporcional.

a) $\frac{P_1}{8} = \frac{P_2}{14} = \frac{100}{8+14} \rightarrow P_1 = 36{,}36$ €; $P_2 = 63{,}64$ €

b) $P_1 \cdot 8 = P_2 \cdot 14 = \frac{100}{\frac{1}{8} + \frac{1}{14}} \rightarrow P_1 = 63{,}64$ €; $P_2 = 36{,}36$ €

**17. Escribe dos situaciones de reparto directamente proporcional.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Repartir cierta cantidad de dinero como remuneración por un trabajo realizado entre varias personas de forma directamente proporcional al tiempo empleado.

Repartir las ganancias de una primitiva entre los apostantes, habiendo apostado cantidades diferentes cada uno.

**18. Si en un reparto proporcional todas las partes son iguales, ¿cómo son las cantidades iniciales?**

Las cantidades iniciales deben ser también iguales.

**19. Reparte 150 en partes directamente proporcionales a estas cantidades.**

a) 2 y 4  c) 1, 2 y 3  e) 7, 8 y 10
b) 7 y 8  d) 4, 5 y 6  f) 8, 10 y 12

a) $\frac{P_1}{2}=\frac{P_2}{4}=\frac{150}{2+4}=25 \rightarrow P_1=50;\ P_2=100$

b) $\frac{P_1}{7}=\frac{P_2}{8}=\frac{150}{7+8}=10 \rightarrow P_1=70;\ P_2=80$

c) $\frac{P_1}{1}=\frac{P_2}{2}=\frac{P_3}{3}=\frac{150}{1+2+3}=25 \rightarrow P_1=25;\ P_2=50;\ P_3=75$

d) $\frac{P_1}{4}=\frac{P_2}{5}=\frac{P_3}{6}=\frac{150}{4+5+6}=10 \rightarrow P_1=40;\ P_2=50;\ P_3=60$

e) $\frac{P_1}{7}=\frac{P_2}{8}=\frac{P_3}{10}=\frac{150}{7+8+10}=6 \rightarrow P_1=42;\ P_2=48;\ P_3=60$

f) $\frac{P_1}{8}=\frac{P_2}{10}=\frac{P_3}{12}=\frac{150}{8+10+12}=5 \rightarrow P_1=40;\ P_2=50;\ P_3=60$

**20. Reparte 70 de forma inversamente proporcional a:**

a) 3 y 4  c) 4 y 10  e) 4, 10 y 20
b) 2 y 5  d) 6 y 15  f) 2, 5 y 10

a) $P_1\cdot 3=P_2\cdot 4=\frac{70}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=120 \rightarrow P_1=40;\ P_2=30$

b) $P_1\cdot 2=P_2\cdot 5=\frac{70}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=100 \rightarrow P_1=50;\ P_2=20$

c) $P_1\cdot 4=P_2\cdot 10=\frac{70}{\frac{1}{4}+\frac{1}{10}}=200 \rightarrow P_1=50;\ P_2=20$

d) $P_1\cdot 6=P_2\cdot 15=\frac{70}{\frac{1}{6}+\frac{1}{15}}=300 \rightarrow P_1=50;\ P_2=20$

e) $P_1\cdot 4=P_2\cdot 10=P_3\cdot 20=\frac{70}{\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}=175 \rightarrow P_1=43{,}75;\ P_2=17{,}5;\ P_3=8{,}75$

f) $P_1\cdot 2=P_2\cdot 5=P_3\cdot 10=\frac{70}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}=87{,}5 \rightarrow P_1=43{,}75;\ P_2=17{,}5;\ P_3=8{,}75$

**21.** **Reparte 70 en partes directamente proporcionales a:**

a) 3 y 4 b) 6 y 8 c) 9 y 12

**Observa los resultados y obtén una conclusión.**

a) $\frac{P_1}{3}=\frac{P_2}{4}=\frac{70}{3+4}=10 \rightarrow P_1=30;\ P_2=40$

b) $\frac{P_1}{6}=\frac{P_2}{8}=\frac{70}{6+8}=5 \rightarrow P_1=30;\ P_2=40$

c) $\frac{P_1}{9}=\frac{P_2}{12}=\frac{70}{9+12}=\frac{10}{3} \rightarrow P_1=30;\ P_2=40$

El resultado es igual en cada caso, porque repartir una cantidad, *C*, de forma directamente proporcional a *x* e *y* es igual que repartirla entre 2*x* y 2*y*, o entre 3*x* y 3*y*, o entre 4*x* y 4*y*, etc.

**22.** **Se han repartido 300 € en partes inversamente proporcionales a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{7}$. ¿Cuál es la parte correspondiente a $\frac{1}{5}$?**

$$P_1\cdot\frac{1}{3}=P_2\cdot\frac{1}{5}=P_3\cdot\frac{1}{7}=\frac{300}{3+5+7}=20 \rightarrow P_2=20\cdot 5=100$$

**23.** **Con 600 m³ de agua, un agricultor debe regar cuatro parcelas de forma directamente proporcional a sus superficies, que son 4, 5, 8 y 13 hectáreas, respectivamente. ¿Qué cantidad de agua destinará a cada parcela?**

$$\frac{P_1}{4}=\frac{P_2}{5}=\frac{P_3}{8}=\frac{P_4}{13}=\frac{600}{4+5+8+13}=20 \rightarrow P_1=80\text{ m}^2;\ P_2=100\text{ m}^2;\ P_3=160\text{ m}^2;\ P_4=260\text{ m}^2$$

**24.** **César quiere repartir 8 100 € entre sus tres sobrinos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 1, 4 y 10 años. ¿Cuánto le dará a cada uno?**

$$P_1\cdot 1=P_2\cdot 4=P_3\cdot 10=\frac{8\,100}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}}=6\,000 \rightarrow P_1=6\,000\text{ €};\ P_2=1\,500\text{ €};\ P_3=600\text{ €}$$

**25.** **Doña Alfonsa reparte sus tierras entre sus nietos en partes directamente proporcionales a sus edades: 8, 12 y 15 años. Si al menor le corresponden 12 hectáreas, averigua las hectáreas repartidas.**

Llamando *x* al número de hectáreas: $\frac{12}{8}=\frac{x}{8+12+15} \rightarrow x=52{,}5$ hectáreas.

**26.** **Si reparto 1 200 proporcionalmente a 5 y 6, y le doy 500 a 6 y 700 a 5, ¿ha sido un reparto inversamente proporcional?**

No. Si hacemos el reparto de forma inversamente proporcional, tenemos cantidades diferentes:

$$P_1\cdot 5=P_2\cdot 6=\frac{1\,200}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=\frac{36\,000}{11} \rightarrow P_1=654{,}\widehat{54}\ ;\ P_2=545{,}\widehat{45}$$

**27. Estudia la relación entre estas magnitudes.**

a) En 2 semanas, 3 camiones han transportado 1 200 toneladas de patatas.

b) Cinco personas consumen 7 kg de comida durante 6 días.

c) Ocho días de vacaciones para 4 personas cuestan 1 460 €.

a) N.º de semanas y n.º de camiones ⟶ P. Inversa. N.º de camiones y toneladas de patatas ⟶ P. Directa.

N.º de semanas y toneladas de patatas ⟶ P. Directa.

b) N.º de personas y kg de comida ⟶ P. Directa. Kg de comida y n.º de días ⟶ P. Directa.

N.º de personas y n.º de días ⟶ P. Inversa.

c) N.º de días y n.º de personas ⟶ P. Inversa. N.º de personas y dinero ⟶ P. Directa.

N.º de días y dinero ⟶ P. Directa.

**28. El alquiler de 2 coches durante 9 días cuesta 675 €. Calcula cuánto costará el alquiler de 3 coches durante 7 días.**

Dinero y número de coches ⟶ Proporcionalidad directa.

Dinero y número de días ⟶ Proporcionalidad directa.

| Número de coches | Precio (€) | Número de días |
|---|---|---|
| **2** | 675 | 9 |
| **3** | $x$ | 7 |

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{675}{x}\rightarrow x=\frac{675\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 9}=787{,}50\text{ €}$$

**29. Dos máquinas funcionando 6 horas diarias consumen 1 500 kWh al día. Razona, sin hacer los cálculos, cuál es el consumo del doble de máquinas funcionando la mitad de horas diarias.**

Las dos relaciones (kWh consumidos al día con máquinas y kWh consumidos al día con horas de funcionamiento) son de proporcionalidad directa; por tanto, al multiplicar una de ellas por dos, dividiendo entre dos la otra, el consumo no varía.

**30. Dos máquinas hacen 2,1 ℓ de zumo en 42 minutos.**

a) ¿Qué cantidad harán 6 máquinas en 20 minutos?

b) ¿Cuánto tardarán 3 máquinas en hacer 5 ℓ?

c) ¿Cuántas máquinas son necesarias para hacer 3 ℓ de zumo en 35 minutos?

Número de máquinas y litros de zumo ⟶ Proporcionalidad directa.

Tiempo en minutos y litros de zumo ⟶ Proporcionalidad directa.

Número de máquinas y tiempo en minutos ⟶ Proporcionalidad inversa.

| Número de máquinas | Litros de zumo | Tiempo en minutos |
|---|---|---|
| **6** | $x$ | 20 |
| **3** | 5 | $y$ |
| $\boldsymbol{z}$ | 3 | 35 |

a) $\frac{2}{6}\cdot\frac{42}{20}=\frac{2{,}1}{x}\rightarrow x=3\text{ litros}$ b) $\frac{3}{2}\cdot\frac{2{,}1}{5}=\frac{42}{y}\rightarrow y=1\text{ hora }6\text{ min }40\text{ s}$ c) $\frac{35}{42}\cdot\frac{2{,}1}{3}=\frac{2}{z}\rightarrow z=3{,}43\rightarrow 4\text{ máquinas}$

**31. Dieciocho operarios, trabajando 6 horas diarias, han tardado 6 días en tender 300 m de cable. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 operarios durante 14 días para tender 700 m de cable?**

Número de operarios y horas de trabajo al día ⟶ Proporcionalidad inversa.

Tiempo en días y horas de trabajo al día ⟶ Proporcionalidad inversa.

Número de metros de cable y horas de trabajo al día ⟶ Proporcionalidad directa.

| Número de operarios | Horas de trabajo al día | Tiempo en días | Metros de cable |
|---|---|---|---|
| **18** | 6 | 6 | 300 |
| **24** | *x* | 14 | 700 |

$$\frac{24}{18}\cdot\frac{14}{6}\cdot\frac{300}{700}=\frac{6}{x}\rightarrow x=\frac{6\cdot 18\cdot 6\cdot 700}{24\cdot 14\cdot 300}=4{,}5 \text{ horas al día}$$

**32. En el comedor de un colegio, el año pasado tenían un presupuesto de 34 000 € mensuales para alimentar a 262 alumnos. Si este año hay 22 alumnos más pero el presupuesto solo ha aumentado 1 200 € mensuales, ¿para cuántos días les llegará el presupuesto?**

Dinero y tiempo en meses ⟶ Proporcionalidad directa.

Número de alumnos y tiempo en meses ⟶ Proporcionalidad inversa.

| Presupuesto (€) | Tiempo en meses | Número de alumnos |
|---|---|---|
| **34 000** | 1 | 262 |
| **35 200** | *x* | 284 |

$$\frac{34\,000}{35\,200}\cdot\frac{284}{262}=\frac{1}{x}\rightarrow x=\frac{35\,200\cdot 262}{34\,000\cdot 284}=0{,}955 \text{ meses} \cong 28 \text{ días}$$

**33. Nueve ordenadores encendidos durante 10 horas diarias producen un gasto de 2 340 € anuales. ¿Cuál sería el gasto si se encendieran 6 ordenadores más durante una hora menos al día?**

Número de ordenadores y gasto en € ⟶ Proporcionalidad directa.

Tiempo en horas al día y gasto en € ⟶ Proporcionalidad directa.

| Número de ordenadores | Gasto en € | Tiempo en horas al día |
|---|---|---|
| **9** | 2 340 | 10 |
| **15** | *x* | 9 |

$$\frac{9}{15}\cdot\frac{10}{9}=\frac{2\,340}{x}\rightarrow x=\frac{2\,340\cdot 15\cdot 9}{10\cdot 9}=3\,510\ €$$

**34. Calcula el porcentaje de los alumnos que realizan las siguientes actividades extraescolares si en el centro hay un total de 432 alumnos.**

a) 54 alumnos juegan al baloncesto.

b) 144 alumnos tocan un instrumento musical.

c) 62 alumnos participan en el club de lectura.

a) $\left.\begin{array}{l}432 \longrightarrow 54 \\ 100 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{5\,400}{432}=12,5\,\%$ juegan al baloncesto.

b) $\left.\begin{array}{l}432 \longrightarrow 144 \\ 100 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{14\,400}{432}=33,3\,\%$ tocan un instrumento musical.

c) $\left.\begin{array}{l}432 \longrightarrow 62 \\ 100 \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{6\,200}{432}=14,35\,\%$ participan en el club de lectura.

**35. Calcula el precio de un televisor que valía 360 € si se ha aumentado su precio un 5,8 %.**

$360 \cdot\left(1+\frac{5,8}{100}\right)=360 \cdot 1,058=380,88$ €

**36. Inés cosecha 70 toneladas de cereal, que vende a 100 € la tonelada de grano y a 20 € la tonelada de paja. Si la paja supone el 25 % del peso total del cereal, calcula el dinero que obtiene.**

$\left.\begin{array}{r}\text{Grano}: 0,75 \cdot 70=52,5 \rightarrow 52,5 \cdot 100=5\,250 \\ \text{Paja}: 0,25 \cdot 70=17,5 \rightarrow 17,5 \cdot 20=350\end{array}\right\} \longrightarrow$ Gana 5 600 €.

**37. Calcula la cantidad que se obtiene al aplicar a 462 €:**

a) Un aumento del 8 % y otro del 12 %.

b) Dos disminuciones del 20 %.

a) $462 \cdot 1,08 \cdot 1,12=558,84$ €

b) $462 \cdot 0,8 \cdot 0,8=295,68$ €

**38. Calcula el interés que se obtiene por 2 000 € durante 3 años con un rédito del 2,8 % anual.**

$I=\frac{2\,000 \cdot 2,8 \cdot 3}{100}=168$ €

**39. Al aumentar el precio de un producto un 28 % y después rebajarlo un 12 % obtenemos un precio final de 527,85 €. ¿Cuál era el precio inicial?**

Llamando $x$ al precio inicial: $x \cdot 1,28 \cdot 0,88=527,85 \rightarrow x=\frac{527,85}{1,28 \cdot 0,88}=468,62$ €.

**40. Si el precio inicial de un producto se aumenta un 15 % y después, sobre ese precio aumentado, se disminuye un 15 %, ¿obtenemos el precio inicial?**

No, porque los porcentajes se aplican a distintos números:

$x \cdot 1,15 \cdot 0,85=x \cdot 0,9775 \neq x$

## ACTIVIDADES FINALES

**41. Di las magnitudes directamente proporcionales.**

a) Litros de gasolina y precio que cuestan.

b) Número de horas de estudio y la nota en el examen.

c) Cantidad de cada uno de los ingredientes al preparar una receta y número de comensales.

d) Número de plazas de un sofá y precio del sofá.

Son directamente proporcionales: a) y c).

**42. Escribe la fórmula que relaciona las siguientes magnitudes, haz una tabla con valores para cada una y di si son directamente proporcionales.**

a) Perímetro del cuadrado de lado *l*.

b) Longitud de la circunferencia de radio *r*.

c) Área del rectángulo de base 5 cm y altura *a*.

d) Perímetro del rectángulo cuya base *b* es doble de la altura *a*.

a) $P = 4l$

| Lado | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Perímetro** | 4 | 8 | 12 | 16 |

Sí son directamente proporcionales, porque $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$

b) $L = 2\pi r$

| Radio | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Longitud** | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |

Sí son directamente proporcionales, porque $\frac{1}{2\pi} = \frac{2}{4\pi} = \frac{3}{6\pi} = \frac{4}{8\pi}$

c) $A = 5a$

| Altura | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Área** | 5 | 10 | 15 | 20 |

Sí son directamente proporcionales, porque $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20}$

d) $P = 6a$

| Altura | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Perímetro** | 6 | 12 | 18 | 24 |

Sí son directamente proporcionales, porque $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24}$

**43. Copia y completa en tu cuaderno sabiendo que *A* y *B* son directamente proporcionales y calcula la constante de proporcionalidad.**

| *A* | 200 | 400 | **320** | 5 000 | **1 600** |
|---|---|---|---|---|---|
| *B* | 5 | **10** | 8 | **125** | 40 |

La constante de proporcionalidad es $k = 40$.

| *A* | 0,5 | 10 | **2,5** | 100 | **0,25** |
|---|---|---|---|---|---|
| *B* | **0,2** | 4 | 1 | **40** | 0,1 |

La constante de proporcionalidad es $k = 2,5$.

**44.** **Elabora una tabla con dos magnitudes de proporcionalidad directa en la que la constante de proporcionalidad sea:**

a) 3 b) 5 c) 1,85 d) 2,5 e) 4 f) 3,2

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $k = 3$

| **A** | 12 | 15 | 18 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 4 | 5 | 6 | 7 |

b) $k = 5$

| **A** | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 1 | 2 | 3 | 4 |

c) $k = 1,85$

| **A** | 3,7 | 9,25 | 18,5 | 22,2 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 2 | 5 | 10 | 12 |

d) $k = 2,5$

| **A** | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 4 | 8 | 12 | 16 |

e) $k = 4$

| **A** | 8 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 2 | 3 | 4 | 5 |

f) $k = 3,2$

| **A** | 6,4 | 12,8 | 25,6 | 51,2 |
|---|---|---|---|---|
| **B** | 2 | 4 | 8 | 16 |

**45.** **¿A cuántas horas equivalen estas cantidades?**

a) 72 000 segundos
b) 4 800 minutos
c) 52 cuartos de hora
d) 4 días

a) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ hora} \longrightarrow 3600 \text{ s}\\ x \longrightarrow 72\,000 \text{ s}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{72\,000}{3\,600} = 20 \text{ horas}$

b) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ hora} \longrightarrow 60 \text{ min}\\ x \longrightarrow 4\,800 \text{ min}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{4\,800}{60} = 80 \text{ horas}$

c) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ hora} \longrightarrow 4 \text{ cuartos de hora}\\ x \longrightarrow 52 \text{ cuartos de hora}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{52}{4} = 13 \text{ horas}$

d) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ día} \longrightarrow 24 \text{ horas}\\ 4 \text{ días} \longrightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{24 \cdot 4}{1} = 96 \text{ horas}$

**46.** **Sabiendo que una pulgada mide 2,54 cm, y un pie, 0,3048 m, responde:**

a) ¿Cuántos pies hay en 45 720 cm?
b) ¿Cuántas pulgadas hay en 1,905 m?
c) ¿Cuántas pulgadas hay en 90 pies?
d) ¿Cuántos pies son 696 pulgadas?

a) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ pie} \rightarrow 0,3048 \text{ m}\\ x \rightarrow 457,2 \text{ m}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{457,2}{0,3048} = 1500 \text{ pies}$

b) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ pulgada} \rightarrow 2,54 \text{ cm}\\ x \rightarrow 190,5 \text{ cm}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{190,5}{2,54} = 75 \text{ pulgadas}$

c) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ pie} \rightarrow 30,48 \text{ cm}\\ x \rightarrow 1 \text{ pulgada} = 2,54 \text{ cm}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{2,54}{30,48} = 0,08\widehat{3} \text{ pies}$

$\left.\begin{array}{l}1 \text{ pulgada} \rightarrow 0,083 \text{ pies}\\ y \rightarrow 90 \text{ pies}\end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{90}{0,08\widehat{3}} = 1080 \text{ pulgadas}$

d) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ pulgada} \rightarrow 0,08\widehat{3} \text{ pies}\\ 696 \text{ pulgadas} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = 696 \cdot 0,08\widehat{3} = 58 \text{ pies}$

**47.** **Una caja de galletas contiene 8 paquetes de 200 g cada uno.**

a) ¿Cuántos paquetes hay en 64 cajas?

b) ¿Cuántas cajas de galletas se completan con 216 paquetes?

c) ¿Cuánto pesarán 48 paquetes?

a) $\left.\begin{array}{l}\text{1 cajas} \rightarrow \text{8 paquetes}\\ \text{64 cajas} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = 64 \cdot 8 = 512 \text{ paquetes}$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{1 caja} \rightarrow \text{8 paquetes}\\ x \rightarrow \text{216 paquetes}\end{array}\right\} \rightarrow x = 216 : 8 = 27 \text{ cajas}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{1 paquete} \rightarrow \text{200 gramos}\\ \text{48 paquetes} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = 200 \cdot 48 = 9\,600 \text{ gramos}$

**48.** **Una rueda recorre 565,5 cm en tres giros completos. ¿Cuántos metros recorrerá tras 18 giros? ¿Cuántos giros completos ha dado si ha recorrido 384,54 m?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{565,5 cm} \rightarrow \text{3 giros}\\ x \rightarrow \text{18 giros}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{565,5 \cdot 18}{3} = 3393 \text{ cm} = 33,93 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{565,5 cm} \rightarrow \text{3 giros}\\ \text{38 454 cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{38\,454 \cdot 3}{565,5} = 204 \text{ giros}$$

**49.** **Para elaborar una pizza de 20 cm de diámetro se usan 200 g de harina y 60 g de queso. Halla la cantidad de harina y de queso necesaria para hacer una pizza de 25 cm de diámetro.**

Área Pizza 1: $\pi r^2 = 100\pi \text{ cm}^2$ Área Pizza 2: $\pi r^2 = 156,25\pi \text{ cm}^2$

$$\left.\begin{array}{l}100\pi \text{ cm}^2 \rightarrow \text{200 gramos de harina}\\ 156,25\pi \text{ cm}^2 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{156,25 \cdot 200}{100} = 312,5 \text{ g de harina}$$

$$\left.\begin{array}{l}100\pi \text{ cm}^2 \rightarrow \text{60 gramos de queso}\\ 156,25\pi \text{ cm}^2 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{156,25 \cdot 60}{100} = 93,75 \text{ g de queso}$$

**50.** **Si un kilo de carne cuesta 12,95 €, calcula el precio que habrá que pagar por estas cantidades.**

a) 200 gramos

b) Medio kilo

c) Tres cuartos de kilo

d) Un cuarto de kilo

a) $\left.\begin{array}{l}\text{1000 g} \rightarrow \text{12,95 €}\\ \text{200 g} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12,95 \cdot 200}{1000} = 2,59 \text{ €}$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{1000 g} \rightarrow \text{12,95 €}\\ \text{500 g} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12,95 \cdot 500}{1000} = 6,48 \text{ €}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{1000 g} \rightarrow \text{12,95 €}\\ \text{750 g} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12,95 \cdot 750}{1000} = 9,71 \text{ €}$

d) $\left.\begin{array}{l}\text{1000 g} \rightarrow \text{12,95 €}\\ \text{250 g} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12,95 \cdot 250}{1000} = 3,24 \text{ €}$

**51. Indica cuáles de los siguientes pares de magnitudes son inversamente proporcionales:**

a) Velocidad a la que circula un coche y tiempo que emplea en realizar un trayecto.

b) Número de latas de refresco y su precio.

c) Litros de gasolina que gasta un coche y distancia recorrida.

d) Altura de los árboles en un momento dado y longitud de la sombra que producen.

Son inversamente proporcionales las magnitudes del apartado a).

**52. Calcula el valor de $x$ en cada caso para que las magnitudes $A$ y $B$ sean inversamente proporcionales:**

| | | |
|---|---|---|
| Magnitud *A* | 18 | 3 |
| Magnitud *B* | 6 | $x$ |

| | | |
|---|---|---|
| Magnitud *A* | 4 | $x$ |
| Magnitud *B* | 1,2 | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| Magnitud *A* | 25 | 15 |
| Magnitud *B* | $x$ | 10 |

a) $x = \frac{18 \cdot 6}{3} = 36$

b) $x = \frac{4 \cdot 1{,}2}{3} = 1{,}6$

c) $x = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6$

**53. Elabora una tabla con dos magnitudes de proporcionalidad inversa en la que la constante de proporcionalidad sea:**

a) 32 b) 18 c) 48 d) 64 e) 54

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $k = 32$

| **Magnitud *A*** | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| **Magnitud *B*** | 16 | 8 | 4 | 2 |

b) $k = 18$

| **Magnitud *A*** | 2 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| **Magnitud *B*** | 9 | 6 | 3 | 2 |

c) $k = 48$

| **Magnitud *A*** | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| **Magnitud *B*** | 24 | 16 | 12 | 8 |

d) $k = 64$

| **Magnitud *A*** | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| **Magnitud *B*** | 32 | 16 | 8 | 4 |

e) $k = 54$

| **Magnitud *A*** | 3 | 6 | 9 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| **Magnitud *B*** | 18 | 9 | 6 | 2 |

**54. Tenemos pienso para alimentar a 76 vacas durante 30 días. ¿Cuántos días se podrá alimentar a una cuarta parte más de vacas con la misma cantidad de pienso?**

$$76+\frac{1}{4}\cdot 76=76+19=95$$

$$\left.\begin{array}{l}76 \text{ vacas} \rightarrow 30 \text{ días}\\ 95 \text{ vacas} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow 76\cdot 30=95\cdot x \rightarrow x=\frac{76\cdot 30}{95}=24 \text{ días}$$

**55. Un grupo de 15 personas realizan un trabajo en cuatro semanas.**

a) ¿Cuánto tardarían 14 personas? ¿Y 20?

b) Si se quiere acabar en 12 días, ¿cuántas personas se necesitarían?

a) $\left.\begin{array}{l}15 \text{ personas} \rightarrow 4 \text{ semanas}\\ 14 \text{ personas} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{15\cdot 4}{14}=4{,}2857 \text{ semanas}$ → Por tanto tardarían 4 semanas y 2 días.

$$\left.\begin{array}{l}15 \text{ personas} \rightarrow 4 \text{ semanas}\\ 20 \text{ personas} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{15\cdot 4}{20}=3 \text{ semanas.}$$

b) $\left.\begin{array}{r}15 \text{ personas} \rightarrow 28 \text{ días}\\ x \rightarrow 12 \text{ días}\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{15\cdot 28}{12}=35 \text{ personas.}$

**56. Ana, a 105 km/h, tarda 5 h en recorrer lo mismo que Pedro en 7,5 h. ¿Qué velocidad lleva Pedro?**

$$\left.\begin{array}{l}105 \text{ km/h} \rightarrow 5 \text{ horas}\\ x \rightarrow 7{,}5 \text{ horas}\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{105\cdot 5}{7{,}5}=70 \text{ km/h}$$

**57. Con un consumo de 4 horas diarias, un depósito de gas dura 24 días. ¿Cuánto duraría con estos consumos?**

a) 6 horas al día

b) 2,5 horas al día

c) 3 horas al día

d) 8 horas al día

a) $\left.\begin{array}{l}4 \text{ h/día} \rightarrow 24 \text{ días}\\ 6 \text{ h/día} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{6}=16 \text{ días}$

b) $\left.\begin{array}{l}4 \text{ h/día} \rightarrow 24 \text{ días}\\ 2{,}5 \text{ h/día} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{2{,}5}=38{,}4 \text{ días}$ → 38 días, 9 horas, y 36 minutos.

c) $\left.\begin{array}{l}4 \text{ h/día} \rightarrow 24 \text{ días}\\ 3 \text{ h/día} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{3}=32 \text{ días}$

d) $\left.\begin{array}{l}4 \text{ h/día} \rightarrow 24 \text{ días}\\ 8 \text{ h/día} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{8}=12 \text{ días}$

**58. El dueño de una empresa reparte 6 000 € entre sus 3 empleados de forma directamente proporcional a los años que llevan trabajando para él: 3, 5 y 7. ¿Cuánto recibe cada uno?**

$$\frac{P_1}{3}=\frac{P_2}{5}=\frac{P_3}{7}=\frac{6\,000}{3+5+7}=400 \rightarrow P_1=1\,200 \rightarrow P_2=2\,000 \rightarrow P_3=2\,800$$

**59.** **Entre 3 obreros realizan un trabajo: el primero le dedica 58 h; el segundo, 35 h, y el tercero, 17 h. ¿Cuánto cobrará cada uno si les pagan 7 150 €?**

$$\frac{P_1}{58}=\frac{P_2}{35}=\frac{P_3}{17}=\frac{7\,150}{58+35+17}=65 \rightarrow P_1=3\,770 \rightarrow P_2=2\,275 \rightarrow P_3=1105$$

**60.** **Ramón quiere repartir una cantidad *C* de forma directamente proporcional a *x*, *y*, *z*. Responde razonadamente:**

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

b) ¿Qué parte le corresponde a *x*?

c) Si repartiera el doble de *C*, ¿qué parte le correspondería a *x*?

d) Si el reparto de *C* se hiciera de forma directamente proporcional a 2*x*, 2*y*, 2*z*, ¿qué correspondería a 2*x*?

a) La constante de proporcionalidad es $k=\dfrac{C}{x+y+z}$.

b) Llamando $P_1$ a la parte que le corresponde a *x*, se tiene que $P_1=x\cdot k=\dfrac{x\cdot C}{x+y+z}$.

c) Llamando $P_1$ a la parte que le corresponde a *x* cuando la cantidad a repartir es 2*C*, se tiene que $P_1=\dfrac{x\cdot 2C}{x+y+z}$.

d) Llamando $P_1$ a la parte que le corresponde a 2*x*, se tiene que $P_1=\dfrac{2x\cdot C}{2x+2y+2z}=\dfrac{x\cdot C}{x+y+z}$.

**62.** **Carlos, Javier y Mario compraron un décimo de lotería de Navidad. Carlos puso 12 €; Javier, 5 €, y Mario, 3 €. El décimo fue premiado, y en el reparto, a Javier le tocaron 20 000 €. Calcula cuánto le correspondió a los otros dos y la cuantía del premio.**

$20\,000=5\cdot k=4\,000$

$(12+5+3)\cdot 4\,000=$ Cuantía del premio $=80\,000$ €

A Carlos le correspondió $12\cdot 4\,000=48\,000$ € y a Mario $3\cdot 4\,000=12\,000$ €.

**63.** **Una madre reparte unos caramelos entre sus hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 2, 3, 8 y 12 años. Si al mayor le han correspondido 36, calcula cuántos caramelos ha repartido esta madre entre sus hijos.**

$36=12\cdot k \rightarrow k=3$

$(2+3+8+12)\cdot 3=$ Caramelos totales $=75$

**64.** **Tres amigos jugaron un décimo de lotería, que costó 20 €, y resultó premiado con 40 000 €. ¿Cuánto recibió cada uno si el primero puso la mitad del dinero que el segundo y el tercero la quinta parte del primero?**

Llamando *x* a la cantidad que puso el tercero, 5*x* es lo que puso el primero y 10*x* lo que puso el segundo.

De esta forma se tiene que $16x=20$ €, de donde $x=1{,}25$ €. Así, el primero puso 6,25 €; el segundo, 12,50 €, y el tercero, 1,25 €.

$$\frac{P_1}{6{,}25}=\frac{P_2}{12{,}5}=\frac{P_3}{1{,}25}=\frac{40\,000}{20}=2\,000 \rightarrow P_1=12\,500\text{ €} \rightarrow P_2=25\,000\text{ €} \rightarrow P_3=2\,500\text{ €}$$

**65. Villapedrosa quiere premiar a los 3 mejores conductores de su parque móvil. Repartirá 2 800 € en vales de forma inversamente proporcional al número de multas recibidas. José, Marta y Rubén son los tres afortunados: José, 1 multa; Marta, 2 multas, y Rubén, 4 multas. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?**

$$P_1 \cdot 1 = P_2 \cdot 2 = P_3 \cdot 4 = \frac{2\,800}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 1600 \to P_1 = 1600\text{ €} \to P_2 = 800\text{ €} \to P_3 = 400\text{ €}$$

**67. Al repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales a 2, 5 y 10, la cantidad que le corresponde a 10 es 1250. Calcula la cantidad que se ha repartido y la que les corresponde a 2 y 5.**

$1250 = \frac{k}{10} \to k = 12500$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\cdot 12500 = 10000$ es la cantidad repartida.

Lo que les corresponde a 2 y 5 es:

$P_1 = 12\,500 : 2 = 6\,250$

$P_2 = 12\,500 : 5 = 2\,500$

**68. Si repartes una cantidad en partes inversamente proporcionales a 10, 7 y 3, la cantidad que le corresponde a 3 es 50. ¿Qué cantidad les corresponde a 10 y 7?**

$k = 3 \cdot 50 = 150$

A 10 le corresponden 150 : 10 = 15, y a 7 le corresponden 150 : 7 = 21,43.

**69. De acuerdo con un testamento, se reparten 359 568 € entre tres personas en partes inversamente proporcionales a su sueldo mensual. Calcula lo que le corresponderá a cada uno si el sueldo menor es $\frac{2}{3}$ del sueldo intermedio, y este es $\frac{3}{4}$ del mayor.**

Mayor: $x$ Intermedio: $\frac{3x}{4}$ Menor: $\frac{x}{2}$

$$k = \frac{359\,568}{\frac{1}{x}+\frac{4}{3x}+\frac{2}{x}} = \frac{1\,078\,704x}{13} = 82\,977{,}23x$$

Mayor: $82\,977{,}23x : x = 82\,977{,}23$ €

Intermedio: $82\,977{,}23x : \frac{3x}{4} = 110\,636{,}31$ €

Menor: $82\,977{,}23x : \frac{x}{2} = 165\,954{,}46$ €

**70. Cuatro fotocopiadoras realizan 30 000 copias trabajando 3 horas diarias. ¿Cuántas copias se podrían realizar con 5 fotocopiadoras trabajando durante 2 horas diarias?**

Número de fotocopiadoras y número de copias → Proporcionalidad directa.

Número de copias y horas diarias → Proporcionalidad directa.

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{30\,000}{x} \to x = \frac{30\,000\cdot 5\cdot 2}{4\cdot 3} = 25\,000 \text{ copias}$$

**71.** **Una familia de 6 miembros consume 2 kilogramos de pan en 5 días. ¿Cuántos días le durarían 3 kilogramos de pan a una familia de 8 miembros con un consumo similar?**

Número de miembros de la familia y tiempo en días → Proporcionalidad inversa.

Tiempo en días y kg de pan → Proporcionalidad directa.

$\frac{8}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{x}\rightarrow x=\frac{5\cdot 6\cdot 3}{8\cdot 2}=5{,}625 \text{ días}$ → El pan les duraría 5 días y 15 horas.

**72.** **En un comedor reparten comida durante 12 días a 480 personas dándoles una ración diaria de 630 g. Si durante 15 días tuvieran que repartir la misma comida entre 540 personas, ¿qué cantidad tendría la ración?**

Número de personas y cantidad de la ración en gramos → Proporcionalidad inversa.

Tiempo en días y cantidad de la ración → Proporcionalidad inversa.

$\frac{540}{480}\cdot\frac{15}{12}=\frac{630}{x}\rightarrow x=\frac{630\cdot 480\cdot 12}{540\cdot 15}=448 \text{ g}$

**73.** **En una localidad durante 100 días, en invierno, se encienden 50 farolas cada día 15 horas. Se paga en total una factura de 22 500 €. El alcalde, con la intención de rebajar este gasto, hace dos propuestas: encender 40 farolas durante 13 horas y 95 días o encender 45 farolas solo durante 12 horas y 90 días. ¿Con cuál de las dos propuestas se conseguirá rebajar más el gasto?**

Se trata de comprobar con qué propuesta se tienen encendidas menos horas las farolas, por lo que el gasto será menor. Esto ocurre con la segunda propuesta:

La hora de consumo cuesta: 22 500 : (50 · 15 · 100) = 0,30 €

Primera propuesta: 40 · 13 · 95 = 49 400 horas → Gasto: 49 400 · 0,3 = 14 820 €

Segunda propuesta: 45 · 12 · 90 = 48 600 horas → Gasto: 48 600 · 0,3 = 14 580 €

**74.** **Para transportar 40 toneladas de mercancías en ocho días se necesitan 24 camiones. ¿Cuántos camiones harán falta para transportar el doble de mercancías en seis días?**

Número de toneladas y cantidad de camiones → Proporcionalidad directa.

Tiempo en días y cantidad de camiones → Proporcionalidad inversa.

$\frac{40}{80}\cdot\frac{6}{8}=\frac{24}{x}\rightarrow x=\frac{24\cdot 80\cdot 8}{40\cdot 6}=64 \text{ camiones}$

**75.** **Una barra de metal de 10 m de largo y 2 cm² de sección pesa 8,45 kg. ¿Cuánto pesará una barra del mismo material de 5 m de largo y 7 cm² de sección?**

10 m de largo → 2 cm² de sección → 8,45 kg
5 m de largo → 7 cm² de sección → x kg

Directa

Directa

$\frac{10}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{8{,}45}{x}\rightarrow\frac{20}{35}=\frac{8{,}45}{x}\rightarrow x=\frac{35\cdot 8{,}45}{20}=14{,}79 \text{ kg}$

**76. Calcula.**

a) 15 % de 220
b) 38,6 % de 1 245
c) 0,5 % de 78
d) 9,5 % de 48
e) 17 % de 349
f) 72 % de 980

a) $220 \cdot 0{,}15 = 33$
b) $1\,245 \cdot 0{,}386 = 480{,}57$
c) $78 \cdot 0{,}005 = 0{,}39$
d) $48 \cdot 0{,}095 = 4{,}56$
e) $349 \cdot 0{,}17 = 59{,}33$
f) $980 \cdot 0{,}72 = 705{,}6$

**77. Halla estos porcentajes encadenados.**

a) 20 % del 6 % de 300
b) 8,2 % del 2,8 % de 180
c) 46 % del 17 % de 2 600
d) 35 % del 25 % de 400

a) $300 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}06 = 3{,}6$

b) $180 \cdot 0{,}082 \cdot 0{,}028 = 0{,}41328$

c) $2\,600 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}17 = 203{,}32$

d) $400 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 35$

**78. Razona si es verdadero o falso.**

a) El 25 % de 200 equivale al 50 % de 100.
b) El 40 % de 48 coincide con el 20 % de 24.
c) El 20 % de 50 es lo mismo que el 50 % de 20.
d) El 20 % de 7 más el 30 % de 7 es el 50 % de 14.

a) $200 \cdot 0{,}25 = 50 = 100 \cdot 0{,}50 \rightarrow$ Verdadero

b) $48 \cdot 0{,}40 = 19{,}2 \neq 24 \cdot 0{,}20 = 4{,}8 \rightarrow$ Falso

c) $50 \cdot 0{,}20 = 10 = 20 \cdot 0{,}50 \rightarrow$ Verdadero

d) $7 \cdot 0{,}20 + 7 \cdot 0{,}30 = 7 \cdot (0{,}20 + 0{,}30) = 7 \cdot 0{,}5 \neq 14 \cdot 0{,}5 \rightarrow$ Falso

**79. Indica qué tanto por ciento representa 45 con respecto a cada una de estas cantidades.**

a) 90
b) 450
c) 180
d) 270
e) 225
f) 4 500

a) $90 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}5 \rightarrow 50\,\%$

b) $450 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}1 \rightarrow 10\,\%$

c) $180 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}25 \rightarrow 25\,\%$

d) $270 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}1\widehat{6} \rightarrow 16{,}67\,\%$

e) $225 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}2 \rightarrow 20\,\%$

f) $4\,500 \cdot \frac{t}{100} = 45 \rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}01 \rightarrow 1\,\%$

**80. Indica qué tanto por ciento representan.**

a) 9 de 45 c) 50 de 80 e) 2 de 20

b) 3 de 4 d) 12 de 15 f) 0,02 de 1

a) $45 \cdot \frac{t}{100} = 9 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,2 \rightarrow 20\,\%$

b) $4 \cdot \frac{t}{100} = 3 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,75 \rightarrow 75\,\%$

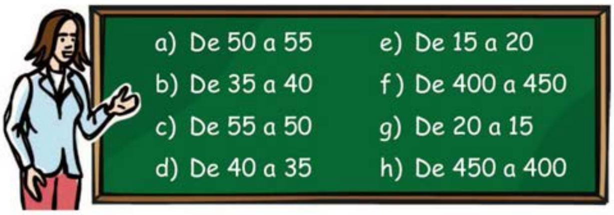
c) $80 \cdot \frac{t}{100} = 50 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,625 \rightarrow 62,5\,\%$

d) $15 \cdot \frac{t}{100} = 12 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,8 \rightarrow 80\,\%$

e) $20 \cdot \frac{t}{100} = 2 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,1 \rightarrow 10\,\%$

f) $1 \cdot \frac{t}{100} = 0,02 \rightarrow \frac{t}{100} = 0,02 \rightarrow 2\,\%$

**81. Halla el aumento o disminución porcentual al pasar de una cantidad a otra.**




a) $50x = 55 \rightarrow x = 1,1 \rightarrow$ Aumento del 10 %

b) $35x = 40 \rightarrow x = 1,1428 \rightarrow$ Aumento del 14,28 %

c) $55x = 50 \rightarrow x = 0,91 \rightarrow$ Disminución del 9 %

d) $40x = 35 \rightarrow x = 0,875 \rightarrow$ Disminución del 12,5 %

e) $15x = 20 \rightarrow x = 1,3333 \rightarrow$ Aumento del 33,33 %

f) $400x = 450 \rightarrow x = 1,125 \rightarrow$ Aumento del 12,5 %

g) $20x = 15 \rightarrow x = 0,75 \rightarrow$ Disminución del 25 %

h) $450x = 400 \rightarrow x = 0,8888 \rightarrow$ Disminución del 11,11 %

**82. ¿Cuál es la cantidad que se obtiene en cada caso partiendo de una cantidad inicial de 180?**

a) Un aumento del 2,3 % c) Un aumento del 4 %

b) Un descenso del 15 % d) Un descenso del 25,5 %

a) $180 \cdot 1,023 = 184,14$

b) $180 \cdot 0,85 = 153$

c) $180 \cdot 1,04 = 187,2$

d) $180 \cdot 0,745 = 134,1$

**84. Calcula el precio inicial de un producto que vale 32 € después de haber aumentado su precio un 25 %.**

$$\left.\begin{array}{l} 125\,\% \rightarrow 32 \\ 100\,\% \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 32}{125} = 25,60\text{ €}$$

**85. Halla el precio inicial de un producto que vale 130 € después de aplicarle una rebaja del 10 %.**

$$\left.\begin{array}{l} 90\,\% \rightarrow 130 \\ 100\,\% \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 130}{90} = 144,44\text{ €}$$

**86.** **¿Cuál es la cantidad inicial de la que se ha partido en cada caso si la cantidad final es 240?**

a) Un aumento del 32 %
b) Un descenso del 2,4 %
c) Un aumento del 16,9 %
d) Un descenso del 8 %

a) $\left.\begin{array}{l}132\ \% \rightarrow 240\\ 100\ \% \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 240}{132} = 181,\widehat{81}\ €$

b) $\left.\begin{array}{l}97,6\ \% \rightarrow 240\\ 100\ \% \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 240}{97,6} = 245,90\ €$

c) $\left.\begin{array}{l}116,9\ \% \rightarrow 240\\ 100\ \% \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 240}{116,9} = 205,30\ €$

d) $\left.\begin{array}{l}92\ \% \rightarrow 240\\ 100\ \% \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 240}{92} = 260,87\ €$

**87.** **Ernesto compra un ordenador de 670 €. A la hora de pagar hay que añadir un 21 % de IVA, pero le aplican un descuento del 25 % porque está en promoción. ¿Cuánto pagará por el ordenador? ¿Qué porcentaje resulta de aplicar el IVA y la promoción?**

$670 \cdot 1,21 \cdot 0,75 = 608,03$ € es el precio que pagará por el ordenador.

$\dfrac{670 - 608,03}{670} = 9,25\ \%$ es el descuento total.

**89.** **Calcula el precio inicial de un producto que vale 108,90 € después de haber sido rebajado un 10 %, y luego, aumentado un 21 % por el IVA.**

$x \cdot 1,21 \cdot 0,9 = 108,90\ € \rightarrow x = \dfrac{108,9}{1,21 \cdot 0,9} = \dfrac{108,9}{1,089} = 100$ €

**90.** **Halla el precio de compra de un ordenador que un intermediario vende a 756,25 €, tras fijarle una ganancia del 25 % y el IVA del 21 %.**

$x \cdot 1,21 \cdot 1,25 = 756,25\ € \rightarrow x = \dfrac{756,25}{1,21 \cdot 1,25} = \dfrac{756,25}{1,5125} = 500$ €

**91.** **En una encuesta en la que las respuestas son «sí», «no» y «ns/nc» han participado 600 personas. Sabiendo que 356 han contestado «sí» y 95 han respondido «no», ¿qué porcentaje corresponde a la opción «ns/nc»?**

$600 - (356 + 95) = 149$ $\qquad \dfrac{149}{600} = 24,8\widehat{3}\ \%$

**92.** **Un bar ha subido 5 céntimos los precios de los refrescos de naranja y cola, de forma que ahora el refresco de naranja cuesta 1,05 € y el refresco de cola cuesta 1,15 €. ¿Ha sido un aumento proporcional?**

Antes costaban 1 € y 1,10 €.

$\frac{0,05}{1} \neq \frac{0,05}{1,1} \rightarrow$ No es proporcional.

**93.** **Un supermercado vende un producto a 12,80 € cada unidad. También se vende en paquetes de seis unidades a 72 € el paquete. ¿Qué tanto por ciento de descuento se experimenta en el precio de cada unidad del producto al comprarlo en un paquete en lugar de individualmente?**

Cada unidad del paquete de 6 vale $\frac{72}{6} = 12$ €, por lo que tiene un descuento de 0,80 €.

$\frac{0,8 \cdot 100}{12,8} = 6,25 \rightarrow$ Supone un descuento del 6,25 %.

**94.** **¿Qué tanto por ciento aumenta el área de un cuadrado de lado 6 cm al crecer el lado 1 cm?**

El área del cuadrado de lado 6 cm es 36 $cm^2$.

El área del cuadrado de lado 7cm es 49 $cm^2$.

Tiene un aumento de 13 unidades $\rightarrow \frac{13 \cdot 100}{36} = 36,1$ %.

**95.** **Aumentando el lado de un cuadrado un 40 %, ¿en qué porcentaje queda aumentada su área?**

Si el lado es $x$, el área es $x^2$. Si el lado es $1,4x$, el área es $1,96x^2 \rightarrow$ Aumenta un 96 %.

**96.** **¿A qué cantidad se llega tras aplicar a 560 un aumento del 15 % seguido de un descenso del 12 %? ¿Se llega al mismo resultado aplicando primero el descenso y después el aumento?**

$560 \cdot 1,15 \cdot 0,88 = 566,72$

El resultado sería el mismo porque el producto es conmutativo.

**97.** **Contesta razonadamente si aplicar a una cantidad dos aumentos del 18 %, uno tras otro, es lo mismo que aplicar un aumento del 18 % al doble de la cantidad.**

Llamamos $C$ a la cantidad sobre la que se hacen los aumentos.

$C \cdot 1,18 \cdot 1,18 = C \cdot 1,3924 \neq 2C \cdot 1,18 = 2,36 \cdot C \rightarrow$ No es lo mismo.

**98.** **¿Aplicar consecutivamente dos aumentos del 10 % es lo mismo que aplicar un aumento del 20 %?**

Aplicar consecutivamente dos aumentos del 10 % es multiplicar por $1,1^2 = 1,21$.

Aplicar un aumento del 20 % es multiplicar por 1,2.

No es lo mismo.

**99. ¿Al aplicar consecutivamente dos disminuciones del 5 % se obtiene el mismo resultado que al aplicar una del 10 %?**

Aplicar consecutivamente dos disminuciones del 5 % es equivalente a multiplicar por $0{,}95^2 = 0{,}9025$.

Disminuir un 10 % es equivalente a multiplicar por 0,9.

No es lo mismo.

**100. Si a una cantidad se le aplica un 8 % de aumento, ¿qué porcentaje de disminución hay que aplicar para obtener la cantidad de partida?**

$$\frac{8}{108} = 7{,}\overset{\frown}{407}\ \%$$

**101. A Carlos le aumentaron el sueldo un 8 % el año pasado, pero este año le descontarán un 6 % y para el próximo año estiman que tendrán que quitarle otro 2 %. ¿Cómo quedará su sueldo después del aumento y los dos descensos?**

Llamando *x* al sueldo:

Primer año: $x \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1{,}08x$ Segundo año: $1{,}08x \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 1{,}0152x$

Tercer año: $1{,}0152x \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0{,}994896x$

**102. Calcula los beneficios que se obtienen al depositar 3 000 € durante 4 años con cada uno de estos réditos anuales.**

a) 2 % b) 1,4 % c) 4 % d) 3,6 %

a) $3\,000 \cdot \frac{2}{100} \cdot 4 = 240$ €

b) $3\,000 \cdot \frac{1{,}4}{100} \cdot 4 = 168$ €

c) $3\,000 \cdot \frac{4}{100} \cdot 4 = 480$ €

d) $3\,000 \cdot \frac{3{,}6}{100} \cdot 4 = 432$ €

**103. Calcula los beneficios que se obtienen al depositar 50 000 € al 1,8 % durante estos tiempos.**

a) 2 años b) 7 años c) 12 años d) 25 años

a) $50\,000 \cdot \frac{1{,}8}{100} \cdot 2 = 1800$ €

b) $50\,000 \cdot \frac{1{,}8}{100} \cdot 7 = 6\,300$ €

c) $50\,000 \cdot \frac{1{,}8}{100} \cdot 12 = 10\,800$ €

d) $50\,000 \cdot \frac{1{,}8}{100} \cdot 25 = 22\,500$ €

**104. Copia la tabla y complétala en tu cuaderno.**

| Interés | Capital | Rédito | Tiempo |
|---|---|---|---|
| **624 €** | 4800 € | 2,6 % | 5 años |
| 300 € | 12000 € | **1,5 %** | 20 meses |
| 140 € | **1 000 €** | 3 % | 4 años y 8 meses |
| 40 € | 30000 € | **3,2 %** | 15 días |

**105.** **Calcula el interés que se obtendrá después de invertir 1600 € al 3,4% durante estos tiempos:**

a) 3 meses
b) 6 días
c) 48 días
d) 5 años y 18 días
e) 8 meses y 12 días
f) 2 años, 5 meses y 9 días

a) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{3}{12} = 13,60$ €

b) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{6}{360} = 0,91$ €

c) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{48}{360} = 7,25$ €

d) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{1818}{360} = 274,72$ €

e) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{252}{360} = 38,08$ €

f) $1600 \cdot \frac{3,4}{100} \cdot \frac{879}{360} = 132,83$ €

**106.** **Calcula durante cuánto tiempo se deben invertir 2000 € al 2,5% de rédito para obtener un interés de 200 €.**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r} = \frac{200 \cdot 100}{2\,000 \cdot 2,5} = 4 \text{ años}$$

**107.** **Ruth invirtió 500 € durante cuatro meses y obtuvo unos beneficios de 2,50 €. Su amigo Javier invirtió 800 € durante tres meses y consiguió con ello unos beneficios de 2,80 €. ¿En cuál de las inversiones fue mayor el rédito?**

Ruth: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t} = \frac{2,5 \cdot 12 \cdot 100}{500 \cdot 4} = 1,5\,\%$

Javier: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t} = \frac{2,8 \cdot 12 \cdot 100}{800 \cdot 3} = 1,4\,\%$

Fue mayor en la inversión de Ruth.

**108.** **¿Qué inversión da mayores beneficios: 4000 € al 2,8% durante 500 días o 5000 € al 2,5% durante 480 días?**

$I_1 = 4\,000 \cdot \frac{2,8}{100} \cdot \frac{500}{360} = 155,56$ €

$I_2 = 5\,000 \cdot \frac{2,5}{100} \cdot \frac{480}{360} = 166,67$ €

La segunda inversión da mayores beneficios.

**109.** **Se cree que para construir la pirámide de Keops trabajaron 20000 personas durante 10 horas diarias y tardaron 20 años en acabarla.**

a) ¿Cuánto tardarían si fuesen 10000 personas más?
b) ¿Y si hubiesen trabajado 8 horas diarias?

a) $\left.\begin{array}{l} 20\,000 \rightarrow 20 \\ 30\,000 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{20\,000 \cdot 20}{30\,000} = 13,33 = 13 \text{ años y 4 meses}$

b) $\left.\begin{array}{l} 10 \rightarrow 20 \\ 8 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 20}{8} = 25 \text{ años}$

**110.** **Un grupo de 7 personas planta 35 árboles en 2 horas. ¿Cuántos árboles plantarán 12 personas en 3 horas?**

Número de personas y número de árboles → Proporcionalidad directa.

Tiempo en horas y número de árboles → Proporcionalidad directa.

| Número de personas | Número de árboles | Tiempo en horas |
|---|---|---|
| 7 | 35 | 2 |
| 12 | $x$ | 3 |

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{2}{3}=\frac{35}{x}\rightarrow x=\frac{35\cdot 3\cdot 12}{7\cdot 2}=90$$

**111.** **Un ganadero compra 2 000 kg de pienso, a 31,77 céntimos de euro cada kilo.**

a) ¿Cuánto le cuesta el pienso?

b) ¿Cuánto pienso podrá comprar con 800 €?

a) $\left.\begin{array}{l}1\text{ kg}\rightarrow 0{,}3177\text{ €}\\ 2\,000\text{ kg}\rightarrow x\end{array}\right\}\rightarrow x=2\,000\cdot 0{,}3177=635{,}40\text{ €}$

b) $\left.\begin{array}{l}1\text{ kg}\rightarrow 0{,}3177\text{ €}\\ x\rightarrow 800\text{ €}\end{array}\right\}\rightarrow x=\dfrac{800}{0{,}3177}=2\,518{,}10\text{ kg}$

**112.** **En casa de Gonzalo emplean 600 g de arroz, cada jueves, para comer cuatro personas. El jueves próximo tiene dos invitados a comer.**

a) Si conocen anticipadamente que tienen dos invitados, ¿qué cantidad de arroz extra deben emplear para que todos tengan la misma ración que cada jueves?

b) Si los dos invitados llegan cuando ya está cocinado el arroz (empleando la misma cantidad que cada jueves), ¿qué ración de arroz recibe cada comensal?

a) $\left.\begin{array}{l}600\text{ g}\rightarrow 4\text{ personas}\\ x\rightarrow 6\text{ personas}\end{array}\right\}\rightarrow x=\dfrac{600\cdot 6}{4}=900\text{ g}$

b) $600 : 6 = 100$ g de arroz recibe cada comensal.

**113.** **Se decide construir un puente cuyo coste, de un millón de euros, han de pagar entre tres localidades en partes inversamente proporcionales a la distancia de cada localidad al puente. Alameda está a 6 km, Buenasaguas está a 8 km, y Cabestreros, a 10 km. Calcula cuánto ha de pagar cada localidad.**

$$k=\frac{1\,000\,000}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=\frac{240\,000\,000}{94}=2\,553\,191{,}49$$

A Alameda le corresponden ⟶ $2\,553\,191{,}49 : 6 = 425\,531{,}91$ €

A Buenasaguas le corresponden → $2\,553\,191{,}49 : 8 = 319\,148{,}94$ €

A Cabestreros le corresponden ⟶ $2\,553\,191{,}49 : 10 = 255\,319{,}15$ €

**114. En el escaparate de una tienda se leen estas promociones para dos artículos distintos: «Antes 45 €, ahora 35 €» y «Antes 230 €, ahora 170 €». ¿Se han rebajado los dos artículos aplicando el mismo porcentaje?**

No se ha aplicado el mismo porcentaje:

$45 \cdot x = 35 \rightarrow x = \frac{35}{45} = 0,\widehat{7}$ → Rebaja del 22,2 %    $230 \cdot y = 170 \rightarrow y = \frac{170}{230} = 0,74$ → Rebaja del 26 %

**115. Un coche a 90 km/h tarda 6 horas en recorrer cierta distancia. ¿Cuánto tardará si aumenta su velocidad un 9 %? Si recorre esa misma distancia en 5 horas, ¿a qué velocidad ha viajado?**

$$\left.\begin{array}{l} 90 \text{ km/h} \rightarrow 6 \text{ horas} \\ 90 \cdot 1{,}09 \text{ km/h} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 6}{90 \cdot 1{,}09} = 5{,}5 \text{ horas} = 5 \text{ horas y } 30 \text{ minutos}$$

$$\left.\begin{array}{l} 90 \text{ km/h} \rightarrow 6 \text{ horas} \\ y \rightarrow 5 \text{ horas} \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{90 \cdot 6}{5} = 108 \text{ km/h}$$

**116. En el escaparate de un establecimiento se anunciaron las primeras rebajas con un descuento del 30 % sobre el precio original. Después se anunciaron las segundas rebajas con un descuento del 40 % sobre el precio ya rebajado. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y equivalente a la situación anterior?**

a) Aplican al precio inicial un 30 % de descuento durante una temporada y otra temporada aplican un 40 %. Dependiendo de la temporada, así es la rebaja.

b) Aplican un 30 % de descuento y luego hacen un 40 %, con lo que realmente hacen un 70 % de rebaja.

c) Aplican un 30 % durante una temporada y luego rebajan los precios ya rebajados un 40 %, con lo que comprando durante las segundas rebajas los artículos están rebajados un 58 %.

La afirmación verdadera es la del apartado c), ya que 0,7 · 0,6 = 0,42 → Descuento del 58 %.

**118. Se mezclan dos tipos de vino, *A* y *B*, de precios 0,71 €/ℓ y 1,15 €/ℓ en la proporción de 4 litros de tipo *A* y 3 litros de tipo *B*. ¿A qué precio sale el litro de la mezcla?**

(0,71 · 4 + 1,15 · 3) : 7 = 0,90 €/l

**119. ¿En qué proporción hay que mezclar dos tipos de carne, *A* y *B*, para hamburguesas, cuyos precios son 5 €/kg y 8 €/kg para que resulte una mezcla que se pueda vender por 7,25 €/kg?**

Sea *x* la cantidad de carne tipo *A* y sea *y* la cantidad de carne tipo *B*.

$$\frac{5x + 8y}{x + y} = 7{,}25 \rightarrow 5x + 8y = 7{,}25x + 7{,}25y \rightarrow 2{,}25x = 0{,}75y \rightarrow y = 3x$$

Por cada kilo de carne tipo *A* habrá 3 kilos de carne tipo *B*.

**120. Mezclamos 18 kg de café de 3,45 €/kg con 16 kg de café de 2,70 €/kg. ¿A cuánto hay que vender el kilo de la mezcla para ganar un 16 %?**

(3,45 · 18 + 2,70 · 16) : 34 = 3,10 €/kg

Para ganar un 16 % aumentamos el precio: 3,10 · 1,16 = 3,60 €/kg

Hay que vender cada kilo de la mezcla a 3,60 €.

**121. Un lingote de 200 g de plata de ley del 90 % (de pureza) se funde con otro de 300 g de 80 % de ley. ¿Cuál es la ley del nuevo lingote?**

El metal total es:

$$200 + 300 = 500 \text{ g}$$

El total de plata pura es:

$$\frac{200 \cdot 90}{100} + \frac{300 \cdot 80}{100} = 420 \text{ g}$$

La ley de la mezcla es:

$$\frac{420}{500} = 84\,\%$$

La ley del nuevo lingote es del 84 %.

**122. Realiza un estudio comparativo: ¿cuál de las siguientes ofertas es la más beneficiosa para el consumidor?**

- «3 × 2»
- «2.ª unidad al 70 %»
- «30 % de descuento»
- «5 € de descuento por compras de más de 40 €»
- «20 % más de producto gratis»

«3 × 2» → La unidad cuesta $\frac{2}{3}$ del precio inicial.

«2.ª unidad al 70 %» → La unidad cuesta $\frac{1{,}3}{2}$ del precio inicial.

«30 % de descuento» → La unidad cuesta $\frac{70}{100}$ del precio inicial.

«5 € de descuento por compras de más de 40 €» → El precio final es $\frac{35}{40}$ del precio inicial si es múltiplo de 40.

«20 % más de producto gratis» → La unidad cuesta $\frac{1}{1{,}2}$ del precio inicial.

Comparamos las fracciones para ver con qué oferta pagaremos menos dinero:

$\frac{2}{3} = 0{,}67$ $\quad \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65$ $\quad \frac{70}{100} = 0{,}7$ $\quad \frac{35}{40} = 0{,}875$ $\quad \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83$

La oferta más beneficiosa para el comprador, independientemente de si la compra es de más de 40 € o no, es la oferta «2.ª unidad al 70 %».

Ordenamos las ofertas de la más a la menos beneficiosa:

1.ª: «2.ª unidad al 70 %»

2.ª: «3 × 2»

3.ª: «30 % de descuento»

4.ª: «5 € de descuento por compras de más de 40 €»

5.ª: «20 % más de producto gratis»

## SABER HACER

**1. Determina si existe proporcionalidad entre estas magnitudes y calcula su constante.**

| Magnitud *A* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Magnitud *B* | 5 | 10 | 15 | 20 |

| Magnitud *A* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Magnitud *B* | 36 | 18 | 12 | 9 |

En la primera tabla las magnitudes son directamente proporcionales, y $k = \frac{1}{5}$.

En la segunda tabla las magnitudes son inversamente proporcionales, y $k = 36$.

**2. Sabiendo que dos pasos de Marcos equivalen a 95 cm:**

a) ¿Cuánto miden cinco pasos?

b) ¿Y 30 pasos?

a) $\left.\begin{array}{l} 2 \text{ pasos} \rightarrow 95 \text{ cm} \\ 5 \text{ pasos} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 95}{2} = 237{,}5 \text{ cm}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2 \text{ pasos} \rightarrow 95 \text{ cm} \\ 30 \text{ pasos} \rightarrow y \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{30 \cdot 95}{2} = 1425 \text{ cm}$

**3. El agua de un aljibe se saca en 340 veces empleando un cubo de 18 litros de capacidad. Si utilizamos un cubo de 12 litros, ¿cuántas veces necesitaremos introducir el cubo para vaciar el aljibe?**

$\left.\begin{array}{l} 340 \text{ veces} \rightarrow 18 \text{ l} \\ x \rightarrow 12 \text{ l} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{340 \cdot 18}{12} = 510 \text{ veces}$

**4. Ocho amigos se van de vacaciones 10 días por 3 500 €. ¿Cuánto les costarían unas vacaciones similares a las anteriores pero de 6 días de duración a 5 amigos?**

Número de amigos y dinero ⟶ Proporcionalidad directa.

Número de días y dinero ⟶ Proporcionalidad directa.

| Número de amigos | Dinero | Número de días |
|---|---|---|
| 8 | 3 500 | 10 |
| 5 | *x* | 6 |

$\frac{8}{5} \cdot \frac{10}{6} = \frac{3\,500}{x} \rightarrow x = \frac{3\,500 \cdot 5 \cdot 6}{8 \cdot 10} = 1312{,}50 \text{ €}$

**5. Un abuelo reparte 10 350 € entre sus tres nietos de forma directamente proporcional a sus edades. Si los dos hermanos menores tienen 22 años y 23 años, calcula.**

a) La edad del hermano mayor, sabiendo que le correspondieron 3 600 €.

b) Las cantidades de los otros hermanos.

a) $\dfrac{10\,350}{x+22+23} = \dfrac{3\,600}{x} \rightarrow 10\,350x = 3\,600x + 162\,000 \rightarrow x = 24$ años

b) $k = \dfrac{3\,600}{24} = 150$. Al nieto que tiene 22 años le correspondieron:

$150 \cdot 22 = 3\,300$ €, y al nieto de 23 años: $150 \cdot 23 = 3\,450$ €

**6. Ramiro tiene una colección de 4 554 monedas que quiere repartir entre sus hijos de forma inversamente proporcional a sus edades: 3, 5, 6 y 8 años. ¿Cuántas monedas recibirá cada uno?**

$$P_1 \cdot 3 = P_2 \cdot 5 = P_3 \cdot 6 = P_4 \cdot 8 = \frac{4\,554}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} \rightarrow k = 5\,520 = \text{constante de proporcionalidad}$$

$P_1 = 5\,520 : 3 = 1840$

$P_2 = 5\,520 : 5 = 1104$

$P_3 = 5\,520 : 6 = 920$

$P_4 = 5\,520 : 8 = 690$

**7. Lucía reparte el 60 % de su bolsa de caramelos entre sus amigas. Si le quedan 18 caramelos, ¿cuántos ha repartido?**

$$\left.\begin{array}{l} 18 \text{ caramelos} \rightarrow 40\ \% \\ x \rightarrow 100\ \% \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1800}{40} = 45$$

45 – 18 = 27

Ha repartido 27 caramelos.

**8. Si a cierta cantidad *C* se le aplica un descuento del 15 % y un aumento del 30 %, resulta 2 210 €. ¿Cuál es la cantidad *C*? ¿Qué porcentaje total se le ha aplicado?**

$$C \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}3 = 2210\text{ €} \rightarrow C = \frac{2210}{0{,}85 \cdot 1{,}3} = \frac{2210}{1{,}105} = 2000\text{ €}$$

El porcentaje total aplicado es 0,85 · 1,3 = 1,105; esto es, un aumento del 10,5 %.

**9. Enrique invierte sus ahorros durante cinco años al 3,4 %. Le informan de que durante ese tiempo ganará 1 360 €. ¿Qué cantidad invirtió Enrique?**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 1360 = \frac{C \cdot 3{,}4 \cdot 5}{100} \rightarrow C = \frac{1360 \cdot 100}{3{,}4 \cdot 5} = 8\,000\text{ €}$$

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**123.** **La mayoría de las tarjetas de crédito permiten aplazar los pagos en cuotas mensuales, aunque este aplazamiento trae asociados intereses. Por ejemplo, si compramos un televisor de 500 €, podemos aplazar el pago abonando 100 € durante 5 meses, a lo que habría que añadir los intereses que nos cobra el banco por aplazar esa deuda.**

El método más empleado para calcular estos intereses es el que se basa en el *saldo promedio diario*.

Para calcularlo, se utiliza el siguiente proceso:

1. Se multiplica cada uno de los saldos que hubo ese mes por el número de días que se ha mantenido.
2. Se suman todos los productos resultantes y se dividen por el número de días del mes.

Por ejemplo, si tenemos una tarjeta de crédito con un tipo de interés del 1,5 % mensual, un pago fijo mensual de 400 € y con un saldo final del mes anterior de 1700 €, el interés que hay que pagar se calcula de la siguiente forma:

| Fecha | Concepto | Movimiento | Saldo |
|---|---|---|---|
| 01/01/2014 | Saldo inicial | | − 1700,00 |
| 05/01/2014 | Compra | − 250,00 | − 1950,00 |
| 07/01/2014 | Cuota mensual | + 400,00 | − 1550,00 |
| 25/01/2014 | Compra | − 75,00 | − 1625,00 |
| 01/02/2014 | | | − 1625,00 |

1700 € x 4 días = 6 800
1950 € x 2 días = 3 900
1550 € x 18 días = 27 900
1625 € x 7 días = 11 375

49 975

(49 975 : 31 días) · 1,5 % = 24,18 €

Los intereses que tendría que pagar el dueño de esta tarjeta de crédito, durante este mes, serían 24,18 €.

- A la derecha están los movimientos de la tarjeta de crédito de los padres de María durante el mes de junio del año 2014. ¿Cuánto pagarán de intereses los padres de María por esta tarjeta de crédito? Si no realizasen la compra del día 25, ¿cuánto pagarían?

| Fecha | Concepto | Movimiento | Saldo |
|---|---|---|---|
| 01/06/14 | Saldo inicial | | − 400 |
| 03/06/14 | Cuota mensual | + 350 | − 50 |
| 12/06/14 | Compra | − 240 | − 290 |
| 25/06/14 | Compra | − 120 | − 410 |
| 01/07/14 | | | − 410 |

400 € · 2 días = 800 €    50 € · 9 días = 450 €    290 € · 13 días = 3 770 €    410 € · 5 días = 2 050 €

En total, 7 070 €    (7 070 : 30) · 1,5 % = 3,54 €

Si no realizasen la compra del día 25 pagarían:

400 € · 2 días = 800 €    50 € · 9 días = 450 €    290 € · 18 días = 5 220 €

En total, 6 470 €    (6 470 : 30) · 1,5 % = 3,24 €

# FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**124. Si una magnitud *A* es directamente proporcional a otra *B*, y esta es inversamente proporcional a *C*, ¿cómo son *A* y *C*?**

$A$ y $B$ son directamente proporcionales $\rightarrow \dfrac{A}{B} = k_1$

$B$ y $C$ son inversamente proporcionales $\rightarrow B \cdot C = k_2$

Si multiplicamos los dos términos de la igualdad por $k_1$:

$$B \cdot C = k_2 \rightarrow B \cdot C \cdot k_1 = k_2 \cdot k_1 \rightarrow B \cdot C \cdot \frac{A}{B} = k_2 \cdot k_1 \rightarrow A \cdot C = k_2 \cdot k_1$$

Luego $A$ y $C$ son inversamente proporcionales.

**125. Reparte un número *k* en dos partes directamente proporcionales a dos números cualesquiera, *m* y *n*, y después, haz el reparto inversamente proporcional a los mismos valores. ¿Qué relación hay entre las partes obtenidas en cada reparto? ¿Ocurre siempre lo mismo?**

El reparto directamente proporcional a *m* es:

$$\frac{k}{m+n} = \frac{x}{m} \rightarrow x = \frac{m \cdot k}{m+n}$$

y el de *n* es:

$$\frac{k}{m+n} = \frac{y}{n} \rightarrow x = \frac{n \cdot k}{m+n}$$

El reparto inversamente proporcional a *m* es:

$$\frac{k}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = x \cdot m \rightarrow x = \frac{k \cdot m \cdot n}{(m+n)m} = \frac{n \cdot k}{m+n}$$

y el de *n* es:

$$\frac{k}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = y \cdot n \rightarrow y = \frac{k \cdot m \cdot n}{(m+n)n} = \frac{m \cdot k}{m+n}$$

El reparto, en cada caso, es el contrario; lo que le corresponde a $m$ en el reparto directamente proporcional es lo que le corresponde a $n$ en el reparto inversamente proporcional, y viceversa.

Ocurre siempre independientemente de los valores de *m* y *n*.

**126. Si una cierta cantidad la disminuimos en un 10 %, ¿en qué porcentaje debemos incrementarla para obtener la misma cantidad?**

$$0{,}9 \cdot x \cdot C = C \rightarrow 0{,}9 \cdot x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}1111\ldots$$

Debemos incrementarla un 11,11 %.

**127. Deduce qué porcentaje representa una cantidad *C* con respecto a estas otras.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $2C$ | c) $10C$ | e) $4C$ | g) $50C$ |
| b) $3C$ | d) $20C$ | f) $5C$ | h) $100C$ |

a) $\frac{C}{2C} = \frac{1}{2} \to 50\,\%$
b) $\frac{C}{3C} = \frac{1}{3} \to 33,\widehat{3}\,\%$
c) $\frac{C}{10C} = \frac{1}{10} \to 10\,\%$
d) $\frac{C}{20C} = \frac{1}{20} \to 5\,\%$
e) $\frac{C}{4C} = \frac{1}{4} \to 25\,\%$
f) $\frac{C}{5C} = \frac{1}{5} \to 20\,\%$
g) $\frac{C}{50C} = \frac{1}{50} \to 2\,\%$
h) $\frac{C}{100C} = \frac{1}{100} \to 1\,\%$

**128. Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas hacen falta como mínimo, una encima de otra, para que pase como máximo la mitad de la luz roja que le llegue?**

$0,80^x < 0,5$

$0,80 \cdot 0,80 = 0,64$
$0,64 \cdot 0,80 = 0,512$
$0,512 \cdot 0,80 = 0,4096$

Hacen falta como mínimo 4 láminas.

## PRUEBAS PISA

**129. El fotógrafo de animales Jean Baptiste realizó una expedición de un año de duración y sacó numerosas fotos de pingüinos y sus polluelos.**

**Se interesó especialmente por el aumento de tamaño de distintas colonias de pingüinos.**

- Jean se pregunta cómo evolucionará en los próximos años el tamaño de una colonia de pingüinos. Para determinarlo elabora las siguientes hipótesis:
  - A comienzos de año, la colonia consta de 10 000 pingüinos (5 000 parejas).
  - Cada pareja de pingüinos cría un polluelo todos los años por primavera.
  - A finales de año, el 20 % de los pingüinos (adultos y polluelos) morirá.

Al final del primer año, ¿cuántos pingüinos (adultos y polluelos) hay en la colonia?

- Jean establece la hipótesis de que la colonia seguirá creciendo de la siguiente manera:
  - Al comienzo de cada año, la colonia consta del mismo número de pingüinos machos y hembras que forman parejas.
  - Cada pareja de pingüinos cría un polluelo todos los años por primavera.
  - Al final de cada año, el 20 % de los pingüinos (adultos y polluelos) morirá.
  - Los pingüinos de un año de edad también criarán polluelos.

**Según las anteriores hipótesis, ¿cuál de las siguientes fórmulas expresa el número total de pingüinos, *P*, después de 7 años?**

a) $P = 10000 \times (1,5 \times 0,2)^7$
b) $P = 10000 \times (1,5 \times 0,8)^7$
c) $P = 10000 \times (1,2 \times 0,2)^7$
d) $P = 10000 \times (1,2 \times 0,8)^7$

*(Prueba PISA 2006)*

- 10 000 + 5 000 = 15 000　　　$0,8 \cdot 15\,000 = 12\,000$
- La hipótesis correcta es la b).

Año 1: $10\,000 \cdot 1,5 \cdot 0,8$

Año 2: $10\,000 \cdot (1,5 \cdot 0,8)^2$

Año 3: $10\,000 \cdot (1,5 \cdot 0,8)^3$

…

Año 7: $10\,000 \cdot (1,5 \cdot 0,8)^7$

# Polinomios

5

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.**

a) El triple de un número.

b) La cuarta parte de un número.

c) La mitad de un número.

d) El cuadrado de un número menos tres unidades.

a) $3x$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{x}{2}$ d) $x^2 - 3$

**2. Relaciona cada expresión escrita con su correspondiente expresión algebraica.**

a) La tercera parte de un número más otro número.

b) La tercera parte de la suma de dos números.

c) El doble del cuadrado de un número.

i) $2x^2$ ii) $\frac{x+y}{3}$ iii) $\frac{x}{3} + y$

a) iii b) ii c) i

**3. Aplica la propiedad distributiva en las siguientes expresiones.**

a) $7 \cdot (4 + 2)$

b) $3 \cdot (x - 5)$

c) $9x \cdot (x - 4)$

d) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4x + 7)$

a) $7 \cdot (4 + 2) = 28 + 14 = 42$

b) $3 \cdot (x - 5) = 3x - 15$

c) $9x \cdot (x - 4) = 9x^2 - 36x$

d) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4x + 7) = -6x^3 + 8x^2 - 14x$

## VIDA COTIDIANA

**El mayor logro de Gutenberg con la imprenta fue el desarrollo de un método que permitió fundir letras con dimensiones precisas. Este avance contribuyó de forma decisiva a la aceptación del libro impreso.**

- **Existen imprentas que solo pueden imprimir sobre páginas que sean el doble de ancho que de largas. ¿Cuál es la expresión algebraica que nos da el área y el perímetro de esas hojas?**

Largo de página $\rightarrow x$ Ancho de página $\rightarrow 2x$

Área de página $= 2x \cdot x = 2x^2$

Perímetro de página $= 2 \cdot 2x + 2 \cdot x = 4x + 2x = 6x$

## RESUELVE EL RETO

**Si nos juntas nos anulas, si nos multiplicas nos transformas y si nos divides nos conviertes en $-1$. ¿Qué monomios somos?**

Dos monomios opuestos.

$A \cdot B = 6$ $\quad$ $B \cdot D = 24$

$A \cdot C = 12$ $\quad$ $C \cdot D = 36$

**¿Cuánto vale $A \cdot B \cdot C \cdot D$?**

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = (A \cdot B) \cdot (C \cdot D) = 6 \cdot 36 = 216$$

$ab + bc = 6 \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$

**Si $a$, $b$ y $c$ no son 0, ¿cuánto vale $a \cdot b \cdot c$?**

$$ab + bc = b(a + c) = 6$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{c + a}{ac} = 1 \rightarrow a + c = ac$$

Así: $b\underbrace{(a + c)}_{=ac} = b \cdot a \cdot c = 6 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 6$

**Sin efectuar operaciones, halla el valor de $A$.**

$A = 83\,683\,470^2 - (83\,683\,469 \cdot 83\,683\,471)$

Si hacemos $x = 83\,683\,470$, entonces:

$x - 1 = 83\,683\,469$

$x + 1 = 83\,683\,471$

Así: $A = 83\,683\,470^2 - (83\,683\,469 \cdot 83\,683\,471) = x^2 - ((x - 1) \cdot (x + 1)) = x^2 - (x^2 - 1) = 1$

## ACTIVIDADES

**1. Razona cuáles de las siguientes expresiones son monomios y, para las que lo sean, escribe el opuesto.**

$$\frac{3}{2}x \qquad -5yz^2 \qquad 4 + x \qquad x - x^3 \qquad 4x^2y^3$$

Monomios: $\frac{3}{2}x$, opuesto $-\frac{3}{2}x$

$-5yz^2$, opuesto $5yz^2$

$4x^2y^3$, opuesto $-4x^2y^3$

**2. Escribe tres monomios semejantes a $-a^2b$. ¿Cuántos monomios opuestos puedes escribir?**

Semejantes: $2a^2b$, $\frac{5}{3}a^2b$ y $-3a^2b$ $\qquad$ Solo existe un opuesto: $a^2b$.

**3.** **¿Existe un monomio semejante a $xy$ de grado 3 con coeficiente $-5$?**

No, ya que no tendrían el mismo grado.

**4.** **Efectúa estas operaciones.**

a) $-7x^3 + 6x^3$
b) $3y^2 + 9y^2 - 2y^2$
c) $-5x^4 \cdot 8y$
d) $3x^2 \cdot 4y^3$
e) $15xyz : 3xy$
f) $16x^3y^4 : 2x^2y$

a) $-x^3$ b) $10y^2$ c) $-40x^4y$ d) $12x^2y^3$ e) $5z$ f) $8xy^3$

**5.** **Realiza estas operaciones.**

a) $6x^3 - 2x + 3x^2 - 8x + x^2$
b) $4xy^2 + 7x^3y^2 - (6xy^2 + 3x^3y^2)$

a) $6x^3 + 4x^2 - 10x$ b) $-2xy^2 + 4x^3y^2$

**6.** **Calcula $-x^4 + 3x^2 - 7x$.**

No se puede operar porque no existen términos semejantes.

**7.** **Indica los términos y el grado de estos polinomios.**

a) $P(x) = -x^2 + 3x^2 - 2x + 4x - 6$
b) $P(y) = y^3 + 2y - 3y^3 + y - 3$
c) $P(x, y) = 5x^3y - 2x + 3y^2 + 8x^2 + 4$

a) Términos: $2x^2$, $2x$, $-6$. Grado: 2

b) Términos: $-2y^3$, $3y$, $-3$. Grado: 3

c) Términos: $5x^3y$, $3y^2$, $8x^2$, $-2x$, 4. Grado: 4

**8.** **Calcula el polinomio opuesto.**

$P(x, y) = 3x^3y - 4x^3y - 5x + 4x - 1$

$P(x, y) = -x^3y - x - 1$ $-P(x, y) = x^3y + x + 1$

**9.** **Escribe un polinomio reducido de dos variables, de grado 6 y con término independiente $-7$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x, y) = 2x^4y^2 - 5x^5 + 4x^2y - y - 7$

**10.** **Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^4 - x^3 + 8x - 3$ para $x = -5$, $x = -1$ y $x = 0$.**

$P(-5) = 2 \cdot (-5)^4 - (-5)^3 + 8 \cdot (-5) - 3 = 1\,250 + 125 - 40 - 3 = 1\,332$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 8 \cdot (-1) - 3 = 2 + 1 - 8 - 3 = -8$

$P(0) = -3$

**11.** **Calcula $P(2, 1)$, $P(0, -2)$, $P(-1, 3)$ y $P(-1, -4)$ en los siguientes polinomios.**

a) $P(x, y) = x^2y - 7xy + xy^2 + 4x^2 - y^3$

b) $P(x, y) = -2x^3 + y^2 - xy + 4x + 1$

a) $P(2, 1) = 2^2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 1^3 = 4 - 14 + 2 + 16 - 1 = 7$

$P(0, -2) = 0 - 0 + 0 + 0 - (-2)^3 = 8$

$P(-1, 3) = (-1)^2 \cdot 3 - 7 \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3^2 + 4 \cdot (-1)^2 - 3^3 = 3 + 21 - 9 + 4 - 27 = -8$

$P(-1, -4) = (-1)^2 \cdot (-4) - 7 \cdot (-1) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-1)^2 - (-4)^3 = -4 - 28 - 16 + 4 + 64 = 20$

b) $P(2, 1) = -2 \cdot 2^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 = -16 + 1 - 2 + 8 + 1 = -8$

$P(0, -2) = 0 + (-2)^2 - 0 + 0 + 1 = 5$

$P(-1, 3) = -2 \cdot (-1)^3 + 3^2 - (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 1 = 2 + 9 + 3 - 4 + 1 = 11$

$P(-1, -4) = -2 \cdot (-1)^3 + (-4)^2 - (-1) \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) + 1 = 2 + 16 - 4 - 4 + 1 = 11$

**12.** **Comprueba para cuáles de los siguientes polinomios $x = 2$ es una raíz del polinomio.**

a) $P(x) = x^2 + x - 2$

b) $Q(x) = x^2 - x - 2$

c) $R(x) = x^2 - 5x + 6$

d) $S(x) = x^2 - 3x + 4$

a) $P(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \rightarrow$ No es raíz.

b) $Q(2) = \ = 2^2 - 2 - 2 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

c) $R(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

d) $S(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 \rightarrow$ No es raíz.

**13.** **Calcula el valor de $a$ para que el polinomio $P(x) = x^2 - ax - 2$ tenga una raíz en $x = 2$.**

$P(2) = 0 \rightarrow P(2) = 2^2 - a \cdot 2 - 2 = 0 \rightarrow -2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$

**14.** **Calcula la suma, la resta y el producto de cada par de polinomios.**

a) $P(x) = 4x^2 - x$ y $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

b) $P(x) = -5x^2 + 9x - 3$ y $Q(x) = -x^2 + 6x$

a) $P(x) + Q(x) = 4x^2 - x + x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = x^3 - x^2 + x + 8$

$P(x) - Q(x) = 4x^2 - x - (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = \ 4x^2 - x - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 = -x^3 + 9x^2 - 3x - 8$

$P(x) \cdot Q(x) = (4x^2 - x) \cdot (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = 4x^5 - 21x^4 + 13x^3 + 30x^2 - 8x$

b) $P(x) + Q(x) = -5x^2 + 9x - 3 + (-x^2 + 6x) = -6x^2 + 15x - 3$

$P(x) - Q(x) = -5x^2 + 9x - 3 - (-x^2 + 6x) = -4x^2 + 3x - 3$

$P(x) \cdot Q(x) = (-5x^2 + 9x - 3) \cdot (-x^2 + 6x) = 5x^4 - 39x^3 + 57x^2 - 18x$

**15.** **Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = x + 4$, calcula $-P(x) + Q(x) - 3 \cdot Q(x)$.**

$-P(x) + Q(x) - 3 \cdot Q(x) = -(2x^2 - 3x + 1) + x + 4 - 3 \cdot (x + 4) = -2x^2 + 3x - 1 + x + 4 - 3x - 12 = -2x^2 + x - 9$

**16.** **Averigua el valor de $a$ para que $(3x - 4) \cdot (x - a) = 3x^2 + 2x - 8$.**

$(3x - 4) \cdot (x - a) = 3x^2 + 2x - 8$

$$3x^2 - (3a + 4)x + 4a = 3x^2 + 2x - 8 \to \begin{cases} -3ax - 4x = 2x \to -3a - 4 = 2 \to a = -2 \\ 4a = -8 \to a = -2 \end{cases}$$

**17.** **Realiza las siguientes divisiones.**

a) $(x^4 + x^3 + 8x^2 - x) : x$

b) $(x^4 + 6x^3 - 5x^2) : x^2$

c) $(4x^5 - x^4 + 2x^3) : x^3$

d) $(6x^4 + 8x^3 - 4x^2) : 2x^2$

e) $(12x^6 + 9x^5 - 15x^4 - 6x^3) : 3x^3$

f) $(4x^8 + 40x^6 + 18x^4 - 16x^2) : 4x^2$

a) $x^3 + x^2 + 8x - 1$  c) $4x^2 - x + 2$  e) $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

b) $x^2 + 6x - 5$  d) $3x^2 + 4x - 2$  f) $x^6 + 10x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 4$

**18.** **Indica el cociente y el resto de estas divisiones.**

a) $(x^3 - x^2) : (x + 1)$

b) $(7x^4 + 2x^3) : (x - 2)$

c) $(6x^3 - 2x^2 - 8) : (2x + 3)$

d) $(-x^3 + 3x^2 - 8x - 11) : (x - 3)$

e) $(9x^4 - 15x^3 + x - 7) : (3x - 2)$

f) $(10x^6 + 8x^4 - 6x^2) : (x + 4)$

a)

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 & x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} & x^2 - 2x + 2 \\ \quad -2x^2 & \\ \quad \underline{2x^2 + 2x} & \\ \qquad 2x & \\ \qquad \underline{-2x - 2} & \\ \qquad\quad -2 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 7x^4 + 2x^3 & x - 2 \\ \underline{-7x^4 + 14x^3} & 7x^3 + 16x^2 + 32x + 64 \\ \quad 16x^3 & \\ \quad \underline{-16x^3 + 32x^2} & \\ \qquad 32x^2 & \\ \qquad \underline{-32x^2 + 64x} & \\ \qquad\quad 64x & \\ \qquad\quad \underline{-64x + 128} & \\ \qquad\qquad 128 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rl}
6x^3-2x^2 \qquad -8 & \underline{|2x+3\qquad} \\
\underline{-6x^3-9x^2 \qquad\quad} & 3x^2-\dfrac{11}{2}x+\dfrac{33}{4} \\
-11x^2 \qquad -8 & \\
\underline{11x^2+\dfrac{33}{2}x \quad} & \\
\dfrac{33}{2}x-8 & \\
\underline{-\dfrac{33}{2}x-\dfrac{99}{4}} & \\
-\dfrac{131}{4} &
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rl}
-x^3+3x^2-8x-11 & \underline{|x-3\quad} \\
\underline{x^3-3x^2 \qquad\qquad} & -x^2-8 \\
-8x-11 & \\
\underline{8x-24} & \\
-35 &
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rl}
9x^4-15x^3 \qquad +x-7 & \underline{|3x-2\qquad\qquad} \\
\underline{-9x^4+6x^3 \qquad\qquad\quad} & 3x^3-3x^2-2x-1 \\
-9x^3 \qquad +x-7 & \\
\underline{9x^3-6x^2 \qquad\quad} & \\
-6x^2+x-7 & \\
\underline{6x^2-4x \quad} & \\
-3x-7 & \\
\underline{3x-2} & \\
-9 &
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rl}
10x^6 \qquad +8x^4 \qquad\qquad -6x^2 & \underline{|x+4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{-10x^6-40x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad} & 10x^5-40x^4+168x^3-672x^2+2\,682x-10\,728 \\
-40x^5+8x^4 \qquad\qquad -6x^2 & \\
\underline{40x^5+160x^4 \qquad\qquad\quad} & \\
168x^4 \qquad\quad -6x^2 & \\
\underline{-168x^4-672x^3 \quad} & \\
-672x^3 \quad -6x^2 & \\
\underline{672x^3+2\,688x^2} & \\
2\,682x^2 & \\
\underline{-2\,682x^2-10\,728x} & \\
-10\,728x & \\
\underline{10\,728x+42\,912} & \\
42\,912 &
\end{array}$$

**19.** **Efectúa las divisiones.**

a) $(x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x - 1) : (x^2 + 1)$

b) $(x^5 + 7x^4 + 2x^3 - x^2 + 3) : (x^2 - 3)$

c) $(x^4 + x^3 + 8x^2 - x) : (x^2 - 1)$

a)

$$\begin{array}{l|l}
x^4+3x^3+4x^2-x-1 & x^2+1 \\
\underline{-x^4 \qquad -x^2} & x^2+3x+3 \\
\quad 3x^3+3x^2-x-1 & \\
\quad \underline{-3x^3 \qquad -3x} & \\
\qquad 3x^2-4x-1 & \\
\qquad \underline{-3x^2 \qquad -3} & \\
\qquad\quad -4x-4 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l}
x^5+7x^4+2x^3-x^2 \qquad +3 & x^2-3 \\
\underline{-x^5 \qquad +3x^3} & x^3+7x^2+5x+20 \\
\quad 7x^4+5x^3-x^2 \qquad +3 & \\
\quad \underline{-7x^4 \qquad +21x^2} & \\
\qquad 5x^3+20x^2 \qquad +3 & \\
\qquad \underline{-5x^3 \qquad +15x} & \\
\qquad\quad 20x^2+15x+3 & \\
\qquad\quad \underline{-20x^2 \qquad +60} & \\
\qquad\qquad 15x+63 &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l|l}
x^4+x^3+8x^2-x & x^2-1 \\
\underline{-x^4 \qquad +x^2} & x^2+x+9 \\
\quad x^3+9x^2-x & \\
\quad \underline{-x^3 \qquad +x} & \\
\qquad 9x^2 & \\
\qquad \underline{-9x^2 \qquad +9} & \\
\qquad\qquad 9 &
\end{array}$$

**20.** **Halla el dividendo de estas divisiones, siendo $Q(x)$ el divisor, $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto.**

a) $Q(x) = x - 3$ $\quad C(x) = x^2 + 2$ $\quad R(x) = -7$

b) $Q(x) = 2x + 1$ $\quad C(x) = 3x^2 - x + 2$ $\quad R(x) = 1$

c) $Q(x) = -x - 2$ $\quad C(x) = -2x^2 + 4$ $\quad R(x) = -1$

d) $Q(x) = x^2 - x$ $\quad C(x) = 4x + 2$ $\quad R(x) = 2x + 1$

$D(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

a) $D(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 2) + (-7) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 - 7 = x^3 - 3x^2 + 2x - 13$

b) $D(x) = (2x + 1) \cdot (3x^2 - x + 2) + 1 = 6x^3 - 2x^2 + 4x + 3x^2 - x + 2 + 1 = 6x^3 + x^2 + 3x + 3$

c) $D(x) = (-x - 2) \cdot (-2x^2 + 4) + (-1) = 2x^3 - 4x + 4x^2 - 8 - 1 = 2x^3 + 4x^2 - 4x - 9$

d) $D(x) = (x^2 - x) \cdot (4x + 2) + 2x + 1 = 4x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1 = 4x^3 - 2x^2 + 1$

**21. Calcula el resto de esta división sin realizarla.**

Dividendo → $P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3$

Divisor → $Q(x) = x^3 + x - 1$

Cociente → $C(x) = x^2$

$R(x) = P(x) - Q(x) \cdot C(x)$

$R(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3 - (x^3 + x - 1) \cdot x^2 = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3 - x^5 - x^3 + x^2 = 5x - 3$

**22. Realiza estas divisiones utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 8x - 11) : (x - 1)$

c) $(x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1) : (x - 2)$

d) $(x^4 - x^3 + x^2 + x + 5) : (x - 2)$

e) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2) : (x - 3)$

f) $(x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 4) : (x + 2)$

g) $(x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x + 2) : (x + 1)$

a)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 5 & \boxed{4} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 6x + 5$
Resto: 4

b)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 3 & -8 & -11 \\ 1 & & 1 & 0 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & -5 & \boxed{-16} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 3x - 5$
Resto: –16

c)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & & 2 & 6 & 16 & 30 & 66 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 15 & 33 & \boxed{67} \end{array}$$

Cociente: $x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15x + 33$
Resto: 67

d)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & & 2 & 2 & 6 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 7 & \boxed{19} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + x^2 + 3x + 7$
Resto: 19

e)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & & 3 & 15 & 54 & 144 \\ \hline & 1 & 5 & 18 & 48 & \boxed{146} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 18x + 48$
Resto: 146

f)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 6 & -14 & 22 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 7 & -11 & \boxed{18} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 11$
Resto: 18

g)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 7 & -11 & 8 & -7 \\ \hline & 1 & -7 & 11 & -8 & 7 & \boxed{-5} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 7$
Resto: –5

**23. Indica el cociente y el resto de estas divisiones.**

a) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 2) : (x + 1)$

b) $(x^4 - 9x^2 - 6x + 7) : (x - 2)$

c) $(3x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 8) : (x + 3)$

a)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 | 2 |
| –1 | | –1 | 1 | 0 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | –1 | 0 | 0 | 1 | –1 | 0 | 0 | $\boxed{2}$ |

Cociente: $x^7 - x^6 + x^3 - x^2$
Resto: 2

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | –9 | –6 | 7 |
| 2 | | 2 | 4 | –10 | –32 |
| | 1 | 2 | –5 | –16 | $\boxed{-25}$ |

Cociente: $x^3 + 2x^2 - 5x - 16$
Resto: –25

c)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | –1 | 1 | –1 | 0 | 8 |
| –3 | | –9 | 30 | –93 | 282 | 846 |
| | 3 | –10 | 31 | –94 | 282 | $\boxed{854}$ |

Cociente: $3x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 94x + 282$
Resto: 854

**24. Completa en tu cuaderno e indica para cada división el dividendo, el divisor, el cociente y el resto.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | –3 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| ? | | | | | | |
| | | 0 | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | –1 | 3 | ? |
| –2 | | | | | |
| | | | | | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | –3 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| 3 | | 3 | 0 | 9 | 42 | 132 |
| | 1 | 0 | 3 | 14 | 44 | $\boxed{133}$ |

Dividendo: $x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
Divisor: $x - 3$
Cociente: $x^4 + 3x^2 + 14x + 44$
Resto: 133

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | –1 | 3 | 10 |
| –2 | | –2 | 0 | 2 | –10 |
| | 1 | 0 | –1 | 5 | $\boxed{0}$ |

Dividendo: $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 10$
Divisor: $x + 2$
Cociente: $x^3 - x + 5$
Resto: 0

**25.** **Extrae factor común.**

a) $x^4 + x^3$
b) $x^4 - 5x^2$
c) $2x^3 + 6x$
d) $3x^2 - 12x^4$
e) $6x^6 - x^3$
f) $2x^4 + 3x^3 - x^2$
g) $10x^4 + 4x^3 - 8x^2$
h) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49x$
i) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49x + 35$
j) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49$

a) $x^3 \cdot (x + 1)$

b) $x^2 \cdot (x^2 - 5)$

c) $2x \cdot (x^2 + 3)$

d) $3x^2 \cdot (1 - 4x^2)$

e) $x^3 \cdot (6x^3 - 1)$

f) $x^2 \cdot (2x^2 + 3x - 1)$

g) $2x^2 \cdot (5x^2 + 2x - 4)$

h) $7x \cdot (x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

i) $7 \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5)$

j) $7 \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7)$

**26.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $x^6 - 2x^3 = \square \cdot (x^3 - \square)$
b) $\square + 3x^3 - \square = 3x \cdot (3x^3 + \square - 2)$
c) $25x^3y^2 + \square - \square = 5xy \cdot (\square + 2x - 1)$

a) $x^6 - 2x^3 = x^3 \cdot (x^3 - 2)$

b) $9x^4 + 3x^3 - 6x = 3x \cdot (3x^3 + x^2 - 2)$

c) $25x^3y^2 + 10x^2y - 5xy = 5xy \cdot (5x^2y + 2x - 1)$

**27.** **Calcula $a$, $b$ y $c$ para que el factor común de $x^4y^5z^3 + x^ay^bz^c$ sea $x^3y^2z$.**

$a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

$x^4y^5z^3 + x^3y^2z^1 = x^3y^2z^1 \cdot (xy^3z^2 + 1)$

**28.** **Aplica las igualdades notables.**

a) $(3x + 2)^2$
b) $(2x - 3y)^2$
c) $(x + 4y) \cdot (x - 4y)$

a) $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

b) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

c) $(x + 4y) \cdot (x - 4y) = x^2 - 16y^2$

**29.** **Calcula $(3x^2 + 4)^2 + (x - 2)^2$.**

$(3x^2 + 4)^2 + (x - 2)^2 = 9x^4 + 16 + 24x^2 + x^2 + 4 - 4x = 9x^4 + 25x^2 - 4x + 20$

**30.** **Completa en tu cuaderno.**

a) $(x + \square)^2 = \square + 4y^2 + \square$

b) $(\square - y^2)^2 = x^4 + \square - \square$

a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy$

b) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

**31.** **Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o de una resta, cuando sea posible.**

a) $9x^2 + 30xy + 25y^2$
b) $16y^2 - 24xy + 9x$
c) $49x^2 + 28xy + 4y^2$
d) $16 - 24x + 9x^2$
e) $x^4 + y^2 + x^2y$
f) $x^4 + y^2 - 2x^2y$

a) $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x + 5y)^2$

b) No es posible.

c) $49x^2 + 28xy + 4y^2 = (7x + 2y)^2$

d) $16 - 24x + 9x^2 = (4 - 3x)^2$

e) No es posible.

f) $x^4 + y^2 - 2x^2y = (x^2 - y)^2$

**32.** **Expresa estos polinomios como el producto de una suma por una diferencia, cuando sea posible.**

a) $9x^2 - 25y^2$
b) $16y^2 - 9x^4$
c) $49x^2 - 4y^2$
d) $16 - 9x^2$
e) $x^4 - y^2$
f) $64x^4 - 81y^6$

a) $(3x + 5y) \cdot (3x - 5y)$

b) $(4y + 3x^2) \cdot (4y - 3x^2)$

c) $(7x + 2y) \cdot (7x - 2y)$

d) $(4 + 3x) \cdot (4 - 3x)$

e) $(x^2 + y) \cdot (x^2 - y)$

f) $(8x^2 + 9y^3) \cdot (8x^2 - 9y^3)$

**33.** **Comprueba si $(x + 2)$ es divisor de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -2 & & -2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Resto: 0. Sí es divisor.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Resto: 0. Sí es divisor.

**34.** **Calcula $a$ para que $(x - 1)$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$.**

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 3 & a \\ 1 & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & \boxed{4+a} \end{array}$$

$4 + a = 0 \rightarrow a = -4$

**35.** **Calcula los divisores de $P(x) = x(x + 1)(x - 5)$.**

Los divisores son: $x$, $x + 1$, $x - 5$, $x \cdot (x + 1)$, $x \cdot (x - 5)$, $(x + 1) \cdot (x - 5)$, $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$

**36.** **Factoriza estos polinomios.**

a) $A(x) = x^2 + 3x + 2$
b) $B(x) = x^2 - x - 2$
c) $C(x) = x^2 + x - 2$
d) $D(x) = x^2 - 3x + 2$
e) $E(x) = x^2 + 2x + 1$
f) $F(x) = x^2 + 8x + 16$
g) $G(x) = x^2 - 6x + 9$
h) $H(x) = x^2 - 4x$

a) $A(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 2)$
b) $B(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$
c) $C(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$
d) $D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1)$
e) $E(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
f) $F(x) = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
g) $G(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
h) $H(x) = x^2 - 4x = x \cdot (x - 4)$

**37.** **Encuentra la descomposición factorial de estos polinomios.**

a) $K(x) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18$
b) $L(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
c) $M(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $N(x) = x^4 - x$
e) $O(x) = x^5 - 25x^3$
f) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$
g) $Q(x) = (5x^3 + 4x)^3$

a) $K(x) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2) \cdot (x + 3)^2$
b) $L(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x - 3) \cdot (x + 3)^2$
c) $M(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
d) $N(x) = x^4 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
e) $O(x) = x^5 - 25x^3 = x^3 \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)$
f) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 \cdot (x - 3)^2$
g) $Q(x) = (5x^3 + 4x)^3 = x^3 \cdot (5x^2 + 4)^3$

## ACTIVIDADES FINALES

**38. Indica la parte literal, el coeficiente, las variables y el grado de estos monomios. Después, escribe el monomio opuesto a ellos y dos monomios semejantes.**

a) $5x^3y$ c) $3y^4z^4$

b) $-8xy^2z^3$ d) $\frac{4}{3}x^2$

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| **Parte literal** | $x^3y$ | $xy^2z^3$ | $y^4z^4$ | $x^2$ |
| **Cociente** | 5 | $-8$ | 3 | $\frac{4}{3}$ |
| **Variables** | $x, y$ | $x, y, z$ | $y, z$ | $x$ |
| **Grado** | 4 | 6 | 8 | 2 |
| **Opuesto** | $-5x^3y$ | $-8xy^2z^3$ | $-y^4z^4$ | $-\frac{4}{3}x^2$ |
| **Semejantes** | $3x^3y, -2x^3y$ | $2xy^2z^3, xy^2z^3$ | $-10y^4z^4, 7y^4z^4$ | $3x^2, 4x^2$ |

**39. Escribe un monomio con cada una de estas características.**

a) La parte literal tiene tres variables y su grado es 5.

b) El coeficiente es 3 y la parte literal es $xy^4$.

c) El coeficiente es $-6$, tiene una única variable y su grado es 3.

d) Es semejante a $4x^3y$ y su coeficiente es un número fraccionario.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $8x^2yz^2$

b) $3xy^4$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $-6x^3$

d) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\frac{3}{5}x^3y$

**40. ¿Es posible escribir un monomio de grado 7 semejante a $7x^4y^2$? ¿Y un monomio opuesto a $2x^2z$ con parte literal $xyz$?**

- No, por ser de grado 6.
- No, porque las partes literales deben coincidir.

**41. Realiza las siguientes operaciones entre monomios.**

a) $4xyz - 2xy + 6xyz - 9xy$

b) $7x^2 - xy^3 + 6xy + 3xy^3 - 8x^2$

c) $-5x^2z + 2xz - xz + 9xz^2 + x^2z$

d) $4y^2z^3 + 7z^2y^2 - 8yz^3 + y^2z^3$

e) $-2xyz^2 + 11xz - 5xy^2z + 3xzy^2$

f) $6x^3y^2 + 4xz^2 - 2x^3y^2 + xz - 5xz^2$

a) $10xyz - 11xy$

b) $-x^2 + 6xy + 2xy^3$

c) $xz - 4x^2z + 9xz^2$

d) $5y^2z^3 + 7z^2y^2 - 8yz^3$

e) $11xz - 2xyz^2 - 2xy^2z$

f) $xz + 4x^3y^2 - xz^2$

**42.** **Resuelve estas operaciones entre monomios.**

a) $2x \cdot 5x^2 \cdot 3y$
b) $-3xy^3 \cdot 6x^3y \cdot y^4$
c) $7yz^2 \cdot (-4xz) \cdot x^5$
d) $8xyz^3 \cdot 7x^3z^2 \cdot (-6xy^2z)$
e) $5x^2y^4 \cdot 9xz^3 \cdot (-x^3yz^4)$
f) $-9y^3z \cdot 3x^4z \cdot (-7xyz^2)$

a) $30x^3y$ b) $-18x^4y^8$ c) $-28x^6yz^3$ d) $-336x^5y^3z^6$ e) $-45x^6y^5z^7$ f) $189x^5y^4z^4$

**43.** **Efectúa las siguientes divisiones.**

a) $20x^5y^4 : 5x^2$
b) $-32x^6y^3 : 6x^3y$
c) $27xyz^2 : (-3xz)$
d) $63x^3yz^3 : 7x^3z^2$
e) $(-5x^3y^2z^4) : (-xy^2z)$
f) $45x^2y^4z^5 : 9xz^3$
g) $-9xy^3z^4 : (-3xyz^2)$
h) $35y^2z^4 : (-5yz^4)$

a) $4x^3y^4$ c) $-9yz$ e) $5x^2z^3$ g) $3y^2z^2$

b) $\frac{-16}{3}x^3y^2$ d) $9yz$ f) $5xy^4z^2$ h) $-7y$

**44.** **Obtén el resultado de estas operaciones con monomios.**

a) $7x^2 + 4x \cdot (x + y) - 5y^2$
b) $2x^2y + (5x - y) \cdot xy - 8xy^2$
c) $-6xy + 3y \cdot (x - x^2) + 4x^2y$
d) $2x \cdot (3x + 5y) - 7x^2 - 8xy$
e) $(2x^2 - x) \cdot 3y + 5xy - x^2y$

a) $7x^2 + 4x^2 + 4xy - 5y^2 = 11x^2 + 4xy - 5y^2$

b) $2x^2y + 5x^2y - xy^2 - 8xy^2 = 7x^2y - 9xy^2$

c) $-6xy + 3xy - 3x^2y + 4x^2y = -3xy + x^2y$

d) $6x^2 + 10xy - 7x^2 - 8xy = -x^2 + 2xy$

e) $6x^2y - 3xy + 5xy - x^2y = 5x^2y + 2xy$

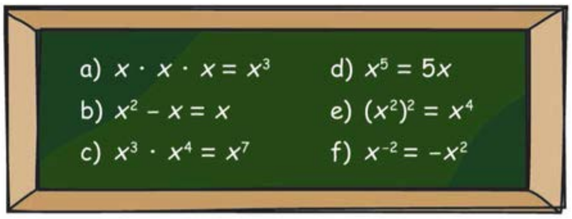
**45.** **Calcula y escribe el resultado de estas operaciones.**

a) $5x \cdot (x - y^2 - z) - 3y \cdot (x + y - z^2) + x \cdot (x - y)$
b) $(-x + y - z^2) \cdot (-2yz) - (x + y - z) \cdot xy + (x^2 - z^3)$

a) $5x^2 - 5xy^2 - 5xz - 3xy - 3y^2 + 3yz^2 + x^2 - xy = 6x^2 - 5xy^2 - 5xz - 4xy - 3y^2 + 3yz^2$

b) $2xyz - 2y^2z + 2yz^3 - x^2y - xy^2 + xyz + x^2 - z^3 = 3xyz - 2y^2z + 2yz^3 - x^2y - xy^2 + x^2 - z^3$

**46.** **Razona si estas igualdades son verdaderas o falsas.**




a) Verdadera: $x \cdot x \cdot x = x^{1+1+1} = x^3$.

b) Falsa, pues no podemos restar potencias con la misma base y distinto exponente.

c) Verdadera: $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.

d) Falsa, ya que una potencia consiste en multiplicar un determinado número de veces la base, y no sumarla.

e) Verdadera: $(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$.

f) Falsa: $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

**47.** **Determina el grado, las variables y el término independiente de estos polinomios.**

a) $P(x) = -x^3 + x^2 - 7x - 2$

b) $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$

c) $P(x, y) = -2x^5 - x^2y^2 + 5x^3 - 1 + 3x^3 + 3$

d) $Q(x, y) = x^2 + 4x^3 - x - 9 + 4x^4y^3$

e) $P(x, y, z) = 7x^2yz - 3xy^2z + 8xyz^2$

| | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Grado** | 3 | 2 | 5 | 7 | 4 |
| **Variables** | $x$ | $x$ | $x, y$ | $x, y$ | $x, y, z$ |
| **Término independiente** | $-2$ | 6 | $-1 + 3 = 2$ | $-9$ | 0 |

**48.** **Escribe, en cada caso, dos polinomios que cumplan las siguientes características.**

a) Es de grado 3, tiene tres términos y sus variables son $x$ e $y$.

b) Es de grado 5, su término independiente es $-1$, el coeficiente del término de mayor grado es 2 y sus variables son $x$, $y$, $z$.

c) Tiene dos términos con coeficientes 4 y $-3$, una única variable, $x$, y es de grado 4.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x,y) = 5x + 3y^2 - 2x^2y$ $\quad Q(x,y) = 2xy - y^3 + 1$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x,y,z) = 6xy + 8xz^2 + 2x^3yz - 1$ $\quad Q(x,y,z) = 2xy^4 - y^3z - 1$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x) = -3x^4 + 4$ $\quad Q(x) = 4x^4 - 3x^2$

**49. Razona si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.**

a) Todos los polinomios tienen término independiente.

b) Los coeficientes de un polinomio son siempre números naturales.

c) Solo existe un polinomio opuesto a un polinomio.

d) No existe ningún polinomio con tres términos que sea de grado 1.

e) Los polinomios con tres términos tienen siempre grado 3.

a) Falso. Por ejemplo: $x^3 + 3x^2 - 7x$ .

b) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ .

c) Verdadero.

d) Verdadero. Con tres términos, el grado es al menos 2.

e) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^7 + x^2 + x$

**50. Calcula el valor numérico de cada polinomio para los valores indicados.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.

b) $B(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3$, para $x = 2$.

c) $C(x) = 4x^5 - x^2 + 3$, para $x = -1$.

d) $D(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.

e) $E(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.

f) $F(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$, para $x = 0$.

g) $G(x) = -14$, para $x = -2$.

a) $A(1) = 1 + 1 = 2$

b) $B(2) = 8 + 3 = 11$

c) $C(-1) = -4 - 1 + 3 = -2$

d) $D(1) = -9 + 7 + 5 = 3$

e) $E(-2) = -8 + 4 - 2 + 2 = -4$

f) $F(0) = -2$

g) $G(-2) = -14$

**51. Halla los valores numéricos para el polinomio:**

$$P(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 3xy + 5x - 6y + 9$$

a) $P(0, 0)$

b) $P(1, 1)$

c) $P(-1, 1)$

d) $P(1, -1)$

e) $P(1, 2)$

f) $P(2, 1)$

a) $P(0, 0) = 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 9 = 9$

b) $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 9 = 8$

c) $P(-1, 1) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 9 = 2$

d) $P(1, -1) = 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 9 = 22$

e) $P(1, 2) = 2 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 = 4$

f) $P(2, 1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 9 = 17$

**52. ¿Puede un polinomio $P(x)$ tener distintos valores numéricos para un mismo valor de la variable $x$? ¿Y el mismo valor numérico para distintos valores de la variable? Justifica tu respuesta.**

Un polinomio $P(x)$ no puede tener distintos valores numéricos para un mismo valor de $x$, pero sí puede tener el mismo valor numérico para distintos valores de la variable $x$. Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - x + 1 \qquad P(0) = 1 \qquad P(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

**53. Dados los polinomios:**

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad Q(x) = 1 - x^2$$

**calcula.**

a) $[P(-1) + Q(3)] \cdot (-5)$ b) $\frac{4}{3} - 4 \cdot P(0)$

a) $\left.\begin{array}{l} P(-1) = 1 + 4 + 3 = 8 \\ Q(3) = 1 - 9 = -8 \end{array}\right\} \rightarrow [P(-1) + Q(3)] \cdot (-5) = 0$

b) $P(0) = 3 \rightarrow \frac{4}{3} - 4 \cdot P(0) = \frac{4}{3} - 12 = \frac{-32}{3}$

**55. Calcula el valor de $k$ en cada polinomio, sabiendo que $P(1) = 6$.**

a) $P(x) = kx^7 + x^3 + 3x + 1$

b) $P(x) = kx^4 + kx^3 + 4$

c) $P(x) = 9x^5 + kx^2 + kx - k$

d) $P(x) = kx^6 - kx^3 + kx + k$

e) $P(x) = k$

a) $k + 1 + 3 + 1 = 6 \rightarrow k = 1$

b) $k + k + 4 = 6 \rightarrow k = 1$

c) $9 + k + k - k = 6 \rightarrow k = -3$

d) $k - k + k + k = 6 \rightarrow k = 3$

e) $k = 6$

**56. Calcula el valor de $a$ en el polinomio $P(x, y) = x^4y + 4x - ay$ si su valor numérico en $x = 1$ e $y = 0$ es 4.**

$4 = P(1, 0) = 0 + 4 + 0 \rightarrow$ Se cumple para todo valor de $a$.

**57. Determina cuáles de los siguientes polinomios tienen como raíz $x = -1$.**

a) $P(x) = x^2 + 5x + 4$

b) $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $R(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

d) $S(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

e) $T(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5$

f) $U(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$

a) $P(-1) = 1 - 5 + 4 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

b) $Q(-1) = 1 - 2 - 3 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

c) $R(-1) = -1 + 7 - 14 + 8 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

d) $S(-1) = 1 - 10 + 9 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

e) $T(-1) = 1 + 3 + 4 - 3 - 5 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

f) $U(-1) = -2 + 9 - 12 + 5 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

**58.** **Determina el valor de $m$ para que $x = -2$ sea raíz de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - mx^2 + mx - 10$
b) $P(x) = x^3 - mx^2 - 2mx + 8$
c) $P(x) = x^3 + mx^2 + 11x + m$
d) $P(x) = x^4 - (m + 1)x^2 + m$

a) $P(-2) = 0 = -8 - 4m - 2m - 10 \rightarrow 18 = -6m \rightarrow m = -3$

b) $P(-2) = 0 = -8 - 4m + 4m + 8 \rightarrow 8 = 8 \rightarrow$ Se cumple para cualquier valor de *m*.

c) $P(-2) = 0 = -8 + 4m - 22 + m \rightarrow 30 = 5m \rightarrow m = 6$

d) $P(-2) = 0 = 16 - 4m - 4 + m \rightarrow 12 = 3m \rightarrow m = 4$

**59.** **Dados los polinomios:**

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$

$R(x) = 3x^2 - x + 1$

$S(x) = 2x + 3$

**calcula.**

a) $P(x) + Q(x) + R(x) + S(x)$
b) $P(x) - R(x) + S(x) - Q(x)$
c) $[P(x) + Q(x)] - [R(x) + Q(x)]$
d) $[P(x) - Q(x)] - [R(x) - Q(x)]$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 3x - 3$

b) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) = 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 13x - 3$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= (2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) - (3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= [2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5] - [-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2] =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

**60.** **Halla cuál es el polinomio $Q(x)$ que hay que sumar a $P(x) = x^2 + 2x - 1$ para obtener como resultado $R(x)$.**

a) $R(x) = x - 1$
b) $R(x) = 2x^2 - x - 6$
c) $R(x) = 5x^2 - x + 1$
d) $R(x) = -7x^2 - 3x$
e) $R(x) = x^3 - x$
f) $R(x) = x^3 - x^2$

$$Q(x) = R(x) - P(x)$$

a) $Q(x) = -x^2 - x$
b) $Q(x) = x^2 - 3x - 5$
c) $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$
d) $Q(x) = -8x^2 - 5x + 1$
e) $Q(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$
f) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

**61.** **Dados los polinomios:**

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$

$R(x) = 3x^2 - x + 1 \qquad S(x) = 2x + 3$

**calcula.**

a) $[P(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ c) $[P(x) + Q(x) + R(x)] \cdot S(x)$

b) $[R(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ d) $[P(x) + Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

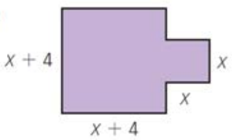
a) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 - 6x^5 + 13x^3 - x^2 + 20x - 15$

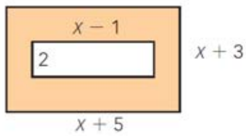
b) $[(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x + 3) =$
$= -6x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 22x + 6$

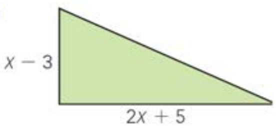
c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) +$
$+ (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 5x - 6) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 27x^3 + 8x^2 - 27x - 18$

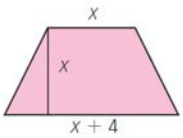
d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) -$
$- (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 - 3x - 8) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 6x^2 - 25x - 24$

**62.** **Expresa el área de cada figura mediante un polinomio. Simplifica su expresión.**

a)



c)



b)



d)



a) $(x + 4)^2 + x^2 = 2x^2 + 8x + 16$

b) $\dfrac{(x - 3) \cdot (2x + 5)}{2} = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{15}{2}$

c) $(x + 5) \cdot (x + 3) - 2(x - 1) = x^2 + 8x + 15 - 2x + 2 = x^2 + 6x + 17$

d) $\dfrac{x + (x + 4)}{2} \cdot x = x^2 + 2x$

**63.** **Divide.**

a) $(4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 7) : (x - 1)$

b) $(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) : (x + 1)$

c) $(7x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x)$

a)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +x & +7 & x-1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3+7x^2+2x+3 \\ \cline{1-5}
 & 7x^3 & -5x^2 & +x & +7 & \\
 & -7x^3 & +7x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & +x & +7 & \\
 & & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +7 & \\
 & & & -3x & +3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 10 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & x+1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & -4x^3 & & & & 4x^3-6x^2+9x-11 \\ \cline{1-5}
 & -6x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & \\
 & 6x^3 & +6x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 9x^2 & -2x & +5 & \\
 & & -9x^2 & -9x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -11x & +5 & \\
 & & & 11x & +11 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 16 &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
7x^5 & +4x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & x^2+x \\ \cline{7-7}
-7x^5 & -7x^4 & & & & & 7x^3-3x^2+6x-11 \\ \cline{1-6}
 & -3x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & \\
 & 3x^4 & +3x^3 & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & \\
 & & -6x^3 & -6x^2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -11x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & 11x^2 & +11x & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 13x & -1 &
\end{array}$$

**64. Utiliza la regla de Ruffini para realizar estas divisiones.**

a) $(x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x + 2)$

b) $(x^3 - 8x + 12) : (x + 1)$

c) $(x^4 - x^3 + 4x^2 - 3) : (x - 2)$

d) $(2x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 1)$

e) $(x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 5) : (x + 1)$

f) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 1 & 3 & -5 \\
-2 & & -2 & 10 & -22 & 38 \\ \hline
 & 1 & -5 & 11 & -19 & \boxed{33}
\end{array}$$

Cociente: $x^3 - 5x^2 + 11x - 19$ Resto: 33

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -8 & 12 \\
-1 & & -1 & 1 & 7 \\ \hline
 & 1 & -1 & -7 & \boxed{19}
\end{array}$$

Cociente: $x^2 - x - 7$ Resto: 19

c)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & & 2 & 2 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 12 & \boxed{21} \end{array}$$

Cociente: $x^3+x^2+6x+12$ Resto: 21

d)

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \boxed{5} \end{array}$$

Cociente: $2x^2+3x$ Resto: 5

e)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & & -1 & -3 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & -3 & \boxed{-2} \end{array}$$

Cociente: $x^3+3x^2+2x-3$ Resto: $-2$

f)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{array}$$

Cociente: $x^2$ Resto: 7

**65. Halla el valor de $m$ para que la división $P(x) : A(x)$ tenga resto 0.**

a) $\begin{cases} P(x) = x^2 + mx + 3 \\ A(x) = x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} P(x) = x^3 + 4x^2 + mx - 6 \\ A(x) = x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + 2m \\ A(x) = x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} P(x) = x^4 + mx^2 - m - 1 \\ A(x) = x + 2 \end{cases}$

a)

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & m & 3 \\ -3 & & -3 & -3m+9 \\ \hline & 1 & m-3 & 0 \end{array}$$

$-3m+9+3=0 \rightarrow m=4$

b)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & m & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & m+5 \\ \hline & 1 & 5 & m+5 & 0 \end{array}$$

$m+5-6=0 \rightarrow m=1$

c)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & m & 2m \\ 2 & & 2 & 8 & 2m+16 \\ \hline & 1 & 4 & m+8 & 0 \end{array}$$

$4m+16=0 \rightarrow m=-4$

d)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & m & 0 & -m-1 \\ -2 & & -2 & 4 & -2m-8 & 4m+16 \\ \hline & 1 & -2 & m+4 & -2m-8 & 0 \end{array}$$

$-m-1+4m+16=0 \rightarrow m=-5$

**66.** **Calcula el valor de *a* para que se cumplan las igualdades.**

a) $(ax^2 + 2) \cdot (x - a) = -3x^3 - 9x^2 + 2x + 6$

b) $(x^2 + ax - 4) \cdot (-3a + 1) = 4x^2 - 4x - 3$

c) $(x^4 - x^2 + a) \cdot \left(x + \dfrac{a}{2}\right) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2$

a) $ax^3 - a^2x^2 + 2x - 2a = -3x^3 - 9x^2 + 2x + 6 \rightarrow a = -3$

b) $-3ax^2 + x^2 - 3a^2x + ax + 12a - 4 = 4x^2 - 4x - 3 \rightarrow \begin{cases} -3a + 1 = 4 \rightarrow a = -1 \\ -3a^2 + a = -4 \rightarrow a = -1 \text{ o } a = \dfrac{4}{3} \\ 12a - 4 = -3 \rightarrow a = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

Por tanto no existe ningún valor de a para el que se cumple la igualdad.

c) $x^5 + \dfrac{a}{2}x^4 - x^3 - \dfrac{a}{2}x^2 + ax + \dfrac{a^2}{2} = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \\ a = 2 \\ \dfrac{a^2}{2} = 2 \rightarrow a = 2 \text{ o } a = -2 \end{cases}$

Por tanto, el valor de *a* que hace que se cumpla la igualdad es $a = 2$.

**67.** **Extrae factor común.**

a) $3x^2yz + 6xz - 9yz$

b) $15xy + 18xy^3z - 9xy$

c) $2x^2 - 8xy^2 + 12xy$

d) $4y^3z + 20yz - 26yz^2$

e) $-2x^4y^3z + 2x^3yz - 6x^5y$

f) $8x^2yz^4 + 16x^2yz^3 - 18x^3y^2z^2$

a) $3z \cdot (x^2y + 2x - 3y)$

b) $3xy \cdot (5 + 6y^2z - 3)$

c) $2x \cdot (x - 4y^2 + 6y)$

d) $2yz \cdot (2y^2 + 10 - 13z)$

e) $-2x^3y \cdot (xy^2z - z + 3x^2)$

f) $2x^2yz^2 \cdot (4z^2 + 8z - 9xy)$

**68.** **Extrae factor común a estos polinomios.**

a) $-15x^2y^5z^3 + 9xy^2 - 12x^3y^2 + 21x^4y^3$

b) $32a^2b^3 + 18a^4b^2 - 28a^3b^3 - 10a^2b^2c$

c) $-30x^4z^3 + 20x^2yz^3 - 40x^4z^2 + 50x^3y^2z^2$

d) $-11y^5z^3 + 33xy^2z - 66y^2z^3 + 44x^4y^3z^4$

a) $3xy^2 \cdot (-5xy^3z^3 + 3 - 4x^2 + 7x^3y)$

b) $2a^2b^2 \cdot (16b + 9a^2 - 14ab - 5c)$

c) $10x^2z^2 \cdot (-3x^2z + 2yz - 4x^2 + 5xy^2)$

d) $11y^2z \cdot (-y^3z^2 + 3x - 6z^2 + 4x^4yz^3)$

**69.** **Desarrolla estos cuadrados.**

a) $(6x + 5)^2$

b) $(-3x + 2)^2$

c) $(2x - 7)^2$

d) $(-3 - 2x)^2$

e) $(3 - x)^2$

f) $(-5 + 2x)^2$

a) $36x^2+60x+25$

b) $9x^2-12x+4$

c) $4x^2-28x+49$

d) $4x^2+12x+9$

e) $x^2-6x+9$

f) $4x^2-20x+25$

**70.** **Calcula.**

a) $(2x-3)\cdot(2x+3)$

b) $(4x+5)\cdot(4x-5)$

c) $(x^2-x)\cdot(x^2+x)$

d) $(2x-9)\cdot(2x+9)$

a) $4x^2-9$

b) $16x^2-25$

c) $x^4-x^2$

d) $4x^2-81$

**71.** **Completa las siguientes igualdades en tu cuaderno.**

a) $(2x+3)^2=\square+12x+\square$

b) $(5-3x)^2=25-\square+\square x^2$

c) $(\square+\square)^2=x^4+2x^3+x^2$

a) $(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$

b) $(5-3x)^2=5^2-2\cdot 5\cdot 3x+(3x)^2=25-30x+9x^2$

c) $x^4+2x^3+x^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot x+x^2=(x^2+x)^2$

**72.** **Completa en tu cuaderno las siguientes igualdades.**

a) $(3x^2y+\square)^2=\square+12x^2y^4+\square$

b) $(\square-\square)^2=4x+9y-\square$

c) $(\square-\square)^2=x^4-2x^3+x^2$

a) $\left(3x^2y+2y^3\right)^2=9x^4y^2+12x^2y^4+4y^6$

b) $\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)^2=4x+9y-12\sqrt{xy}$

c) $\left(x^2-x\right)^2=x^4-2x^3+x^2$

**73.** **Realiza.**

a) $(2y-5)^2+(3+y)^2$

b) $(3x+2)^2-(4-x)^2$

c) $(y^2-5y)^2+(1-3y)^2$

d) $(x-4x^2)^2-(7x^2+2)^2$

a) $4y^2-20y+25+9+6y+y^2=5y^2-14y+34$

b) $9x^2+12x+4-\left(16-8x+x^2\right)=8x^2+20x-12$

c) $y^4-10y^3+25y^2+1-6y+9y^2=y^4-10y^3+34y^2-6y+1$

d) $x^2-8x^3+16x^4-\left(49x^4+28x^2+4\right)=-33x^4-8x^3-27x^2-4$

**74. Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.**

a) $9x^2 + 18x + 9$ c) $x^2 + 16x + 64$

b) $16x^2 - 16x + 4$ d) $4x^2 + 4x + 1$

a) $3^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3^2 = (3x + 3)^2$

b) $4^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2^2 = (4x - 2)^2$

c) $1^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot 8x + 8^2 = (x + 8)^2$

d) $2^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1x + 1^2 = (2x + 1)^2$

**75. Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.**

a) $x^2 + 4xy + 4y^2$ c) $x^2 - 2x^2y + x^2y^2$

b) $9x^2 - 6x^3 + x^4$ d) $x^6 - 2x^3y + y^2$

a) $(x+2y)^2$ b) $(3x-x^2)^2$ c) $(x-xy)^2$ d) $(x^3-y)^2$

**76. Indica cuáles de estos polinomios son divisores del polinomio $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.**

a) $x + 2$ c) $x + 1$ e) $x - 3$

b) $2x + 1$ d) $x - 2$ f) $x + 3$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -2 & & -2 & 4 & 12 & -24 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & 12 & \boxed{-15} \end{array}$$

$x + 2$ no es divisor de $P(x)$.

b) $2x + 1$ no es divisor de $P(x)$ porque el resto de la división es $\frac{105}{16}$.

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -1 & & -1 & 1 & 9 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x + 1$ es divisor de $P(x)$.

d) $x - 2$ no es divisor de $P(x)$ ya que 2 no es divisor de 9.

e)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ 3 & & 3 & 9 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x - 3$ es divisor de $P(x)$.

f)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -3 & & -3 & 9 & 3 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x + 3$ es divisor de $P(x)$.

**77. Comprueba si $x+3$ es divisor de estos polinomios y, en caso de que lo sea, encuentra el cociente.**

a) $P(x)=x^3+3x^2-5x-15$
b) $P(x)=x^3-3x^2+2x-6$
c) $P(x)=x^3+4x^2-3x-18$
d) $P(x)=x^3-7x+6$

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | −5 | −15 |
| −3 | | −3 | 0 | 15 |
| | 1 | 0 | −5 | $\boxed{0}$ |

Es divisor. El cociente es $x^2-5$.

b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −3 | 2 | −6 |
| −3 | | −3 | 18 | −60 |
| | 1 | −6 | 20 | $\boxed{-66}$ |

No es divisor.

c)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | −3 | −18 |
| −3 | | −3 | −3 | 18 |
| | 1 | 1 | −6 | $\boxed{0}$ |

Es divisor. El cociente es $x^2+x-6$.

d)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −7 | 6 |
| −3 | | −3 | 9 | −6 |
| | 1 | −3 | 2 | $\boxed{0}$ |

Es divisor. El cociente es $x^2-3x+2$.

**78. Sin hacer cálculos, razona cuáles de estos polinomios tienen como divisor a $x$ y cuáles a $x^2$.**

a) $P(x)=x^3+x^2+6x$
b) $P(x)=2x^4+5x^3-9x^2$
c) $P(x)=(x^3-x^2)\cdot(x+4)$
d) $P(x)=2x^2-x^3$
e) $P(x)=(x-x^2)\cdot(x-5)$
f) $P(x)=(x^2-x)^3$

Los polinomios en los que se puede sacar factor común a $x^2$ tienen como divisores a $x$ y a $x^2$. En los que solo se puede sacar factor común $x$ tienen como divisor solo a $x$.

Tienen como divisor a $x$ y $x^2$ los polinomios de los apartados b), c), d) y f). El resto de polinomios solo tienen como divisor a $x$.

**79. Factoriza estos polinomios.**

a) $x^2-3x$
b) $x^4+5x^3$
c) $x-x^2$
d) $x-x^3$
e) $x^4-4x^2$
f) $x^2-25x$
g) $x^3-2x^2+x$
h) $x^3-6x^2+9x$

a) $x\cdot(x-3)$

b) $x^3\cdot(x+5)$

c) $x\cdot(1-x)$

d) $x\cdot(1-x)\cdot(x+1)$

e) $x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

f) $x\cdot(x-25)$

g) $x\cdot(x-1)^2$

h) $x\cdot(x-3)^2$

**80. Encuentra tres divisores de estos polinomios y escribe su descomposición factorial.**

a) $x^3-x^2-10x-8$
b) $x^3+2x^2-5x-6$
c) $x^3+3x^2-6x-8$
d) $x^3-2x^2-5x+6$
e) $x^3-7x^2+14x-8$
f) $x^3+3x^2+3x+1$

a) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-4)\rightarrow$ Divisores: $x+1$, $x+2$ y $x-4$

b) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\rightarrow$ Divisores: $x+1$, $x-2$ y $x+3$

c) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+4)\rightarrow$ Divisores: $x+1$, $x-2$ y $x+4$

d) $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) \to$ Divisores: $x-1$, $x+2$ y $x-3$

e) $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4) \to$ Divisores: $x-1$, $x-2$ y $x-4$

f) $(x+1)^3 \to$ Divisores: $x+1$, $(x+1)^2$ y $(x+1)^3$

**81. Obtén la descomposición factorial.**

a) $x^4 - 13x^2 + 36$
b) $x^4 - 20x^2 + 64$
c) $x^4 - 25x^2 + 144$
d) $x^4 - 17x^2 + 16$
e) $x^4 - 11x^2 + 18$
f) $x^4 - 29x^2 + 100$

a) $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

b) $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+4)\cdot(x-4)$

c) $(x+3)\cdot(x-3)\cdot(x+4)\cdot(x-4)$

d) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-4)$

e) $\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

f) $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

**82. Termina la descomposición factorial.**

a) $(x - x^2) \cdot (x^2 - 25)$
b) $(x^3 - x^2) \cdot (x^2 - 1)$
c) $(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 64)$
d) $(4x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x + 4)$
e) $(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)$
f) $(3x - 9x^2) \cdot (3x^2 + 6x)$

a) $x\cdot(1-x)\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

b) $x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)$

c) $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+8)\cdot(x-8)$

d) $2x\cdot(x+2)^2\cdot(2x-1)$

e) $(x-1)^2\cdot(x-2)^2$

f) $9x^2\cdot(x+2)\cdot(1-3x)$

**83. Descompón factorialmente.**

a) $-2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$
b) $-8x^3 - 6x^2 + 29x - 15$
c) $24x^3 + 46x^2 - 6x - 4$
d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$
e) $6x^3 + 5x^2 - 6x$
f) $9x^3 - 3x^2 - 2x$

a) $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(3-2x)$

b) $(x-1)\cdot(3-4x)\cdot(5+2x)$

c) $2\cdot(x+2)\cdot(3x-1)\cdot(4x+1)$

d) $(x+1)^2\cdot(2x+5)$

e) $x\cdot(2x+3)\cdot(3x-2)$

f) $x\cdot(3x+1)\cdot(3x-2)$

## DEBES SABER HACER

**1. Realiza las operaciones e indica el grado del monomio resultante.**

a) $2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + 8x^2 - x^2$

b) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3 + 12xy^3$

c) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$

d) $(6ac^3) \cdot (-2a^2c^3) \cdot (-3ac) \cdot (-4a^3c^2)$

e) $(21x^2y^3) : (7xy^2)$

a) $5x^2 \rightarrow$ Grado 2

b) $19xy^3 \rightarrow$ Grado 4

c) $11xz \rightarrow$ Grado 2

d) $-144a^7c^9 \rightarrow$ Grado 16

e) $3xy \rightarrow$ Grado 2

**2. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ para:**

a) $x = 0$

b) $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = -2$

d) $x = -3$

a) $P(0) = -4$  b) $P\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-167}{16}$  c) $P(-2) = -104$  d) $P(-3) = -307$

**3. Calcula el resultado de las operaciones.**

a) $(2 - 3x) \cdot (2 + 3x) - (4 + 5x) \cdot (4 - 5x)$

b) $(x^2 - 1)^2 + (6x^2 + 1) \cdot (1 - 6x^2)$

a) $4 - 9x^2 - (16 - 25x^2) = 16x^2 - 12$

b) $x^4 - 2x^2 + 1 + 1 - 36x^4 = -35x^4 - 2x^2 + 2$

**4. Halla el cociente y el resto de estas divisiones.**

a) $(x^4 + x^3 - 8x^2 + 4) : (x - 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 6x - 15) : (x + 1)$

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | –8 | 0 | 4 |
| 1 | | 1 | 2 | –6 | –6 |
| | 1 | 2 | –6 | –6 | $\boxed{-2}$ |

El cociente es $x^3 + 2x^2 - 6x - 6$ y el resto –2.

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | –5 | 3 | –6 | –15 |
| –1 | | –1 | 6 | –9 | 15 |
| | 1 | –6 | 9 | –15 | $\boxed{0}$ |

El cociente es $x^3 - 6x^2 + 9x - 15$ y el resto 0.

**5. Factoriza estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

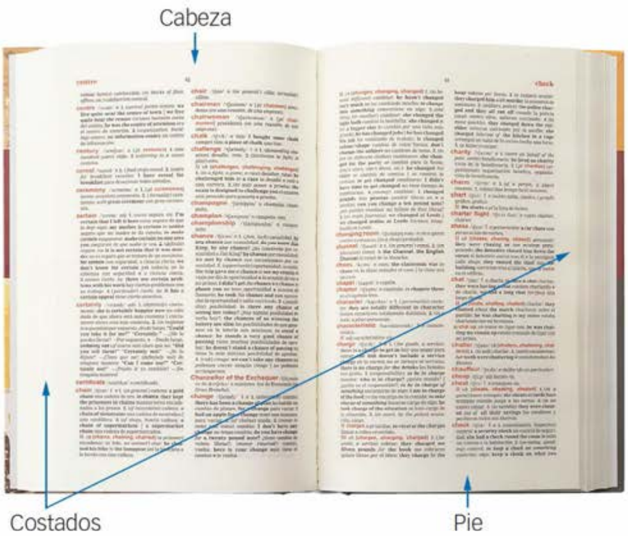
b) $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

c) $R(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2$

a) $P(x) = (x-1) \cdot (x+1)^2$  b) $Q(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$  c) $R(x) = 4x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**84.** **El término *formato de un libro* se refiere a la forma y dimensiones de este.**




**Hoy en día, el formato de un libro se basa en intentar transmitir al lector una sensación de equilibrio en la página. Una de las proporciones más utilizadas es que el largo sea $\frac{3}{5}$ del ancho.**

**Además, para dar una mayor sensación de claridad se dejan los márgenes, espacios en blanco que quedan a cada uno de los cuatro lados de la hoja impresa.**

**Este es el formato que ha diseñado una editorial para la nueva colección que lanzará al mercado.**

- **Largo: $\frac{3}{5}$ del ancho.**
- **Cabeza y pie: iguales, y tienen que ser $\frac{1}{10}$ del alto de la hoja.**
- **Costados: el derecho será de 2 cm, el izquierdo tiene que ser el doble que el derecho.**

**Si llamamos *x* al ancho de la hoja:**

a) ¿Cuál es la expresión del área de una página de este formato?

b) ¿Cuál es la expresión del área de la zona impresa?

Ancho: $x$ Largo: $\frac{3}{5}x$

Margen superior e inferior: $\frac{1}{10}\cdot x = \frac{x}{10}$ Margen derecho: 2 cm Margen izquierdo: 4 cm

a) Área = base × altura = $x\cdot\frac{3}{5}x = \frac{3}{5}x^2$

b) Área = base × altura = $\left(\frac{3}{5}x-2-4\right)\cdot\left(x-2\cdot\frac{x}{10}\right)=\left(\frac{3}{5}x-6\right)\cdot\frac{8x}{10}=\frac{12}{25}x^2-\frac{24}{5}x$

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**85. Escribe, en cada caso, un polinomio de grado 5 que tenga estos polinomios como divisores.**

a) $P(x, y) = x - y$ $\quad Q(x, y) = 2x + 5y$

b) $P(x, y) = xy + 2$ $\quad Q(x, y) = x$ $\quad R(x, y) = 2 - 7x^2$

c) $P(x, y) = 3y - x$ $\quad Q(x, y) = x^3 - 5$

d) $P(x, y) = x$ $\quad Q(x, y) = x^2y$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $S(x,y) = (x-y)^4 \cdot (2x+5y)$ $\qquad S(x,y) = (x-y)^3 \cdot (2x+5y)^2$

$S(x,y) = (x-y) \cdot (2x+5y)^4$ $\qquad S(x,y) = (x-y)^2 \cdot (2x+5y)^3$

b) $S(x,y) = x(xy+2) \cdot (2-7x^2)$

c) $S(x,y) = (3y-x)^2 \cdot (x^3-5)$

d) $S(x,y) = x^2 \cdot x^2y$

**86. Estas sumas son cuadrados perfectos.**

$1^2 + 2^2 + 1^2 \cdot 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 2^2 \cdot 3^2 = 7^2$

...

$9^2 + 10^2 + 9^2 \cdot 10^2 = 91^2$

**A la vista de los resultados, ¿sabrías determinar a qué cuadrado es igual la siguiente expresión?**

$\boldsymbol{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}$

$$x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = x^2 + (x+1)^2 + [x(x+1)]^2 = 2x^2 + 2x + 1 + [x(x+1)]^2 =$$

$$= 2x(x+1) + 1 + [x(x+1)]^2 = [x(x+1)]^2 + 2x(x+1) + 1 = [x(x+1)+1]^2$$

**87. Calcula la descomposición factorial y las raíces de estos polinomios.**

a) $P(-x)$, siendo $P(x) = x^2 - x$

b) $P(-x^2)$, siendo $P(x) = (x+9)^2$

c) $P(x^2) - P(x^3)$, siendo $P(x) = x^2$

d) $P(x + x^2)$, siendo $P(x) = 4x - 3$

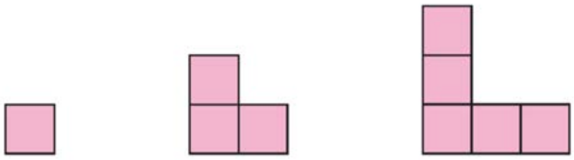
a) $P(-x) = x^2 + x = x \cdot (x+1) \rightarrow \text{Raíces}: 0 \text{ y } -1$

b) $P(-x^2) = (-x^2+9)^2 = (3+x)^2 \cdot (3-x)^2 \rightarrow \text{Raíces}: 3 \text{ y } -3$

c) $P(x^2) - P(x^3) = (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^4 - x^6 = x^4(1+x) \cdot (1-x) \rightarrow \text{Raíces}: 0, 1 \text{ y } -1$

d) $P(x+x^2) = 4(x+x^2) - 3 = 4x^2 + 4x - 3 = (2x-1) \cdot (2x+3) \rightarrow \text{Raíces}: \frac{1}{2} \text{ y } \frac{-3}{2}$

**88.** **Observa esta secuencia.**




a) ¿Cuántos cuadrados necesitas para construir el nivel 4?

b) ¿Cuántos utilizarás para construir hasta el nivel 4?

c) ¿Cuántos para construir el nivel $n$? ¿Y hasta el nivel $n$?

a) 7 cuadrados.

b) $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ cuadrados.

c) Es una progresión aritmética de diferencia 2. Para construir el nivel $n$ se necesitan $2n - 1$ cuadrados.

Para construir hasta el nivel $n$ se necesitan $\frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2} = \frac{n+2n^2-n}{2} = n^2$ cuadrados.

## PRUEBAS PISA

**89.** **Una revista utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos modelos y concede un premio de *Mejor Coche del Año* al coche con mejor puntuación. Se están evaluando cinco coches nuevos.**

| Coche | Seguridad ($S$) | Ahorro de combustible ($C$) | Diseño exterior ($D$) | Habitáculo interior ($H$) |
|---|---|---|---|---|
| *Ca* | 3 | 1 | 2 | 3 |
| *M2* | 2 | 2 | 2 | 2 |
| *Sp* | 3 | 1 | 3 | 2 |
| *N1* | 1 | 3 | 3 | 3 |
| *XK* | 3 | 2 | 3 | 2 |

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:

3 = Excelente; 2 = Bueno; 1 = Aceptable

- Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

$$\text{Puntuación total} = (3 \times S) + C + D + H$$

- El fabricante del coche *Ca* pensó que la regla para obtener la puntuación no era justa. Escribe una regla, con las cuatro variables multiplicadas por números positivos, para que el *Ca* sea el ganador.

*(Prueba PISA 2003)*

La regla $4S + 3C + D + 5H$ da como ganador a *Ca*.

**90.** **Como consecuencia del calentamiento global, algunos glaciares se están derritiendo. Doce años después de que el hielo haya desaparecido, empiezan a crecer líquenes en las rocas.**

**Los líquenes crecen, más o menos, en forma de círculo. La relación entre el diámetro de este círculo y la edad del liquen se puede expresar aproximadamente mediante la fórmula:**

$d = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12}$ **para** $t \geq 12$

**siendo** $d$ **el diámetro del liquen en milímetros, y** $t$ **el número de años desde que el hielo ha desaparecido.**

- Calcular el diámetro que tendrá un liquen 16 años después de que el hielo haya desaparecido.
- Ana midió el diámetro de un liquen y obtuvo 35 milímetros. ¿Cuántos años han transcurrido desde que el hielo desapareció de este lugar?

*(Prueba PISA 2012)*

- $d = 7{,}0 \cdot \sqrt{16 - 12} = 14$ mm
- $d = 35 \text{ mm} = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12} \rightarrow t = 37$ Es decir, han transcurrido 37 años.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

6

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Traduce estas expresiones a lenguaje algebraico y determina su valor numérico para $x = 2$.**

a) Un número más su triple.

b) El doble de un número menos su cuadrado.

c) La suma de un número y su mitad.

a) $x + 3x \rightarrow$ Valor numérico: 8 b) $2x - x^2 \rightarrow$ Valor numérico: 0 c) $x + \frac{x}{2} \rightarrow$ Valor numérico: 3

**2. Escribe dos igualdades algebraicas que se cumplan para todos los valores de las letras y otras dos que solo se cumplan para un valor.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Se cumplen para todos los valores: $3x - x = 2\cdot(x+1) - 2$ $2x + 7 = 4x + 3 - 2x + 4$

Se cumplen para un único valor: $3x + 1 = 2x - 3$ $x^2 + 2 = 4x - 2$

## VIDA COTIDIANA

**En 1885 el ingeniero alemán Karl Benz diseña el primer automóvil, el Motorwagen, impulsado por un motor de combustión interna. La velocidad que podía alcanzar era de 13 km/h.**

**Tuvieron que pasar algunos años para aumentar esa velocidad: en 1908 el Ford T lograba alcanzar entre 62 y 74 km/h.**

- **Con los coches actuales, en una autopista podemos recorrer 120 km en una hora. ¿Cuánto tardaría el Motorwagen en recorrer esa distancia?**

$\frac{120}{13} = 9{,}23$ h = 9 horas, 13 minutos y 51 segundos

## RESUELVE EL RETO

**En una balanza que está en equilibrio tengo, en un platillo, un ladrillo, y en el otro, medio ladrillo y una pesa de 3/4 de kg. ¿Cuánto pesa el ladrillo?**

$x$ = peso en kg del ladrillo

$x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \rightarrow x = 1{,}5$ kg

**Hay 7 niños, cada uno lleva una bicicleta o un triciclo. Si en total hay 19 ruedas, ¿cuántas bicicletas tienen?**

$x$ bicicletas $\rightarrow 7 - x$ triciclos

$19 = 2x + 3(7 - x) \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Tienen 2 bicicletas y 5 triciclos.

**Calcula el valor del siguiente producto:**

**$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - y)(x - z)$**

El valor del producto es 0, pues uno de los factores del producto es $x - x$

## ACTIVIDADES

**1. Identifica las igualdades que son ecuaciones. Determina sus miembros, términos, incógnitas y grado.**

a) $3x - 2 = 6x + 5$
b) $x - 2x + 1 = -x + 1$
c) $25 - 4 = 21$
d) $x = 3x - 2$
e) $x^2 - 3 = y + 7x$
f) $2x + 50 = 2(x + 25)$

Las expresiones de los apartados a), d) y e) son ecuaciones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) Miembros: $3x - 2$, $6x + 5$ | Términos: $3x$, $-2$, $6x$, $5$; | Incógnitas: $x$ | Grado: 1 |
| d) Miembros: $x$, $3x - 2$ | Términos: $x$, $3x$, $-2$ | Incógnitas: $x$ | Grado: 1 |
| e) Miembros: $x^2 - 3$, $y + 7x$ | Términos: $x^2$, $-3$, $y$, $7x$ | Incógnitas: $x$, $y$ | Grado: 2 |

**2. Comprueba si se cumplen estas igualdades para $x = -1$ e identifica si son ecuaciones.**

a) $8x + 4 = 3x - 2$
b) $x - 3x + 1 = -2x + 1$

a) $-8 + 4 \neq -3 - 2$ No se cumple. Sí es ecuación.

b) $-1 + 3 + 1 = 2 + 1$ Sí se cumple. No es ecuación.

**3. Completa en tu cuaderno la expresión $-2 \cdot (x + 4) = 4x - (\square)$ para que sea:**

a) Una identidad.
b) Una ecuación.

a) $-2 \cdot (x + 4) = 4x - (6x + 8)$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $-2 \cdot (x + 4) = 4x - (x + 1)$

**4. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución $x = 2$.**

a) $x^2 - x = 2$
b) $(-x + 7) \cdot (-3) = 7x - 2$
c) $6x - 1 = 4x + 3$
d) $4x^2 + 12 - 10x = x^2 + 2x$

Tienen como solución $x = 2$ los apartados a), c) y d).

**5. Escribe, en cada caso, una ecuación que tenga por solución estos valores.**

a) $x = -1$
b) $x = 3$
c) $x = 0$

a) $4x - 5 = 9x$

b) $9 - x = x + 3$

c) $x - 7x + 2 = 5x + 2$

**6. Escribe tres ecuaciones equivalentes a estas ecuaciones.**

a) $4x - 2 = 6$
b) $x + 3 = 4x$

| | | |
|---|---|---|
| a) $2x - 1 = 3$ | $5x - x + 2 = 2 \cdot (x + 3)$ | $7 - 3x = x - 1$ |
| b) $6 - 3x = 2x + 1$ | $5x - 7 = x - 3$ | $4x + 5 = 3(x + 2)$ |

**7. Resuelve estas ecuaciones utilizando la transposición de términos.**

a) $4x - 2 = x + 4$
b) $-x + 7 = 5 + x$
c) $1 - 3x = 5 - 2x$
d) $6 + 4x = -x - 4$
e) $8 - 5x = 2 - 2x$
f) $9x + 1 = x + 9$

a) $4x - x = 4 + 2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$
b) $-x - x = 5 - 7 \rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = 1$
c) $-3x + 2x = 5 - 1 \rightarrow -x = 4 \rightarrow x = -4$
d) $4x + x = -4 - 6 \rightarrow 5x = -10 \rightarrow x = -2$
e) $-5x + 2x = 2 - 8 \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2$
f) $9x - x = 9 - 1 \rightarrow 8x = 8 \rightarrow x = 1$

**8. Completa en tu cuaderno esta ecuación para que su solución sea $x = 5$.**

$$5 \cdot (x + 3) = 4 \cdot (x + \square)$$

$$5 \cdot (5+3) = 4 \cdot (5 + \square) \rightarrow 40 = 20 + 4 \cdot \square \rightarrow 20 = 4 \cdot \square \rightarrow \square = 5$$

**9. ¿Qué pasa cuando en los dos miembros de una ecuación aparece un mismo término?**

Se puede eliminar restando dicho término a los dos miembros de la ecuación.

**10. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.**

a) $\dfrac{7x - 4}{3} = \dfrac{5x - 2}{2}$

b) $\dfrac{1 - 3x}{7} = \dfrac{x - 1}{3}$

c) $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{x - 5}{2}$

d) $\dfrac{x + 4}{3} = \dfrac{x + 1}{4}$

e) $\dfrac{2x + 3}{3} = \dfrac{x - 1}{4}$

a) $6 \cdot \dfrac{7x-4}{3} = 6 \cdot \dfrac{5x-2}{2} \rightarrow 2 \cdot (7x-4) = 3 \cdot (5x-2) \rightarrow 14x - 8 = 15x - 6 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$

b) $21 \cdot \dfrac{1-3x}{7} = 21 \cdot \dfrac{x-1}{3} \rightarrow 3 \cdot (1-3x) = 7 \cdot (x-1) \rightarrow 3 - 9x = 7x - 7 \rightarrow x = \dfrac{5}{8}$

c) $4 \cdot \dfrac{3x}{4} = 4 \cdot \dfrac{x-5}{2} \rightarrow 3x = 2 \cdot (x-5) \rightarrow 3x = 2x - 10 \rightarrow x = -10$

d) $12 \cdot \dfrac{x+4}{3} = 12 \cdot \dfrac{x+1}{4} \rightarrow 4 \cdot (x+4) = 3 \cdot (x+1) \rightarrow 4x + 16 = 3x + 3 \rightarrow x = -13$

e) $12 \cdot \dfrac{2x+3}{3} = 12 \cdot \dfrac{x-1}{4} \rightarrow 4 \cdot (2x+3) = 3 \cdot (x-1) \rightarrow 8x + 12 = 3x - 3 \rightarrow x = -3$

**11. Encuentra la solución de estas ecuaciones.**

a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x + 1}{2} = x - 3$

b) $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{x}{2} + 2$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 15$

d) $2 - \dfrac{x}{4} = -3$

a) $6\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{x+1}{2}\right)=6\cdot(x-3)\rightarrow 2x+3x+3=6x-18\rightarrow x=21$

b) $4\cdot\left(\frac{3x}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)\rightarrow 3x=2x+8\rightarrow x=8$

c) $6\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)=6\cdot 15\rightarrow 3x+2x=90\rightarrow x=18$

d) $4\cdot\left(2-\frac{x}{4}\right)=4\cdot(-3)\rightarrow 8-x=-12\rightarrow x=20$

**12. Halla la solución de cada una de estas ecuaciones.**

a) $3x+4-\frac{x+3}{2}=0$

b) $\frac{5x}{9}-\frac{x+6}{3}=\frac{x}{6}$

c) $\frac{4x}{5}-\frac{x+5}{6}=x-10$

d) $\frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}=-1$

a) $2\cdot\left(3x+4-\frac{x+3}{2}\right)=0\rightarrow 6x+8-x-3=0\rightarrow x=-1$

b) $18\cdot\left(\frac{5x}{9}-\frac{x+6}{3}\right)=18\cdot\frac{x}{6}\rightarrow 10x-6x-36=3x\rightarrow x=36$

c) $30\cdot\left(\frac{4x}{5}-\frac{x+5}{6}\right)=30\cdot(x-10)\rightarrow 24x-5x-25=30x-300\rightarrow x=25$

d) $6\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}\right)=6\cdot(-1)\rightarrow 2x-3x+3=-6\rightarrow x=9$

**13. Calcula el valor de *x* para que se cumpla la igualdad.**

a) $\frac{3\cdot(x+2)}{5}+\frac{4x}{3}=\frac{-11}{15}$

b) $\frac{4x+1}{7}=\frac{x}{2}-\frac{2\cdot(x-3)}{7}$

c) $\frac{16}{9}=\frac{4\cdot(x+1)}{3}+\frac{2\cdot(1-x)}{9}$

d) $\frac{3\cdot(x-3)}{2}-\frac{4\cdot(x+1)}{3}=-4$

e) $\frac{2\cdot(x-2)}{3}-\frac{7}{5}=\frac{x+3}{4}+\frac{3-2x}{5}$

a) $15\cdot\left(\frac{3x+6}{5}+\frac{4x}{3}\right)=15\cdot\left(\frac{-11}{15}\right)\rightarrow 9x+18+20x=-11\rightarrow x=-1$

b) $14\cdot\left(\frac{4x+1}{7}\right)=14\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{2x-6}{7}\right)\rightarrow 8x+2=7x-4x+12\rightarrow x=2$

c) $9\cdot\left(\frac{16}{9}\right)=9\cdot\left(\frac{4x+4}{3}+\frac{2-2x}{9}\right)\rightarrow 16=12x+12+2-2x\rightarrow x=\frac{1}{5}$

d) $6\cdot\left(\frac{3x-9}{2}-\frac{4x+4}{3}\right)=6\cdot(-4)\rightarrow 9x-27-8x-8=-24\rightarrow x=11$

e) $60\cdot\left(\frac{2x-4}{3}-\frac{7}{5}\right)=60\cdot\left(\frac{x+3}{4}+\frac{3-2x}{5}\right)\rightarrow 40x-80-84=15x+45+36-24x\rightarrow x=5$

**14. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado, aplicando la fórmula general.**

a) $x^2-7x+12=0$

b) $x^2-9x+18=0$

c) $2x^2-8x+8=0$

d) $x^2-9x+14=0$

e) $x^2-6x+8=0$

f) $3x^2+12x+9=0$

a) $x=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\dfrac{7\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=3\end{cases}$

b) $x=\dfrac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\dfrac{9\pm3}{2}=\begin{cases}x_1=6\\x_2=3\end{cases}$

c) $x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-64}}{4}=\dfrac{8\pm0}{4}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=2\end{cases}$

d) $x=\dfrac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot14}}{2\cdot1}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=\dfrac{9\pm5}{2}=\begin{cases}x_1=7\\x_2=2\end{cases}$

e) $x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm2}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=2\end{cases}$

f) $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot3\cdot9}}{2\cdot3}=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-108}}{6}=\dfrac{-12\pm6}{6}=\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-3\end{cases}$

**15. Escribe y resuelve la ecuación de segundo grado que tiene estos coeficientes.**

a) $a=3 \quad b=-2 \quad c=-1$

b) $a=-8 \quad b=26 \quad c=-15$

c) $a=-2 \quad b=-2 \quad c=12$

a) $3x^2-2x-1=0\rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\dfrac{2\pm4}{6}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$

b) $-8x^2+26x-15=0\rightarrow x=\dfrac{-26\pm\sqrt{26^2-4\cdot(-8)\cdot(-15)}}{2\cdot(-8)}=\dfrac{-26\pm14}{-16}=\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{4}\\x_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

c) $-2x^2-2x+12=0\rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-2)\cdot12}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{2\pm10}{-4}=\begin{cases}x_1=-3\\x_2=2\end{cases}$

**16. ¿Cuántas soluciones tendrá una ecuación en la que $b^2-4ac<0$? ¿Y si $b^2-4ac\geq0$?**

$b^2-4ac<0$ $\rightarrow$ No hay soluciones reales.

$b^2-4ac\geq0$ $\rightarrow$ Existirá una solución real cuando $b^2-4ac=0$ o dos soluciones cuando $b^2-4ac>0$.

**17. Calcula el discriminante de estas ecuaciones y averigua su número de soluciones. Después, resuelve las ecuaciones y comprueba que el número de soluciones coincide.**

a) $2x^2+3x-2=0$

b) $x^2-x+3=0$

c) $-x^2+3x+1=0$

d) $x^2+4x-2=0$

e) $-2x^2+6x+1=0$

f) $4x^2+5x-3=0$

g) $x^2-6x+4=0$

h) $-x^2+2x-1=0$

a) $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0$ $\longrightarrow$ No hay soluciones reales: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$

c) $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 13 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{-2} \\ x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{-2} \end{cases}$

d) $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 24 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{6} \\ x_2 = -2 - \sqrt{6} \end{cases}$

e) $\Delta = 36 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 44 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{44}}{-4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{11}}{2} \\ x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{11}}{2} \end{cases}$

f) $\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 73 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{73}}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{73}}{8} \\ x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{73}}{8} \end{cases}$

g) $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 20 > 0$ $\longrightarrow$ Dos soluciones: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{5} \\ x_2 = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$

h) $\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$ $\longrightarrow$ Una solución: $x = \dfrac{-2 \pm 0}{-2} = x = 1$

**18. Encuentra el valor de $c$ en la ecuación:**

$$-x^2 + x + c = 0$$

**para que sus dos soluciones sean:**

a) $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

b) $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$

a) $-(-1)^2 + (-1) + c = 0 \rightarrow c = 2$

b) $-(-3)^2 + (-3) + c = 0 \rightarrow c = 12$

**19. Encuentra una ecuación de segundo grado con $a = 1$ que tenga:**

a) $b = 3$ y dos soluciones.

b) $c = 2$ y dos soluciones.

c) $b = 4$ y una solución única.

d) $c = 9$ y una solución única.

e) $b = -3$ y no tenga solución.

f) $c = 1$ y no tenga solución.

a) $x^2 + 3x + c = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4c > 0 \rightarrow c < \dfrac{9}{4}$ $\longrightarrow$ La ecuación podría ser $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $x^2 + bx + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 8 > 0 \rightarrow b^2 > 8$ $\longrightarrow$ La ecuación podría ser $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + 4x + c = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4ac = 0 \rightarrow c = 4$ $\longrightarrow$ La ecuación es $x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^2 + bx + 9 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot 9 = 0 \rightarrow b = \pm 6$ $\longrightarrow$ Las dos posibles ecuaciones son $x^2 \pm 6x + 9 = 0$

e) $x^2 - 3x + c = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4c < 0 \rightarrow c > \frac{9}{4}$ → La ecuación podría ser $x^2 - 3x + 5 = 0$

f) $x^2 + bx + 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4 < 0 \rightarrow b^2 < 4$ → La ecuación podría ser $x^2 + x + 1 = 0$

**20. Considera las ecuaciones de segundo grado en las que sus coeficientes son iguales: $ax^2 + ax + a = 0$.**

**¿Cuántas soluciones tienen? Razona la respuesta.**

$\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$ → No tiene ninguna solución real.

**21. Escribe una ecuación de segundo grado con dos soluciones, otra con una solución doble y otra sin solución.**

Dos soluciones: $x^2 + 4x - 1 = 0$

Una solución doble: $x^2 - 2x + 1 = 0$

Sin soluciones: $x^2 + x + 2 = 0$

**22. Resuelve las ecuaciones.**

a) $x^2 - 6x = 0$
b) $x^2 - 49 = 0$
c) $x \cdot (x + 3) = 0$
d) $-2x^2 + 6x = 0$
e) $5x^2 = 10$
f) $x^2 = x$
g) $4x^2 + 4x = 0$
h) $-x^2 + x = 0$

a) $x^2 - 6x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

b) $x^2 - 49 = 0 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

c) $x \cdot (x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

d) $-2x^2 + 6x = 0 \rightarrow -2x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

e) $5x^2 = 10 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$

f) $x^2 = x \rightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

g) $4x^2 + 4x = 0 \rightarrow 4x \cdot (x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

h) $-x^2 + x = 0 \rightarrow -x \cdot (x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

**23. Resuelve.**

a) $5x(2x - 1) = 7x$
b) $(x - 2)(3x + 7) = 0$

a) $10x^2 - 5x - 7x = 0 \rightarrow 10x^2 - 12x = 0 \rightarrow 2x \cdot (5x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$

b) $(x - 2) \cdot (3x + 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{-7}{3} \end{cases}$

**24. Escribe una ecuación de segundo grado con algún coeficiente igual a cero y una solución.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, $4x^2 = 0$.

**25.** **Resuelve.**

a) $x^2 + 7x = 0$
b) $6x^2 = 0$
c) $-4x^2 + 5x = 0$
d) $14x^2 + x = 0$
e) $10x^2 - 11x = 0$
f) $x^2 + 9x = 0$
g) $-x^2 - x = 0$
h) $9x^2 = 0$

a) $x^2 + 7x = 0 \rightarrow x \cdot (x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

e) $10x^2 - 11x = 0 \rightarrow x \cdot (10x - 11) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{11}{10} \end{cases}$

b) $6x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

f) $x^2 + 9x = 0 \rightarrow x \cdot (x+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

c) $-4x^2 + 5x = 0 \rightarrow x \cdot (-4x+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

g) $-x^2 - x = 0 \rightarrow -x \cdot (x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

d) $14x^2 + x = 0 \rightarrow x \cdot (14x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-1}{14} \end{cases}$

h) $9x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

**26.** **Halla las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $x^2 = 5x$
b) $4x^2 = 16$
c) $x^2 - 64 = 0$
d) $-x^2 = 8x$
e) $-x^2 + 10 = 0$
f) $10x^2 - 10 = 0$
g) $-x^2 = -6$
h) $9x^2 - 81 = 0$

a) $x^2 = 5x \rightarrow x \cdot (x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

e) $-x^2 + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{10} \\ x_2 = -\sqrt{10} \end{cases}$

b) $4x^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

f) $10x^2 - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

c) $x^2 - 64 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

g) $-x^2 = -6 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{6} \\ x_2 = -\sqrt{6} \end{cases}$

d) $-x^2 = 8x \rightarrow -x \cdot (x+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

h) $9x^2 - 81 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

**27.** **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $x \cdot (x + 2) = 15$
b) $x^2 + 4 \cdot (x + 3) = 10$
c) $x - (x + 3)^2 = -5$
d) $(1 - x) \cdot (2 + x) = 1$
e) $x^2 - 3 = x + 3$
f) $(2x + 3) \cdot 4x - 6 = 0$
g) $x^2 - 8x + 16 = 0$
h) $(x + 5) \cdot (3 - x) = x - 2$
i) $-x \cdot (7 - x) = 0$

a) $x^2 + 2x = 15 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

b) $x^2 + 4x + 12 = 10 \rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$

c) $x - (x^2 + 6x + 9) = -5 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

d) $2+x-2x-x^2=1\rightarrow x^2+x-1=0\rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

e) $x^2-x=6\rightarrow x^2-x-6=0\rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-2\end{cases}$

f) $8x^2+12x-6=0\rightarrow 4x^2+6x-3=0\rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+48}}{8}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{4}\\ x_2=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{4}\end{cases}$

g) $x^2-8x+16=0\rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\{x_1=x_2=4$

h) $3x-x^2+15-5x=x-2\rightarrow -x^2-3x+17=0\rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+68}}{-2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{3+\sqrt{77}}{-2}\\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{77}}{-2}\end{cases}$

i) $-x\cdot(7-x)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=7\end{cases}$

**28. El precio de un cuaderno y un libro es 6 €. El precio del cuaderno es $\frac{3}{7}$ del precio del libro.**

a) Expresa mediante una ecuación este problema.

b) ¿Cuál es la ecuación si me descuentan un 10%?

$x$ = precio que pago del libro en €. Entonces:

a) $x+\dfrac{3}{7}x=6$

b) $\dfrac{3x}{7}+x=0{,}9\cdot 6\rightarrow\dfrac{3x}{7}+x=5{,}4$

**29. Escribe un problema que responda a esta ecuación: $3x-6=92$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: «Si al triple del dinero que tengo le quito 6 € me quedan 92 €.»

**30. Expresa este enunciado mediante una ecuación: *El producto de dos números consecutivos impares es 483*.**

$(2x-1)\cdot(2x+1)=483$

**31. Fernando gasta en la entrada de cine las $\frac{2}{5}$ partes de su paga semanal. Después, gasta una tercera parte de lo que le queda en palomitas y con una sexta parte del resto compra una rifa escolar. Al final, le quedan 5 €. ¿Cuál es su paga semanal?**

$x$ = paga semanal de Fernando

Entrada del cine: $\dfrac{2x}{5}$ $\rightarrow$ Gasto en palomitas: $\dfrac{1}{3}\cdot\left(x-\dfrac{2x}{5}\right)=\dfrac{x}{5}$.

Rifa escolar: $\dfrac{1}{6}\cdot\left(x-\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{x}{15}$ $\rightarrow$ Le quedan 5 €.

Por lo tanto: $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{15}+5=x\rightarrow x=15$ €.

**32.** **La suma de un número y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?**

$$x + x^2 = 42 \rightarrow x + x^2 - 42 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

**33.** **El producto de un número por el doble de ese mismo número es 288. ¿Qué número es? ¿Existe más de una solución?**

$x \cdot 2x = 288 \rightarrow 2x^2 = 288 \rightarrow x = \pm 12$ → Existen dos soluciones.

## ACTIVIDADES FINALES

**34.** **Indica los miembros de estas ecuaciones.**

a) $2x + 3 = 5$

b) $2x - 3x - 7 = 5x + x - 5x$

c) $4x + 6 - x - 3x = 5 + 2x - 3 - 2x$

d) $(x + 2) - (x^2 - 2) = 4$

a) $\underbrace{2x + 3}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

b) $\underbrace{2x - 3x - 7}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5x + x - 5x}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

c) $\underbrace{4x + 6 - x - 3x}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5 + 2x - 3 - 2x}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

d) $\underbrace{(x + 2) - (x^2 - 2)}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{4}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

**35.** **Señala los términos de las ecuaciones.**

a) $5x + 1 = 25$

b) $2x - x - 9 = x + 3x - 5x$

c) $4x + 6 = 76 + 12x + 3 - 2x$

d) $9(x + 7) - 3(x^2 - 2) = 4$

a) $5x + 1 = 25$ → Términos: $5x$, $1$, $25$

b) $2x - x - 9 = x + 3x - 5x$ → Términos: $2x$, $-x$, $-9$, $x$, $3x$, $-5x$

c) $4x + 6 = 76 + 12x + 3 - 2x$ → Términos: $4x$, $6$, $76$, $12x$, $3$, $-2x$

d) $9(x + 7) - 3(x^2 - 2) = 4 \rightarrow 9x + 63 - 3x^2 + 6 = 4$
→ Términos: $9x$, $63$, $-3x^2$, $6$, $4$

**36.** **Indica el grado de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^4 - 8 + x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

b) $2x^2 + x = 0$ d) $-4x^2 - 12x^5 = x^6$

a) Grado 4 b) Grado 2 c) Grado 2 d) Grado 6

**37. ¿Cuáles de los siguientes números son solución de la ecuación $x \cdot (x + 2) = x^2 - x$?**

a) $x = 2$
b) $x = -1$
c) $x = -2$
d) $x = -3$
e) $x = 1$
f) $x = 0$

a) $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 4 \neq 4 - 2 \rightarrow$ No es solución.

b) $x = -1 \rightarrow -1 \cdot 1 \neq 1 + 1 \rightarrow$ No es solución.

c) $x = -2 \rightarrow -2 \cdot 0 \neq 4 + 2 \rightarrow$ No es solución.

d) $x = -3 \rightarrow -3 \cdot (-1) \neq 9 + 3 \rightarrow$ No es solución.

e) $x = 1 \rightarrow 1 \cdot 3 \neq 1 - 1 \rightarrow$ No es solución.

f) $x = 0 \rightarrow 0 \cdot 2 = 0 - 0 \rightarrow$ Sí es solución.

**38. ¿Para cuál de las siguientes ecuaciones es solución el valor $x = 3$?**

a) $x \cdot (x + 5) = 7x + 3$
b) $x^3 = 27$
c) $-x + 3 = 0$
d) $x^2 = 3x$
e) $-x - 3 = 0$
f) $x^2 + 9 = 0$
g) $x \cdot (x - 2) - 3 = x \cdot (x - 3)$
h) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

a) $x \cdot (x+5) = 7x + 3 \xrightarrow{x=3} 3 \cdot 8 = 21 + 3$ $\rightarrow$ Sí es solución.

b) $x^3 = 27 \xrightarrow{x=3} 3^3 = 27$ $\rightarrow$ Sí es solución.

c) $-x + 3 = 0 \xrightarrow{x=3} -3 + 3 = 0$ $\rightarrow$ Sí es solución.

d) $x^2 = 3x \xrightarrow{x=3} 3^2 = 3 \cdot 3$ $\rightarrow$ Sí es solución.

e) $-x - 3 = 0 \xrightarrow{x=3} -3 - 3 \neq 0$ $\rightarrow$ No es solución.

f) $x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x=3} 3^2 + 9 \neq 0$ $\rightarrow$ No es solución.

g) $x \cdot (x-2) - 3 = x \cdot (x-3) \xrightarrow{x=3} 3 \cdot 1 - 3 = 3 \cdot 0$ $\rightarrow$ Sí es solución.

h) $(x-1)^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x=3} 2^2 - 4 = 0$ $\rightarrow$ Sí es solución.

**39. Razona cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a $2x - 10 = 4$.**

a) $2(x - 10) = -x + 1$
b) $2x - 10 = x$
c) $3x - 10 = 11$

$2x - 10 = 4 \rightarrow x = 7$

a) $2 \cdot (x - 10) = -x + 1 \rightarrow x = 7$ $\rightarrow$ Sí son equivalentes.

b) $2x - 10 = x \rightarrow x = 10$ $\rightarrow$ No son equivalentes.

c) $3x - 10 = 11 \rightarrow x = 7$ $\rightarrow$ Sí son equivalentes.

**40. Escribe una ecuación para estos enunciados.**

a) El doble de un número más 5 unidades es 13.
b) La mitad de un número más 3 unidades es 10.
c) El cuadrado de un número menos 4 unidades es igual al triple de ese número.
d) La suma de dos números distintos es 16.
e) La suma de tres números pares consecutivos es 48.
f) La diferencia de los cubos de dos números distintos es 61.
g) La tercera parte de un número más su quinta parte excede en 1 unidad a la mitad de ese mismo número.

a) $2x + 5 = 13$ c) $x^2 - 4 = 3x$ e) $2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 48$ g) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{x}{2}+1$

b) $\frac{x}{2}+3=10$ d) $x + y = 16$ f) $x^3 - y^3 = 61$

**41. Resuelve.**

a) $10 - x = 3$
b) $9 + x = 2$
c) $-12 - x = 3$
d) $16 + 3x = -12$
e) $4x + 5 = 11$
f) $3x + 7 = 14$
g) $-5 + 20x = 95$
h) $-9 - 11x = 2$

a) $10 - x = 3 \rightarrow 10 - 3 = x \rightarrow x = 7$

b) $9 + x = 2 \rightarrow 9 + x - 9 = 2 - 9 \rightarrow x = -7$

c) $-12 - x = 3 \rightarrow -12 - x + 12 = 3 + 12 \rightarrow -x = 15 \rightarrow x = -15$

d) $16 + 3x = -12 \rightarrow 3x = -28 \rightarrow x = -\frac{28}{3}$

e) $4x + 5 = 11 \rightarrow 4x = 11 - 5 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

f) $3x + 7 = 14 \rightarrow 3x = 14 - 7 \rightarrow 3x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{3}$

g) $-5 + 20x = 95 \rightarrow 20x = 95 + 5 \rightarrow x = \frac{100}{20} = 5$

h) $-9 - 11x = 2 \rightarrow -11x = 2 + 9 \rightarrow x = \frac{11}{-11} = -1$

**42. Halla la solución de las siguientes ecuaciones.**

a) $3x - 10 = 4x + 2$
b) $-x + 5 = 6x - 9$
c) $-5x - 13 = -2x - 4$
d) $9x - 8 = 8x - 9$
e) $-6 + 8x = -3 + 5x$
f) $2x - 4 + 7x = 8x + 5 - 2x$
g) $7x + 9 = -x + 1$
h) $-5x - 3 + 4x + 7 = 0$
i) $9x + 8 = -7x + 16$
j) $-3x - 42 = -2x - 7$

a) $3x - 10 = 4x + 2 \rightarrow -x = 12 \rightarrow x = -12$

b) $-x + 5 = 6x - 9 \rightarrow -7x = -14 \rightarrow x = 2$

c) $-5x - 13 = -2x - 4 \rightarrow -3x = 9 \rightarrow x = -3$

d) $9x - 8 = 8x - 9 \rightarrow x = -1$

e) $-6 + 8x = -3 + 5x \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

f) $2x - 4 + 7x = 8x + 5 - 2x \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$

g) $7x + 9 = -x + 1 \rightarrow 8x = -8 \rightarrow x = -1$

h) $-5x - 3 + 4x + 7 = 0 \rightarrow -x = -4 \rightarrow x = 4$

i) $9x + 8 = -7x + 16 \rightarrow 16x = 8 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

j) $-3x - 42 = -2x - 7 \rightarrow -x = 35 \rightarrow x = -35$

**43. Resuelve estas ecuaciones.**

a) $4x + 3(x - 2) = 9(x - 1) + 7$

b) $(-7 + x)(-5) = 10$

c) $8x - 2(x + 1) = 4x + 3(x + 6)$

d) $-4(5 - 2x) + 3 = 2(-x) - 7$

e) $6x - (3x - 4) + 5 = 15$

f) $x - 8 - 2(7 - 5x) = 0$

a) $4x + 3(x - 2) = 9(x - 1) + 7 \rightarrow 4x + 3x - 6 = 9x - 9 + 7 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$

b) $(-7 + x) \cdot (-5) = 10 \rightarrow 35 - 5x = 10 \rightarrow -5x = -25 \rightarrow x = 5$

c) $8x - 2(x + 1) = 4x + 3(x + 6) \rightarrow 8x - 2x - 2 = 4x + 3x + 18 \rightarrow -x = 20 \rightarrow x = -20$

d) $-4(5 - 2x) + 3 = 2(-x) - 7 \rightarrow -20 + 8x + 3 = -2x - 7 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$

e) $6x - (3x - 4) + 5 = 15 \rightarrow 6x - 3x + 4 + 5 = 15 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

f) $x - 8 - 2(7 - 5x) = 0 \rightarrow x - 8 - 14 + 10x = 0 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2$

**44. Resuelve.**

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{2x}{5}$

b) $\frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{3}$

c) $\frac{5x-2}{6} = \frac{3x+1}{4}$

d) $\frac{4x}{5} = \frac{x+6}{2}$

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{2x}{5} \rightarrow 15 \cdot \frac{x-1}{3} = 15 \cdot \frac{2x}{5} \rightarrow 5 \cdot (x-1) = 3 \cdot (2x) \rightarrow x = -5$

b) $\frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{3} \rightarrow 12 \cdot \frac{x+3}{4} = 12 \cdot \frac{x-1}{3} \rightarrow 3 \cdot (x+3) = 4 \cdot (x-1) \rightarrow x = 13$

c) $\frac{5x-2}{6} = \frac{3x+1}{4} \rightarrow 12 \cdot \frac{5x-2}{6} = 12 \cdot \frac{3x+1}{4} \rightarrow 2 \cdot (5x-2) = 3 \cdot (3x+1) \rightarrow x = 7$

d) $\frac{4x}{5} = \frac{x+6}{2} \rightarrow 10 \cdot \frac{4x}{5} = 10 \cdot \frac{x+6}{2} \rightarrow 2 \cdot (4x) = 5 \cdot (x+6) \rightarrow x = 10$

**45. Encuentra la solución.**

a) $6 - x = 1 - \frac{x}{2}$

b) $3 - \frac{x}{5} = \frac{x}{10}$

c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = -1$

d) $x - \frac{3x}{5} = 18$

e) $\frac{2x}{7} - \frac{x+4}{8} = \frac{x-4}{6}$

f) $x - \frac{x+1}{4} = \frac{x+5}{2}$

a) $6-x=1-\frac{x}{2} \rightarrow 12-2x=2-x \rightarrow x=10$

b) $3-\frac{x}{5}=\frac{x}{10} \rightarrow 30-2x=x \rightarrow x=10$

c) $\frac{x}{4}-\frac{x}{6}=-1 \rightarrow 12\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\right)=-1\cdot 12 \rightarrow 3x-2x=-12 \rightarrow x=-12$

d) $x-\frac{3x}{5}=18 \rightarrow 5x-3x=90 \rightarrow x=45$

e) $\frac{2x}{7}-\frac{x+4}{8}=\frac{x-4}{6} \rightarrow 48x-21x-84=28x-112 \rightarrow x=28$

f) $x-\frac{x+1}{4}=\frac{x+5}{2} \rightarrow 4x-x-1=2x+10 \rightarrow x=11$

**46.** **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{5}=\frac{x}{3}$

b) $\frac{3-2x}{9}-\frac{5-3x}{4}=\frac{x}{2}$

c) $\frac{1-4x}{3}-\frac{1+3x}{8}=\frac{x}{6}$

d) $\frac{x+9}{10}-\frac{x-5}{6}=\frac{x-2}{3}$

e) $x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{5}=\frac{x}{4}$

f) $\frac{10-3x}{8}-\frac{x+1}{9}-\frac{17}{36}=\frac{x}{6}$

a) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{5}=\frac{x}{3} \rightarrow 15x+45-6x+6=10x \rightarrow x=51$

b) $\frac{3-2x}{9}-\frac{5-3x}{4}=\frac{x}{2} \rightarrow 12-8x-45+27x=18x \rightarrow x=33$

c) $\frac{1-4x}{3}-\frac{1+3x}{8}=\frac{x}{6} \rightarrow 8-32x-3-9x=4x \rightarrow x=\frac{1}{9}$

d) $\frac{x+9}{10}-\frac{x-5}{6}=\frac{x-2}{3} \rightarrow 3x+27-5x+25=10x-20 \rightarrow x=6$

e) $x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{5}=\frac{x}{4} \rightarrow 20x-10x-10-4x-12=5x \rightarrow x=22$

f) $\frac{10-3x}{8}-\frac{x+1}{9}-\frac{17}{36}=\frac{x}{6} \rightarrow 90-27x-8x-8-34=12x \rightarrow x=\frac{48}{47}$

**47.** **Calcula el valor de *x*.**

a) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{6}+9$

b) $\frac{x+2}{3}=5x-46$

c) $x-\frac{x+4}{5}=1+\frac{x}{2}$

d) $\frac{x+8}{2}-\frac{x-4}{6}=2$

e) $\frac{x-5}{5}+\frac{8-x}{2}+\frac{2x-10}{2}=3$

f) $\frac{x-10}{2}-\frac{x-20}{4}-\frac{x-30}{3}=5$

a) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{6}+9 \rightarrow \frac{3x}{5}-\frac{2x}{6}=9-7 \rightarrow \left(\frac{3\cdot 6-2\cdot 5}{30}\right)x=2$

m.c.m. (5, 6) = 30

$\rightarrow \frac{8}{30}x=2 \rightarrow x=\frac{2\cdot 30}{8}=\frac{15}{2}$

b) $\frac{x+2}{3}=5x-46 \rightarrow x+2=15x-138 \rightarrow x-15x=-138-2$
$\rightarrow -14x=-140 \rightarrow x=10$

c) $x - \frac{x+4}{5} = 1 + \frac{x}{2} \to 10x - 2(x+4) = 10 + 5x$

m.c.m. (5, 2) = 10

$\to 10x - 2x - 8 = 10 + 5x$
$\to 8x - 8 = 10 + 5x$
$\to 8x - 5x = 10 + 8 \to 3x = 18 \to x = 6$

d) $\frac{x+8}{2} - \frac{x-4}{6} = 2 \to 6 \cdot \frac{x+8}{2} - 6 \cdot \frac{x-4}{6} = 6 \cdot 2$

m.c.m. (2, 6) = 6

$\to 3(x+8) - (x-4) = 12$
$\to 3x + 24 - x + 4 = 12 \to 2x + 28 = 12$
$\to 2x = 12 - 28 \to x = \frac{-16}{2} = -8$

e) $\frac{x-5}{5} + \frac{8-x}{2} + \frac{2x-10}{2} = 3$

$\to 10 \cdot \frac{x-5}{5} + 10 \cdot \frac{8-x}{2} + 10 \cdot \frac{2x-10}{2} = 10 \cdot 3$

m.c.m. (5, 2) = 10

$\to 2(x-5) + 5(8-x) + 5(2x-10) = 30$
$\to 2x - 10 + 40 - 5x + 10x - 50 = 30$
$\to 7x - 20 = 30 \to 7x = 50 \to x = \frac{50}{7}$

f) $\frac{x-10}{2} - \frac{x-20}{4} - \frac{x-30}{3} = 5$

$\to 12 \cdot \frac{x-10}{2} - 12 \cdot \frac{x-20}{4} - 12 \cdot \frac{x-30}{3} = 12 \cdot 5$

m.c.m. (2, 4, 3) = 12

$\to 6(x-10) - 3(x-20) - 4(x-30) = 60$
$\to 6x - 60 - 3x + 60 - 4x + 120 = 60$
$\to -x + 120 = 60 \to -x = 60 - 120 = -60 \to x = 60$

**48. Obtén la solución de estas ecuaciones.**

a) $\frac{2x-10}{3} - \frac{3(x-12)}{4} = -1$

b) $\frac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2)$

c) $\frac{2x-5}{5} + \frac{x+1}{4} = 20 - x$

d) $\frac{3-x}{7} - x = \frac{3+2(x-1)}{14}$

e) $\frac{4x-6}{10} + 2x = 21 - \frac{3(x+1)}{12}$

a) $\frac{2x-10}{3} - \frac{3(x-12)}{4} = -1 \to 12 \cdot \frac{2x-10}{3} - 12 \cdot \frac{3(x-12)}{4} = -12$

m.c.m. (3, 4) = 12

$\to 4(2x-10) - 9(x-12) = -12$
$\to 8x - 40 - 9x + 108 = -12$
$\to -x + 68 = -12 \to -x = -12 - 68 = -80 \to x = 80$

b) $\frac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2) \to 5 \cdot \frac{-3x-3}{5} = 15 - 20(x+2)$

$\to -3x - 3 = 15 - 20x - 40 \to -3x + 20x = -25 + 3$
$\to 17x = -22 \to x = -\frac{22}{17}$

c) $\frac{2x-5}{5}+\frac{x+1}{4}=20-x$

$$\underset{\text{m.c.m. }(5,\,4)\,=\,20}{\to} 20\cdot\frac{2x-5}{5}+20\cdot\frac{x+1}{4}=20(20-x)$$

$$\to 4(2x-5)+5(x+1)=20(20-x)$$
$$\to 8x-20+5x+5=400-20x$$
$$\to 13x+20x=400+15 \to 33x=415$$
$$\to x=\frac{415}{33}$$

d) $\frac{3-x}{7}-x=\frac{3+2(x-1)}{14} \to 14\cdot\frac{3-x}{7}-14x=14\cdot\frac{3+2(x-1)}{14}$

$$\to 2(3-x)-14x=3+2(x-1)$$
$$\to 6-2x-14x=3+2x-2$$
$$\to 6-16x=1+2x$$
$$\to -16x-2x=1-6 \to -18x=-5 \to x=\frac{5}{18}$$

e) $\frac{4x-6}{10}+2x=21-\frac{3(x+1)}{12}$

$$\underset{\text{m.c.m. }(10,\,12)\,=\,60}{\to} 60\cdot\frac{4x-6}{10}+60\cdot 2x=60\cdot 21-60\cdot\frac{3(x+1)}{12}$$

$$\to 6(4x-6)+120x=1\,260-15(x+1)$$
$$\to 24x-36+120x=1\,260-15x-15$$
$$\to 144x+15x=1\,245+36 \to 159x=1\,281$$
$$\to x=\frac{1281}{159}=\frac{427}{53}$$

**49.** **Corrige los errores.**

a) $7(x-2)=7$
$x-2=7-7$
$x-2=0$
$x=2$

b) $7(x-2)=4x+1$
$7x-5=4x+1$
$3x=6$
$x=\frac{6}{-3}=-2$

a) El primer miembro se ha dividido entre 7 y al segundo se le ha restado 7:

$$7\cdot(x-2)=7 \to x-2=1 \to x=3$$

b) El error es realizar 7 – 2 en el primer miembro en vez de multiplicar 7 por –2; además, en el último paso el coeficiente no debe cambiar de signo al pasar dividiendo al segundo miembro:

$$7\cdot(x-2)=4x+1 \to 7x-14=4x+1 \to 3x=15 \to x=5$$

**50.** **Escribe una ecuación de primer grado que tenga como solución:**

a) $x=2$
b) $x=\frac{1}{4}$
c) $x=-4$
d) $x=-\frac{3}{5}$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\frac{x}{2}+6=7$ b) $5x-2=x-1$ c) $2(x+3)=-2$ d) $3x-(5-x)=-8-x$

**51. Completa en tu cuaderno el número que le falta a estas ecuaciones para que su solución sea $x = 2$.**

a) $\square x - 2 = 10$
b) $7x + \square = 25$
c) $3x + 7 = \square$
d) $2(x - 1) + 1 = \square$
e) $3(x + 2) - 4x = \square x$
f) $x - 3(x - \square) = 4x$
g) $-2 + 2(\square x - 4) = 2$
h) $3(2x - 1) = \square x + 5$

a) $\square\cdot 2-2=10 \to \square\cdot 2=12 \to \square=6$

b) $7\cdot 2+\square=25 \to \square=25-14 \to \square=11$

c) $3\cdot 2+7=\square \to 13=\square$

d) $2\cdot(2-1)+1=\square \to \square=3$

e) $3\cdot(2+2)-4\cdot 2=\square\cdot 2 \to 12-8=\square\cdot 2 \to \square=2$

f) $2-3(2-\square)=4\cdot 2 \to 2-\square=-2 \to \square=4$

g) $-2+2(\square\cdot 2-4)=2 \to 2(\square\cdot 2-4)=4 \to \square\cdot 2=6 \to \square=3$

h) $3\cdot(2\cdot 2-1)=\square\cdot 2+5 \to 9=\square\cdot 2+5 \to 4=\square\cdot 2 \to \square=2$

**52. Escribe, en cada caso, una ecuación de primer grado que cumpla las características.**

a) Su solución es $x = -2$ y tiene un paréntesis.
b) Su solución es $x = 3$ y tiene dos paréntesis.
c) Su solución es $x = -6$ y tiene una fracción.
d) Su solución es $x = 5$, tiene un paréntesis y una fracción de denominador 3.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3(x+4)=6$ b) $5+2x-(x-7)=2(x-1)+11$ c) $x-\frac{x+1}{5}=-5$ d) $\frac{x+1}{3}=4-(x-3)$

**53. Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado equivalente a las dadas.**

a) $x^2 + 3 = -x + 6$
b) $5 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = 10$
c) $\frac{x \cdot (x + 2)}{3} = x + \frac{1}{2}$
d) $\frac{(x + 1)(x - 4)}{2} = x^2 - x$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3x^2=2x\cdot(x-1)+x+3$

b) $(x+2)\cdot(x-3)=2 \to x^2-x-8=0$

c) $6\cdot\frac{x\cdot(x+2)}{3}=6\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) \to 2x\cdot(x+2)=6x+3$

d) $(x+1)\cdot(x-4)=2x^2-2x$

**54. Considera las ecuaciones:**

**$3x = 6$ $x^2 = 4$**

**¿Son equivalentes? Justifica tu respuesta.**

La primera tiene la solución $x = 2$ y la segunda, $x = \pm 2 \to$ No son equivalentes.

**55. Resuelve las ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.**

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $2x^2 - 4x + 13 = 0$
c) $x^2 + 8x + 16 = 0$
d) $3x^2 + 2x - 16 = 0$
e) $x^2 - 2x + 1 = 0$
f) $7x^2 - 3x + 1 = 0$
g) $-x^2 - 4x + 5 = 0$
h) $3x^2 - 9x - 54 = 0$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-104}}{4} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-88}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = -4$ (doble)

d) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+14}{6} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-2-14}{6} = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$

e) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$ (doble)

f) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-28}}{14} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-19}}{14} \rightarrow$ No tiene solución.

g) $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = -5 \end{cases}$

h) $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+648}}{6} = \dfrac{9 \pm \sqrt{729}}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+27}{6} = 6 \\ x_2 = \dfrac{9-27}{6} = -3 \end{cases}$

**56. Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$
b) $-2x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $x^2 - 8x + 16 = 0$
d) $-x^2 + x + 1 = 0$
e) $x^2 + 8x + 16 = 0$
f) $2x^2 - 4x + 13 = 0$
g) $7x^2 - 3x + 1 = 0$
h) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

a) $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \rightarrow$ 2 soluciones

b) $\Delta = 36 + 64 = 100 > 0 \rightarrow$ 2 soluciones

c) $\Delta = 64 - 64 = 0 \rightarrow$ 1 solución doble

d) $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0 \rightarrow$ 2 soluciones

e) $\Delta = 64 - 64 = 0 \rightarrow$ 1 solución doble

f) $\Delta = 16 - 104 = -88 < 0 \rightarrow$ Sin solución

g) $\Delta = 9 - 28 = -19 < 0 \rightarrow$ Sin solución

h) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0 \rightarrow$ Sin solución

**57. Determina el número de soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + 2x = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

e) $x^2 - x - 2 = 0$

f) $x^2 = 7x - 12$

g) $2x^2 - 4 + 3x = x^2 + 2 + 2x$

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$

e) $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} =$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

f) $x^2 = 7x - 12 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

g) $2x^2 - 4 + 3x = x^2 + 2 + 2x \rightarrow 2x^2 - x^2 + 3x - 2x - 4 - 2 = 0$

$$\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Los apartados a), b), e), f) y g) tienen dos soluciones distintas ya que su discriminante es positivo, y los apartados c) y d) tienen una solución doble ya que su discriminante es cero.

**58. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas.**

a) $x^2 - 8 = 0$

b) $2x^2 + 50 = 0$

c) $3x^2 + 75x = 0$

d) $x^2 - 16 = 0$

e) $-8x^2 - 24x = 0$

f) $-x^2 - x = 0$

g) $x^2 - 1 = 0$

h) $4x^2 - 2x = 0$

a) $x = \pm\sqrt{8}$

b) $x^2 = -25 \longrightarrow$ No tiene solución.

c) $3x(x + 25) \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -25$

d) $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

e) $-8x(x + 3) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$

f) $-x(x + 1) \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$

g) $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

h) $2x(2x - 1) \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{2}$

**59.** **Resuelve las ecuaciones por el método más adecuado.**

a) $7x^2 = 63$
b) $x^2 - 24 = 120$
c) $x^2 - 25 = 0$
d) $x^2 = 10\,000$
e) $x^2 - 3 = 22$
f) $5x^2 - 720 = 0$
g) $x^2 + 1 = \frac{5}{4}$
h) $x^2 - 36 = 100$
i) $2x^2 - 72 = 0$
j) $5x^2 - 3 = 42$
k) $9x^2 - 36 = 5x^2$
l) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

a) $7x^2 = 63 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 - 24 = 120 \rightarrow x^2 = 120 + 24 = 144 \rightarrow x = \pm 12$

c) $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

d) $x^2 = 10\,000 \rightarrow x = \pm 100$

e) $x^2 - 3 = 22 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

f) $5x^2 - 720 = 0 \rightarrow 5x^2 = 720 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = \pm 12$

g) $x^2 + 1 = \frac{5}{4} \rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

h) $x^2 - 36 = 100 \rightarrow x^2 = 100 + 36 = 136 \rightarrow x = \pm\sqrt{136}$

i) $2x^2 - 72 = 0 \rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

j) $5x^2 - 3 = 42 \rightarrow 5x^2 = 45 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

k) $9x^2 - 36 = 5x^2 \rightarrow 9x^2 - 5x^2 = 36 \rightarrow 4x^2 = 36$
$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

l) $2x^2 + 7x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} =$

$$= \frac{-7 \pm 13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{20}{4} = -5 \end{cases}$$

**60.** **Resuelve.**

a) $x^2 - 7x = 0$
b) $x^2 + 3x = 0$
c) $x^2 - 25x = 0$
d) $x^2 - 10x = 0$
e) $16x(x - 5) = 0$
f) $3x^2 - 12x = 0$
g) $3x = 4x^2 - 2x$
h) $4x^2 = 5x$
i) $25x^2 - 100x = 0$
j) $6x^2 - 6x = 12x$

a) $x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(x - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 7 = 0 \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$

c) $x^2 - 25x = 0 \rightarrow x(x - 25) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 25 = 0 \rightarrow x_2 = 25 \end{cases}$

d) $x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(x - 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 10 = 0 \rightarrow x_2 = 10 \end{cases}$

e) $16x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} 16x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$

f) $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

g) $3x = 4x^2 - 2x \rightarrow 4x^2 - 2x - 3x = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x = 0$

$\rightarrow x(4x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

h) $4x^2 = 5x \rightarrow 4x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(4x-5) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

i) $25x^2 - 100x = 0 \rightarrow 25x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 25x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

j) $6x^2 - 6x = 12x \rightarrow 6x^2 - 18x = 0 \rightarrow 6x(x-3) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$

**61. Escribe estas ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resuélvelas.**

a) $x^2 + 2(2x+1) = -1$

b) $x^2 - 3(x+3) = 1$

c) $3(x^2 - 2x) = x^2 + 8$

d) $4(x^2 + x) - 30 = -x^2 - x$

e) $-2(x^2 + x) - x = -x^2 - 4$

f) $\dfrac{1}{2}x^2 + 2(-2 + x) = 2x + 4$

g) $\dfrac{8x^2 - 2}{3} = 0$

h) $\dfrac{4x^2 + 2}{3} = 2x$

i) $\dfrac{7(x^2 - x)}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{x - x^2}{3}$

a) $x^2 + 4x + 2 = -1 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

b) $x^2 - 3x - 9 = 1 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

c) $3x^2 - 6x = x^2 + 8 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

d) $4x^2 + 4x - 30 = -x^2 - x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

e) $-2x^2 - 2x - x = -x^2 - 4 \rightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

f) $\dfrac{x^2}{2} - 4 + 2x = 2x + 4 \rightarrow x^2 - 16 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{16} = 4 \\ x_2 = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$

g) $8x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

h) $4x^2 + 2 = 6x \rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

i) $7x^2 - 7x + 2 = x - x^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \dfrac{1}{2}$ (doble)

**63. Resuelve estas ecuaciones.**

a) $(3x - 2) \cdot (2x + 1) = 0$

b) $(2x + 4) \cdot (-x + 5) = 0$

c) $(2x + 2) \cdot (x^2 - 9) = 0$

a) $\begin{cases} 3x - 2 = 0 \to x = \dfrac{2}{3} \\ 2x + 1 = 0 \to x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4 = 0 \to x = -2 \\ -x + 5 = 0 \to x = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 2 = 0 \to x = -1 \\ x^2 - 9 = 0 \to x = \pm 3 \end{cases}$

**64. Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado que cumpla estas condiciones.**

a) Tiene como solución única $x = 2$.

b) Una de sus soluciones es $x = -1$, el término independiente es $-3$ y el coeficiente de $x^2$ es 1.

c) No tiene solución, es incompleta y el coeficiente de $x^2$ es 2.

d) Sus soluciones son $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{2}{3}$.

a) Respuesta abierta, por ejemplo: $x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $2x^2 + 1 = 0$

d) $6x^2 - x - 2 = 0$

**66. Halla la solución de estas ecuaciones de grado mayor que 2, tal como se ha explicado en la actividad anterior.**

a) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

b) $x^2 + 2x^3 - 8x^2 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -4 & 16 \\ 4 & & 4 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array} \quad \to (x-4) \cdot (x^2 - 4) = 0 \to x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$$

b) $x^2 \cdot (1 + 2x - 8) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{7}{2}$

c) $x \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = 0$
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 4 & & 4 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \quad \to x \cdot (x-4) \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \to x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 0$$

d) $x \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0 \to x \cdot (x - 5) \cdot (x - 2) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2$

e) $x \cdot (2x^2 - 11x + 12) = 0 \to 2x \cdot (x - 4) \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

f) $x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0 \to x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

**68.** **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{14x-5}{6}=\frac{11}{6}$

b) $\frac{(x-2)(x+2)}{5}-\frac{14x+35}{6}=\frac{52x+5}{10}$

c) $(2x+1)^2=-1$

d) $(x-2)+(2x-1)(x-3)=x(3x-3)-2x$

e) $(x-1)(x+2)=2+(x+3)(x-4)$

f) $\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{5}x=0$

a) $2(x-2)^2+14-5=11 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow x_1=3,\ x_2=1$

b) $6(x^2-4)-5(14x+35)=3(52x+5) \rightarrow x_1=\frac{113}{6}+\frac{\sqrt{14\,053}}{6},\ x_2=\frac{113}{6}-\frac{\sqrt{14\,053}}{6}$

c) $4x^2+4x+1=-1 \rightarrow 2x^2+2x+1=0 \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $x-2+2x^2-6x-x+3=3x^2-3x-2x \rightarrow x^2+x-1=0 \rightarrow x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $x^2+x-2=2+x^2-x-12 \rightarrow x=-4$

f) $x\left(\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}\right)=0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{16}{15}$

**69.** **Escribe la ecuación que expresa estos enunciados y halla el número al que se hace referencia.**

a) El doble de un número más su cuarta parte es igual a 135.

b) La mitad de la diferencia de un número menos 8 unidades es 3.

c) El producto de un número por el doble de ese mismo número da como resultado 512.

d) El doble de la suma de un número más 4 unidades es −12.

e) La tercera parte de un número menos la mitad de ese mismo número da como resultado −3.

f) El producto de un número por el número resultante de sumarle 5 unidades a ese mismo número es 14.

g) La cuarta parte del cuadrado de un número es igual a la tercera parte de la suma de ese número más 1 unidad.

a) $2x+\frac{x}{4}=135 \rightarrow 8x+x=540 \rightarrow x=60$

b) $\frac{x-8}{2}=3 \rightarrow x-8=6 \rightarrow x=14$

c) $x\cdot 2x=512 \rightarrow 2x^2=512 \rightarrow x^2=256 \rightarrow x=\pm 16$

d) $2\cdot(x+4)=-12 \rightarrow 2x+8=-12 \rightarrow x=-10$

e) $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=-3 \rightarrow 2x-3x=-18 \rightarrow x=18$

f) $x\cdot(x+5)=14 \rightarrow x^2+5x-14=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm 9}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-7 \end{cases}$

g) $\frac{x^2}{4}=\frac{x+1}{3} \rightarrow 3x^2-4x-4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{6}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\frac{-2}{3} \end{cases}$

**70.** **Halla dos números naturales consecutivos sabiendo que su suma es 55.**

$x+x+1=55 \rightarrow 2x=54 \rightarrow x=27$ → Por tanto, los dos números son 27 y 28.

**71.** **Obtén tres números naturales consecutivos sabiendo que su suma es 108.**

$x+x+1+x+2=108 \rightarrow 3x=105 \rightarrow x=35$ → Por tanto, los tres números son 35, 36 y 37.

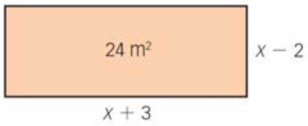
**72.** **Halla dos números consecutivos sabiendo que la diferencia entre la tercera parte del mayor y la quinta parte del menor es igual a la séptima parte del menor.**

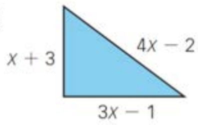
$\frac{x+1}{3}-\frac{x}{5}=\frac{x}{7}\rightarrow 35x+35-21x=15x\rightarrow x=35\rightarrow$ Por tanto, los números son 35 y 36.

**73.** **Halla un número que sumado con su quinta parte, con su sexta parte y 9 unidades da como resultado 50.**

$x+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+9=50\rightarrow 41x=1\,230\rightarrow x=30$

**74.** **Calcula *x* en cada caso.**

a)



b)



a) $A_{\text{Rectángulo}}=(x+3)\cdot(x-2)=24\rightarrow x^2+x-30=0\rightarrow x=\frac{-1\pm 11}{2}\rightarrow x_1=5,\ x_2=-6$

Descartando la solución negativa, los lados del rectángulo miden 3 cm y 8 cm.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$(4x-2)^2=(x+3)^2+(3x-1)^2\rightarrow 3x^2-8x-3=0\rightarrow x=\frac{8\pm 10}{6}\rightarrow x_1=3,\ x_2=-\frac{1}{3}$

Descartando la solución negativa, los lados del triángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm.

**75.** **Halla un número de dos cifras sabiendo que la cifra de las unidades es el doble que la de las decenas y que la suma de ambas cifras es 12.**

$x=$ cifra de las decenas $\rightarrow 2x=$ cifra de las unidades

$x+2x=12\rightarrow x=4\rightarrow$ El número es 48.

**76.** **De una pieza de tela se han cortado dos partes, una de la mitad para confeccionar una camisa, y otra de la sexta parte para un pañuelo. Calcula la longitud de la pieza sabiendo que después de los cortes han quedado 6 m.**

$x=$ longitud de la tela en metros.

$\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+6=x\rightarrow 3x+x+36=6x\rightarrow 2x=36\rightarrow x=18\rightarrow$ La longitud de la tela es de 18 metros.

**77. Llevo recorridos $\frac{7}{15}$ de un trayecto y aún me faltan 84 m para llegar a la mitad. ¿Cuál es la longitud del trayecto?**

$x$ = longitud del trayecto en metros.

$\left(\frac{7x}{15}+84\right)=\frac{x}{2}\to 2\,520=15x-14x\to x=2\,520$ → La longitud del trayecto es de 2 520 metros.

**78. Un niño gasta los $\frac{2}{5}$ de sus ahorros en un regalo para su hermano. Luego, compra un libro con la tercera parte de lo que le queda, y le sobran 16 €. Calcula cuánto dinero tenía ahorrado y cuánto se gasta en el regalo y en el libro.**

$x$ = dinero ahorrado en €.

$\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}x+16=x\to 16=\frac{2}{5}x$ → $x$ = 40 € tenía ahorrados.

$\frac{2x}{5}=\frac{2\cdot 40}{5}=16$ € se gasta en el regalo.

$\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{2x}{5}\right)=\frac{1}{3}\cdot(40-16)=8$ € se gasta en el libro.

**79. Un terreno rectangular tiene una superficie de 1739 m² y mide 10 m más de largo que de ancho. Calcula sus dimensiones.**

Ancho: $x$. Largo: $x+10\to x(x+10)=1\,739\to x^2+10x-1\,739=0$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100+6\,956}}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{7\,056}}{2}\to\begin{cases}x_1=\dfrac{-10+84}{2}=37\\ x_2=\dfrac{-10-84}{2}=-47\end{cases}$$

Las dimensiones son 37 m de ancho y 47 m de largo. La otra solución no es válida por ser negativa.

**80. Halla la longitud de una cuerda sabiendo que, después de cortar la mitad, la quinta parte y la décima parte, quedan 30 m.**

$x$ = longitud de la cuerda.

$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x}{10}\right)=30\to 10x-5x-2x-x=300$ → $x$ = 150 m

**81.** **En una fiesta hay 288 personas. El número de niños que han asistido a la fiesta es la mitad que el número de mujeres, y el número de hombres es la tercera parte de las mujeres y niños juntos. ¿Cuántos niños, mujeres y hombres hay en la fiesta?**

$x$ = mujeres $\longrightarrow \frac{x}{2}$ = niños $\longrightarrow \frac{x+\frac{x}{2}}{3}=\frac{x}{2}$ hombres $\qquad x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=288 \rightarrow 2x=288 \longrightarrow x=144$

Hay 72 niños, 144 mujeres y 72 hombres.

**82.** **Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles, y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40 000?**

Barriles: $x$. Exporta en enero: $\frac{x}{2}$ y en los dos meses siguientes: $\frac{1}{3}\left(x-\frac{x}{2}\right)$.

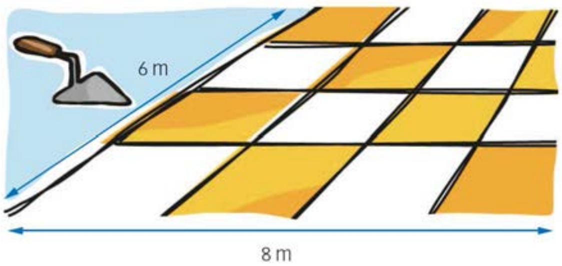
$$x-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x}{2}\right)=40\,000 \rightarrow \frac{x}{2}-\frac{x}{6}=40\,000 \rightarrow \frac{x}{3}=40\,000$$

$$\rightarrow x=120\,000 \text{ barriles}$$

**83.** **En la comunidad de vecinos de Luis hay una quinta parte de personas originarias de países africanos, una décima parte de americanos y las 28 personas restantes son europeas. ¿Cuántos vecinos hay en total?**

$x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{10}\right)=28 \longrightarrow x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{10}\right)=28 \longrightarrow x=40$ vecinos hay en total.

**84.** **Para embaldosar un salón de 8 m de largo por 6 m de ancho se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de las baldosas?**




Lado de la baldosa: $x$

$$300x^2=8\cdot 6 \rightarrow x^2=0{,}16 \rightarrow x=0{,}4$$

La baldosa mide 40 cm de lado.

**86.** **Claudia y su madre se llevan 26 años. ¿Cuántos años tienen ahora si dentro de 10 años la edad de la madre será el triple de la edad de Claudia?**

| | Claudia | Madre de Claudia |
|---|---|---|
| **Actualidad** | $x$ | $x+26$ |
| **Dentro de 10 años** | $x+10$ | $x+36$ |

$x+36=3\cdot(x+10) \rightarrow x+36=3x+30 \rightarrow x=3$

Claudia tiene 3 años y su madre 29 años.

**87. Miguel tiene dos años más que su primo Alberto y hace cuatro años la edad de Alberto era tres cuartas partes de la de Miguel.**

a) ¿Qué edades tendrán los dos dentro de seis años?

b) ¿Qué edad tenía cada uno cuando la edad de Miguel triplicaba la de Alberto?

a)

| | Miguel | Alberto |
|---|---|---|
| **Actualidad** | $x+2$ | $x$ |
| **Hace 4 años** | $x-2$ | $x-4$ |

$x-4=\frac{3}{4}\cdot(x-2)\rightarrow 4x-16=3x-6\rightarrow x=10$

Dentro de 6 años Miguel tendrá 18 años, y Alberto 16.

b)

| | Miguel | Alberto |
|---|---|---|
| **Actualidad** | 12 | 10 |
| **Hace *y* años** | $12-y$ | $10-y$ |

$12-y=3(10-y)\longrightarrow 2y=18\longrightarrow y=9\longrightarrow$ Hace 9 años la edad de Miguel triplicaba a la de Alberto.

Es decir, Miguel tenía 3 años, y Alberto, un año.

**88. María tiene dos hijos gemelos cuyas edades son la octava parte de la edad de su madre. ¿Cuáles son sus edades si entre todos suman 40 años?**

Edad de María $=x \longrightarrow$ Edad de los gemelos $=\frac{x}{8}$

$x+\frac{x}{8}+\frac{x}{8}=40\rightarrow 8x+2x=320\rightarrow x=32$

Es decir, María tiene 32 años y sus hijos tienen 4 años.

**89. Un padre tiene 35 años, y su hijo, 8. ¿Hace cuántos años el padre tenía diez veces la edad del hijo? ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la del hijo?**

| | Padre | Hijo |
|---|---|---|
| **Actualidad** | 35 | 8 |
| **Hace *x* años** | $35-x$ | $8-x$ |
| **Dentro de *y* años** | $35+y$ | $8+y$ |

$35-x=10(8-x)\rightarrow x=5$ $\longrightarrow$ Hace 5 años el padre tenía diez veces la edad del hijo.

$35+y=2(8+y)\rightarrow y=19$ $\longrightarrow$ Dentro de 19 años la edad del padre será el doble de la del hijo.

**91.** **A las 7 de la mañana Tomás sale de Zamora con dirección a Cádiz, a 660 km, con una velocidad de 75 km/h. A la misma hora, Natalia sale de Cádiz hacia Zamora por la misma carretera, a una velocidad de 60 km/h. ¿A qué hora se cruzarán? ¿Y a qué distancia de Cádiz?**

Siendo $x$ el tiempo que tardan en encontrarse, y considerando que están a una distancia de 660 km: $75x + 60x = 660 \rightarrow 135x = 660$ $\rightarrow x = 4{,}888$ horas $= 4$ h 53 min 20 s. Se cruzarán a las 11 h 53 min 20 s y estarán a $4{,}888 \cdot 60 = 293{,}333$ km de Cádiz.

**92.** **Esther viaja de Barcelona a Sevilla en coche. Sale a las 8 y lleva una velocidad de 90 km/h. A 110 km de Barcelona, Juan coge, a las 8, un autobús que viaja a 70 km/h, con la misma dirección que Esther. ¿A qué hora se encuentra Esther con el autobús? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?**

El tiempo que tardan en encontrarse es $x$.

$90x = 110 + 70x \rightarrow 20x = 110 \rightarrow x = 5{,}5$ horas

Luego se encuentran a las 13 h 30 min. La distancia recorrida por Esther es: $5{,}5 \cdot 90 = 495$ km y la de Juan es: $495 - 110 = 385$ km.

**93.** **Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 80 km/h y, dos horas más tarde sale un coche de la misma ciudad a 120 km/h. ¿A qué distancia del origen alcanzará el coche al camión?**

$x =$ Tiempo transcurrido desde que sale el coche hasta el encuentro.

| | Ventaja | Momento del encuentro |
|---|---|---|
| **Distancia que recorre el camión** | $2 \cdot 80$ | $2 \cdot 80 + 80x$ |
| **Distancia que recorre el coche** | | $120x$ |

$2 \cdot 80 + 80x = 120x \rightarrow x = 4 \rightarrow 4 \cdot 120 = 480$

Es decir, se encuentran 4 horas después de la salida del coche, a 480 km del origen.

**94.** **En una pastelería a las 12 h han vendido un tercio de los pasteles que había. A las 14 h han vendido la mitad de los que quedaban. Por la tarde venden una sexta parte del resto, y al cerrar quedan 20 pasteles. ¿Cuántos pasteles había al comenzar la jornada?**

$x =$ número de pasteles al comenzar la jornada.

A las 12 h: $\frac{x}{3}$ A las 14 h: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ Por la tarde: $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{18}$

$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{18} + 20 = x \rightarrow 6x + 6x + x + 360 = 18x \rightarrow x = 72$ pasteles.

## DEBES SABER HACER

**1. Escribe una ecuación:**

a) Con dos incógnitas y términos independientes 5 y $-3$.

b) Con una incógnita y solución 7.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $2x + 5 = 6y - 3$

b) $2x + 5 = 19$

**2. Resuelve estas ecuaciones.**

a) $3(x + 2) - 4 = 2x + 3$

b) $\dfrac{2-x}{3} + \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{3-x}{4}$

a) $3x + 6 - 4 = 2x + 3 \rightarrow x = 1$

b) $12 \cdot \left(\dfrac{2-x}{3} + \dfrac{1+x}{2}\right) = 12 \cdot \dfrac{3-x}{4} \rightarrow 8 - 4x + 6 + 6x = 9 - 3x \rightarrow x = -1$

**3. Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $2x^2 - 4x = 0$

c) $2x^2 - 4 = 0$

d) $2x^2 = 0$

a) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

b) $2x \cdot (x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

c) $2x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $x = 0$ doble

**4. En un viaje se han hecho dos paradas. Hasta la primera se ha recorrido la tercera parte del trayecto, y hasta la segunda, la quinta parte. Si desde la segunda parada hasta el final del trayecto aún quedaban 210 km, ¿qué distancia se ha recorrido en total?**

$x$ = distancia total del trayecto.

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{5} + 210 = x \rightarrow 5x + 3x + 3150 = 15x \rightarrow x = 450$ km

**5. El área de un rectángulo es 96 cm². Halla la medida de sus dimensiones sabiendo que el largo mide 4 cm más que el ancho.**

Longitud del ancho en cm $= x$ $\rightarrow$ Longitud del largo $= x + 4$.

$x \cdot (x+4) = 96 \rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{400}}{2} = \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -12 \end{cases}$

Descartando la solución negativa, se tiene que el ancho es 8 cm y el largo 12 cm.

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**95.** **Para planificar un viaje necesitamos saber el tiempo aproximado que invertiremos en el trayecto. Para determinar ese tiempo, se pueden utilizar los navegadores o páginas web específicas, en las que marcando la ciudad de origen y la de llegada podemos obtener el tiempo estimado que durará el viaje.**

**Para calcular ese tiempo se suele utilizar la fórmula física del movimiento rectilíneo uniforme:**

**Espacio = Velocidad · Tiempo**


Lucía vive en Santander y suele veranear en Alicante con su amiga Ana, pero este año sus vacaciones coinciden y han decidido intercambiar casas. Lucía sale de Santander a las 9:00 h de la mañana y la velocidad media de su coche es de 115 km/h. Ana sale de Alicante un poco más tarde, a las 9:30 h de la mañana, y su velocidad media es de 100 km/h.

**¿En qué punto kilométrico se encontrarán si suponemos que la distancia total es 900 km?**

$t$ = tiempo en horas a partir de las 9:30.

$900 = 115(t + 0{,}5) + 100t \rightarrow t = 3{,}92 \rightarrow$ Se encuentran en 3,92 horas desde la salida de Ana.

$(3{,}92 + 0{,}5) \cdot 115 = 508{,}3$ km desde Santander.

$3{,}92 \cdot 100 = 392$ km desde Alicante.

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**96.** **Resuelve estas ecuaciones.**

| | |
|---|---|
| $x^2 + x - 6 = 0$ | $x^2 + 2x - 8 = 0$ |
| $-6x^2 + x + 1 = 0$ | $-8x^2 + 2x + 1 = 0$ |

**Si observas, cada par de ecuaciones son del tipo:**

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $cx^2 + bx + a = 0$

a) Escribe dos ecuaciones que correspondan a estos tipos y resuélvelas. ¿Qué observas?

b) Comprueba que si $s_1$ y $s_2$ son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ y $r_1$ y $r_2$ son las soluciones de $cx^2 + bx + a = 0$, se cumple que: $s_1 \cdot r_2 = 1$ y $s_2 \cdot r_1 = 1$.

$$x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-3\end{cases}$$ $$x^2+2x-8=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-4\end{cases}$$

$$-6x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1}{3}\\x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ $$-8x^2+2x+1=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{-16}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1}{4}\\x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

a) Respuesta abierta, por ejemplo:

$2x^2-9x-5=0 \longrightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{1}{2}$ $\quad -5x^2-9x+2=0 \longrightarrow x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{5}$

Si $x_1$ y $x_2$ son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, entonces $\frac{1}{x_2}$ y $\frac{1}{x_1}$ serán las soluciones de $cx^2+bx+a=0$

b) $$s_1\cdot r_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1$$

$$s_2\cdot r_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1$$

**97.** **Resuelve estas ecuaciones:**

| $x^2+x-6=0$ | $x^2+2x-8=0$ |
|---|---|
| $x^2-x-6=0$ | $x^2-2x-8=0$ |

**Si observas, cada par de ecuaciones son del tipo:**

$ax^2+bx+c=0$ $\qquad ax^2-bx+c=0$

a) Escribe dos ecuaciones que correspondan a estos tipos y resuélvelas. ¿Qué observas?

b) Comprueba que si $s_1$ y $s_2$ son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$ y $r_1$ y $r_2$ son las soluciones de $ax^2-bx+c=0$, se cumple que: $s_1+r_2=0$ y $s_2+r_1=0$.

$$x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-3\end{cases}$$ $$x^2-x-6=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=-2\end{cases}$$

$$x^2+2x-8=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-4\end{cases}$$ $$x^2-2x-8=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=-2\end{cases}$$

a) Respuesta abierta, por ejemplo:

$2x^2-9x-5=0 \longrightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{1}{2}$ $\quad 2x^2+9x-5=0 \longrightarrow x_1=-5,\ x_2=\frac{1}{2}$

Si $x_1$ y $x_2$ son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, entonces las soluciones de $ax^2-bx+c=0$ serán las opuestas.

b) $$s_1+r_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

$$s_2+r_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

## PRUEBAS PISA

**98. Villazed está contemplando construir varias centrales de energía eólica para producir electricidad. El Ayuntamiento de Villazed recogió información sobre el siguiente modelo.**

Modelo: E-82

Altura de la torre: 138 metros

Número de palas del rotor: 3

Longitud de una pala del rotor: 40 metros

Velocidad máxima de rotación: 20 vueltas por minuto

Precio de construcción: 3 200 000 zeds

Facturación: 0,10 zeds por kWh generado

Coste de mantenimiento: 0,01 zeds por kWh generado

Rendimiento: Operativa el 97 % del año

Nota: el kilovatio-hora (kWh) es una unidad de medida de la energía eléctrica.

Villazed desea calcular los costes y el beneficio que generaría la construcción de esta central de energía eólica.

El alcalde propone la siguiente fórmula para calcular el beneficio económico, $E$ (en zeds), durante una serie de años, $a$, si construyen el modelo E-82.

$$E = \underbrace{400\,000a}_{\substack{\text{Beneficio de la}\\ \text{producción anual}\\ \text{de electricidad}}} - \underbrace{3\,200\,000}_{\substack{\text{Costes de construcción}\\ \text{de la central de energía}\\ \text{eólica}}}$$

Según la fórmula del alcalde, ¿cuál es el número mínimo de años de funcionamiento requeridos para cubrir los costes de construcción de la central de energía eólica?

$400\,000a - 3\,200\,000 = 0 \rightarrow a = 8$

El número mínimo de años requeridos para cubrir los costes de producción es 8.

# Sistemas de ecuaciones

7

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Construye una tabla de valores para cada ecuación.**

a) $y = -1 + 2x$

b) $x = -y + 2$

c) $x + y = 2$

a)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | 1 | 3 |

b)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

c)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

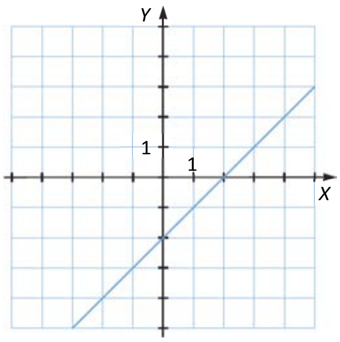
**2. Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = x - 2$

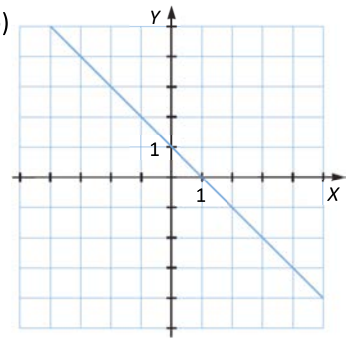
b) $y = -x + 1$

c) $2x - y = 3$

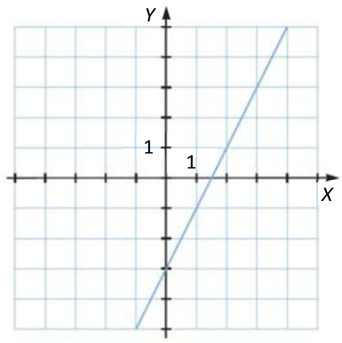
a)




b)




c)




## VIDA COTIDIANA

**La Red Ferroviaria Española abarca un gran número de líneas que conectan todas las regiones y las ciudades más importantes.**

**Se comenzó a construir en 1848 y la red constaba de tan solo 28 km (de Barcelona a Mataró). En la actualidad alcanza una longitud de más de 15 000 km.**

- **Un tren parte de la ciudad *A*, con una velocidad de 90 km/h, con destino a la ciudad *B*, que está a 200 km. Desde *B*, a la misma hora y con una velocidad de 70 km/h, sale otro tren con destino a *A*. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?**

$t$ = tiempo que tardan en cruzarse

$200 = 90t + 70t \rightarrow t = 1{,}25$ horas

Tardarán en cruzarse 1 hora y 15 minutos desde su salida.

## RESUELVE EL RETO

**La ecuación $2x + 3y - 4z = 8$, ¿cuántas soluciones tiene si $x$ es 1?**

Tiene infinitas soluciones.

**Una botella y su tapón pesan 1 kg y 10 g. La botella pesa 1 kg más que el tapón. ¿Cuánto pesa la botella?**

$x$ = peso de la botella en kg $\qquad$ $y$ = peso del tapón en kg

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1{,}010 \\ x=1+y \end{array}\right\} \rightarrow 1+2y=1{,}010 \rightarrow y=0{,}005 \rightarrow x=1{,}005$$

La botella pesa 1 kg y 5 g, y el tapón, 5 g.

**Un número tiene dos cifras. Si multiplico la suma de sus cifras por 6 y obtengo dicho número, ¿qué número es?**

$x$ = cifra de las decenas $\qquad$ $y$ = cifra de las unidades

$6(x+y)=10x+y \rightarrow y=\frac{4}{5}x$ $\rightarrow$ Como $x$ solo puede tomar valores entre 0 y 9, la única solución válida es $x=5$.

Así, el número buscado es 54.

## ACTIVIDADES

**1. Escribe las siguientes ecuaciones en la forma $ax+by=c$ e indica los coeficientes y el término independiente de cada una de ellas.**

a) $3x-y+2=x-4y+1$

b) $-5\cdot(x-y)+3y=2x$

c) $2y-(6x+7)=-2$

| | Ecuación | Coeficiente de $x$ | Coeficiente de $y$ | Término independiente |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $3x+3y=-1$ | 3 | 3 | –1 |
| **b)** | $-7x+8y=0$ | –7 | 8 | 0 |
| **c)** | $-6x+2y=5$ | –6 | 2 | 5 |

**2. Averigua de cuáles de estas ecuaciones son solución los valores $x=1$, $y=-2$.**

a) $4x+2y=1$

b) $4x-2y=0$

c) $-4x+2y=-8$

d) $4x+2y=0$

a) $4\cdot 1+2\cdot(-2)\neq 1$ → No es solución.

b) $4\cdot 1-2\cdot(-2)\neq 0$ → No es solución.

c) $-4\cdot 1+2\cdot(-2)=-8$ → Sí es solución.

d) $4\cdot 1+2\cdot(-2)=0$ → Sí es solución.

**3. Encuentra cuatro soluciones de la ecuación $-x+5y=2$. ¿Cuántas soluciones tiene?**

De las infinitas soluciones que tiene, cuatro de ellas son, por ejemplo:

$x=-2,\ y=0$ $\qquad$ $x=3,\ y=1$ $\qquad$ $x=8,\ y=2$ $\qquad$ $x=-7,\ y=-1$

**4. Halla las soluciones de la ecuación $3x + y = 2$ para los valores que se dan.**

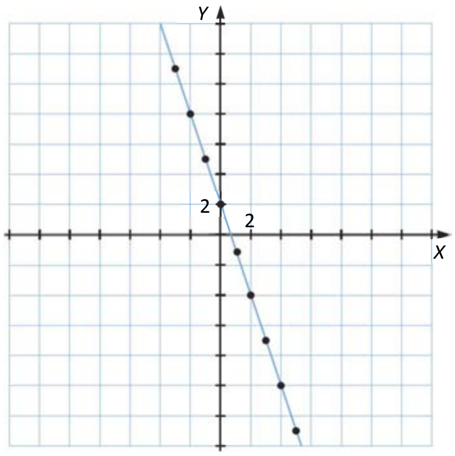
a) $x = 0$ d) $x = -1$ g) $x = 3$

b) $x = 1$ e) $x = -2$ h) $x = 4$

c) $x = 2$ f) $x = -3$ i) $x = 5$

**Representa gráficamente las soluciones que has obtenido y únelas mediante una línea. ¿Qué tipo de línea obtienes?**

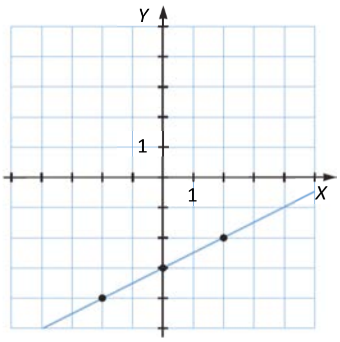
| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 11 | 8 | 5 | 2 | –1 | –4 | –7 | –10 | –13 |




Se obtiene una línea recta.

**5. Encuentra tres soluciones de la ecuación $x - 2y = 6$ y comprueba que están situadas en la misma recta.**

$x = -2$, $y = -4$ $x = 0$, $y = -3$ $x = 2$, $y = -2$

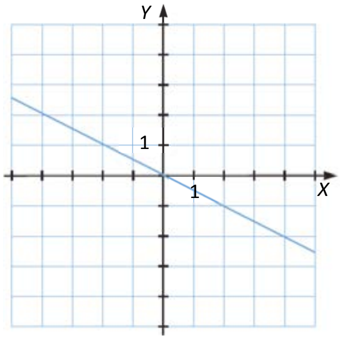



**6. Representa gráficamente las soluciones de estas ecuaciones lineales.**

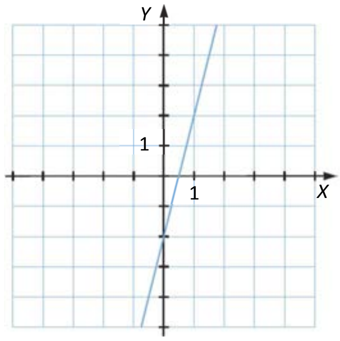
a) $x + 2y = 0$ c) $4x - y = 2$

b) $x + y = 5$ d) $x - 2y = 4$

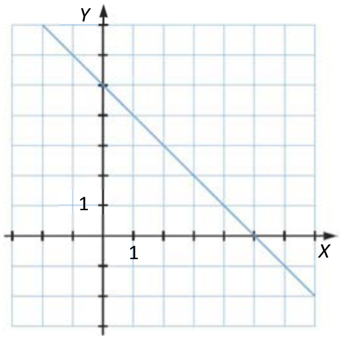
a)



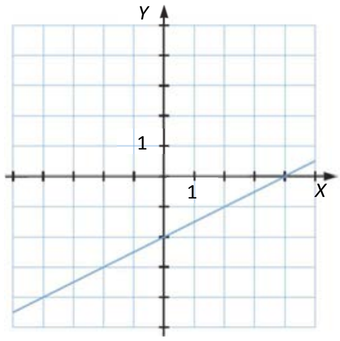

c)




b)




d)




**7. Considera la ecuación $-3 \cdot (2x - y) + y = 2x$.**

a) Exprésala en la forma $ax + by = c$.

b) Construye una tabla de valores con cuatro de sus soluciones.

c) Representa gráficamente las soluciones de la ecuación.

d) Comprueba que el par de valores $x = 6$, $y = 12$ es solución, constatando que cumple la ecuación y que es un punto de la recta representada.

e) Averigua, a la vista de la recta representada, si el punto $(-4, 8)$ es solución de la ecuación.

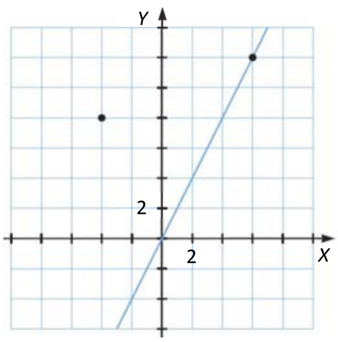
a) $2x - y = 0$

b)

| **x** | 1 | –1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| **y** | 2 | –2 | 0 | 4 |

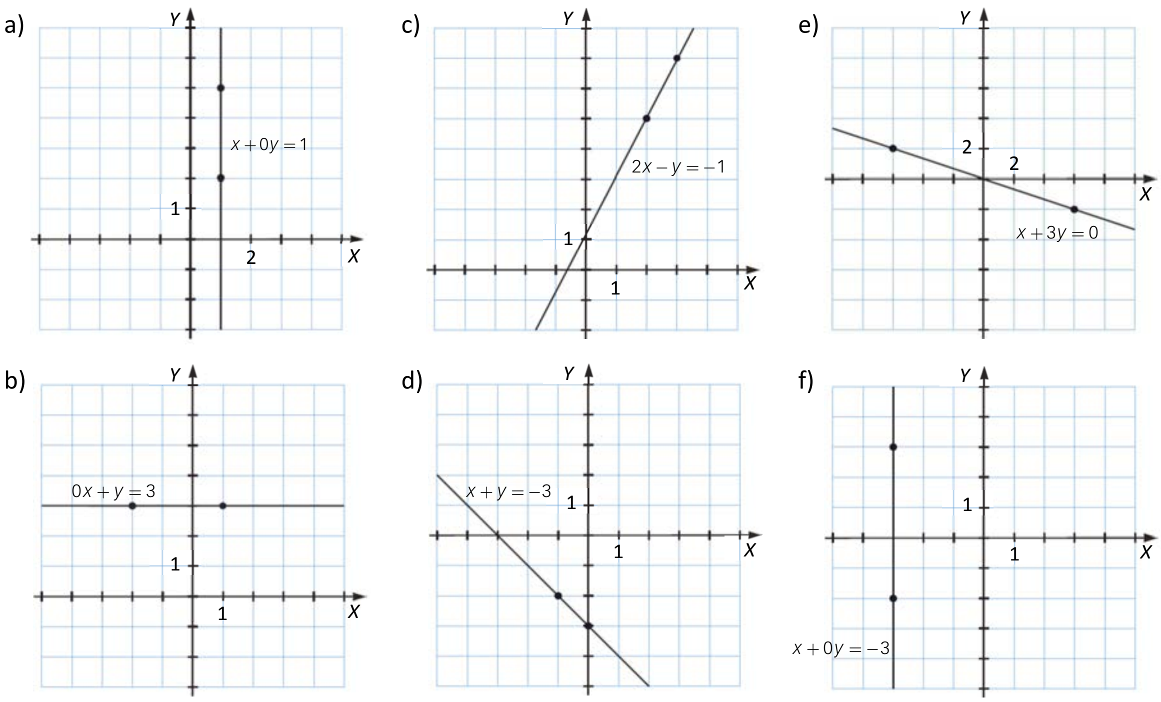
c), d) y e) El par de valores $x = 6$, $y = 12$ cumple la ecuación, porque $2 \cdot 6 - 12 = 0$.

El punto $(-4, 8)$ no es solución.



**8. Razona si estos pares de valores pueden ser soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.**

a) (1, 2) y (1, 5)
b) (−2, 3) y (1, 3)
c) (2, 5) y (3, 7)
d) (0, −3) y (−1, −2)
e) (−6, 2) y (6, −2)
f) (−3, −2) y (−3, 3)




**9. Haz los cálculos e indica cuáles de los siguientes sistemas tienen como solución el par de valores (−3, 4).**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + y = -8 \\ -x - 2y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -11 \\ -x + y = 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -10 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = -6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4\cdot(-3)+4=-8 \\ -(-3)-2\cdot 4\neq 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución

b) $\left.\begin{array}{l} -3-2\cdot 4=-11 \\ -(-3)+4=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí es solución

c) $\left.\begin{array}{l} 2\cdot(-3)-4=-10 \\ -3+3\cdot 4=9 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí es solución

d) $\left.\begin{array}{l} -3+2\cdot 4=5 \\ 2\cdot(-3)+3\cdot 4\neq -6 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución

**10. Halla el valor de *a* y *b* para que el par de valores (2, −3) sea solución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} x + by = 5 \\ ax - 3y = -1 \end{array}\right\}$$

$2 + b\cdot(-3) = 5 \rightarrow b = -1$

$2a - 3\cdot(-3) = -1 \rightarrow a = -5$

**11. Escribe dos sistemas, uno compatible determinado y otro compatible indeterminado, para los que (−2, 5) sea solución.**

Compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 5x+2y=0 \end{array}\right\}$$

Compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$$

**12. ¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas?**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=10 \\ -x+y=-3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=10 \\ -x+y=-3 \end{array}\right\}$

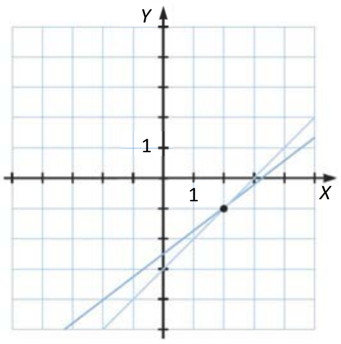
c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ 3x-y=-8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=10 \\ -6x+8y=-20 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -2x+5y=9 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$

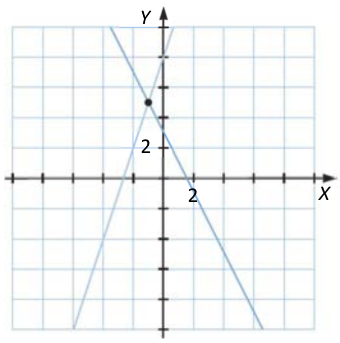
f) $\left.\begin{array}{r} 5x-4y=2 \\ 3x+2y=-12 \end{array}\right\}$

a)



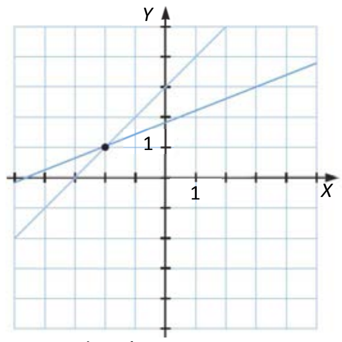

Una solución

c)



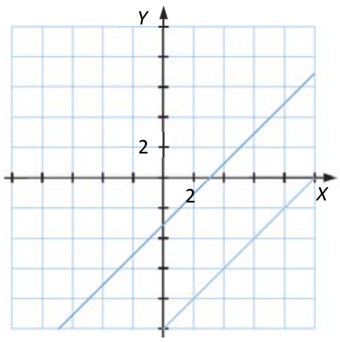

Una solución

e)



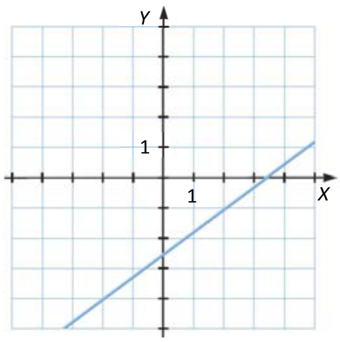

Una solución

b)



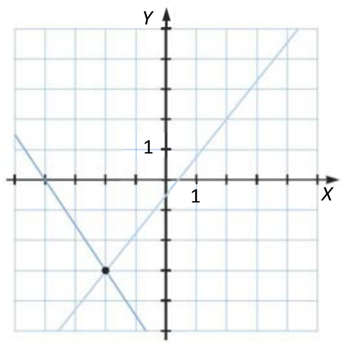

Sin solución

d)




Infinitas soluciones

f)




Una solución

**13. Considera la ecuación $x + y = 3$. Representa sus soluciones y elige una de estas ecuaciones para formar un sistema compatible indeterminado.**

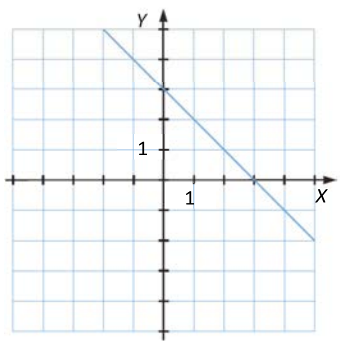
a) $x + y = 6$

b) $2x + 2y = 6$

c) $-x = 3 + y$

d) $-x - y = -3$

Con las ecuaciones b) y d) se forma un sistema compatible indeterminado.



**14. ¿Cuántas soluciones tiene este sistema?**

$$\left.\begin{array}{r} x - 4y = 1 \\ -x + 4y = -1 \end{array}\right\}$$

a) Modifica los signos de sus coeficientes para obtener un sistema compatible determinado.

b) ¿Puedes escribir un sistema incompatible modificando los signos de los coeficientes?

Tiene infinitas soluciones porque ambas ecuaciones representan la misma recta.

a) $\left.\begin{array}{l} x - 4y = 1 \\ x + 4y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 4y = 1 \\ x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

**15. Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 3x - y = -8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -2x + 5y = 9 \\ x - y = -3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x + 3y = -2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 5x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = -12 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 12 \\ 4x + 3y = 5 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x - y = -8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 3 - 2x \\ 3x - y = -8 \end{array}\right\} \to 3x - (3 - 2x) = -8 \to x = -1, y = 5$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 4 + 2y \\ -x + 3y = -5 \end{array}\right\} \to -(4 + 2y) + 3y = -5 \to y = -1, x = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} -2x + 5y = 9 \\ x - y = -3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -2x + 5y = 9 \\ x = -3 + y \end{array}\right\} \to -2\cdot(-3 + y) + 5y = 9 \to y = 1, x = -2$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + 3y = -2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = -y \\ 2x + 3y = -2 \end{array}\right\} \to -2y + 3y = -2 \to y = -2, x = 2$

e) $\left.\begin{array}{l} 5x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = -12 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2 + 4y}{5} \\ 3x + 2y = -12 \end{array}\right\} \to 3\cdot\dfrac{2 + 4y}{5} + 2y = -12 \to y = -3, x = -2$

f) $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = 12 \\ 4x + 3y = 5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{12 + 2y}{5} \\ 4x + 3y = 5 \end{array}\right\} \to 4\cdot\dfrac{12 + 2y}{5} + 3y = 5 \to y = -1, x = 2$

**16. Efectúa las operaciones y después resuelve por sustitución** $\left.\begin{array}{r} 2\cdot(x + 3) - (x - y) = 9 \\ -3\cdot(x + y) + 4y = 11 \end{array}\right\}$.

$\left.\begin{array}{l} 2x + 6 - x + y = 9 \\ -3x - 3y + 4y = 11 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 3 - y \\ -3x + y = 11 \end{array}\right\} \to -3\cdot(3 - y) + y = 11 \to y = 5, x = -2$

**17.** **Resuelve por sustitución.**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y+4}{3}=x\\[2mm]\dfrac{x+4}{5}=-y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}y+4=3x\\x+4=-5y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}y=3x-4\\x+4=-5y\end{array}\right\}\rightarrow x+4=-5\cdot(3x-4)\rightarrow x=1, y=-1$$

**18.** **Resuelve estos sistemas utilizando el método de igualación.**

a) $\left.\begin{array}{l}2x-y=-10\\x+3y=9\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l}5x-2y=-1\\-5x+6y=13\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}3x-4y=10\\-x+y=-3\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l}2x+5y=-1\\2x-3y=7\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}2x-y=-10\\x+3y=9\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{y-10}{2}\\x=9-3y\end{array}\right\}\rightarrow y-10=18-6y\rightarrow y=4, x=-3$

b) $\left.\begin{array}{l}3x-4y=10\\-x+y=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{10+4y}{3}\\x=y+3\end{array}\right\}\rightarrow 10+4y=3y+9\rightarrow y=-1, x=2$

c) $\left.\begin{array}{l}5x-2y=-1\\-5x+6y=13\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+2y}{5}\\x=\dfrac{6y-13}{5}\end{array}\right\}\rightarrow -1+2y=6y-13\rightarrow y=3, x=1$

d) $\left.\begin{array}{l}2x+5y=-1\\2x-3y=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-5y}{2}\\x=\dfrac{7+3y}{2}\end{array}\right\}\rightarrow -1-5y=7+3y\rightarrow y=-1, x=2$

**19.** **Efectúa las operaciones y después resuelve por igualación.**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{4\cdot(x+2y)-x=-y}\\\mathbf{-3x=2y-4-x}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}4x+8y-x=-y\\-3x=2y-4-x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-3y\\x=2-y\end{array}\right\}\rightarrow -3y=2-y\rightarrow -2y=2\rightarrow y=-1, x=3$$

**20.** **Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.**

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x-4}{5}-\dfrac{y+3}{2}=3\\[2mm]\dfrac{x+y}{2}=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}4x-8-5y-15=30\\x+y=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{53+5y}{4}\\x=2-y\end{array}\right\}\rightarrow 53+5y=8-4y\rightarrow 9y=-45\rightarrow y=-5, x=7$$

**21. Resuelve estos sistemas, operando adecuadamente para poder aplicar el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-11 \\ -x+y=7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-4y=6 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x-7y=-19 \\ -5x+6y=13 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-11 \\ -x+y=7 \end{array}\right\} \to -y=-4 \to y=4, x=-3$

b) $\left.\begin{array}{r} x-4y=6 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \\ \xrightarrow{\cdot 4} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-4y=6 \\ 4x+4y=4 \end{array}\right\} \to 5x=10 \to x=2, y=-1$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-7y=-19 \\ -5x+6y=13 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} \left.\begin{array}{r} 10x-35y=-95 \\ -10x+12y=26 \end{array}\right\} \to -23y=-69 \to y=3, x=1$

**22. Efectúa y resuelve por reducción.**

$$\left.\begin{array}{r} (x-4y)-2\cdot(3x+y)=-2 \\ -x+3\cdot(y-x)=14 \end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{l} x-4y-6x-2y=-2 \\ -x+3y-3x=14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -5x-6y=-2 \\ -4x+3y=14 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} \left.\begin{array}{r} -5x-6y=-2 \\ -8x+6y=28 \end{array}\right\} \to -13x=26 \to x=-2, y=2$

**23. Resuelve por reducción.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2y}{2}+\dfrac{x}{4}=0 \\ -x+5\cdot\left(\dfrac{2x+y+1}{6}\right)=6 \end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{l} 2x-4y+x=0 \\ -6x+10x+5y+5=36 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-4y=0 \\ 4x+5y=31 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot 4} \end{array} \left.\begin{array}{r} 15x-20y=0 \\ 16x+20y=124 \end{array}\right\} \to 31x=124 \to x=4, y=3$

**24. Resuelve estos sistemas de ecuaciones por el método que consideres más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5+x+2y \\ x-2y-3=3-42y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} (x+4)+2(y-2)=18-x-y \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-y}{2}+x=-1 \\ 3(y-x)=6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x-y}{3}+2x=4+y \\ 2x=4+y \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3y+3=x-2(x+y) \\ \dfrac{2x+3y}{2}=18 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x+40y=6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=5-y \\ x+40y=6 \end{array}\right\} \to 5-y+40y=6 \to y=\dfrac{1}{39}, x=\dfrac{194}{39}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=18 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \to \left.\begin{array}{r} 2x+3y=18 \\ -2x-2y=-4 \end{array}\right\} \to y=14, x=-12$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=-2 \\ -3x+3y=6 \end{array}\right\} \to 2y=4 \to y=2, x=0$

d) $\left.\begin{array}{l}8x-4y=12\\2x-y=4\end{array}\right\}\xrightarrow{\frac{1}{4}}\left.\begin{array}{l}2x-y=3\\2x-y=4\end{array}\right\}$ → Sistema incompatible. No existe solución.

e) $\left.\begin{array}{l}x+5y=-3\\2x+3y=36\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-3-5y\\2x+3y=36\end{array}\right\}\rightarrow 2\cdot(-3-5y)+3y=36\rightarrow y=-6, x=27$

**25.** **Resuelve estos sistemas por el método que consideres más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+2y}{5}=5\\2(x+y)+4y=40\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-y}{3}+y=1\\4(-x+y)-3y=6\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{3\cdot(2x-2)}{2}-\dfrac{3(y+1)}{9}=-10\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}x+2y=25\\2x+6y=40\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=25-2y\\x=20-3y\end{array}\right\}\rightarrow 25-2y=20-3y\rightarrow y=-5, x=35$

b) $\left.\begin{array}{l}x+2y=3\\-4x+y=6\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot 4}\left.\begin{array}{l}4x+8y=12\\-4x+y=6\end{array}\right\}\rightarrow 9y=18\rightarrow y=2, x=-1$

c) $\left.\begin{array}{l}2x+3y=2\\54x-54-6y-6=-180\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y=2\\9x+20=y\end{array}\right\}\rightarrow 2x+3\cdot(9x+20)=2\rightarrow x=-2, y=2$

**26.** **Escribe un sistema de ecuaciones que sea apropiado para resolverlo por sustitución, y otro, por reducción.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sistema apropiado para resolver por sustitución: $\left.\begin{array}{l}x=5y\\x-3y=-4\end{array}\right\}$

Sistema apropiado para resolver por reducción: $\left.\begin{array}{l}2x+y=7\\x-y=-4\end{array}\right\}$

**27.** **Expresa como ecuaciones con dos incógnitas.**

a) La suma de dos números es 50.
b) La diferencia de edad de dos hermanos es de 5 años.
c) Un padre tiene el doble de edad que su hijo.
d) Un número supera a otro en 10 unidades.

a) $x+y=50$ siendo $x$ e $y$ los dos números.

b) $x-y=5$ siendo $x$ e $y$ las edades de los dos hermanos.

c) $x=2y$ siendo $x$ la edad del padre e $y$ la edad de su hijo.

d) $x=y+10$ siendo $x$ el número que supera a $y$ en 10 unidades.

**28. Las edades de Leo y su padre suman 40 años. La edad del padre es 7 veces la edad del hijo. Expresa el problema con un sistema de ecuaciones.**

$x$ = edad de Leo $y$ = edad del padre

$$\left.\begin{array}{l} x+y=40 \\ y=7x \end{array}\right\} \to x+7x=40 \to 8x=40 \to x=5, y=35$$

**29. En una reunión, si cada persona come 5 pasteles, sobran 3; pero si comen 6, falta 1. ¿Cuántas personas y pasteles hay?**

$x$ = número de personas $y$ = número de pasteles

$$\left.\begin{array}{l} 5x+3=y \\ 6x-1=y \end{array}\right\} \to 5x+3=6x-1 \to x=4, y=23$$

**30. Un hotel tiene, entre dobles e individuales, 120 habitaciones. Si el número de camas es 195, ¿cuántas habitaciones dobles tiene? ¿E individuales?**

$x$ = número de habitaciones individuales $y$ = número de habitaciones dobles

$$\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ x+2y=195 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \left.\begin{array}{r} -x-y=-120 \\ x+2y=195 \end{array}\right\} \to y=75, x=45$$

**31. Las edades de un padre y su hija suman 77 años. Dentro de 2 años el padre tendrá el doble de la edad de su hija. ¿Qué edades tienen en la actualidad?**

$x$ = edad del padre $y$ = edad de la hija

$$\left.\begin{array}{l} x+y=77 \\ x+2=2\cdot(y+2) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x+y=77 \\ x-2y=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=77-y \\ x-2y=2 \end{array}\right\} \to 77-y-2y=2 \to y=25, x=52$$

**32. Un coche y un autobús, situados uno detrás del otro, miden juntos 14 m. El doble de la longitud del coche supera en 1 m la longitud del autobús. ¿Cuánto mide cada uno?**

$x$ = longitud del coche $y$ = longitud del autobús

$$\left.\begin{array}{l} x+y=14 \\ 2x=y+1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x+y=14 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\} \to 3x=15 \to x=5, y=9$$

**33. Tres pantalones y una camiseta cuestan 123 €. Un pantalón del mismo tipo y tres camisetas como las anteriores cuestan 105 €. ¿Cuánto vale una camiseta?**

$x$ = precio de un pantalón $y$ = precio de una camiseta

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=123 \\ x+3y=105 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x+y=123 \\ x=105-3y \end{array}\right\} \to 3\cdot(105-3y)+y=123 \to -8y=-192 \to y=24, x=33$$

## ACTIVIDADES FINALES

**34. Comprueba si el par de valores $x = -1$, $y = 3$ es solución de alguna de estas ecuaciones.**

a) $x + y = 4$ c) $-x + 3y = 10$

b) $x - y = -4$ d) $2x + 5y = 8$

a) $-1+3 \neq 4 \rightarrow$ No es solución.

b) $-1-3=-4 \rightarrow$ Sí es solución.

c) $1+3\cdot 3=10 \rightarrow$ Sí es solución.

d) $-1\cdot 2+5\cdot 3=-2+15 \neq 8 \rightarrow$ No es solución.

**35. Asocia en tu cuaderno cada ecuación con sus soluciones.**

a) $x + y = 10$ 1. $(-1, 5)$

b) $3x - y = 2$ 2. $(4, 6)$

c) $7x + 2y = 16$ 3. $(7, 3)$

d) $2x - 3y = 0$ 4. $(0, -2)$

e) $-x + 5y = 3$ 5. $(-7, 17)$

f) $-4x + y = 1$ 6. $(2, 1)$

a) $x+y=10 \rightarrow$ (4, 6), (7, 3), (–7, 17)

b) $3x-y=2 \rightarrow$ (0, –2)

c) $7x+2y=16 \rightarrow$ (2, 1)

d) Ninguna de las soluciones dadas es válida.

e) $-x+5y=3 \rightarrow$ (2, 1)

f) Ninguna de las soluciones dadas es válida.

**36. Escribe, en cada caso, una ecuación lineal con dos incógnitas de forma que una de sus soluciones sea el par de valores que se da.**

a) $x = 2, y = -1$ d) $x = 0, y = 1$

b) $x = \frac{1}{2}, y = -5$ e) $x = \frac{-2}{3}, y = \frac{4}{5}$

c) $x = -3, y = 0$ f) $x = y = -1$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3x+y=5$ c) $x+5y=-3$ e) $3x+5y=2$

b) $4x-y=7$ d) $2x+3y=3$ f) $2x-(y+1)=-2$

**37. Halla el valor desconocido para que estos pares de valores sean solución de la ecuación $3x - 2y = 10$.**

a) $(a, -5)$ c) $(-2, c)$

b) $(b, 2)$ d) $(d, -14)$

a) $3a+10=10 \rightarrow a=0$

b) $3b-4=10 \rightarrow b=\frac{14}{3}$

c) $-6-2c=10 \rightarrow c=-8$

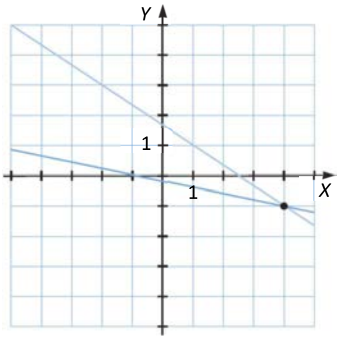
d) $3d+28=10 \rightarrow d=-6$

**38.** **Escribe dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, $x$ e $y$, de forma que $x = 4$, $y = -1$ sea solución de ambas. Después, representa gráficamente las soluciones de ambas ecuaciones. ¿Qué posición relativa tienen las dos rectas?**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x + 5y = -1$; $2x + 3y = 5$

Las rectas podrían ser secantes o coincidentes. En el ejemplo las rectas son secantes.




**39.** **Construye una tabla de valores para estas ecuaciones tomando los siguientes valores de $x$.**

$$x = -1 \qquad x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$$

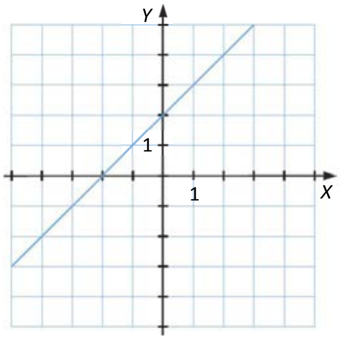
**Después, representa gráficamente todas las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $-x + y = 2$ c) $y - 3x = 1$

b) $x + y = 3$ d) $2x = 11 - 4y$

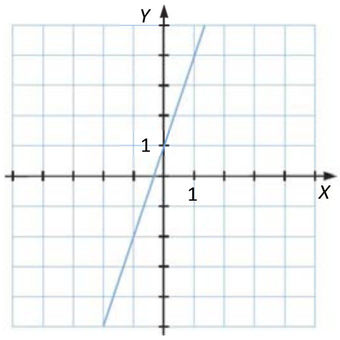
a)

| **x** | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |



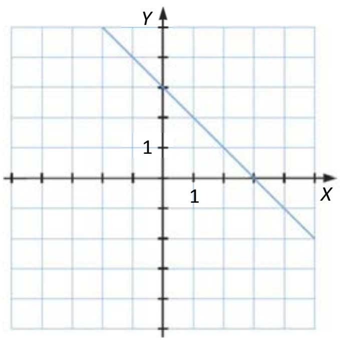

c)

| **x** | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | −5 | −2 | 1 | 4 | 7 |



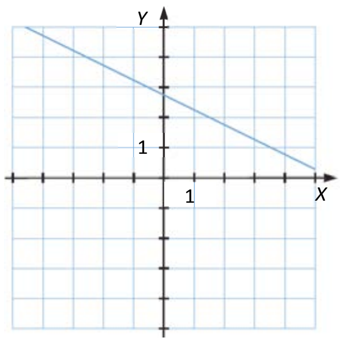

b)

| **x** | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |




d)

| **x** | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 15/4 | 13/4 | 11/4 | 9/4 | 7/4 |



**40. Comprueba gráficamente, en cada caso, si los pares de valores dados pueden ser solución de una ecuación lineal con dos incógnitas.**

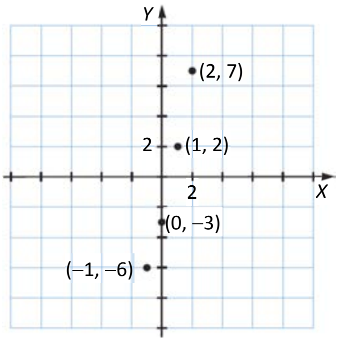
a) (2, 7), (0, −3), (1, 2), (−1, −6)

b) (1, 2), (3, 3), (0, 3), (−5, −1)

c) (0, 0), (3, −1), (9, −3), (6, −2)

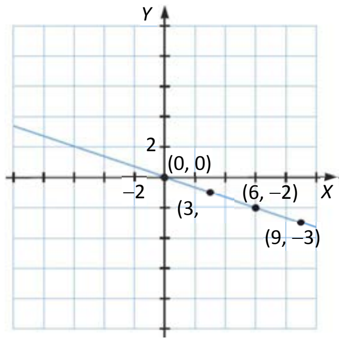
d) (−2, 1), (−7, 3), (8, −3), (3, −1)

a)



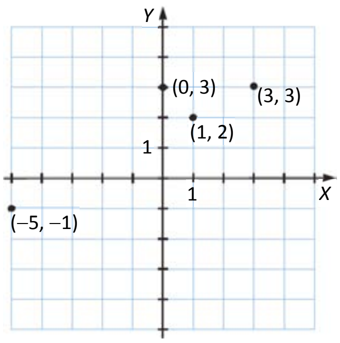

No están alineados.

c)



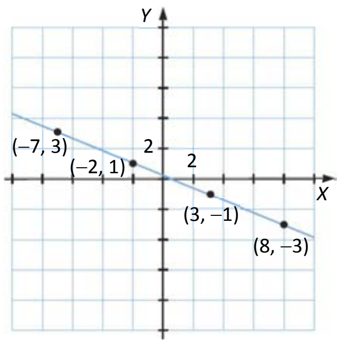

Sí están alineados.

b)




No están alineados.

d)




Sí están alineados.

**41. Escribe cada una de las ecuaciones lineales en la forma $ax + by = c$ e indica para cada una de ellas los coeficientes de $x$ e $y$, y el término independiente.**

a) $3x - 8 = x + 5y$

b) $-x + 3 = y + 4x$

c) $2(x - y) = 3(y - 2)$

d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2}$

e) $\frac{7x}{4} - 2(x + y) = 5$

a) $2x - 5y = 8 \rightarrow$ Coeficiente de $x$: 2 Coeficiente de $y$: –5 Término independiente: 8

b) $5x + y = 3 \rightarrow$ Coeficiente de $x$: 5 Coeficiente de $y$: 1 Término independiente: 3

c) $2x - 5y = -6 \rightarrow$ Coeficiente de $x$: 2 Coeficiente de $y$: –5 Término independiente: –6

d) $2x - 3y = -11 \rightarrow$ Coeficiente de $x$: 2 Coeficiente de $y$: –3 Término independiente: –11

e) $-x - 8y = 20 \rightarrow$ Coeficiente de $x$: –1 Coeficiente de $y$: –8 Término independiente: 20

**42. Responde razonadamente.**

a) ¿Qué ecuación lineal con dos incógnitas tiene por soluciones todos los pares de la forma $(a, a)$?

b) ¿Qué ecuación lineal tiene por soluciones todos los pares de la forma $(x, 0)$?

c) ¿Y la que tiene por soluciones todos los pares de la forma $(0, y)$?

a) $x - y = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 0$

**43. Indica qué par de valores es solución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}3x + 5y = 1\\ -x + 4y = -6\end{array}\right\}$$

a) (2, 1) c) (−2, 1)

b) (2, −1) d) (−2, −1)

a) $\left.\begin{array}{l}3\cdot 2+5\cdot 1=11\neq 1\\ -2+4\cdot 1=2\neq -6\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{array}{l}3\cdot 2+5\cdot(-1)=1\\ -2+4\cdot(-1)=-6\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí es solución.

c) $\left.\begin{array}{l}3\cdot(-2)+5\cdot 1=-1\neq 1\\ 2+4\cdot 1=6\neq -6\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución.

d) $\left.\begin{array}{l}3\cdot(-2)+5\cdot(-1)=-11\neq 1\\ 2+4\cdot(-1)=-2\neq -6\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución.

**44. Averigua de qué sistema es solución el par de valores (3, −2).**

a) $\left.\begin{array}{r}x + y = 1\\ 2x - y = 8\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}3x - y = 7\\ -x + 4y = -11\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x + 3y = 0\\ x - y = 1\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}x + y = 1\\ x - y = 5\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}3-2=1\\ 2\cdot 3+2=8\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí es solución.

c) $\left.\begin{array}{l}3\cdot 3+2=11\neq 7\\ -3+4\cdot(-2)=-11\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{array}{l}2\cdot 3+3\cdot(-2)=0\\ 3+2=5\neq 1\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución.

d) $\left.\begin{array}{l}3-2=1\\ 3+2=5\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí es solución.

**45. Dada la ecuación $x + 3y = 2$, elige entre las siguientes ecuaciones aquella que, junto con la anterior, forme el sistema cuya solución sea (−4, 2).**

a) $x - y = 6$ d) $2(y - 1) = x$

b) $-x + y = 6$ e) $1 - x = y + 3$

c) $x + 3y = 0$ f) $3 - (x + y) = 1$

a) $-4-2\neq 6$ c) $-4+6\neq 0$ e) $1+4=2+3$

b) $4+2=6$ d) $2\cdot(2-1)\neq -4$ f) $3-(-4+2)\neq 1$

(−4, 2) es solución de las ecuaciones $-x + y = 6$ y $1 - x = y + 3$, es decir, con ellas se forma un sistema cuya solución sea (−4, 2).

**46. Escribe, en cada caso, un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea la siguiente.**

a) $x = 2, y = -1$ c) $x = \frac{1}{2}, y = -4$

b) $x = -3, y = 3$ d) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{-1}{5}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

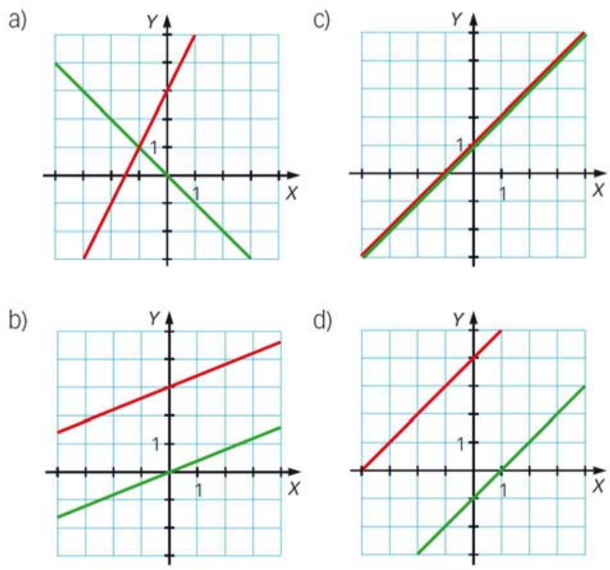
a) $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}+y=0\\ -x+2y=-4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}x+y=0\\ \frac{x+1}{2}=-y+2\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l}4x+\frac{y}{2}=0\\ 2x-(y+3)=2\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}6x+5y=3\\ x+y=\frac{7}{15}\end{array}\right\}$

**47. Indica qué tipo de sistema de ecuaciones se ha representado.**




a) Sistema compatible determinado: una solución.
b) Sistema incompatible: sin solución.
c) Sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
d) Sistema incompatible: sin solución.

**48. Resuelve gráficamente los sistemas de ecuaciones e indica de qué tipo son.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$  c) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right\}$

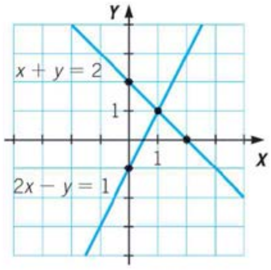
b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{array}\right\}$  d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 5 \end{array}\right\}$

a) $x + y = 2$  $2x - y = 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 0 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-1$ |
| 1 | 1 |

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 1$.
El sistema es compatible determinado.

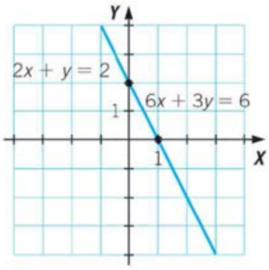



b) $2x + y = 2$  $6x + 3y = 6$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |

Las dos rectas coinciden.
El sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.

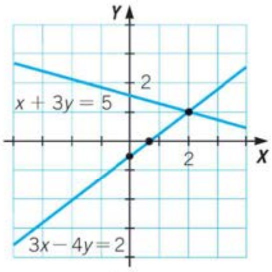



c) $x + 3y = 5$  $3x - 4y = 2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 5 | 0 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-1/2$ |
| 2/3 | 0 |

Las dos rectas se cortan en el punto (2, 1).
El sistema es compatible determinado.

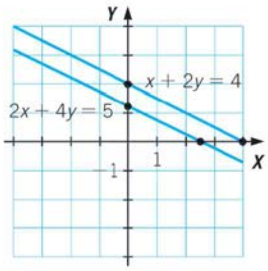



d) $x + 2y = 4$  $2x + 4y = 5$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 4 | 0 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 5/4 |
| 5/2 | 0 |

Las dos rectas son paralelas, no se cortan.
El sistema es incompatible.




**49. Halla la solución de cada sistema mediante las tablas de valores de las ecuaciones que lo forman.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$  e) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 13 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{array}\right\}$  f) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = -2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$  g) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$  h) $\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

a) Soluciones de $x - y = 1$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1 | 0 | 1 | **2** |

Soluciones de $2x - y = 4$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −4 | −2 | 0 | **2** |

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 2$.

b) Soluciones de $x + y = 2$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 1 | 0 | **−1** |

Soluciones de $2x - 3y = 9$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −3 | −7/3 | −5/3 | **−1** |

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -1$.

c) Soluciones de $x - 2y = 1$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1/2 | 0 | 1/2 | **1** |

Soluciones de $2x + y = 7$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 5 | 3 | **1** |

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

d) Soluciones de $2x + y = 7$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 5 | 3 | **1** |

Soluciones de $x - 3y = 0$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1/3 | 2/3 | **1** |

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

e) Soluciones de $2x + y = 13$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | **3** |

Soluciones de $x - y = 2$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | **3** |

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

f) Soluciones de $-x + 2y = 2$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3/2 | **2** |

Soluciones de $3x - 4y = -2$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1/2 | 5/4 | **2** |

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 2$.

g) Soluciones de $5x - 3y = 1$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | −1/3 | 4/3 | **3** |

Soluciones de $4x + y = 11$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | 11 | 7 | **3** |

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 3$.

h) Soluciones de $5x + 3y = 16$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | 16/3 | 11/3 | **2** |

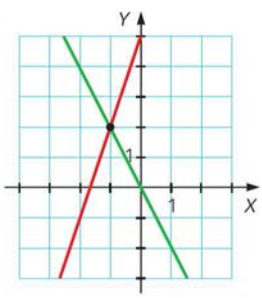
Soluciones de $3x - 3y = 0$:

| $x$ | 0 | 1 | **2** |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | **2** |

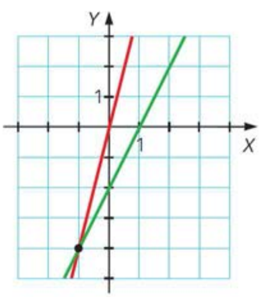
La solución del sistema es $x = 2$, $y = 2$.

**50. Determina el sistema de ecuaciones que está representado en cada gráfica y su solución.**

a)




b)



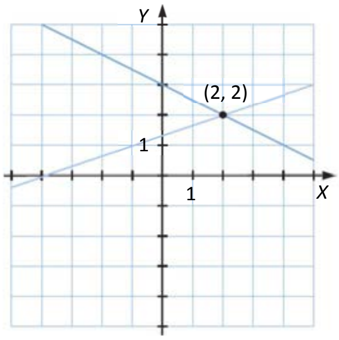

a) $\left.\begin{array}{l} y = -2x \\ y = 3x + 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = -1, y = 2$

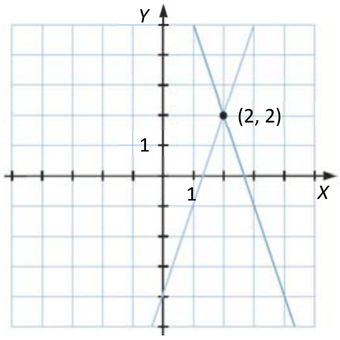
b) $\left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 2x - 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = -1, y = -4$

**51.** **¿Puede haber varios sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, con distintas ecuaciones y con la misma solución?**

**Haz una representación gráfica que ilustre tu respuesta.**

Sí. Por ejemplo:




**52.** **Resuelve gráficamente estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$

**¿Qué puedes afirmar?**

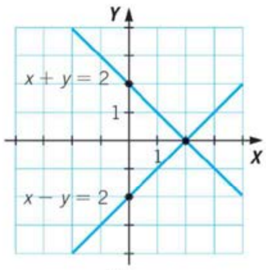
a) $x + y = 2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 0 |

$x - y = 2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | −2 |
| 2 | 0 |

Solución: (2, 0)




b) $2x + 3y = 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −1 | 2 |
| 2 | 0 |

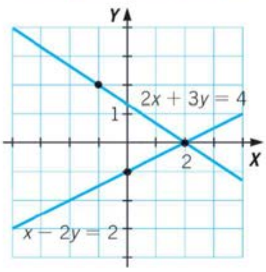
$x - 2y = 2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | −1 |
| 2 | 0 |

Solución: (2, 0)

Se podría afirmar que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 0$

Son sistemas equivalentes.

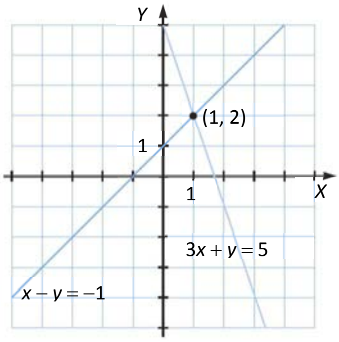


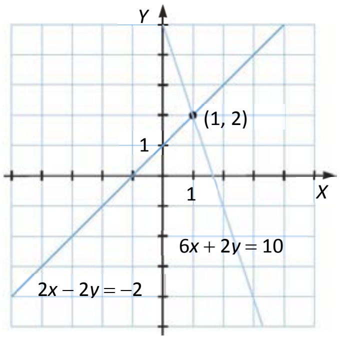

**53.** **Resuelve gráficamente estos sistemas.**

$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 6x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

a) ¿Tienen la misma solución? ¿Por qué?

b) ¿Podrías escribir otro sistema que tenga la misma solución que estos dos?




a) Sí, tienen la solución común (1, 2), porque las ecuaciones de los dos sistemas son equivalentes.

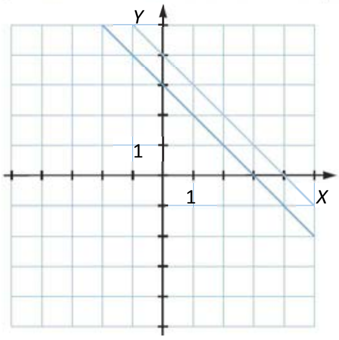
b) Sí, por ejemplo: $\left.\begin{array}{r}-3x-y=-5\\ 3x-3y=-3\end{array}\right\}$

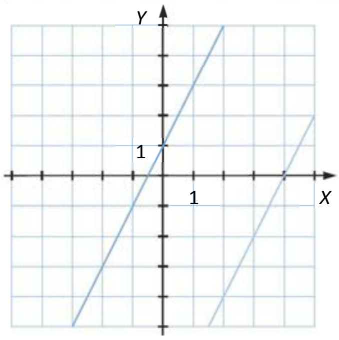
**54. Resuelve gráficamente estos sistemas.**

$\left.\begin{array}{r}x+y=3\\ x+y=4\end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r}2x-y=8\\ 2x-y=-1\end{array}\right\}$

a) ¿Cuántas soluciones tienen?

b) ¿Podrías escribir otro sistema que tenga el mismo número de soluciones que estos dos?




a) No tienen ninguna solución. Son incompatibles.

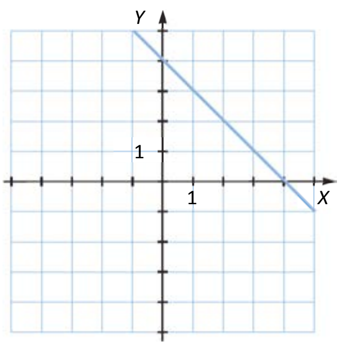
b) Sí, por ejemplo: $\left.\begin{array}{r}2x+3y=5\\ 2x+3y=7\end{array}\right\}$

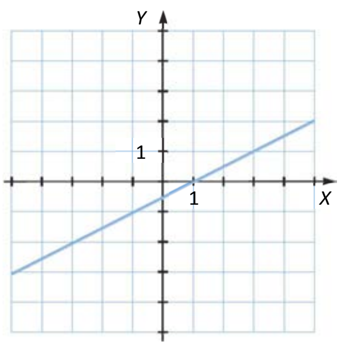
**55. Resuelve gráficamente estos sistemas.**

$\left.\begin{array}{r}x+\ \ y=4\\ 2x+2y=8\end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r}x-2y=1\\ 2x-4y=2\end{array}\right\}$

a) ¿Cuántas soluciones tienen?

b) ¿Podrías escribir otro sistema que tenga el mismo número de soluciones que estos dos?



a) Tienen infinitas soluciones. Son compatibles indeterminados.

b) Sí, por ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x+4y=6 \\ 3x+12y=18 \end{array}\right\}$

**56.** **Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas que forme un sistema con la ecuación $3x - 2y = 4$, y tenga:**

a) Una única solución.

b) Infinitas soluciones.

c) Ninguna solución.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 9x-6y=12 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 9x-6y=4 \end{array}\right\}$

**57.** **Calcula el valor de *a* y *b* en cada caso.**

a) $(-1, 2)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{l} ax+y=5 \\ -x+by=-5 \end{array}\right\}$.

b) $(0, -2)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{l} 3x+ay=8 \\ -2x-by=-10 \end{array}\right\}$.

c) $(1, 3)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{l} 5x-by=-1 \\ ax+3y=13 \end{array}\right\}$.

d) $(2, -1)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ bx+y=5 \end{array}\right\}$.

a) $\left.\begin{array}{l} -a+2=5 \\ 1+2b=-5 \end{array}\right\} \rightarrow a=b=-3$

b) $\left.\begin{array}{l} -2a=8 \\ 2b=-10 \end{array}\right\} \rightarrow a=-4,\ b=-5$

c) $\left.\begin{array}{l} 5-3b=-1 \\ a+9=13 \end{array}\right\} \rightarrow a=4,\ b=2$

d) $\left.\begin{array}{l} 2a-3=1 \\ 2b-1=5 \end{array}\right\} \rightarrow a=2,\ b=3$

**58.** **Resuelve por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+5y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 7x+8y=23 \\ 3x+2y=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x+y=10 \\ 2x-y=10 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x-3y=1 \\ 4x+y=11 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+5y=1 \\ x=1-y \end{array}\right\} \rightarrow 3\cdot(1-y)+5y=1 \rightarrow 3-3y+5y=1 \rightarrow y=-1, x=2$

b) $\left.\begin{array}{l} 7x+8y=23 \\ x=\dfrac{7-2y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow 7\cdot\left(\dfrac{7-2y}{3}\right)+8y=23 \rightarrow 49-14y+24y=69 \rightarrow y=2, x=1$

c) $\left.\begin{array}{l} y=10-3x \\ 2x-y=10 \end{array}\right\} \rightarrow 2x-10+3x=10 \rightarrow x=4, y=-2$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x-3y=1 \\ y=11-4x \end{array}\right\} \rightarrow 5x-3\cdot(11-4x)=1 \rightarrow 5x-33+12x=1 \rightarrow x=2, y=3$

**59. Corrige los errores cometidos.**

$$\left.\begin{array}{r}5x-\ \ y=1\\ 2x-4y=22\end{array}\right\}\rightarrow y=1-5x$$

$$2x-4y=22\xrightarrow{y=1-5x}2x-4(1-5x)=22\rightarrow 2x-4-20x=22\rightarrow -18x=18\rightarrow x=\frac{18}{18}=1$$

$$5x-y=1\xrightarrow{x=1}5\cdot 1-y=1\rightarrow y=-4$$

Hay varios errores en la resolución:

$\left.\begin{array}{r}5x-y=1\\ 2x-4y=22\end{array}\right\}\rightarrow y=1-5x$ ⟶ Está mal despejada *y*. Debe ser $y = 5x - 1$

$2x-4\cdot(1-5x)=22\rightarrow 2x-4-20x=22$ ⟶ Está mal el signo de $20x$, debe ser positivo.

$-18x=18\rightarrow x=\frac{18}{18}=1$ ⟶ Está mal despejada *x*. Debe ser $x=\frac{18}{-18}=-1$

$5\cdot 1-y=1\rightarrow y=-4$ ⟶ Está mal despejada *y*. Debe ser $y = 5 - 1 = 4$

La resolución correcta es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}5x-y=1\\ 2x-4y=22\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x-1=y\\ 2x-4y=22\end{array}\right\}\rightarrow 2x-4\cdot(5x-1)=22\rightarrow 2x-20x+4=22\rightarrow -18x=18\rightarrow x=-1, y=-6$$

**60. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.**

a) $\left.\begin{array}{r}3x+5y=1\\ x+\ \ y=1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}3x+y=10\\ 2x-y=10\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}7x+8y=23\\ 3x+2y=7\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}5x-3y=1\\ 4x+\ \ y=11\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1-5y}{3}\\ x=1-y\end{array}\right\}\rightarrow\frac{1-5y}{3}=1-y\rightarrow 1-5y=3-3y\rightarrow -2=2y\rightarrow y=-1, x=2$

b) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{23-8y}{7}\\ x=\frac{7-2y}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{23-8y}{7}=\frac{7-2y}{3}\rightarrow 69-24y=49-14y\rightarrow 20=10y\rightarrow y=2, x=1$

c) $\left.\begin{array}{l}y=10-3x\\ 2x-10=y\end{array}\right\}\rightarrow 10-3x=2x-10\rightarrow 20=5x\rightarrow x=4, y=-2$

d) $\left.\begin{array}{l}\frac{5x-1}{3}=y\\ y=11-4x\end{array}\right\}\rightarrow\frac{5x-1}{3}=11-4x\rightarrow 5x-1=33-12x\rightarrow x=2, y=3$

**61. Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema por el método de igualación.**

$$\left.\begin{array}{r}x-y=7\\ 3x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=y-7\\ x=1+\frac{y}{3}\end{array}\right\}$$

$$y-7=1+\frac{y}{3}\rightarrow 3(y-7)=1+y\rightarrow 3y-21=1+y\rightarrow 3y-y=1+21$$

$$\rightarrow 2y=22\rightarrow y=\frac{22}{-2}=-11$$

$$x-y=7\xrightarrow{x=-11}x-11=7\rightarrow x=7+11=18$$

Hay varios errores en la resolución:

$\left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=y-7 \\ x=1+\dfrac{y}{3} \end{array}\right\}$ → Está mal despejada la $x$ en las dos ecuaciones. Debe ser: $\left.\begin{array}{l} x=7+y \\ x=\dfrac{1+y}{3} \end{array}\right\}$

$y-7=1+\dfrac{y}{3} \to 3\cdot(y-7)=1+y$ → Las operaciones están mal resueltas. Debe ser: $y-7=1+\dfrac{y}{3} \to 3\cdot(y-7)=3+y$

$2y=22 \to y=\dfrac{22}{-2}=-11$ → Está mal despejada la $y$. Debe ser: $2y=22 \to y=\dfrac{22}{2}=11$

$x-y=7 \to x-11=7$ → Se ha sustituido $y$ en vez de $x$. Debe ser: $x-y=7 \to x+11=7 \to x=-4$

La resolución correcta es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=y+7 \\ x=\dfrac{1+y}{3} \end{array}\right\} \to y+7=\frac{1+y}{3} \to 3y+21=1+y \to 2y=-20 \to y=-10, x=-3$$

**62. Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x+4y=6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x-5y=6 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ 2x-2y=10 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \to 2x=8 \to x=4, y=1$

b) $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x+4y=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{l} -2x-4y=0 \\ 2x+4y=6 \end{array}\right\} \to 0 \neq 6$ → Sistema incompatible.

c) $\left.\begin{array}{l} x-5y=6 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-4)} \left.\begin{array}{l} -4x+20y=-24 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right\} \to 17y=-23 \to y=\dfrac{-23}{17}, x=\dfrac{-13}{17}$

d) Las dos ecuaciones del sistema son equivalentes, por tanto el sistema es compatible indeterminado.

**63. Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{l} 4x+2y=2 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rl} & 4x+2y=2 \\ - & 3x-2y=-4 \\ \hline & x \quad\;\; =-2 \end{array}$$

$$2x+y=0 \xrightarrow{x=-2} 2\cdot(-2)+y=0 \to -4+y=0 \to y=-4$$

Hay varios errores en la resolución:

$\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{l} 4x+2y=2 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\}$ → Al multiplicar 0 por 2 no da 2, da 0.

$-\left.\begin{array}{l} 4x+2y=2 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \to x=-2$ → No se restan, se suman: $\left.\begin{array}{l} 4x+2y=2 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \to 7x=-2$

$-4+y=0 \to y=-4$ Está mal despejada $y$. Debe ser: $y=4$

La resolución correcta es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=0 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow 7x=-4 \rightarrow x=\frac{-4}{7}, y=\frac{8}{7}$$

**65. Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 7x-2y=4 \\ x+3y=17 \end{array}\right\}$ escribe sistemas equivalentes a él cuyos:**

a) Coeficientes de $x$ sean iguales.

b) Coeficientes de $y$ sean iguales.

c) Términos independientes sean los mismos.

a) Multiplicando la 2.ª ecuación por 7: $\left.\begin{array}{r} 7x-2y=4 \\ 7x+21y=119 \end{array}\right\}$

b) Multiplicando la 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª por $-2$: $\left.\begin{array}{r} 21x-6y=12 \\ -2x-6y=-34 \end{array}\right\}$

c) Multiplicando la 1.ª ecuación por 17 y la 2.ª por 4: $\left.\begin{array}{r} 119x-34y=68 \\ 4x+12y=68 \end{array}\right\}$

**66. Resuelve por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=-5+x+2y \\ x-2y-3=3-42y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2y+3=x-2(x-y) \\ \dfrac{2x-y}{3}=18 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3(x+4)-2(y-2)=14-x-y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=-5 \\ x+40y=6 \end{array}\right\} \rightarrow x+40\cdot(-5)=6 \rightarrow x=206, y=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ 2x-y=54 \end{array}\right\} \rightarrow 2\cdot(-3)-y=54 \rightarrow y=-60, x=-3$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 4x-y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow 5x=0 \rightarrow x=0, y=2$

**67. Resuelve por el método que consideres más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-2)=y-4 \\ 3y-2x=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -5(y-2)=x-2 \\ x-3y=-4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x+y)-x+2y=15 \\ 2x-(y+8)=-11 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3(x+2)-7(x+y)=5 \\ 5(x+1)-y=14 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-2)=y-4 \\ 3y-2x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+4=y-4 \\ 3y-2x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y=-8 \\ -2x+3y=0 \end{array}\right\}$

Restamos la 1.ª ecuación de la 2.ª: $-4y=-8 \rightarrow y=2$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3\cdot 2-2x=0 \rightarrow 6=2x \rightarrow x=3$

b) $\left.\begin{array}{r} -5(y-2) = x-2 \\ x-3y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -5y+10 = x-2 \\ x-3y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-5y = -12 \\ x-3y = -4 \end{array}\right\}$

Sumamos las dos ecuaciones: $-8y = -16 \rightarrow y = 2$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $x - 3 \cdot 2 = -4 \rightarrow x = -4 + 6 = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x+y) - x + 2y = 15 \\ 2x - (y+8) = -11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 3y - x + 2y = 15 \\ 2x - y - 8 = -11 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 15 \\ 2x - \ \ y = -3 \end{array}\right\}$

Restamos las dos ecuaciones:

$6y = 18 \rightarrow y = 3$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$2x - 3 = -3 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

d) $\left.\begin{array}{r} 3(x+2) - 7(x+y) = 5 \\ 5(x+1) - y = 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 6 - 7x - 7y = 5 \\ 5x + 5 - y = 14 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} -4x - 7y = -1 \\ 5x - \ \ y = 9 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{sumamos}]{2.^{\text{a}} \cdot (-7)} \begin{array}{r} -4x - 7y = \ \ -1 \\ -35x + 7y = -63 \\ \hline -39x \qquad = -64 \end{array} \rightarrow x = \dfrac{64}{39}$

Y despejando en la 2.ª ecuación:

$5 \cdot \dfrac{64}{39} - y = 9 \rightarrow \dfrac{320}{39} - 9 = y \rightarrow y = \dfrac{320 - 351}{39} = -\dfrac{31}{39}$

**68. Resuelve estos sistemas y determina su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 5 \\ 8x - 6y = 10 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 4x - 4y = 4 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -x + 5y = 2 \\ x - 5y = -2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right\}$

a) Las dos ecuaciones son equivalentes, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son todos los puntos de la recta $x + y = 2$.

b) No tiene soluciones, el sistema es incompatible.

c) Las dos ecuaciones son equivalentes, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son todos los puntos de la recta $4x - 3y = 5$.

d) No tiene soluciones, el sistema es incompatible.

e) Las dos ecuaciones son equivalentes, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son todos los puntos de la recta $x - 5y = -2$.

f) No tiene soluciones, el sistema es incompatible.

**69. ¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas?**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 8 \\ 6x + 8y = 10 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 10y = 4 \\ x + 5y = 4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 1 \\ x - 8y = 5 \end{array}\right\}$

a) Una solución: $\left.\begin{aligned}2x-y&=5\\x+y&=1\end{aligned}\right\}\to 3x=6\to x=2, y=-1$

b) Ninguna solución, son dos rectas paralelas: $\left.\begin{aligned}3x+4y&=8\\6x+8y&=10\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}3x+4y&=8\\3x+4y&=5\end{aligned}\right\}$

c) Ninguna solución, son dos rectas paralelas: $\left.\begin{aligned}2x+10y&=4\\x+5y&=4\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}x+5y&=2\\x+5y&=4\end{aligned}\right\}$

d) Una solución: $\left.\begin{aligned}3x+2y&=1\\x-8y&=5\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\cdot(-3)}\left.\begin{aligned}3x+2y&=1\\-3x+24y&=-15\end{aligned}\right\}\to 26y=-14\to y=\frac{-7}{13}, x=\frac{9}{13}$

**71. Resuelve por el método que consideres más adecuado.**

a) $\left.\begin{aligned}\frac{3x}{3}-\frac{2x}{4}&=2\\3y+5x&=-1\end{aligned}\right\}$  b) $\left.\begin{aligned}\frac{x}{3}-\frac{y}{2}&=-1\\\frac{2x}{3}-\frac{y}{4}&=7\end{aligned}\right\}$

a) Despejamos $x$ en la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª para calcular el valor de $y$:

$x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x=2\to x=4$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$3y+20=-1\to 3y=-21\to y=-7$

b) $\left.\begin{aligned}\frac{x}{3}-\frac{y}{2}&=-1\\\frac{2x}{3}-\frac{y}{4}&=7\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}6\cdot\frac{x}{3}-6\cdot\frac{y}{2}&=-6\\12\cdot\frac{2x}{3}-12\cdot\frac{y}{4}&=84\end{aligned}\right\}$

$\to\left.\begin{aligned}2x-3y&=-6\\8x-3y&=84\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{restamos}}-6x=-90\to x=15$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$\frac{15}{3}-\frac{y}{2}=-1\to-\frac{y}{2}=-1-5=-6\to y=12$

**72. Elimina los paréntesis y los denominadores en los siguientes sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned}\frac{x}{2}+\frac{y}{2}&=0\\\frac{5(x+1)}{7}-\frac{2(y+2)}{3}&=-2\end{aligned}\right\}$  b) $\left.\begin{aligned}\frac{3(1-x)}{3}-\frac{(y-1)}{5}-\frac{1}{2}&=\frac{3}{2}\\\frac{5(x+1)+7(2y-1)}{6}&=2\end{aligned}\right\}$

a) Multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª por 21:

$\left.\begin{aligned}x+y&=0\\15(x+1)-14(y+2)&=-42\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}x+y&=0\\15x+15-14y-28&=-42\end{aligned}\right\}$

$\to\left.\begin{aligned}x+\quad y&=0\\15x-14y&=-29\end{aligned}\right\}$

b) Multiplicando la 1.ª ecuación por 10 y la 2.ª por 6:

$\left.\begin{aligned}10(1-x)-2(y-1)-5&=15\\5(x+1)+7(2y-1)&=12\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}10-10x-2y+2-5&=15\\5x+5+14y-7&=12\end{aligned}\right\}$

$\to\left.\begin{aligned}-10x-\ 2y&=8\\5x+14y&=14\end{aligned}\right\}$

**73. Resuelve por el método de igualación estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=6\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{2}-\frac{y+2}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{2(x-1)}{3}-\frac{y+2}{6}=-1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{5}+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

a) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}3x+2y=36\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$

Despejamos $y$ en la 1.ª ecuación: $y=\frac{36-3x}{2}$, y en la 2.ª: $y=\frac{x+4}{2}$,

e igualamos: $\frac{36-3x}{2}=\frac{x+4}{2}\rightarrow x=8$. Y sustituyendo: $y=6$

b) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ 4x-y=0\end{array}\right\}$ Despejamos $y$ en la 1.ª ecuación:

$y=x-3$, y en la 2.ª: $y=4x$, e igualamos: $x-3=4x\rightarrow x=-1, y=-4$

c) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}x+5y=10\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

Despejamos $x$ en la 1.ª ecuación: $x=10-5y$, y en la 2.ª: $x=\frac{7+3y}{2}$,

e igualamos: $10-5y=\frac{7+3y}{2}\rightarrow y=1$. Y sustituyendo: $x=5$

**74. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=6\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{2}-\frac{y+2}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{2(x-1)}{3}-\frac{y+2}{6}=-1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{5}+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

a) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}3x+2y=36\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ Las sumamos: $4x=32$

$\rightarrow x=8$, y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $8-2y=-4\rightarrow y=6$

b) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}x-y-2=1\\ 4x-4-y-2=-6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ 4x-y=0\end{array}\right\}$

Las restamos: $-3x=3\rightarrow x=-1$, y sustituyendo en la 1.ª ecuación:
$-1-y=3\rightarrow y=-4$

c) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}x+5y=10\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por $-2$: $\left.\begin{array}{r}-2x-10y=-20\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

Las sumamos: $-13y=-13\rightarrow y=1$, y sustituyendo en la 1.ª ecuación:
$x+5=10\rightarrow x=5$

**75. Completa en tu cuaderno los sistemas para que el primero sea compatible, y el segundo, incompatible.**

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=\square\\ \square x+2y=6\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}\square x+2y=3\\ 2x+\square y=\square\end{array}\right\}$

a) Como coeficiente de $x$ vale cualquier valor distinto de $-3$ y como término independiente cualquiera. Si el coeficiente de $x$ es $-3$, el término independiente de la 1.ª ecuación tiene que ser $-6$. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

b) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= -7 \end{aligned}\right\}$ o $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 3 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$ El término independiente de la 2.ª ecuación puede ser cualquier número distinto de 6 en el primer sistema y distinto de 3 en el segundo.

**76. Expresa los siguientes enunciados mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

a) La suma de dos números es 35.

b) El cuádruple de un número menos el doble de otro número es 26.

c) El triple de un número de dos cifras más el doble de las decenas es 102.

d) Al dividir un número entre 15 se obtiene como resto 12.

a) $x + y = 35$

b) $4x - 2y = 26$

c) $3(10x + y) + 2x = 102$ donde $x$ es la cifra de las decenas e $y$ la cifra de las unidades.

d) $x = 15y + 12$ donde $x$ es el dividendo e $y$ es el cociente.

**77. Expresa los siguientes problemas mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

a) La diferencia entre las edades de Juan y Jesús es 12 años.

b) El número total de ruedas de los coches y motos del garaje es 56.

c) Tengo 1,35 € en monedas de 0,20 € y 0,05 €.

d) 3 kg de manzanas y 2 kg de naranjas cuestan 11 €.

e) Con 10,20 € más del dinero que tengo puedo comprar dos juegos para mi consola.

f) El perímetro de un rectángulo es 48 cm.

g) Cinco bocadillos de jamón cuestan lo mismo que ocho de chorizo.

h) En la granja de Fernando hay conejos y palomas; entre patas y cabezas, hay un total de 300.

a) $x - y = 12$

b) $4x + 2y = 56$, donde $x$ es el número de coches e $y$ es el número de motos.

c) $1{,}35 = 0{,}20x + 0{,}05y$, donde $x$ es el número de monedas de 0,20 € e $y$, es el número de monedas de 0,05 €.

d) $3x + 2y = 11$, donde $x$ es el precio del kg de manzanas e $y$, el precio del kg de naranjas.

e) $x + 10{,}20 = 2y$, donde $x$ es el dinero que tengo e $y$, el precio de un juego.

f) $2x + 2y = 48$, donde $x$ es el largo e $y$, el ancho del rectángulo.

g) $5x = 8y$, donde $x$ es el precio del bocadillo de jamón e $y$, el precio del bocadillo de chorizo.

h) $4x + 2y + x + y = 300$, donde $x$ es el número de conejos e $y$, el de palomas.

**78.** **Sea *A* la cantidad de dinero que hay que pagar por 6 helados y 4 refrescos, y *B* la cantidad que hay que pagar por 4 helados y 2 refrescos. Escribe en función de *A* y *B* la cantidad de dinero que hay que pagar por:**

a) 10 helados y 6 refrescos.
b) 2 helados y 2 refrescos.
c) 3 helados y 2 refrescos.
d) 5 helados y 3 refrescos.
e) 1 helado y 1 refresco.
f) 8 helados y 4 refrescos.

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $\frac{A}{2}$ d) $\frac{A+B}{2}$ e) $\frac{A-B}{2}$ f) $2B$

**79.** **Halla dos números distintos tales que la suma del triple del primero más el segundo es 14 y la diferencia entre ellos es 2.**

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=14\\x-y=2\end{array}\right\}\to 4x=16\to x=4, y=2$$

**80.** **Halla dos números sabiendo que suman 25 y que la cuarta parte del primero excede en una unidad a la tercera parte del segundo.**

$$\left.\begin{array}{l}x+y=25\\\frac{x}{4}=\frac{y}{3}+1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x+y=25\\3x=4y+12\end{array}\right\}\to 3\cdot(25-y)=4y+12\to 75-3y=4y+12\to y=9, x=16$$

**81.** **Cinco botellas de agua y dos de vino cuestan 6,95 €. Tres botellas de agua y cuatro de vino cuestan 11,45 €. Calcula el precio de cada tipo de botella.**

$x$ = precio de la botella de agua $y$ = precio de la botella de vino

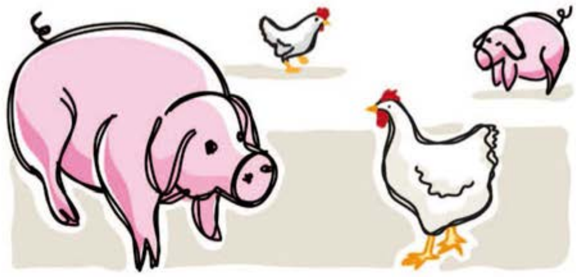
$$\left.\begin{array}{l}5x+2y=6{,}95\\3x+4y=11{,}45\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot(-2)}-10x-4y=-13{,}90\\\phantom{\xrightarrow{\cdot(-2)}}\ 3x+4y=11{,}45\end{array}\Bigg\}\to -7x=-2{,}45\to x=0{,}35\text{ €}, y=2{,}60\text{ €}$$

**82.** **Carla tiene 14 € entre las 13 monedas que hay en su monedero. Si las monedas son de 2 € y 0,50 €, ¿cuántas hay de cada tipo?**

$x$ = número de monedas de 2 € $y$ = número de monedas de 0,50 €

$$\left.\begin{array}{l}2x+0{,}5y=14\\x+y=13\end{array}\right\}\begin{array}{l}\phantom{\xrightarrow{\cdot(-2)}}\ 2x+0{,}5y=14\\\xrightarrow{\cdot(-2)}-2x-2y=-26\end{array}\Bigg\}\to -1{,}5y=-12\to y=8, x=5$$

**83.** **En una granja se crían cerdos y gallinas. En total hay 252 animales y 668 patas. Halla cuántos animales de cada tipo hay en la granja.**



$x =$ número de cerdos $\qquad y =$ número de gallinas

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 668 \\ x + y = 252 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 668 \\ -2x - 2y = -504 \end{array}\right\} \rightarrow 2x = 164 \rightarrow x = 82, y = 170$$

**84.** **En un taller arreglan coches y motos. En este momento el número de coches es el triple que el número de motos menos dos, y el número total de ruedas entre coches y motos es 60. Calcula cuántos coches y motos hay en el taller.**

$x =$ número de coches $\qquad y =$ número de motos

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\cdot(y-2) \\ 4x + 2y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow 4\cdot(3y-6) + 2y = 60 \rightarrow 12y - 24 + 2y = 60 \rightarrow y = 6, x = 12$$

**85.** **Andrés tiene varios hijos, por eso en su garaje hay un total de 9 vehículos entre bicis y triciclos. Si las ruedas de todos ellos son 24, ¿cuántas bicis y triciclos tiene Andrés en el garaje?**

$x =$ número de bicis $\qquad y =$ número de triciclos

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ 2x + 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 9 - y \\ 2x + 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow 2\cdot(9-y) + 3y = 24 \rightarrow y = 6, x = 3$$

**86.** **Las edades de Pedro y Luis suman 34 años. Dentro de 16 años Pedro tendrá el doble de edad que Luis. ¿Cuántos años tienen ahora?**

$x =$ edad de Pedro $\qquad y =$ edad de Luis

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 34 \\ x + 16 = 2\cdot(y+16) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 34 - y \\ x = 2y + 16 \end{array}\right\} \rightarrow 34 - y = 2y + 16 \rightarrow y = 6, x = 28$$

**87.** **Con los 21 € que Teo tiene ahorrados puede montar 8 veces en los coches eléctricos y comprar 3 bocadillos para él y sus amigos. Calcula lo que vale cada viaje en los coches eléctricos y el precio de un bocadillo, sabiendo que 12 viajes en los coches cuestan lo mismo que 6 bocadillos.**

$x =$ precio de un viaje en coche eléctrico $\qquad y =$ precio de un bocadillo

$$\left.\begin{array}{l} 21 = 8x + 3y \\ 12x = 6y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 21 = 8x + 3y \\ 2x = y \end{array}\right\} \rightarrow 21 = 8x + 3\cdot 2x \rightarrow 21 = 14x \rightarrow x = 1{,}50\ €;\ y = 3\ €$$

**88.** **En una pastelería se empaquetan galletas en cajas y en bolsas. Averigua cuántas galletas hay en cada tipo de envase sabiendo que:**

- Las cajas contienen 50 galletas más que las bolsas.
- Tres bolsas de galletas llenan la mitad de una caja.

$x$ = número de galletas de una caja  $y$ = número de galletas de una bolsa

$$\left.\begin{array}{l} x = 50 + y \\ \dfrac{x}{2} = 3y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50 + y \\ x = 6y \end{array}\right\} \rightarrow 50 + y = 6y \rightarrow 50 = 5y \rightarrow y = 10, x = 60$$

**89.** **Si Ana diese 10 libros a Alicia, ambas tendrían la misma cantidad de libros. Si Ana tuviera 10 libros más, tendría el doble que Alicia. Calcula cuántos libros tiene cada una.**

$x$ = número de libros de Ana  $y$ = número de libros de Alicia

$$\left.\begin{array}{l} x - 10 = 10 + y \\ x + 10 = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 20 + y \\ x = 2y - 10 \end{array}\right\} \rightarrow 20 + y = 2y - 10 \rightarrow 30 = y \rightarrow y = 30, x = 50$$

**90.** **Hemos adquirido sellos de 0,26 € y de 0,84 €. En total hemos pagado 5,18 € por 11 sellos. ¿Cuántos sellos son de 0,26 €? ¿Y de 0,84 €?**

Sellos de 0,26 €: $x$  Sellos de 0,84 €: $y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 11 \\ 0{,}26x + 0{,}84y = 5{,}18 \end{array}\right\} \text{ Despejando } x \text{ de la 1.ª ecuación: } x = 11 - y$$

Y sustituyendo en la 2.ª: $2{,}86 - 0{,}26y + 0{,}84y = 5{,}18 \rightarrow y = 4,\ x = 7$

Se han comprado 4 sellos de 0,84 € y 7 sellos de 0,26 €.

**91.** **Las edades de César y David suman 15 años. Dentro de 6 años César duplicará la edad de David. Halla las edades actuales de César y David.**

$x$ = edad de César  $y$ = edad de David

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x + 6 = 2\cdot(y + 6) \end{array}\right\} \rightarrow 15 - y + 6 = 2y + 12 \rightarrow 21 - 12 = 3y \rightarrow y = 3, x = 12$$

**92. Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su perímetro mide 40 cm y que la altura mide las tres séptimas partes de la base.**

$x$ = longitud del largo $y$ = longitud del ancho

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y=40\\ y=\frac{3}{7}x\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x+y=20\\ y=\frac{3}{7}x\end{array}\right\}\to x+\frac{3}{7}x=20\to 7x+3x=140\to x=14, y=6$$

**93. El perímetro de un rectángulo es 30 cm. Si se toma un cuadrado cuyo lado mide lo mismo que dos largos y un ancho del rectángulo, el perímetro de este cuadrado es 96. Halla las dimensiones del rectángulo y el lado del cuadrado.**

$x$ = longitud del largo $y$ = longitud del ancho

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y=30\\ 4\cdot(2x+y)=96\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x+y=15\\ 8x+4y=96\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-4)}\left.\begin{array}{l}-4x-4y=-60\\ 8x+4y=96\end{array}\right\}\to 4x=36\to x=9, y=6$$

**94. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos modelos, uno de cuatro plazas y otro de cinco. Durante un día, la empresa alquila 10 coches en los que viajan 42 personas, quedando dos plazas sin ocupar. ¿Cuántos coches alquiló de cada tipo?**

Coches de cuatro plazas: $x$
Coches de cinco plazas: $y$

$$\left.\begin{array}{r}x+y=10\\ 4x+5y-2=42\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x+y=10\\ 4x+5y=44\end{array}\right\}\to y=10-x$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$4x+5(10-x)=44\to 4x+50-5x=44\to -x=-6\to x=6$$

Y despejando: $y=10-x=10-6=4$

Alquilaron 6 coches de cuatro plazas y 4 coches de cinco plazas.

**95. Luis tiene todas sus monedas iguales y Javier también, pero ambos tienen monedas de distinto valor. Tomando 6 monedas de Luis y 5 de Javier tenemos 3,70 €; en cambio, si Luis coge un número de sus monedas que sea el doble de las que cogió anteriormente Javier y Javier coge un número de sus monedas igual a la mitad de las que cogió Luis, se obtienen 3,50 €. Calcula el valor de las monedas que tiene cada uno.**

$x$ = valor de una de las monedas de Luis $y$ = valor de una de las monedas de Javier

$$\left.\begin{array}{l}6x+5y=3{,}70\\ 10x+3y=3{,}50\end{array}\right.\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot(-10)}\\ \xrightarrow{\cdot 6}\end{array}\left.\begin{array}{l}-60x-50y=-37\\ 60x+18y=21\end{array}\right\}\to -32y=-16\to x=0{,}20\text{ €};\ y=0{,}50\text{ €}$$

**96. Averigua cuántos alumnos hay en cada uno de los dos cursos de 3.º de ESO y 4.º de ESO, sabiendo que:**

- En 4.º de ESO hay 9 alumnos más que en 3.º de ESO.
- Si de 3.º de ESO se marcharan 5 alumnos, el número de grupos de 6 personas que se podrían hacer sería el mismo que el número de grupos de 7 personas que se podrían hacer en 4.º de ESO si se marcharan 4 alumnos.

$x$ = número de alumnos de 3.º de ESO    $y$ = número de alumnos de 4.º de ESO

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 9 \\ \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-4}{7} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-5}{6} = \frac{x+9-4}{7} \rightarrow 7x - 35 = 6x + 30 \rightarrow x = 65,\ y = 74$$

**97. Juan ha comprado una camisa y un pantalón. Los precios de estas prendas sumaban 60 €, pero le han hecho un 10 % de descuento en la camisa y un 20 % en el pantalón, y paga por ambos 50,15 €. ¿Cuál era el precio sin rebajar de cada prenda?**

Precio de la camisa: $c$    Precio del pantalón: $p$

$$\left.\begin{array}{r} c + p = 60 \\ c(100\,\% - 10\,\%) + p(100\,\% - 20\,\%) = 50{,}15 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} c + \quad p = 60 \\ 0{,}9c + 0{,}8p = 50{,}15 \end{array}\right\}$$

Despejando en la 1.ª ecuación: $p = 60 - c$, y sustituyendo en la 2.ª:

$$0{,}9c + 0{,}8(60 - c) = 50{,}15 \rightarrow 0{,}9c + 48 - 0{,}8c = 50{,}15$$
$$\rightarrow 0{,}1c = 2{,}15 \rightarrow c = 21{,}50\ €$$

Y despejando: $p = 60 - c = 60 - 21{,}50 = 38{,}50$ €

**98. Julia reparte entre sus nietos caramelos. Si da 6 a cada nieto le sobra 1; si da 7 le faltan 4. ¿Cuántos nietos tiene Julia?**

$x$ = número total de caramelos

$y$ = número de nietos

$$\left.\begin{array}{l} x = 6y + 1 \\ x = 7y - 4 \end{array}\right\} \rightarrow 6y + 1 = 7y - 4 \rightarrow y = 5, x = 31$$

## DEBES SABER HACER

**1. Escribe las siguientes ecuaciones en la forma $ax + by = c$ e indica los coeficientes y el término independiente.**

a) $x - (y - 6) = 2x + 5y + 3$

b) $-3 \cdot (-x + 3y) + 7y = 2x$

a) $x + 6y = 3$
Coeficiente de $x$: 1
Coeficiente de $y$: 6
Término independiente: 3

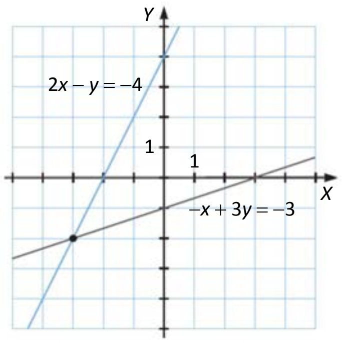
b) $x - 2y = 0$
Coeficiente de $x$: 1
Coeficiente de $y$: –2
Término independiente: 0

**2. Resuelve gráficamente estos sistemas y clasifícalos por su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}2x - y = -4\\ -x + 3y = -3\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}2x - y = 8\\ 4x - 2y = 10\end{array}\right\}$

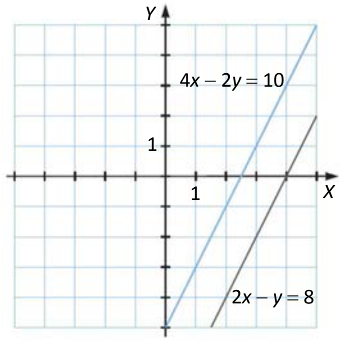
b) $\left.\begin{array}{r}x + 3y = 6\\ 2x + 6y = 12\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}x - 2y = 0\\ x + 2y = 0\end{array}\right\}$

a)



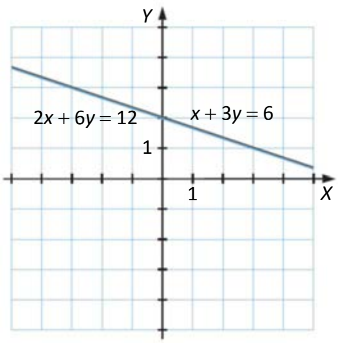

Compatible determinado

c)



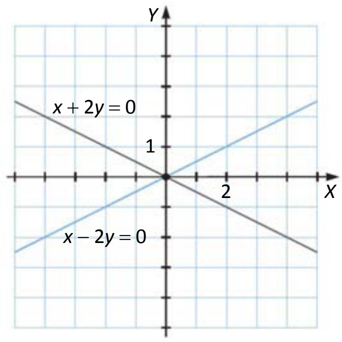

Incompatible

b)




Compatible indeterminado

d)




Compatible determinado

**3. Resuelve los siguientes sistemas, cada uno por un método diferente.**

a) $\left.\begin{array}{r}-2x + 5y = 4\\ 3x - 5y = -1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}-2x + 3y = 5\\ 3x + 2y = -1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}4x - 3y = 14\\ 5x + 2y = 6\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}-2x+5y=4\\ 3x-5y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}} x = 3,\ y = 2$

b) $\left.\begin{array}{r}-2x+3y=5\\ 3x+2y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Sustitución}}\left.\begin{array}{r}y=\dfrac{5+2x}{3}\\ 3x+2y=-1\end{array}\right\}\to 3x+2\cdot\dfrac{5+2x}{3}=-1\to x=-1, y=1$

c) $\left.\begin{array}{r}4x-3y=14\\ 5x+2y=6\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{14+3y}{4}\\ x=\dfrac{6-2y}{5}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Igualación}}\dfrac{14+3y}{4}=\dfrac{6-2y}{5}\to y=-2, x=2$

**4. La suma de las edades de Fernando y su padre es 93 años. La edad del padre es 2 veces la edad del hijo. ¿Qué edades tienen ambos?**

$x =$ edad de Fernando $y =$ edad de su padre

$\left.\begin{array}{l}x+y=93\\ y=2x\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x+y=93\\ 2x-y=0\end{array}\right\}\to 3x=93\to x=31, y=62$

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**99.** **Un tren de mercancías es un tren compuesto de una o varias locomotoras de gran potencia y una serie de vagones preparados para transportar diferentes tipos de carga.**

**Por las vías españolas circulan trenes de mercancías de hasta 750 m de longitud que pueden arrastrar una carga de 1 230 toneladas, lo que equivale a la carga que pueden transportar 49 camiones de gran tonelaje. Esto supone un gran ahorro económico y una considerable reducción de la emisión de $CO_2$ a la atmósfera.**

**Se necesita transportar 560 toneladas de mercancías, para lo cual se van a utilizar contenedores de 40 toneladas y de 60 toneladas.**

**La locomotora que se va a utilizar solo puede llevar 12 contenedores.**

a) ¿Cuántos vagones de cada clase se necesitan?

b) ¿Cuántos se necesitarían si la carga fuese 590 toneladas?

$x$ = número de contenedores de 40 toneladas   $y$ = número de contenedores de 60 toneladas

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ 40x+60y=560 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=12-y \\ 40x+60y=560 \end{array}\right\} \to 40\cdot(12-y)+60y=560 \to y=4, x=8$

Esto es, se necesitan 8 contenedores de 40 toneladas y 4 contenedores de 60 toneladas.

b) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ 40x+60y=590 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=12-y \\ 40x+60y=590 \end{array}\right\} \to 40\cdot(12-y)+60y=590 \to y=5,5; x=6,5$

No es posible llevar 590 toneladas ocupando completamente todos los contenedores.

El número de contenedores que más se ajusta a las 590 toneladas son 6 contenedores de 40 toneladas y 6 contenedores de 60 toneladas.

$6\cdot 60+6\cdot 40=600$ toneladas

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**100.** **Se mezcla pintura de 12 €/ℓ con pintura de 15 €/ℓ, de modo que resultan 50 ℓ de pintura de 13 €/ℓ. ¿Cuántos litros de cada tipo de pintura se han mezclado?**

Pintura de 12 €/ℓ: $x$

Pintura de 15 €/ℓ: $y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 50 \\ 12x + 15y = 50 \cdot 13 \end{array}\right\}$$ Despejando $x$ de la 1.ª ecuación: $x = 50 - y$

Y sustituyendo en la 2.ª:

$$600 - 12y + 15y = 650 \rightarrow y = \frac{50}{3},\ x = \frac{100}{3}$$

Pintura de 12 €/ℓ: $\frac{100}{3}$ litros. Pintura de 15 €/ℓ: $\frac{50}{3}$ litros.

**101.** **En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 50 céntimos el litro y otra de 80 céntimos el litro. ¿Cuántos litros de zumo han de mezclarse de cada tipo para obtener 120 litros con un coste total de 85,50 €?**

Zumo de 0,50 €/ℓ: $x$ Zumo de 0,80 €/ℓ: $y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 120 \\ 0{,}50x + 0{,}80y = 85{,}50 \end{array}\right\} \rightarrow y = 120 - x$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$0{,}50x + 0{,}80(120 - x) = 85{,}50 \rightarrow 0{,}50x + 96 - 0{,}80x = 85{,}50$$
$$\rightarrow -0{,}30x = -10{,}50 \rightarrow x = 35$$

Y despejando: $y = 120 - x = 120 - 35 = 85$

Se deben mezclar 35 litros de zumo de 0,50 €/ℓ
y 85 litros de zumo de 0,80 €/ℓ.

**102.** **En un sistema con solución única se multiplican los términos de una ecuación por 3, entonces:**

a) La nueva solución es el triple de la original.

b) La solución es la misma.

c) El nuevo sistema no puede tener solución.

d) Ninguna de las opciones anteriores es cierta.

La respuesta es b). La solución es la misma, ya que si multiplicamos todos los términos de una ecuación por una misma cantidad, la ecuación resultante es equivalente, es decir, tiene las mismas soluciones.

**103.** **Un número *xy* cumple:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = a \end{array}\right\}$$

**¿De qué tipo son los números cuyas cifras cumplen esta condición?**

Siendo las cifras $x$ e $y$: $\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = a \end{array}\right\}$

Sumando las ecuaciones: $2x = 2a \rightarrow x = a$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = 0$

El número puede ser {–90, –80, …, 0, …, 80, 90}.

## PRUEBAS PISA

**104.** **Un hotel ha decidido hacer la siguiente oferta dirigida a empresas que deseen realizar su convención.**


**A Marta, encargada de realizar la convención de su empresa, le ha parecido una oferta interesante, pero necesita como mínimo 52 habitaciones individuales para alojar a los invitados de la empresa a la convención. ¿Se puede celebrar la convención en este hotel?**

$x$ = número de habitaciones dobles $\qquad$ $y$ = número de habitaciones sencillas

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 109 \\ 2x + y = 176 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \left.\begin{array}{l} -x - y = -109 \\ 2x + y = 176 \end{array}\right\} \rightarrow x = 67, y = 42$$

Luego no se puede celebrar allí la convención.

**105. Carlos se presenta a una prueba que consta de 50 preguntas.**

| Puntuación de la prueba | |
|---|---|
| Respuesta correcta .................. | 3 puntos |
| Respuesta incorrecta ............... | Se resta 1 punto |
| Pregunta no contestada ........... | 0 puntos |

a) ¿Cuál es la mayor puntuación que Carlos puede obtener? ¿Y la menor?

b) ¿Qué puntuación obtiene Carlos si contesta 18 preguntas correctamente y el resto de forma incorrecta?

c) Si la prueba se considera superada a partir de una puntuación superior a 74 puntos, ¿cuántas preguntas debe contestar, como mínimo, para superar la prueba?

d) Si ha dejado 12 preguntas sin contestar y su puntuación final ha sido 78 puntos, ¿cuántas preguntas ha contestado correctamente?

a) La mayor puntuación la obtiene contestando todas correctamente: $3 \cdot 50 = 150$ puntos.

Y la menor, si contesta todas de forma incorrecta: $-1 \cdot 50 = -50$ puntos.

b) Si tiene 18 correctas y el resto incorrectas, la puntuación es de $3 \cdot 18 - 32 = 54 - 32 = 22$ puntos.

c) Como mínimo debe contestar 25 preguntas correctas.

d) $50 - 12 = 38$ preguntas ha respondido

$x$ = número de preguntas correctas $\quad$ $y$ = número de preguntas incorrectas

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 78 \\ x + y = 38 \end{array}\right\} \rightarrow 4x = 116 \rightarrow x = 29, y = 9$$

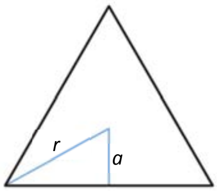
# Lugares geométricos. Áreas y perímetros

# 8

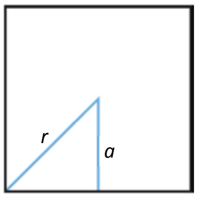
## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Dibuja una recta, *r*, y dos puntos exteriores a ella. Traza las rectas paralelas y perpendiculares a *r* que pasan por los puntos marcados.**


**2. Dibuja un polígono regular de 3 lados y otro de 4 lados. Dibuja su radio y su apotema. ¿Cómo se llaman estos polígonos?**



Triángulo equilátero



Cuadrado

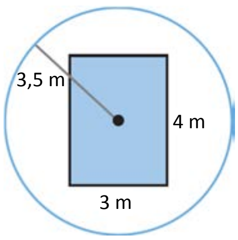
## VIDA COTIDIANA

**Cuando se decora una casa, la posición de los puntos de luz es muy importante. Hay veces que se necesitan zonas poco iluminadas, por ejemplo para relajarnos, o todo lo contrario, zonas muy iluminadas para poder leer un libro.**

- **Las especificaciones de una lámpara dicen que puede iluminar un radio de 3,5 m. Si la instalo en el centro de un salón rectangular de 4 m de largo y 3 m de ancho, ¿tendré toda la habitación perfectamente iluminada?**

Los puntos más alejados son las esquinas de la habitación. Formamos un triángulo rectángulo de catetos 2 m y 1,5 m para calcular la hipotenusa, que es la distancia máxima entre la lámpara y los puntos del salón.

$d^2 = 2^2 + 1{,}5^2 \rightarrow d = 2{,}5$




La distancia es menor que el radio, de modo que sí estará iluminada la esquina y, por tanto, toda la habitación.

## RESUELVE EL RETO

**Dos personas corren en un circuito circular, uno en el sentido de las agujas del reloj y el otro en sentido opuesto. Justo al mediodía vuelven a cruzarse en el punto de inicio: uno lleva 7 vueltas y el otro, 11. ¿Cuántas veces se cruzaron?**

Se cruzaron 11 veces.

**¿Cierto o falso? Si un triángulo cumple el teorema de Pitágoras, la mediana trazada desde el ángulo recto corta en la mitad de la hipotenusa.**

Cierto, porque las medianas, por definición, pasan por el punto medio de los lados de un triángulo. En particular, en un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa.

**¿Cuánto mide el área coloreada?**

El área coloreada mide 5 cuadrados y medio.

**Una araña tarda 30 días en cubrir con su tela el hueco de una ventana circular. Cada día duplica la superficie hecha hasta entonces. Si en vez de una araña, fueran dos, ¿cuánto tardarían en cubrir la ventana?**

La sucesión que sigue una araña sería: 1, 2, 4, 8, …, $2^{30-1} = 2^{29}$.

Dos arañas seguirían la siguiente sucesión: $2 \cdot 1 = 2^1$, $2 \cdot 2 = 2^2$, $2 \cdot 4 = 2^3$, …, $2^{29}$. Tardarían un día menos.

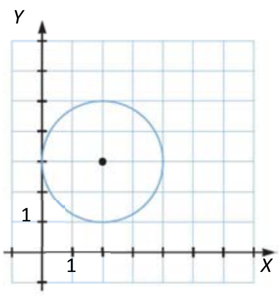
## ACTIVIDADES

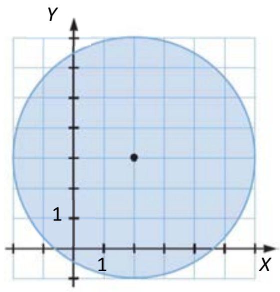
1. **Determina y representa el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(2, 3)$ es la indicada.**
   a) 2 cm
   b) Menor que 4 cm
   c) Mayor que 1,5 cm y menor que 3 cm

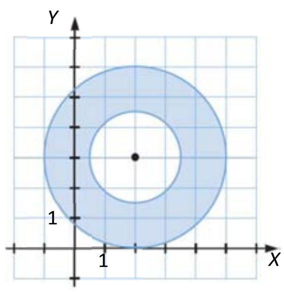
a) Circunferencia de radio 2 y centro (2, 3).

b) Círculo de radio 4 y centro (2, 3).

c) Corona circular de centro (2, 3) y radios 1,5 y 3.

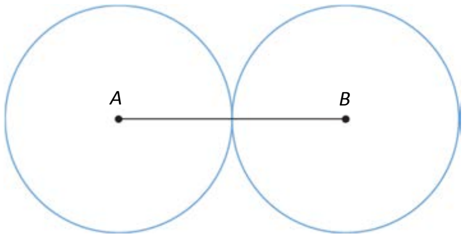


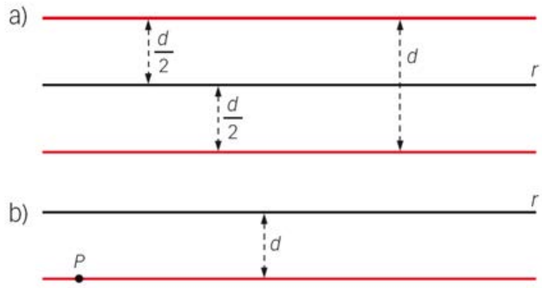



**2.** **Determina y representa los lugares geométricos de los puntos que están a una distancia de 2 cm de cada uno de los extremos de un segmento de 4 cm de longitud.**

Son dos circunferencias tangentes en el punto medio del segmento.




**3.** **Define las rectas rojas como lugar geométrico.**

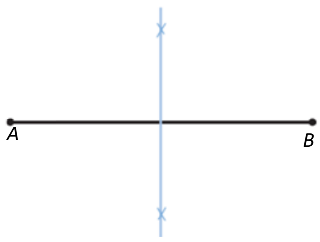



a) Lugar geométrico de los puntos que distan $\frac{d}{2}$ de la recta *r*.

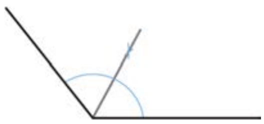
b) Lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de la recta *r* que del punto *P*.

**4.** **Dibuja en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento de 4 cm.**

Es la mediatriz del segmento.



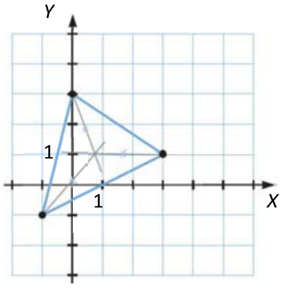

**5.** **Dibuja un ángulo obtuso y traza su bisectriz.**



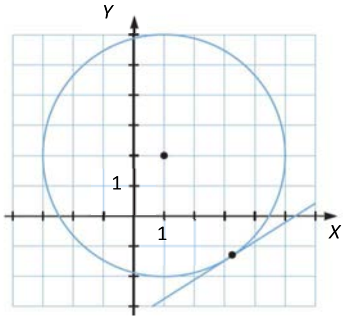
**6.** Dibuja las rectas que pasan por:

$$A(0, 3) \qquad B(-1, -1) \qquad C(3, 1)$$

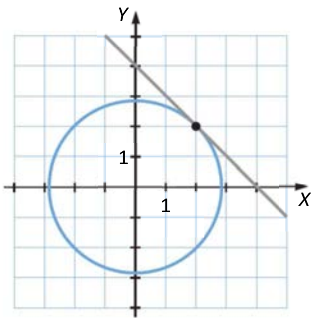
y traza las bisectrices de los ángulos entre esas rectas.



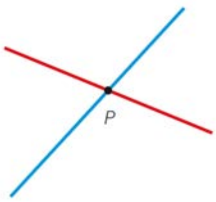

**7.** Dibuja la circunferencia de centro (1, 2) y radio 4 cm. Elige un punto de la circunferencia y traza una recta tangente a ese punto.



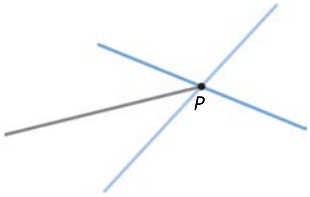

**8.** Representa la recta que contiene las soluciones de la ecuación $x + y = 4$. Dibuja la circunferencia tangente a esta recta con centro el origen.



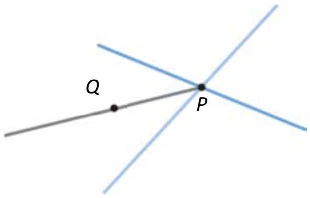

**9.** Observa las dos rectas secantes que se cortan en el punto *P*. ¿Cómo dibujarías una circunferencia tangente a ambas rectas cuyo centro esté situado a 5 cm de *P*?



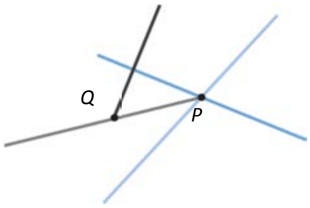
Trazamos la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas.



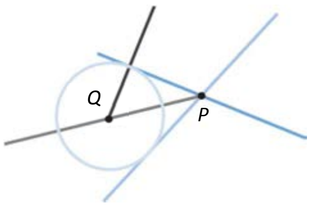

Marcamos el punto *Q* de la bisectriz que está a 5 cm de *P.*




Trazamos la perpendicular a una de las rectas desde el punto *Q.*




Trazamos la circunferencia de centro *Q* y que pasa por el punto intersección de la recta y su perpendicular.




**10. Traza la circunferencia que pasa por estos puntos.**

a) (0, 0), (0, 4) y (4, 0)

b) (0, 3), (−4, 0) y (1, −1)

c) (−3, 3), (1, 3) y (0, 0)

d) (2, 0), (2, 5) y (0, 1)

e) (0, −4), (5, −4) y (3, 3)

f) (1, 3), (5, 2) y (3, 7)

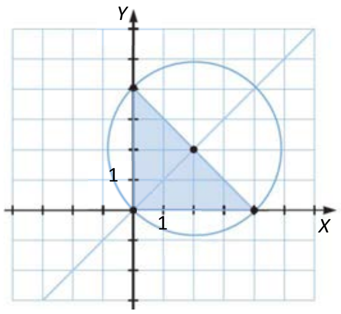
En todos los casos seguimos el mismo proceso:

– Dibujamos el triángulo que forman los tres puntos.

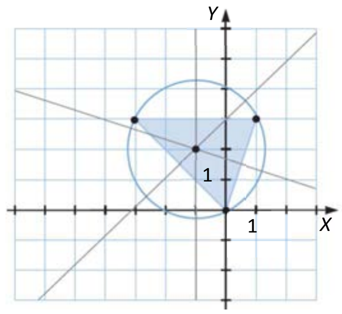
– Trazamos las mediatrices de los lados.

– Trazamos la circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices y radio la distancia a uno de los puntos.

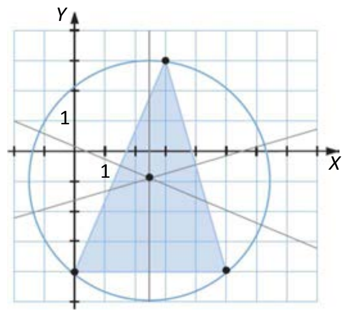
a)



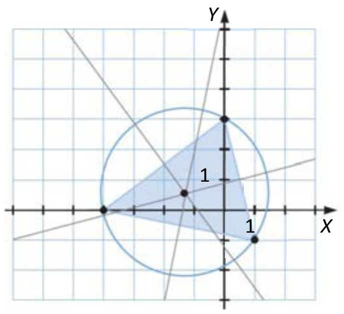

c)



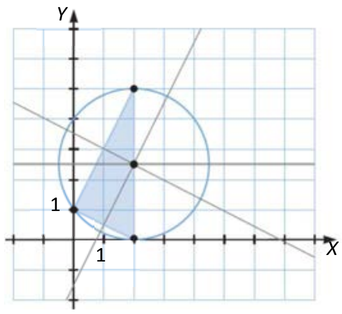

e)



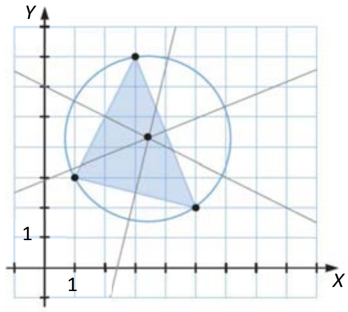

b)




d)




f)



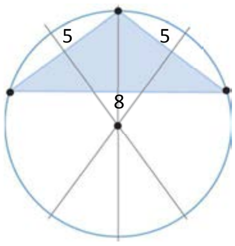

**11. Dibuja la circunferencia que pasa por los vértices de los triángulos isósceles cuyos lados tienen estas medidas.**

a) 5 cm, 5 cm y 8 cm

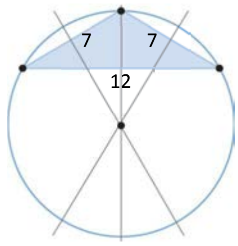
b) 7 cm, 7 cm y 12 cm

c) 4 cm, 4 cm y 6 cm

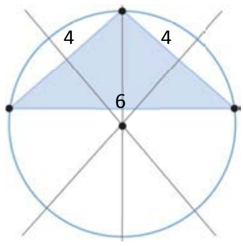
a)




b)




c)




**12. Define el circuncentro como lugar geométrico.**

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los vértices de un triángulo.

**13. Traza la circunferencia que pasa por los vértices de los triángulos rectángulos cuyos lados tienen estas medidas.**

a) 3 cm, 4 cm y 5 cm

b) 5 cm, 12 cm y 13 cm

c) 8 cm, 15 cm y 17 cm

d) 6 cm, 8 cm y 10 cm

e) 9 cm, 12 cm y 15 cm

f) 7 cm, 24 cm y 25 cm

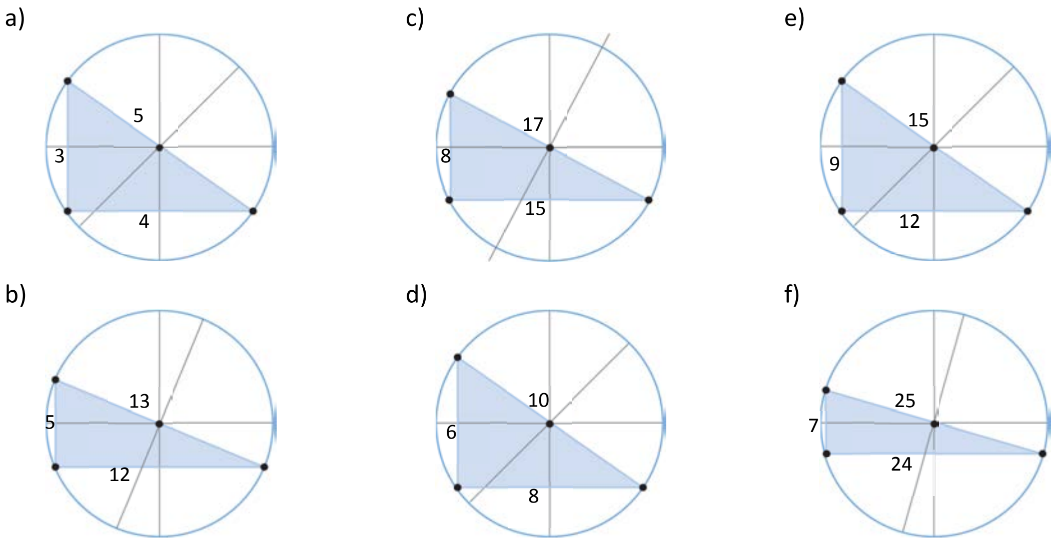
En todos los casos seguimos el mismo proceso:

– Dibujamos el triángulo que forman los tres puntos.

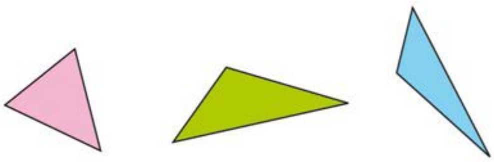
– Trazamos las mediatrices de los lados.

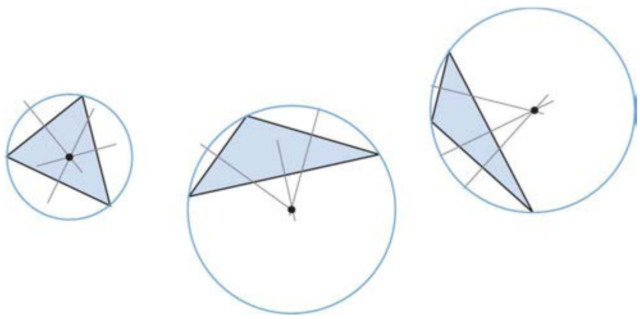
– Trazamos la circunferencia con centro el punto de corte de las mediatrices y radio la distancia a uno de los puntos.

En este caso, el centro está siempre en el punto medio de la hipotenusa.




**14.** **Copia en tu cuaderno estos triángulos y dibuja su circunferencia circunscrita.**





**15.** **Calcula la suma de los ángulos interiores de estos polígonos.**

a) Pentágono c) Octógono

b) Hexágono d) Decágono

a) $S = 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (5-2) = 180° \cdot 3 = 540°$

b) $S = 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (6-2) = 180° \cdot 4 = 720°$

c) $S = 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (8-2) = 180° \cdot 6 = 1080°$

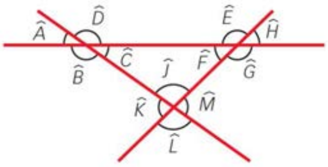
d) $S = 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (10-2) = 180° \cdot 8 = 1440°$

**16. Averigua para qué polígono la suma de los ángulos interiores es 1 260°.**

$$S = 1260° = 180° \cdot (n-2) \to n = \frac{1260°}{180°} + 2 = 7 + 2 = 9$$

Se trata de un eneágono.

**17. Establece las igualdades entre estos ángulos.**




$\widehat{A} = \widehat{C}$ $\quad \widehat{B} = \widehat{D}$ $\quad \widehat{E} = \widehat{G}$ $\quad \widehat{F} = \widehat{H}$ $\quad \widehat{J} = \widehat{L}$ $\quad \widehat{K} = \widehat{M}$

**18. Calcula la medida de la hipotenusa de los triángulos cuyos catetos miden:**

a) 39 mm y 80 mm
b) 13 mm y 84 mm
c) 11 mm y 60 mm
d) 24 cm y 32 cm
e) 12 cm y 16 cm
f) 8 cm y 15 cm

a) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 39^2 + 80^2 = 1521 + 6\,400 = 7\,921 \to a = \sqrt{7\,921} = 89$ mm

b) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 13^2 + 84^2 = 169 + 7\,056 = 7\,225 \to a = \sqrt{7\,225} = 85$ mm

c) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 11^2 + 60^2 = 121 + 3\,600 = 3\,721 \to a = \sqrt{3\,721} = 61$ mm

d) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600 \to a = \sqrt{1600} = 40$ cm

e) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \to a = \sqrt{400} = 20$ cm

f) $a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \to a = \sqrt{289} = 17$ cm

**19. Comprueba si las siguientes medidas corresponden a triángulos rectángulos.**

a) 21 cm, 29 cm y 40 cm
b) 33 cm, 56 cm y 68 cm

a)

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 40^2 = 1600 \\ b^2 + c^2 = 21^2 + 29^2 = 441 + 841 = 1282 \end{array}\right\} \to \text{No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.}$$

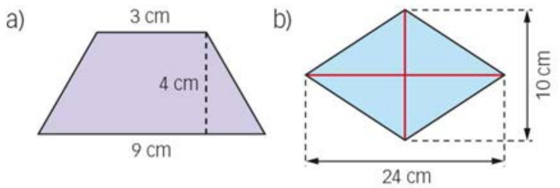
b)

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 68^2 = 4\,624 \\ b^2 + c^2 = 33^2 + 56^2 = 1089 + 3\,136 = 4\,225 \end{array}\right\} \to \text{No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.}$$

**20. ¿Cuántos triángulos rectángulos tienen dos de sus lados de 21 cm y 28 cm?**

Dos: el que tiene sus catetos de 21 cm y 28 cm (y consecuentemente la hipotenusa es de 35 cm), y el que tiene un cateto de 21 cm y la hipotenusa de 28 cm (con lo que el otro cateto es de 18,52 cm).

**21. Calcula el área de estas figuras.**




a) $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(9+3)\cdot 4}{2} = 24 \text{ cm}^2$

b) $A = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{24\cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$

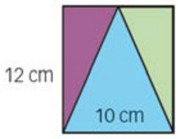
**22. Halla el perímetro y el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 7 cm.**

Primero se calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65 \to a = \sqrt{65} = 8{,}06 \text{ cm}$

$\text{Perímetro} = 4 + 7 + 8{,}06 = 19{,}06 \text{ cm}$ $\quad$ $\text{Área} = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{4\cdot 7}{2} = 14 \text{ cm}^2$

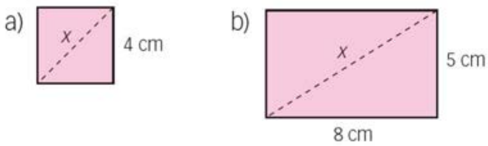
**23. Halla el área de cada uno de los tres triángulos que están marcados en la figura que está a la derecha.**




Los triángulos laterales son iguales y su área es: $A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$.

El área del triángulo central es $A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{12\cdot 10}{2} = 60 \text{ cm}^2$.

**24. Calcula la longitud de *x* en las figuras.**




a) $x^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \to a = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$

b) $x^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89 \to a = \sqrt{89} = 9{,}43 \text{ cm}$

**25. Una de las dimensiones de un rectángulo mide 12 cm, y su diagonal mide 20 cm. Halla su área.**

Primero calculamos la otra dimensión:

$20^2 = 12^2 + c^2 \to c = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$

$A = 12\cdot 16 = 192 \text{ cm}^2$

**26. El perímetro de un rectángulo es 68 cm, y la altura, 24 cm. Calcula.**

a) La diagonal del rectángulo

b) El área del rectángulo

a) Sea $x$ la base del rectángulo, entonces se tiene: $68 = 24 \cdot 2 + x \cdot 2 \rightarrow x = 10$ cm.

Sea $y$ la diagonal del rectángulo, entonces se tiene: $y^2 = 10^2 + 24^2 \rightarrow y = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$ cm.

b) $A = 10 \cdot 24 = 240$ cm$^2$

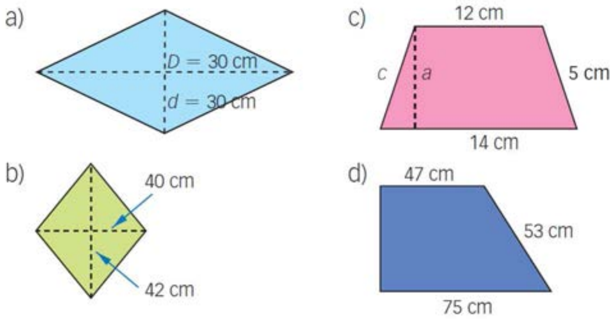
**27.** **Calcula el lado de un cuadrado cuya diagonal mide:**

a) 5,3033 cm b) 3,96 cm c) 2,12 cm

Sea $d$ la diagonal del cuadrado y $l$ el lado. Entonces $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

a) $l = \dfrac{5,3033}{\sqrt{2}} = 3,75$ cm b) $l = \dfrac{3,96}{\sqrt{2}} = 2,8$ cm c) $l = \dfrac{2,12}{\sqrt{2}} = 1,5$ cm

**28.** **Calcula el área de estas figuras.**




a) $A = \dfrac{30 \cdot 30}{2} = 450$ cm$^2$

b) $A = \dfrac{40 \cdot 42}{2} = 840$ cm$^2$

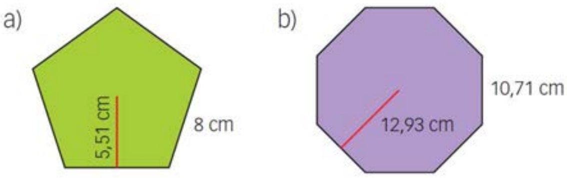
c) $5^2 = a^2 + 1^2 \rightarrow a = 4,9$ cm

$A = \dfrac{(14+12) \cdot 4,9}{2} = 63,7$ cm$^2$

d) $53^2 = a^2 + 28^2 \rightarrow a = 45$ cm

$A = \dfrac{(75+47) \cdot 45}{2} = 2\,745$ cm$^2$

**29.** **Calcula el perímetro y el área de estos polígonos regulares.**



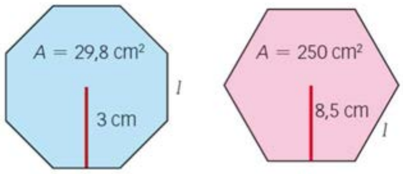

a) Perímetro $= P = 5 \cdot 8 = 40$ cm

Área $= A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{40 \cdot 5,51}{2} = 110,2$ cm$^2$

b) Perímetro $= P = 8 \cdot 10,71 = 85,68$ cm

Área $= A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{85,68 \cdot 12,93}{2} = 553,92$ cm$^2$

**30. Halla el lado de estos polígonos regulares.**




OCTÓGONO:

$$A = 29{,}8\ \text{cm}^2 = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{P \cdot 3}{2} \rightarrow P = \frac{29{,}8 \cdot 2}{3} = 19{,}87\ \text{cm}$$

El lado del octógono es $l = \frac{19{,}87}{8} = 2{,}48\ \text{cm}$.

HEXÁGONO:

$$A = 250\ \text{cm}^2 = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{P \cdot 8{,}5}{2} \rightarrow P = \frac{250 \cdot 2}{8{,}5} = 58{,}82\ \text{cm}$$

El lado del hexágono es $l = \frac{58{,}82}{6} = 9{,}8\ \text{cm}$.

**31. Determina la altura y el perímetro de un triángulo equilátero de área 2 dm².**

La altura del triángulo equilátero, *h*, y el lado, *l*, del triángulo tienen esta relación:

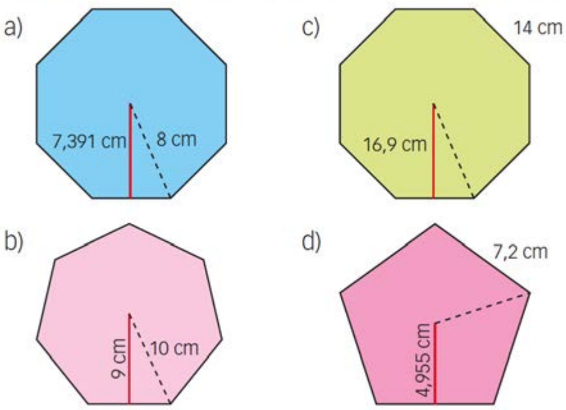
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$A = 2\ \text{dm}^2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow l^2 = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{3}} = 4{,}62 \rightarrow l = 2{,}15\ \text{dm}$$

Ahora ya se pueden calcular la altura y el perímetro:

$$h = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{2{,}15}{2}\sqrt{3} = 1{,}86\ \text{dm} \qquad P = 3l = 3 \cdot 2{,}15 = 6{,}45\ \text{dm}$$

**32. Calcula el área de los siguientes polígonos regulares.**



a) En el triángulo rectángulo formado por la apotema, el radio y la mitad del lado, se tiene:

$$8^2 = 7{,}391^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{64 - 54{,}63} = 3{,}06 \text{ cm} \rightarrow l = 6{,}12 \text{ cm}$$

El área del octógono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6{,}12 \cdot 8 \cdot 7{,}391}{2} = 180{,}93 \text{ cm}^2$.

b) En el triángulo rectángulo formado por la apotema, el radio y la mitad del lado, se tiene:

$$10^2 = 9^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{100 - 81} = 4{,}36 \text{ cm} \rightarrow l = 8{,}72 \text{ cm}$$

El área del heptágono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{8{,}72 \cdot 7 \cdot 9}{2} = 274{,}68 \text{ cm}^2$.

c) El área del octógono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{8 \cdot 14 \cdot 16{,}9}{2} = 946{,}40 \text{ cm}^2$.

d) El área del pentágono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{7{,}2 \cdot 5 \cdot 4{,}955}{2} = 89{,}19 \text{ cm}^2$.

**33.** **Calcula el área de un octógono regular de 5,2 cm de lado y 6,794 cm de radio.**

Se calcula primero la apotema:

$$6{,}794^2 = 2{,}6^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{6{,}794^2 - 6{,}76} = 6{,}28 \text{ cm}$$

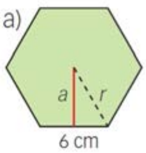
El área es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5{,}2 \cdot 8 \cdot 6{,}28}{2} = 130{,}62 \text{ cm}^2$.

**34.** **Calcula el radio de un pentágono regular de lado 10,8 cm y de apotema 7,43 cm.**

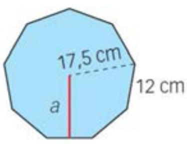
$$r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow r = \sqrt{7{,}43^2 + 5{,}4^2} = 9{,}19 \text{ cm}$$

**35.** **Calcula la apotema en estos polígonos regulares.**

a)




b)




a) El lado es igual al radio, por tanto, se tiene: $r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$.

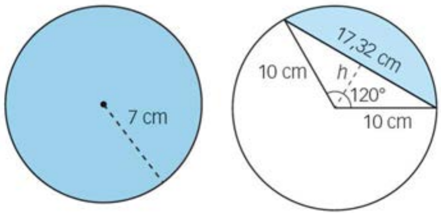
b) $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{17{,}5^2 - 6^2} = \sqrt{270{,}25} = 16{,}44 \text{ cm}$

**36.** **Calcula el área de un hexágono regular de 9 cm de apotema.**

Se calcula el lado: $l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = 9^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 81 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{3}} = 10{,}39 \text{ cm}$.

Se calcula el área: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{10{,}39 \cdot 6 \cdot 9}{2} = 280{,}53 \text{ cm}^2$

**37. Calcula el área y el perímetro de estas figuras.**




a) $A = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 153{,}94 \text{ cm}^2$ y $P = 2\pi r = 14\pi = 43{,}98 \text{ cm}$

b) Se halla la altura del triángulo. Para ello se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y cuyos catetos son la altura y la mitad de la cuerda:

$$10^2 = \left(\frac{17{,}32}{2}\right)^2 + h^2 \to h^2 = 25{,}0044 \to h = 5$$

Se calcula el área del triángulo y el área del sector:

$$A_{\text{Sector}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120}{360} = 104{,}72 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{Triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{17{,}32 \cdot 5}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$$

Se resta el área del triángulo a la del sector para obtener el área del segmento circular:

$$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}} = 104{,}72 - 43{,}3 = 61{,}42 \text{ cm}^2$$

$$P = \frac{2\pi r\alpha}{360} + 17{,}32 = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 120}{360} + 17{,}32 = 38{,}26 \text{ cm}$$

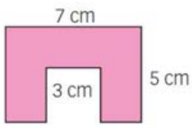
**38. Calcula el radio del sector circular de amplitud 135° y área 3,817 cm².**

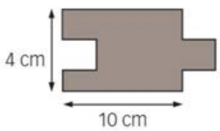
$$A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \to 3{,}817 = \frac{\pi r^2 \cdot 135}{360} \to r^2 = \frac{3{,}817 \cdot 360}{\pi \cdot 135} = 3{,}24 \to r = 1{,}8 \text{ cm}$$

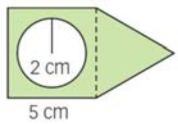
**39. Calcula el área de la zona coloreada de la figura circular en donde $\alpha = 90°$, $r = 3$ cm y $R = 9$ cm.**

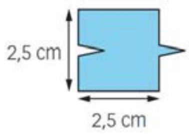

$$A = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi (9^2 - 3^2) \cdot 90}{360} = 56{,}55 \text{ cm}^2$$

**40. Determina el área de las figuras.**

a) 


b) 


c) 


d) 


a) $A = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 26 \text{ cm}^2$.

b) $A = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$.

c) $h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \to A = 5 \cdot 5 + (5 \cdot 4{,}33)/2 - 4\pi = 23{,}26 \text{ cm}^2$

d) $A = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 \text{ cm}^2$.

**41. Calcula el área.**


a) Es un semicírculo al que le restamos y le sumamos la misma superficie, luego será el equivalente al área del semicírculo: $A=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{36\pi}{2}=56,55\text{ cm}^2$ .

b) Es un semicírculo más un cuarto de círculo, es decir, tres cuartos de círculo más un triángulo isósceles:

$$A=\frac{3}{4}\pi\cdot 2^2+\frac{2\cdot 2}{2}=3\pi+2=11,42\text{ cm}^2$$

**42. Halla el área de estas figuras.**

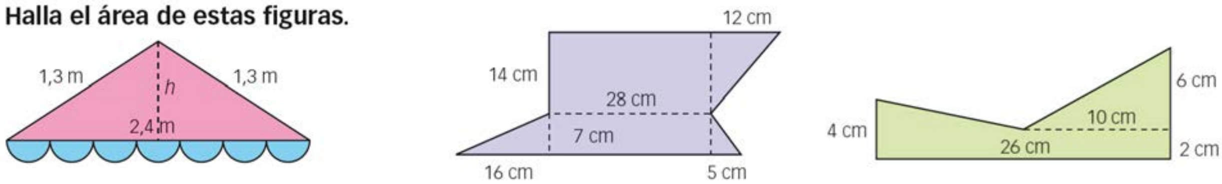



FIGURA DE LA IZQUIERDA:

El área de la figura es la suma de las áreas de un triángulo y la de 7 semicírculos:

$$A=A_{\text{Triángulo}}+7\cdot A_{\text{Semicírculos}}$$

Primero se calcula la altura del triángulo: $h=\sqrt{1,3^2-1,2^2}=0,5\text{ m}$

Después, se calcula el radio de los semicírculos: $r=\frac{2,4}{7\cdot 2}=0,17\text{ m}$

Así, el área de la figura es: $A=A_{\text{Triángulo}}+7\cdot A_{\text{Semicírculos}}=\frac{2,4\cdot 0,5}{2}+7\cdot\frac{\pi\cdot(0,17)^2}{2}=0,6+0,32=0,92\text{ m}^2$ .

FIGURA CENTRAL:

Con ayuda de las líneas discontinuas verticales se obtienen cuatro figuras, un rectángulo y tres triángulos:

$$A=\frac{16\cdot 7}{2}+21\cdot 28+\frac{12\cdot 14}{2}+\frac{5\cdot 7}{2}=56+588+84+17,5=745,5\text{ cm}^2$$

FIGURA DE LA DERECHA:

Continuando la línea discontinua hacia la izquierda, se obtienen tres figuras, dos triángulos y un rectángulo:

$$A=\frac{16\cdot 2}{2}+26\cdot 2+\frac{10\cdot 6}{2}=16+52+30=98\text{ cm}^2$$

# ACTIVIDADES FINALES

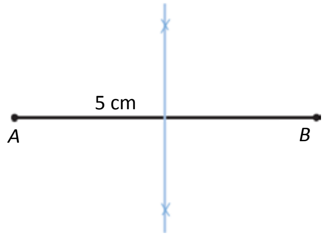
**43. Halla y dibuja estos lugares geométricos.**

a) Los puntos del plano que equidistan de los extremos *A* y *B* de un segmento de 5 cm.

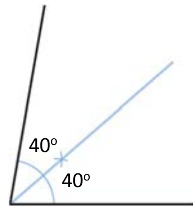
b) Los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo de 80°.

c) Los puntos del plano que equidistan de dos vértices no consecutivos de un cuadrado.

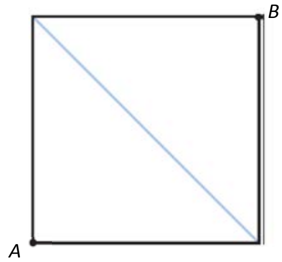
a) Mediatriz del segmento



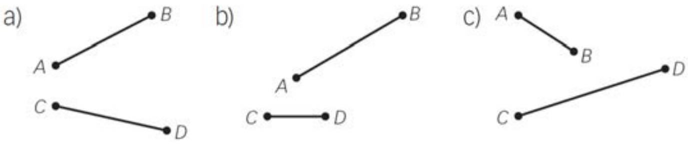

b) Bisectriz del ángulo de 80º



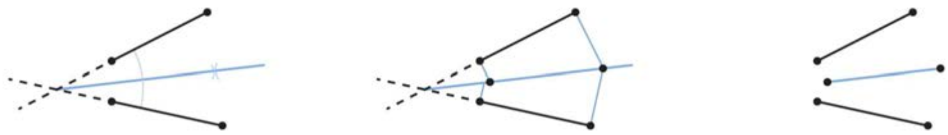

c) Diagonal que pasa por los otros dos vértices



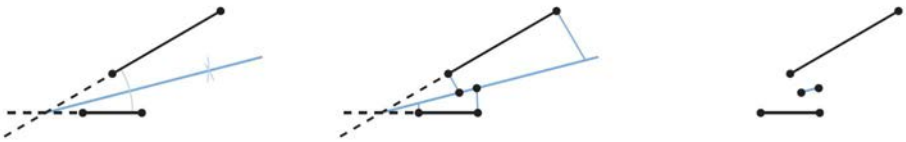

**44. Dibuja en tu cuaderno los puntos del plano que equidistan de los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.**



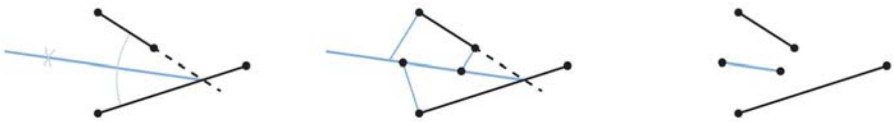

a)



b)



c)



**45. Traza el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de estos elementos geométricos.**

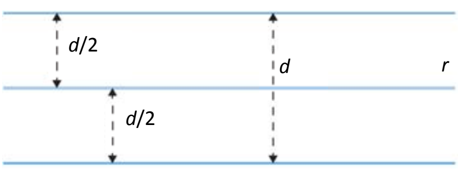
a) Dos rectas paralelas.

b) Los puntos de una circunferencia de radio *r*.

c) Dos circunferencias concéntricas.

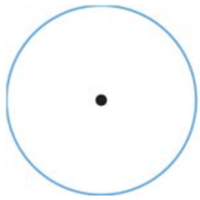
a) Recta que equidista de las dos rectas paralelas.

Trazamos una perpendicular a las dos rectas.
Hallamos el punto medio del segmento que determinan en la perpendicular las dos rectas.
Trazamos la paralela a las rectas dadas que pasa por dicho punto.



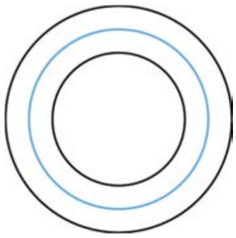
b) Centro de la circunferencia.

Tomamos tres puntos de la circunferencia, trazamos las mediatrices de los segmentos que determinan los puntos. El punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia.



c) Circunferencia concéntrica y de radio la media aritmética de los dos radios.

Trazamos un radio de la circunferencia mayor.
Hallamos el punto medio del segmento que determinan en el radio las dos circunferencias.
Trazamos la circunferencia de mismo centro que las dos anteriores que pasa por el punto medio del segmento.



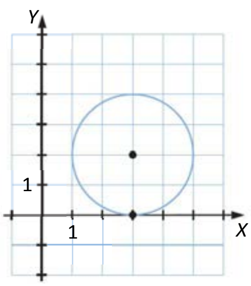
**46. Haz una circunferencia con centro en el punto *P*(3, 2) de forma que:**

a) El eje de abscisas sea tangente a ella en el punto (3, 0).

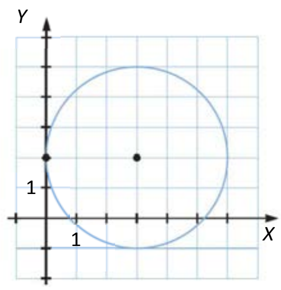
b) El eje de ordenadas sea tangente a ella en el punto (0, 2).

Tomamos de radio la distancia entre el punto *P* y el punto del eje donde debe ser tangente. Tomamos como centro el punto *P* y trazamos la circunferencia:

a)




b)

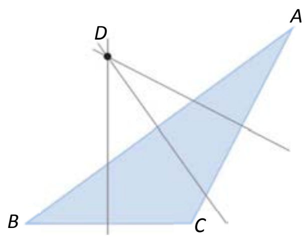



**47. Dibuja un triángulo de lados *a*, *b* y *c*, y encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de sus vértices.**

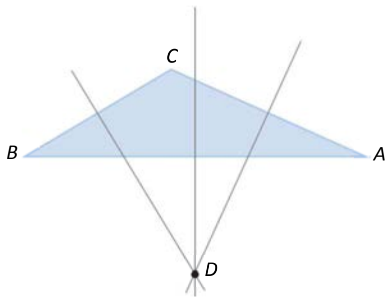
a) $a = 6, b = 8$ y $c = 12$    b) $a = 4, b = 5$ y $c = 8$

El lugar geométrico es el circuncentro.

a)

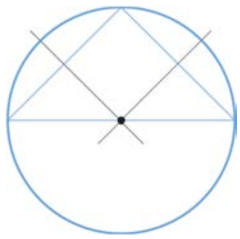



b)




**48. En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa mide 10 cm. Traza su circunferencia circunscrita y calcula su radio.**

El centro de la circunferencia estará en la mitad de la hipotenusa, el radio es 5 cm.



**49. Averigua qué polígono cumple que la suma de sus ángulos interiores es 1980°.**

$S = 1\,980° = 180° \cdot (n - 2) \rightarrow n = \frac{1980}{180} + 2 = 11 + 2 = 13 \rightarrow$ Se trata de un polígono de 13 lados.

**50. Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono en el que al trazar sus diagonales desde un vértice se forman los triángulos indicados.**

a) 3 triángulos b) 5 triángulos c) 7 triángulos

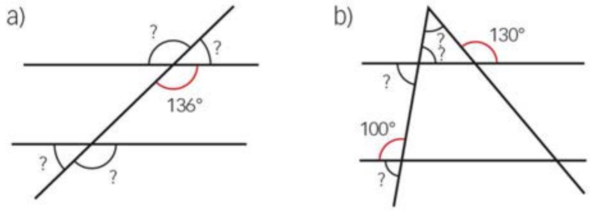
a) $S = 180° \cdot 3 = 540°$ b) $S = 180° \cdot 5 = 900°$ c) $S = 180° \cdot 7 = 1260°$

**51. Si el número de diagonales, $d$, de un polígono de $n$ lados viene dado por $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, halla la suma de los ángulos interiores de un polígono con 9 diagonales.**

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = 9 \rightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -3 \rightarrow \text{Solución no válida} \end{cases}$$

$$n = 6 \rightarrow S_6 = 180° \cdot (6 - 2) = 720°$$

**52. Halla los ángulos con interrogante y razona cómo lo haces.**





**53. Calcula el valor del ángulo desconocido y explica cómo lo haces.**


El ángulo desconocido mide 55° + 25° = 80°

**54. Determina si las siguientes medidas se corresponden con los lados de un triángulo rectángulo.**

a) 6, 8 y 10 cm
b) 5, 5 y $5\sqrt{2}$ cm
c) $\sqrt{61}$, 5 y 6 cm
d) 3, 7 y 6 cm
e) 7, 24 y 25 cm
f) 3, 3 y 5 cm

a) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 10^2 = 100 \\ b^2 + c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} a^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50 \\ b^2 + c^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

c) $\left.\begin{array}{l} a^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 = 61 \\ b^2 + c^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

d) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 7^2 = 49 \\ b^2 + c^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

e) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 25^2 = 625 \\ b^2 + c^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

f) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 5^2 = 25 \\ b^2 + c^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

**55.** **Copia en tu cuaderno y completa esta tabla de medidas donde *a* es la hipotenusa y *b* y *c* son los catetos de un triángulo rectángulo.**

| *a* | *b* | *c* |
|---|---|---|
| **5** | 3 | 4 |
| $5\sqrt{5}$ | 10 | **5** |
| $\sqrt{52}$ | **4** | 6 |
| 4 | $2\sqrt{2}$ | **2,83** |
| **8,6** | 5 | 7 |
| **7,07** | 5 | 5 |

**56.** **El lado de un cuadrado mide 2 cm. Si se varía el tamaño, di cuánto hay que aumentar o disminuir el lado para que la nueva diagonal tenga esta relación con la original.**

a) La mitad
b) El doble
c) El triple
d) La tercera parte

La diagonal *d* de un cuadrado de lado *l* mide $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$ .

La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm mide $2\sqrt{2}$ .

Llamando *D* a la diagonal del cuadrado modificado y *L* a su lado, se tiene:

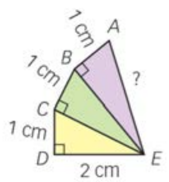
a) $D=\frac{d}{2}=\frac{l\sqrt{2}}{2}=\frac{l}{2}\sqrt{2}\rightarrow L=\frac{l}{2}$ $\longrightarrow$ Hay que disminuir el lado original a la mitad, es decir, medirá 1 cm.

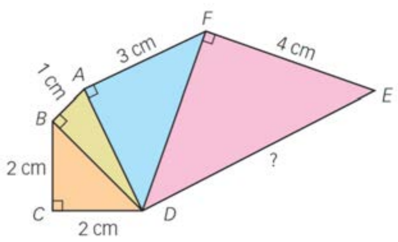
b) $D=2d=2l\sqrt{2}=\rightarrow L=2l$ $\longrightarrow$ Hay que aumentar el lado original al doble, es decir, medirá 4 cm.

c) $D=3d=3l\sqrt{2}=\rightarrow L=3l$ $\longrightarrow$ Hay que aumentar el lado original al triple, es decir, medirá 6 cm.

d) $D=\frac{d}{3}=\frac{l\sqrt{2}}{3}=\frac{l}{3}\sqrt{2}\rightarrow L=\frac{l}{3}$ $\longrightarrow$ Hay que disminuir el lado original a su tercera parte, es decir, medirá $\frac{2}{3}$ cm .

**57.** **Halla la longitud de los segmentos indicados.**

a)



b)



a) $\overline{EC}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\rightarrow\overline{EB}=\sqrt{1+5}=\sqrt{6}\rightarrow\overline{EA}=\sqrt{1+6}=\sqrt{7}$ cm

b) $\overline{BD}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}\rightarrow\overline{DA}=\sqrt{1+8}=3\rightarrow\overline{DF}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}\rightarrow\overline{DE}=\sqrt{18+16}=\sqrt{34}$ cm

**59.** **Un triángulo equilátero tiene 36 cm de perímetro. Halla su altura.**

El lado del triángulo mide 36 : 3 = 12 cm.

$12^2=6^2+h^2\rightarrow h=\sqrt{144-36}=10{,}39$ cm

**60.** **La altura de un triángulo equilátero mide 6,93 cm. ¿Cuánto mide el lado?**

$$l^2 = 6{,}93^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 6{,}93^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 48{,}0249 \rightarrow l = \sqrt{\frac{48{,}0249 \cdot 4}{3}} = 8 \text{ cm}$$

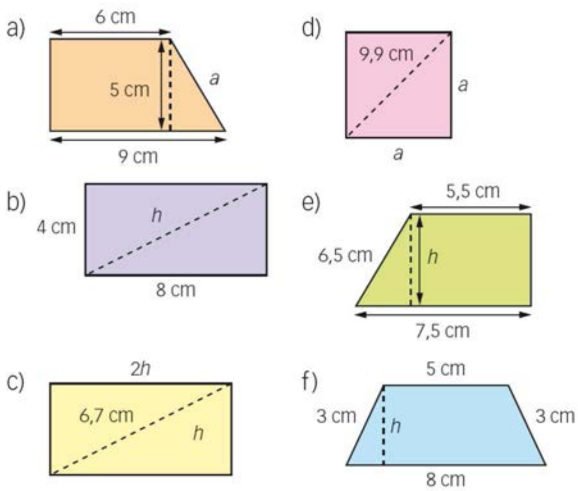
**61.** **Halla la altura, sobre el lado desigual, de un triángulo isósceles cuyos lados miden 7, 7 y 4 cm.**

$$7^2 = 2^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{49 - 4} = 6{,}71 \text{ cm}$$

**62.** **El lado desigual de un triángulo isósceles mide 36 cm y la altura mide 45 cm. ¿Cuánto miden los lados iguales?**

$$l^2 = 45^2 + 18^2 \rightarrow l = \sqrt{2\,025 + 324} = 48{,}47 \text{ cm}$$

**63.** **Calcula la distancia que falta en cada caso.**




a) $a^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow a = \sqrt{25 + 9} = 5{,}83$ cm

b) $h^2 = 4^2 + 8^2 \rightarrow a = \sqrt{16 + 64} = 8{,}94$ cm

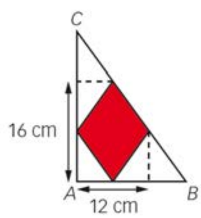
c) $6{,}7^2 = h^2 + (2h)^2 \rightarrow 44{,}89 = 5h^2 \rightarrow h = \sqrt{44{,}89 : 5} = 3$ cm

d) $9{,}9^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 98{,}01 = 2a^2 \rightarrow a = \sqrt{98{,}01 : 2} = 7$ cm

e) $6{,}5^2 = 2^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{42{,}25 - 4} = 6{,}18$ cm

f) $3^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$ cm

**64.** **Observa la figura y calcula el lado del rombo y las longitudes del cateto *AB*, del cateto *AC* y de la hipotenusa *BC*.**



$$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

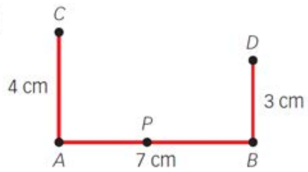
$$AC = \frac{D}{2} + D = \frac{16}{2} + 16 = 24 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{d}{2} + d = \frac{12}{2} + 12 = 18 \text{ cm}$$

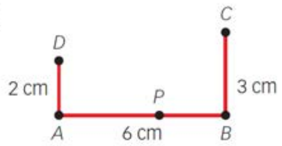
$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \rightarrow AC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ cm}$$

**65. Fíjate en los dibujos y halla la distancia del punto *P* al punto *A*, para que se verifique que la longitud del segmento *CP* sea igual que la del segmento *DP*.**

a)




b)




a) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 4^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (7 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 + x^2 = 3^2 + (7 - x)^2$$

$$16 + x^2 = 9 + 49 - 14x + x^2$$

$$14x = 42 \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$d^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ cm}$$

b) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 2^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (6 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2^2 + x^2 = 3^2 + (6 - x)^2$$

$$4 + x^2 = 9 + 36 - 12x + x^2$$

$$12x = 41 \rightarrow x = 3{,}42 \text{ cm}$$

$$d^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{4 + 11{,}69} = 3{,}96 \text{ cm}$$

**66. Uno de los lados de un triángulo mide 4,6 cm y la altura sobre él mide 3,8 cm.**

a) Halla el área del triángulo.

b) Si otro lado del triángulo mide 3,8 cm, ¿cuánto mide la altura sobre ese lado?

a) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4{,}6 \cdot 3{,}8}{2} = 8{,}74 \text{ cm}^2$

b) Solo en los triángulos rectángulos es posible que una altura mida igual que un lado distinto de la base. Así, cateto y altura coinciden, siendo la base correspondiente el otro cateto.

Por tanto, la altura sobre el lado de 3,8 cm mide 4,6 cm.

**67. La altura de un triángulo mide dos terceras partes de su base $b = 9$ cm. Calcula su área.**

$$h = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

**68. Determina el perímetro y el área de un cuadrado cuya diagonal mide:**

a) $4\sqrt{2}$ cm b) $6\sqrt{2}$ cm

El perímetro de un cuadrado de lado *l* es 4*l* y el área es $l^2$. La diagonal en función del lado mide:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

a) $d = 4\sqrt{2} = l\sqrt{2} \to l = 4$ cm $P = 4l = 4 \cdot 4 = 16$ cm $A = l^2 = 4^2 = 16$ cm$^2$

b) $d = 6\sqrt{2} = l\sqrt{2} \to l = 6$ cm $P = 4l = 4 \cdot 6 = 24$ cm $A = l^2 = 6^2 = 36$ cm$^2$

**69. Calcula el área de un cuadrado cuyo perímetro mide igual que el de un triángulo equilátero de lado 6 cm.**

$$\left.\begin{array}{l} P_T = 3 \cdot l_T = 3 \cdot 6 = 18 \\ P_C = 4 \cdot l_C \end{array}\right\} \to l_C = \frac{18}{4} = 4{,}5 \text{ cm} \to A_C = l_C^{\,2} = 4{,}5^2 = 20{,}25 \text{ cm}^2$$

**70. Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro mide lo mismo que el de un triángulo equilátero de altura 8 cm.**

Se calcula primero el lado del triángulo equilátero:

$$l^2 = 8^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \to l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 64 \to \frac{3l^2}{4} = 64 \to l = \sqrt{\frac{64 \cdot 4}{3}} = 9{,}24 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_T = 3 \cdot l_T = 3 \cdot 9{,}24 = 27{,}72 \\ P_C = 4 \cdot l_C \end{array}\right\} \to l_C = \frac{27{,}72}{4} = 6{,}93 \text{ cm} \to A_C = l_C^{\,2} = 6{,}93^2 = 48{,}02 \text{ cm}^2$$

**71. Señala cuál es el lado y el perímetro de un cuadrado de 210,25 cm² de área.**

$$A = 210{,}25 \text{ cm}^2 = l^2 \to l = \sqrt{210{,}25} = 14{,}5 \text{ cm}$$

$$P = 4 \cdot 14{,}5 = 58 \text{ cm}$$

**72. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya diagonal mide 34 cm, y la base, 30 cm.**

Llamando *h* a la altura del rectángulo, se tiene:

$$34^2 = 30^2 + h^2 \to h = \sqrt{1156 - 900} = 16 \text{ cm}$$

$$P = (30 + 16) \cdot 2 = 92 \text{ cm}$$

$$A = 30 \cdot 16 = 480 \text{ cm}^2$$

**73. Dado un rectángulo cuyos lados miden 4 cm y 9 cm, contesta verdadero o falso.**

a) El área de un cuadrado con el mismo perímetro es 169 cm².

b) El perímetro de un cuadrado con igual área es 24 cm.

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones son el doble es $2 \cdot 36 = 72$ cm².

Se calcula el perímetro y el área del rectángulo:

$P_R = (9+4)\cdot 2 = 26$ cm $\qquad A_R = 9\cdot 4 = 36$ cm$^2$

a)

$$\left.\begin{array}{l} P_C = P_R = 26 \text{ cm} \\ P_C = 4l \end{array}\right\} \to l = \frac{26}{4} = 6{,}5 \text{ cm} \to A_C = l^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25 \text{ cm}^2 \neq 169 \text{ cm}^2 \to \text{Falso}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} A_C = A_R = 36 \text{ cm}^2 \\ A_C = l^2 \end{array}\right\} \to l = \sqrt{36} = 6 \text{ cm } (l = -6 \text{ cm no es válida}) \to P_C = 4l = 4\cdot 6 = 24 \text{ cm} \to \text{Verdadero}$$

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones son el doble, es 18 · 8 = 144 cm$^2$, por tanto, el enunciado es falso.

**74. Calcula el perímetro, la altura y el área de un triángulo equilátero de lado 14 cm.**

Al tratarse de un triángulo equilátero, el perímetro es $3l = 3 \cdot 14 = 42$ cm.

Se calcula la altura con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{196-49} = \sqrt{147} = 12{,}12 \text{ cm}$$

Conocida la altura, se calcula el área:

$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{14\cdot 12{,}12}{2} = 84{,}84 \text{ cm}^2$$

**75. La diagonal de un cuadrado mide 128 mm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?**

El perímetro de un cuadrado es $4l$ y es área es $l^2$, por tanto, se necesita la medida del lado. Calculamos el lado aplicando el teorema de Pitágoras:

$$128^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \to 16\,384 = 2l^2 \to l = \sqrt{\frac{16\,384}{2}} = 90{,}51 \text{ mm}$$

El perímetro es $P = 4\cdot 90{,}51 = 362{,}04$ mm.

El área es $A = l^2 = 90{,}51^2 = 8\,192{,}06$ mm$^2$.

**76. El área de un rombo es 150 dm² y una de sus diagonales mide 20 dm. Calcula la otra diagonal y el perímetro del rombo.**

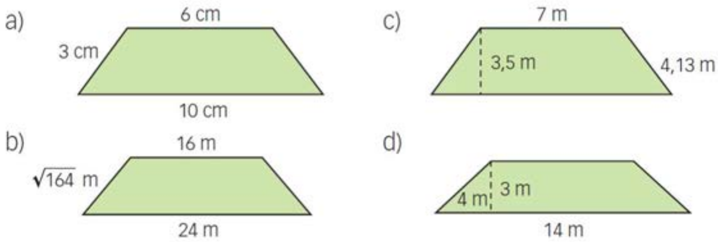
$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{D\cdot d}{2} = 150 \text{ dm}^2 \\ D = 20 \text{ dm} \end{array}\right\} \to \frac{20\cdot d}{2} = 150 \to d = \frac{150\cdot 2}{20} = 15 \text{ dm}$$

Se calcula el lado del rombo con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$l^2 = 10^2 + 7{,}5^2 \to l = \sqrt{100+56{,}25} = 12{,}5 \text{ dm}$$

El perímetro es $4l = 4 \cdot 12{,}5 = 50$ dm

**78. Halla el área de estos trapecios isósceles.**





a) $h = \overline{DE} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{10-6}{2}\right)^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ cm

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(10+6)\cdot 2{,}24}{2} = 17{,}92$ cm$^2$

b) $h = \overline{DE} = \sqrt{(\sqrt{164})^2 - \left(\dfrac{24-16}{2}\right)^2} = \sqrt{148} = 12{,}17$ m

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(24+16)\cdot 12{,}17}{2} = 243{,}4$ m$^2$

c) $\overline{AE} = \sqrt{4{,}13^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{4{,}81} = 2{,}19$ m

$\overline{FB} = \overline{AB} = 7 + 2\cdot 2{,}19 = 11{,}38$ m

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(11{,}38+7)\cdot 3{,}5}{2} = 32{,}16$ m$^2$

d) $b = 14 - 2\cdot 4 = 6$ m

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(14+6)\cdot 3}{2} = 30$ m$^2$

**79. Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 10 cm y 17 cm, y su altura, 8 cm. Calcula su perímetro y su área.**

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm $\qquad B = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$ cm

En el triángulo rectángulo de catetos 8 cm y 15 – 6 = 9 cm, aplicando el teorema de Pitágoras se calcula el lado oblicuo del trapecio.

$\text{Lado oblicuo} = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145} = 12{,}04$ cm

Ya se tienen todos los lados del trapecio y se calculan el perímetro y el área:

$P = 8 + 6 + 12{,}04 + 15 = 41{,}04$ cm $\qquad A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(15+6)\cdot 8}{2} = 84$ cm$^2$

**80. Calcula el área de un trapecio rectángulo sabiendo que la base menor mide 12 cm; la diagonal menor, 15 cm, y el lado oblicuo, 13 cm.**

En el triángulo rectángulo de cateto 12 cm e hipotenusa 15 cm, aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la altura del trapecio.

$h = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm

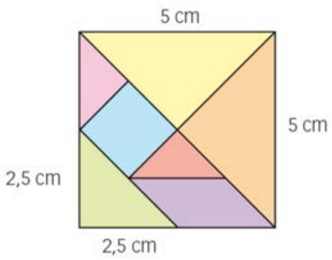
En el triángulo rectángulo de cateto 9 cm e hipotenusa 13 cm, aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula la diferencia, *d,* entre las bases del trapecio.

$d=\sqrt{13^2-9^2}=\sqrt{169-81}=\sqrt{88}=9{,}38$ cm

Con lo que la base mayor del trapecio mide 12 + 9,38 = 21,38 cm y se calcula el área:

$$A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}=\frac{(21{,}38+12)\cdot 9}{2}=150{,}21\ \text{cm}^2$$

**81.** **Considera las siete piezas del *tangram* chino y halla el área de cada una de ellas.**




Hallamos primero la diagonal del cuadrado:

$d=\sqrt{l^2+l^2}=l\sqrt{2}\rightarrow d=5\sqrt{2}$ cm

$$A_{\text{Triángulo mayor}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{8}=\frac{25\cdot 2}{8}=6{,}25\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo mediano}}=\frac{2{,}5\cdot 2{,}5}{2}=3{,}125\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo menor}}=\frac{\frac{d}{4}\cdot\frac{d}{4}}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{4}}{2}=\frac{25}{16}=1{,}5625\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}}=\left(\frac{d}{4}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{50}{16}=3{,}125\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Romboide}}=b\cdot h=\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\rightarrow A_{\text{Romboide}}=2{,}5\cdot 1{,}25=3{,}125\ \text{cm}^2$$

Comprobamos que la suma de las áreas de todas las piezas es igual al área total del cuadrado, $5^2=25$ cm²:

$$2\cdot 6{,}25+3{,}125+2\cdot 1{,}5625+3{,}125+3{,}125=25$$

**82.** **Determina el perímetro y la diagonal de un cuadrado cuya área es 67,24 cm².**

$A=67{,}24\ \text{cm}^2=l^2\rightarrow l=\sqrt{67{,}24}=8{,}2$ cm $\qquad P=4l=4\cdot 8{,}2=32{,}8$ cm

$\text{Diagonal}=d=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}=8{,}2\cdot\sqrt{2}=11{,}597$ cm

**83.** **Calcula la medida de las diagonales de un rectángulo cuya área es 28,8 cm² sabiendo que la altura mide 4 cm.**

$A=28{,}8\ \text{cm}^2=4\cdot\text{base}\rightarrow\text{base}=\frac{28{,}8}{4}=7{,}2$ cm

$\text{Diagonal}=d=\sqrt{4^2+7{,}2^2}=\sqrt{67{,}84}=8{,}237$ cm

**84.** **La relación entre las diagonales de un rombo, $d$ y $D$, viene dada por la expresión $d = \frac{3D}{5}$. Calcula el perímetro y el área del rombo sabiendo que $D = 15$ cm.**

$d = \frac{3D}{5} = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9 \text{ cm}$

$l = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{76{,}5} = 8{,}75 \text{ cm}$

$P = 4l = 4 \cdot 8{,}75 = 35 \text{ cm}$

$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{9 \cdot 15}{2} = 67{,}5 \text{ cm}^2$

**85.** **Halla la apotema y el área de un hexágono regular de 14 cm de lado.**

En el hexágono regular el lado es igual al radio, por tanto, la apotema es:

$a = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{147} = 12{,}12 \text{ cm}$

$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 14 \cdot 12{,}12}{2} = 509{,}04 \text{ cm}^2$.

**86.** **Determina la apotema y el área de un hexágono regular de 72 cm de perímetro.**

Si el perímetro del hexágono regular es 72 cm, el lado es 72 : 6 = 12 cm.

Se calcula la apotema y con ella el área:

$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10{,}39 \text{ cm}$

$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$

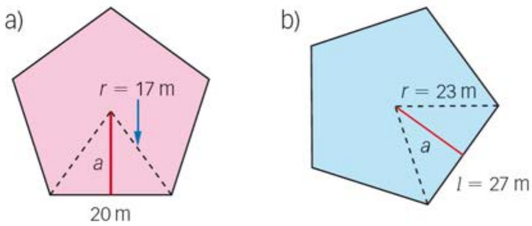
**87.** **Averigua el lado y el área de un hexágono regular sabiendo que su apotema mide 8,09 cm.**

La apotema es el cateto del triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el lado del hexágono y por el otro cateto la mitad del lado. Se calcula el lado:

$l^2 = 8{,}09^2 + \frac{l^2}{4} \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 65{,}4481 \rightarrow l = \sqrt{\frac{65{,}4481 \cdot 4}{3}} = \sqrt{87{,}264} = 9{,}34 \text{ cm}$

El área es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 9{,}34 \cdot 8{,}09}{2} = 226{,}68 \text{ cm}^2$.

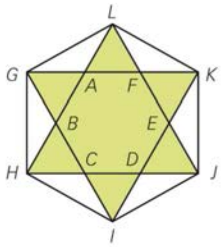
**88.** **Halla la apotema y el área de cada uno de estos pentágonos regulares.**




a) $a = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{289 - 100} = 13{,}75 \text{ m}$ $\quad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 13{,}75}{2} = 687{,}5 \text{ m}^2$

b) $a = \sqrt{23^2 - 13{,}5^2} = 18{,}62 \text{ m}$ $\quad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 27 \cdot 18{,}62}{2} = 1\,256{,}85 \text{ m}^2$

**89.** **El lado del hexágono regular *ABCDEF* mide 8 cm, y su apotema, 6,9 cm.**




a) ¿Cuál es el área del hexágono *ABCDEF*?

b) ¿Y el de la parte coloreada?

c) ¿Cuál es el área del hexágono *GHIJKL*?

d) ¿Qué fracción del hexágono *GHIJKL* representa el área de la figura coloreada?

a) $A = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}9}{2} = 165{,}6 \text{ cm}^2$

b) El área de la figura coloreada es el doble del área del hexágono *ABCDEF*, es decir, $2 \cdot 165{,}6 = 331{,}2 \text{ cm}^2$.

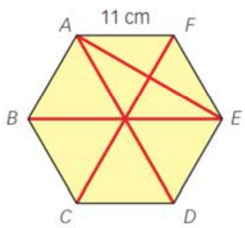
c) El área del hexágono *GHIJKL* es el triple del área del hexágono *ABCDEF*, es decir, $3 \cdot 165{,}6 = 496{,}8 \text{ cm}^2$.

d) $\dfrac{331{,}2}{496{,}8} = \dfrac{2}{3}$

**90.** **Halla el área de un hexágono regular de 90 cm de perímetro.**

$P = 90 \text{ cm} \rightarrow l = \dfrac{90}{6} = 15 \text{ cm}$ $\quad a = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 13 \text{ cm}$ $\quad A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{90 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$

**91.** **Sean *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* los vértices de un hexágono regular de 11 cm de lado. Halla la longitud de los siguientes segmentos.**




a) $\overline{AE}$ b) $\overline{AD}$ c) $\overline{BE}$ d) $\overline{FC}$

a) $\left(\dfrac{\overline{AE}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 = 11^2 \rightarrow \left(\dfrac{\overline{AE}}{2}\right)^2 = 121 - 30{,}25 = 90{,}75 \rightarrow \overline{AE} = 2 \cdot \sqrt{90{,}75} = 19{,}05 \text{ cm}$

b) El lado del hexágono mide lo mismo que el radio, luego $\overline{AD} = 11 \cdot 2 = 22 \text{ cm}$.

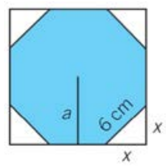
c) $\overline{BE} = 11 \cdot 2 = 22 \text{ cm}$

d) $\overline{FC} = 11 \cdot 2 = 22 \text{ cm}$

**92.** **Determina el perímetro de un heptágono regular de área 215,75 cm² y apotema 8 cm.**

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow \dfrac{P \cdot 8}{2} = 215{,}75 \text{ cm}^2 \rightarrow P = 53{,}94 \text{ cm}$

**93. Calcula el área de un octógono regular de perímetro 48 cm.**



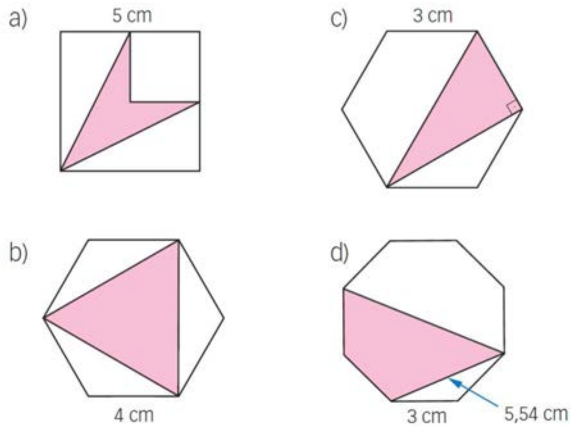

El lado mide 6 cm.

$6^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{18} = 4,24$ cm

$a = 4,24 + \dfrac{6}{2} = 7,24$ cm

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{48 \cdot 7,24}{2} = 173,76$ cm$^2$

**94. Determina el área de las superficies coloreadas.**



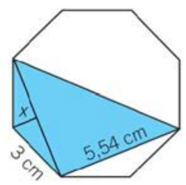

a) Cuadrado mayor – Cuadrado menor – 2 · Triángulos

$A = 5^2 - 2,5^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{5 \cdot 2,5}{2}\right) = 6,25$ cm$^2$

b) Trazamos los triángulos equiláteros centrales que forman el hexágono. Se observa que la zona coloreada la mitad del área del hexágono. La apotema del hexágono mide 3,46 cm, su área es de 41,57 cm$^2$ y el área coloreada mide 20,78 cm$^2$.

c) Trazamos los triángulos equiláteros centrales que forman el hexágono. Se observa que la zona coloreada la tercera parte del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 2,6 cm, su área es de 23,4 cm$^2$ y el área coloreada mide 7,8 cm$^2$.

d)




El área total es el área de los triángulos:

$x = \sqrt{9 - 7,67} = \sqrt{1,33} = 1,15$ cm

$A =$ Triángulo mayor $+$ Triángulo menor $=$
$= 5,54 \cdot 5,54 : 2 + 5,54 \cdot 1,15 : 2 = 18,53$ cm$^2$

**95. Halla el área de un círculo sabiendo que la longitud de la circunferencia que lo delimita es 13$\pi$ cm.**

$L = 2\pi r = 13\pi \rightarrow r = \dfrac{13\pi}{2\pi} = 6,5$ cm $\qquad A = \pi r^2 = \pi \cdot 6,5^2 = 132,73$ cm$^2$

**96. Señala el área de un círculo cuyo diámetro es igual al perímetro de un rombo de diagonales 1 cm y 2 cm.**

$l$ = lado del rombo $\qquad d$ = diámetro del círculo $\qquad r$ = radio del círculo

$l^2 = 1^2 + 0,5^2 \rightarrow l = \sqrt{1,25} = 1,12$ cm $\qquad P = 4l = 4 \cdot 1,12 = 4,48$ cm

$d = 4,48 \text{ cm} = 2r \rightarrow r = 2,24$ cm $\qquad A = \pi r^2 = \pi \cdot 2,24^2 = 15,76$ cm$^2$

**97. Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 33,93 cm.**

$$L = 2\pi r = 33{,}93 \text{ cm} \rightarrow 2r = \frac{33{,}93}{\pi} = 10{,}8 \text{ cm} = \text{diámetro de la circunferencia} = \text{diagonal del cuadrado}$$

$$10{,}8^2 = 2l^2 \rightarrow l^2 = A = \frac{10{,}8^2}{2} = 58{,}32 \text{ cm}^2$$

**98. Un triángulo rectángulo e isósceles inscrito en una circunferencia tiene un cateto que mide 23 cm. Calcula el área del círculo.**

La hipotenusa del triángulo rectángulo e isósceles es el diámetro de la circunferencia en el que está inscrito. Se calcula con esto el radio y con él, el área del círculo:

$$d^2 = 23^2 + 23^2 \rightarrow d = \sqrt{1058} = 32{,}53 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{d}{2} = 16{,}27 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 16{,}27^2 = 831{,}62 \text{ cm}^2$$

**99. Determina el área de un círculo circunscrito a un triángulo rectángulo de catetos 4 cm y 6 cm.**

$$d^2 = 4^2 + 6^2 \rightarrow d = \sqrt{52} = 7{,}2 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{d}{2} = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 3{,}6^2 = 40{,}72 \text{ cm}^2$$

**100. Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un hexágono regular de lado 5 cm.**

El radio mayor de la corona es el lado del hexágono, esto es, $R$ = lado del hexágono = 5 cm; el radio menor de la corona es la apotema del hexágono: $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33 \text{ cm}$.

El área de la corona es: $A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (5^2 - 4{,}33^2) = 19{,}64 \text{ cm}^2$.

**101. Un rectángulo de 20 cm de base y 15 cm de altura está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de la circunferencia y el perímetro del rectángulo?**

La medida de la diagonal del rectángulo es la medida del diámetro de la circunferencia. Se calcula el radio:

$$d^2 = 15^2 + 20^2 \rightarrow d = \sqrt{225 + 400} = 25 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{d}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_C = 2\pi r = 2\pi \cdot 12{,}5 = 78{,}54 \text{ cm} \\ P_R = (20 + 15) \cdot 2 = 70 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow L_C - P_R = 8{,}54 \text{ cm}$$

**102. Calcula la apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 14 cm de diámetro.**

El radio de la circunferencia es 7 cm. Se calcula la apotema con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{36{,}75} = 6{,}06 \text{ cm}$$

**103. Determina el radio de la circunferencia que circunscribe a un hexágono regular de 9 cm de apotema.**

El radio de la circunferencia que circunscribe al hexágono es el lado del hexágono:

$$l^2 = 9^2 + \frac{l^2}{4} \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 81 \rightarrow l = r = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{3}} = 10{,}39 \text{ cm}$$

**104. Calcula el radio de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de 5 cm de lado.**

El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del hexágono: $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33 \text{ cm}$

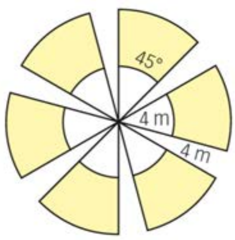
**105. Halla el área de un trapecio circular de radios 12 cm y 6 cm y de amplitud 270°.**

$$A_{\text{Sector mayor}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 270}{360} = 339{,}12 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Sector menor}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 270}{360} = 84{,}78 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Trapecio}} = 339{,}12 - 84{,}78 = 254{,}34 \text{ cm}^2$$

**106. Observa el molino y calcula el área de cada parte amarilla, de cada parte blanca y su área total.**

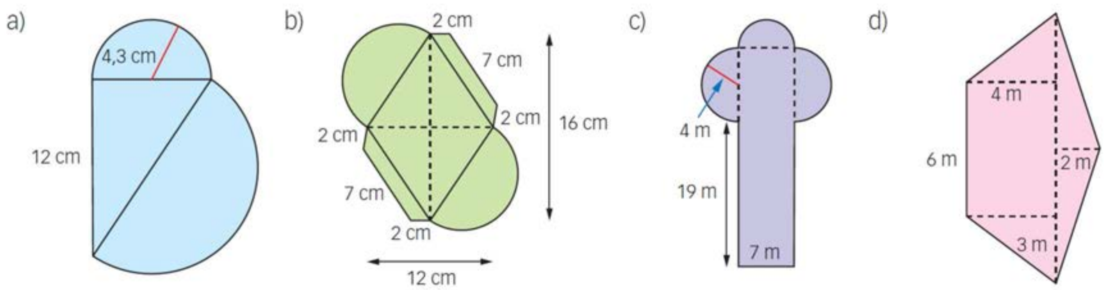



El área de cada parte blanca es: $A_{\text{Blanca}} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 45}{360} = 6{,}28 \text{ m}^2$.

El área de cada parte amarilla es: $A_{\text{Amarilla}} = \frac{\pi \cdot (8^2 - 4^2) \cdot 45}{360} = 18{,}84 \text{ m}^2$.

El área total es: $A_{\text{Total}} = 6 \cdot (A_{\text{Blanca}} + A_{\text{Amarilla}}) = 6 \cdot (6{,}28 + 18{,}84) = 150{,}72 \text{ m}^2$.

**107. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras.**



a) El área total se calcula sumando las áreas de tres figuras: un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 8,6 cm, un semicírculo de radio 4,3 m y otro semicírculo de radio la mitad de la hipotenusa del triángulo ya citado.

Primero se calcula *h,* la hipotenusa del triángulo rectángulo y con ella el radio del semicírculo mayor, *R:*

$$h^2 = 12^2 + 8{,}6^2 \rightarrow h = \sqrt{12^2 + 8{,}6^2} = \sqrt{217{,}96} = 14{,}76 \text{ cm} \rightarrow R = \frac{14{,}76}{2} = 7{,}38 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Total}} = \frac{12 \cdot 8{,}6}{2} + \frac{\pi \cdot 4{,}3^2}{2} + \frac{\pi \cdot 7{,}38^2}{2} = 166{,}19 \text{ cm}^2 \qquad P = \pi \cdot 4{,}3 + \pi \cdot 7{,}38 + 12 = 48{,}68 \text{ cm}$$

b) La figura se compone de un rombo de diagonales 16 y 12 cm, un círculo de radio la mitad del lado del rombo y dos trapecios.

Se calcula primero el lado del rombo *B,* que además es la base mayor de los trapecios; con él se calcula el radio de los dos semicírculos, *r.*

$$B^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow B = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Se calcula la altura de los trapecios, *h:* $2^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = 1{,}32 \text{ cm}$.

$$A_{\text{Total}} = \frac{16 \cdot 12}{2} + \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \frac{(10+7) \cdot 1{,}32}{2} = 196{,}98 \text{ cm}^2$$

El perímetro es: $P = 2\pi \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 53{,}42 \text{ cm}$.

c) La figura se compone de un rectángulo de dimensiones 27 m y 7 m, un círculo de radio 4 m y un semicírculo de radio 3,5 m.

$$A_{\text{Total}} = 27 \cdot 7 + \pi \cdot 4^2 + \frac{\pi \cdot 3{,}5^2}{2} = 258{,}51 \text{ m}^2$$

El perímetro es: $P = 2\pi \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 7 + \pi \cdot 3{,}5 = 81{,}13 \text{ m}$.

d) La figura se compone de un triángulo y un trapecio. La base mayor del trapecio, $B = 6 + 2 \cdot 3 = 12$, coincide con uno de los lados del triángulo. Se calcula la medida de los lados oblicuos del trapecio, *l:*

$$l^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

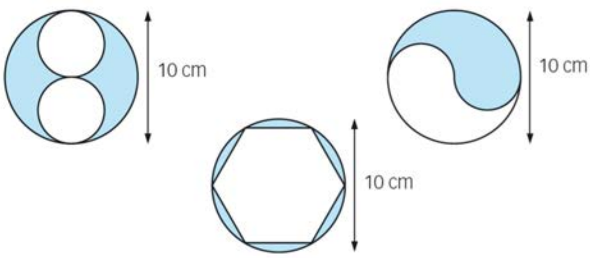
Con la mitad de la base mayor y la altura del triángulo, se calcula la medida de los dos lados iguales del triángulo*:*

$$L^2 = 6^2 + 2^2 \rightarrow L = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6{,}32 \text{ m}$$

$$A_{\text{Total}} = \frac{(12+6) \cdot 4}{2} + \frac{12 \cdot 2}{2} = 48 \text{ m}^2$$

El perímetro es: $P = 6 + 5 \cdot 2 + 7 + 2 \cdot 6{,}32 = 28{,}64 \text{ m}$.

**108. Halla el área de cada zona coloreada, sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 10 cm.**



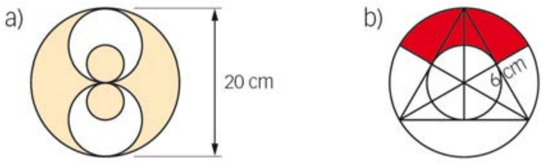
a) $A = 25\pi - 2 \cdot 6{,}25\pi = 39{,}25 \text{ cm}^2$

b) El área del hexágono de lado 5 cm es: $\frac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$

y el área comprendida mide: $25\pi - 64{,}95 = 13{,}55 \text{ cm}^2$

c) Es la mitad del círculo: $25\pi/2 = 39{,}25 \text{ cm}^2$

**109. Calcula el área de la zona coloreada.**




a) $A = \pi \cdot 10^2 - 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 100\pi - 50\pi + 12{,}5\pi = 62{,}5\pi = 196{,}35 \text{ cm}^2$

b) El radio mayor, $R$, es el radio de la circunferencia circunscrita, $R = 6$ cm.

El radio menor, $r$, es el radio de la circunferencia inscrita y es $R : 2 = 3$ cm ya que la altura del triángulo equilátero es $R + r$ y se cumple que $R = 2r$.

$$A = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot 120°}{360°} = \frac{\pi\left(6^2 - 3^2\right)}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^2$$

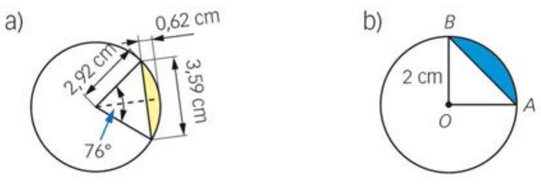
**110. Halla la amplitud de un sector de área $\pi$ cm² y radio 1,5 cm.**

$$\pi = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°} \rightarrow \pi = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot \alpha}{360°} \rightarrow \alpha = 160°$$

**111. Un sector circular de ángulo central 40° tiene un área de 8 cm². Halla la superficie del círculo correspondiente.**

$$8 = \frac{\pi r^2 \cdot 40°}{360°} \rightarrow \pi r^2 = \frac{8 \cdot 360°}{40°} = 72 \text{ cm}^2$$

**113. Calcula el área de estos segmentos circulares.**




a) La altura del triángulo es el radio de la circunferencia menos la altura de la parte amarilla: 2,92 – 0,62 = 2,3 cm

$$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}} = \frac{\pi \cdot 2{,}92^2 \cdot 76}{360} - \frac{3{,}59 \cdot 2{,}3}{2} = 5{,}65 \text{ cm}^2 - 4{,}13 \text{ cm}^2 = 1{,}52 \text{ cm}^2$$

b) $A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2 = 1{,}14 \text{ cm}^2$

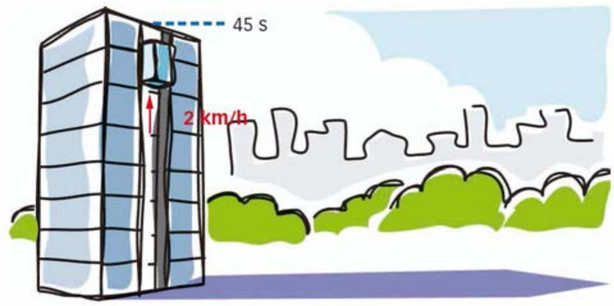
**114. Determina el área de cada segmento circular que se forma al trazar la circunferencia circunscrita a un hexágono regular de lado 7 cm.**

Se calcula la apotema del hexágono: $a^2+3{,}5^2=7^2 \to a=\sqrt{49-12{,}25}=6{,}06$ cm.

El área pedida es la sexta parte de la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono:

$$A_{\text{Segmento}}=\frac{1}{6}\left(A_{\text{Círculo}}-A_{\text{Hexágono}}\right)=\frac{1}{6}\left(\pi\cdot 7^2-\frac{7\cdot 6\cdot 6{,}06}{2}\right)=4{,}45\ \text{cm}^2$$

**115. La sombra de un edificio mide 30 m. El ascensor, a 2 km/h, tarda 45 segundos en llegar desde la planta baja hasta la azotea. Calcula la distancia desde la azotea hasta el extremo de la sombra.**




El ascensor a 2 km/h recorre 25 m en 45 segundos, por tanto, para calcular la distancia pedida basta con aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos 25 m y 30 m.

$$h^2=25^2+30^2 \to h=\sqrt{625+900}=39{,}05\ \text{m}$$

**116. Un jardín de forma rectangular que está cercado por una valla de 64 m tiene en sus lados más cortos plantados 8 árboles que dejan una distancia entre ellos de 4 m. ¿Cuál es el área que ocupa el jardín?**

Como hay 8 árboles en total, habrá 4 en cada uno de los lados cortos del jardín. Cada uno de estos lados mide 12 m, ya que hay 4 árboles separados 4 m entre ellos.

Los lados más largos miden $\frac{64-12\cdot 2}{2}=20$ m, con lo que el área es 20 · 12 = 240 m$^2$.

**117. Las dimensiones de las hojas de tu libro de matemáticas son 22 cm de ancho por 28,7 cm de alto. Su número de páginas es 296, es decir, 148 hojas.**

a) Si las pusiéramos una al lado de otra, di qué área ocuparían.

b) Si un aula mide 6 m de ancho por 8 m de largo, ¿con cuántos libros se podría tapar el suelo?

a) $148\cdot(22\cdot 28{,}7)=93\,447{,}2\ \text{cm}^2$

b) $6\cdot 8=48\ \text{m}^2=480\,000\ \text{cm}^2 \to \dfrac{480\,000\ \text{cm}^2}{93\,447{,}2\ \text{cm}^2}=5{,}14$ libros

$$5{,}14\ \text{libros}=5\ \text{libros}+0{,}14\ \text{libro}\cdot\frac{148\ \text{hojas}}{\text{libro}}\approx 5\ \text{libros}+21\ \text{páginas}$$

**118.** **Si atas una cuerda a tu lápiz de forma que entre el nudo y el extremo de la cuerda haya 13 cm, ¿cuál es el área de la figura que puedes dibujar con la punta del lápiz fijando el extremo de la cuerda en un punto?**

La figura que se dibuja es un círculo de radio 13 cm y su área es $A = \pi \cdot 13^2 = 530{,}93 \text{ cm}^2$.

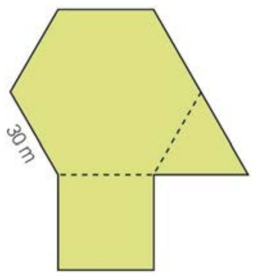
**119.** **Héctor ha comprado un bajoplato de 17 cm de radio. Si el área de sus platos es 615,75 cm², ¿cuál es el área del bajoplato no cubierta por el plato?**

Se calcula el radio de los platos: $A_{\text{Plato}} = 615{,}75 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{615{,}75}{\pi}} = 14 \text{ cm}$.

El área pedida es el área de una corona circular de radio mayor 17 cm y radio menor 14 cm:

$A = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \pi \cdot \left(17^2 - 14^2\right) = \pi \cdot 93 = 292{,}17 \text{ cm}^2$

**120.** **Cada uno de los 50 pisos de un edificio tiene la planta de esta figura, siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m², calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.**




La apotema es: $a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98$ m

$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \frac{6 \cdot 30 \cdot 25{,}98}{2} = 2\,338{,}2 \text{ m}^2$

$A_{\text{Cuadrado}} = 30^2 = 900 \text{ m}^2$

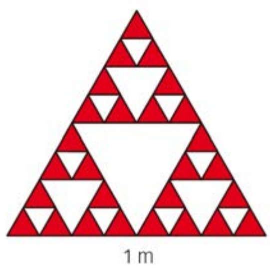
$A_{\text{Triángulo}} = \frac{30 \cdot 25{,}98}{2} = 389{,}7 \text{ m}^2$

El área de un piso mide: $2\,338{,}2 + 900 + 389{,}7 = 3\,627{,}9 \text{ m}^2$

La moqueta de un piso cuesta: 3 627,9 · 20 = 72 558 €

Y la moqueta de todo el edificio costará: 50 · 72 558 = 3 627 900 €

**121.** **Hemos colocado una vidriera triangular. Calcula el área acristalada en color rojo, sabiendo que la ventana es un triángulo equilátero de lado 1 m.**



Cada triángulo rojo tiene 1/8 m de lado y es equilátero; por tanto, su altura es:

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0{,}11 \text{ m}$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1/8 \cdot 0{,}11}{2} = 0{,}007 \text{ m}^2$$

Como hay 27 triángulos rojos, su área total es:

$$A = 27 \cdot 0{,}007 = 0{,}189 \text{ m}^2$$

**122. El coste por metro cuadrado de impermeabilización asciende a 20 €. Calcula el coste para impermeabilizar cada una de estas superficies.**

a) Azotea de forma hexagonal regular de lado 28 m y apotema 24,25 m.

b) Terraza exterior rectangular de ancho 14 m y largo 20 m.

c) Marco de 4 m de ancho alrededor de una piscina circular de 7 m de radio.

d) Jardín con forma de rombo de diagonales 18 m y 12 m.

e) Fachada con forma de trapecio rectángulo de altura 5 m y diagonales 6,4 m y 9,43 m.

f) Rincón en el baño que tiene forma de un cuarto de círculo de 1,5 m de radio.

a) $A = \frac{28 \cdot 6 \cdot 24{,}25}{2} = 2\,037 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 2\,037 = 40\,740$ €

b) $A = 14 \cdot 20 = 280 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 280 = 5\,600$ €

c) $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(11^2 - 7^2) = 72\pi = 226{,}19 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 226{,}19 = 4\,523{,}8$ €

d) $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 108 = 2\,160$ €

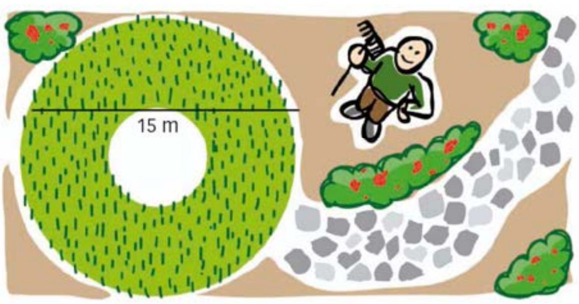
e) Se calculan primero las medidas de las bases, y luego el coste:

$B = \sqrt{9{,}43^2 - 5^2} = \sqrt{63{,}9249} \simeq 8 \text{ m}$ $b = \sqrt{6{,}4^2 - 5^2} = \sqrt{15{,}96} \simeq 4 \text{ m}$

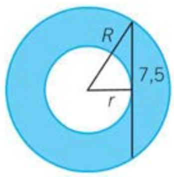
$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(8+4) \cdot 5}{2} = 30 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 30 = 600$ €

f) $A = \frac{\pi r^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{4} = 1{,}77 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 1{,}77 = 35{,}4$ €

**123. Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m.**




**¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?**




El área que se pide es la de la corona circular:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

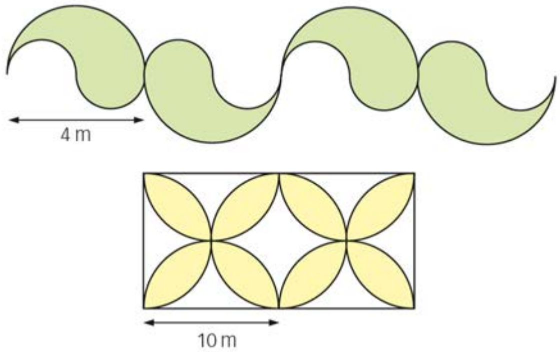
Como el segmento mide 15 cm, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 - r^2 = 7{,}5^2$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 7{,}5^2 = 176{,}63\ \text{m}^2$$

**124. Un pintor decora una valla con una de estas figuras.**




**Si cobra el metro cuadrado de valla pintada a 32 €, ¿cuánto cobrará por cada una?**

Figura 1: La figura que forma la valla se repite cuatro veces, y su área coincide con la del semicírculo de radio 2 m, que es: $A = \pi \cdot 4 : 2 = 6{,}28\ \text{m}^2$

Como son 4 figuras, el área mide 25,12 m² y el precio será:

$$25{,}12 \cdot 32 = 803{,}84\ €$$

Figura 2: Son 8 pétalos que podemos inscribir en un cuadrado de lado 5 m, siendo simétricos por la diagonal del cuadrado. El área de cada mitad es la de un sector circular de 90° y radio 5 m, a la que se resta el área de un triángulo de base y altura 5 m: $\frac{25\pi}{4} - \frac{5 \cdot 5}{2} = 7{,}125\ \text{m}^2$

El área del pétalo es 14,25 m² y la unión de los 8 pétalos mide 114 m², con un coste de $114 \cdot 32 = 3\,648$ €.

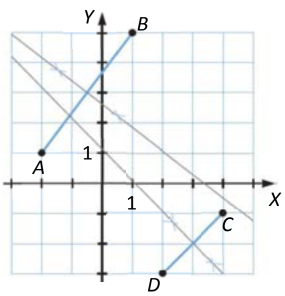
## DEBES SABER HACER

**1. Considera los puntos $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, -1)$ y $D(2, -3)$. Dibuja estos lugares geométricos.**

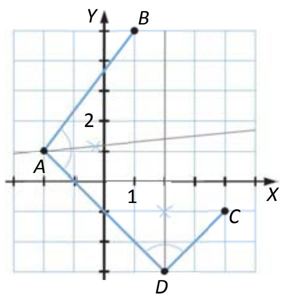
a) Las mediatrices de los segmentos $AB$ y $CD$.

b) Las bisectrices de los ángulos $\widehat{ADC}$ y $\widehat{BAD}$.

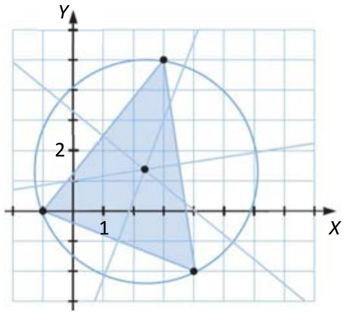
a)



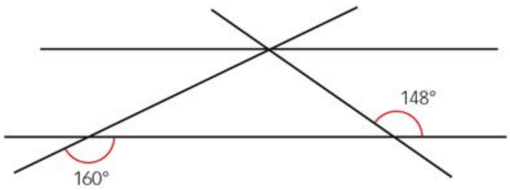

b)

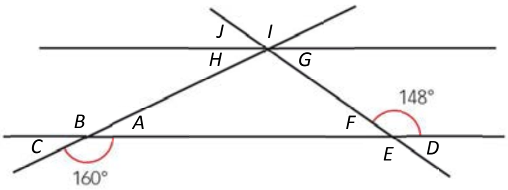


**2. Traza la circunferencia que pasa por estos puntos: (−1, 0), (3, 5) y (4, −2).**




**3. Averigua el valor de los ángulos que se forman.**




$A = 20° = C = I = H$ $\qquad B = 160°$ $\qquad E = 148°$ $\qquad F = 32° = D = J = G$

**4. Un triángulo equilátero tiene 57 cm de perímetro. Halla su altura.**

$$P = 57 \rightarrow l = \frac{57}{3} = 19 \text{ cm}$$

$$h^2 + 9{,}5^2 = 19^2 \rightarrow h = \sqrt{361 - 90{,}25} = 16{,}45 \text{ cm}$$

**5. Calcula el perímetro y la diagonal de un cuadrado cuya área es 156,25 cm².**

$l^2 = 156{,}25 \rightarrow l = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5 \text{ cm}$ $\qquad P = 4 \cdot 12{,}5 = 50 \text{ cm}$ $\qquad d = \sqrt{12{,}5^2 + 12{,}5^2} = 17{,}68 \text{ cm}$

**6. El área de un rombo es 390 dm² y una de sus diagonales mide 30 dm. Calcula la otra diagonal y el perímetro del rombo.**

$A = 390 = \frac{30 \cdot d}{2} \rightarrow d = \frac{390 \cdot 2}{30} = 26 \text{ dm}$ $\qquad l = \sqrt{15^2 + 13^2} = 19{,}85 \text{ dm}$

$P = 4l = 4 \cdot 19{,}85 = 79{,}4 \text{ dm}$

**7. Considera un hexágono regular cuya apotema mide 25 cm. Calcula su perímetro y su área.**

$$l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 25^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 625 \rightarrow l = \sqrt{\frac{625 \cdot 4}{3}} = 28{,}87 \text{ cm}$$

$P = 6l = 6 \cdot 28{,}87 = 173{,}22$ cm        $A = \dfrac{173{,}22 \cdot 25}{2} = 2\,165{,}25 \text{ cm}^2$

**8. Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un cuadrado de lado 9 cm.**

El radio de la circunferencia inscrita es $r = 9 : 2 = 4{,}5$ cm.

El radio de la circunferencia circunscrita es $R = \sqrt{4{,}5^2 + 4{,}5^2} = 6{,}36 \text{ cm} \longrightarrow A = \pi\left(6{,}36^2 - 4{,}5^2\right) = 63{,}46 \text{ cm}^2$

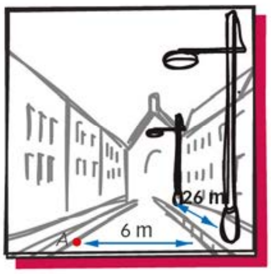
## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

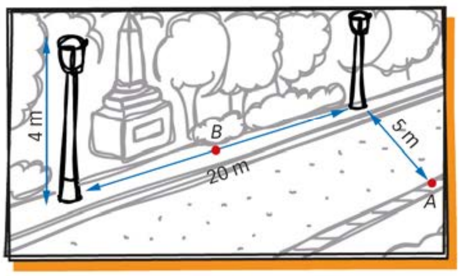
**125. La iluminancia es la cantidad de luz que llega a una unidad de superficie y se suele medir en lux. Estos son los niveles de lux más comunes:**

- **Verano, a mediodía, bajo un cielo despejado 100 000 lux**
- **Alumbrado de calle 5-30 lux**
- **Luna llena, en una noche clara 0,25 lux**

**En general, la iluminancia es menor cuanto mayor sea la distancia a la que se encuentra el objeto que queremos iluminar.**

- **Estas imágenes corresponden a dos proyectos de iluminación. El primero, para una calle en la que se van a colocar bombillas capaces de iluminar hasta 11 m, y el otro, para un parque en el que se van a utilizar bombillas para 12 m.**




**¿Llegarán los lux hasta los puntos marcados, el ancho de la acera (*A*) y el punto medio entre las dos farolas (*B*), en los proyectos?**

PROYECTO DE LA CALLE*:*

*h* = altura de la bombilla de la farola

$6^2 + h^2 = 11^2 \rightarrow h = \sqrt{121 - 36} = 9{,}22 \text{ m}$ ⟶ El punto *A* quedará iluminado si $h \leq 9{,}22$ m.

$13^2 + h^2 = 11^2$ ⟶ Imposible ⟶ El punto *B* no quedará iluminado.

PROYECTO DEL JARDÍN*:*

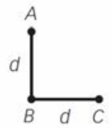
*d* = distancia desde la bombilla hasta *A*        *d'* = distancia desde la bombilla hasta *B*

$d^2 = 4^2 + 5^2 \rightarrow d = \sqrt{41} = 6{,}4 < 12$ ⟶ El punto *A* quedará iluminado.

$d'^2 = 4^2 + 10^2 \rightarrow d' = \sqrt{116} = 10{,}77 < 12$ ⟶ El punto *B* quedará iluminado.

# FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**126.** **Dados dos segmentos, *AB* y *BC*, de longitud *d* como en la figura, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos situados entre *A* y *C* cuya distancia a *B* es *d*?**




El lugar geométrico es el de los puntos del arco de circunferencia que pasa por *A* y *C* con centro en *B* y radio *d*.

**127.** **¿Cuál de estas opciones es la relación entre el lado y la altura de un triángulo equilátero?**

a) $h = \frac{\sqrt{3l}}{2}$ b) $h = \sqrt{\frac{3l}{2}}$ c) $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Sea *h* la altura y *l* el lado.

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, la respuesta es la opción c).

**128.** **¿Cuál es la relación entre las áreas de un triángulo equilátero y un cuadrado que tienen el mismo perímetro? ¿Qué relación tienen los perímetros si lo que es igual son las áreas?**

Sea *l* el lado del triángulo equilátero y *L* el lado del cuadrado.

- Igualando perímetros:

$$P_{Tr} = P_C \rightarrow 3l = 4L \rightarrow l = \frac{4L}{3}.$$

Se escribe la expresión de la altura del triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ l = \frac{4L}{3} \end{array}\right\} \rightarrow h = \frac{\frac{4L}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{2L\sqrt{3}}{3}$$

Se calcula el área del triángulo obteniéndose la relación con el área del cuadrado:

$$A_{Tr} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{4L}{3} \cdot \frac{2L\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}L^2 \rightarrow A_{Tr} = \frac{4\sqrt{3}}{9}A_C$$

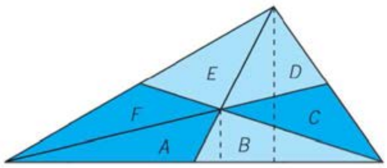
- Igualando áreas:

$$A_{Tr} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = A_C = L^2 \rightarrow l^2 = \frac{4L^2}{\sqrt{3}} \rightarrow l = \sqrt{\frac{4L^2}{\sqrt{3}}} = \frac{2L}{\sqrt[4]{3}}$$

Se calcula el perímetro del triángulo obteniéndose la relación con el perímetro del cuadrado:

$$P_{Tr} = 3l = 3 \cdot \frac{2L}{\sqrt[4]{3}} = 3 \cdot \frac{4L}{2\sqrt[4]{3}} = 3 \cdot \frac{P_C}{2\sqrt[4]{3}} \rightarrow P_{Tr} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}P_C$$

**129.** **En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.**




Las bases de los triángulos $A$ y $B$ miden lo mismo (por la definición de mediana), y como su altura es igual, sus áreas coinciden.
Es decir, $S_A = S_B$, $S_C = S_D$, $S_E = S_F$.

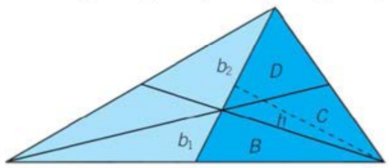
Considerando el triángulo total y, por el mismo razonamiento:

$$S_A + S_B + S_C = S_D + S_E + S_F$$

Como $S_C = S_D \rightarrow S_A + S_B = S_E + S_F \xrightarrow{S_A = S_B;\ S_E = S_F} 2S_A = 2S_E \rightarrow S_A = S_E$

Por tanto, $S_A = S_B = S_E = S_F$, y repitiendo el razonamiento con cualquier mediana, obtenemos que son iguales a $S_C$ y $S_D$:

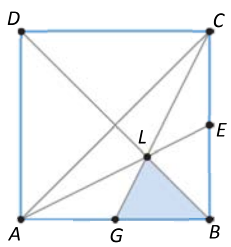
$$S_A = S_B = S_C = S_D = S_E = S_F$$




Como $S_B = \dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ y $S_C + S_D = \dfrac{b_2 \cdot h}{2}$ y, además, $S_B = S_C = S_D$, deducimos

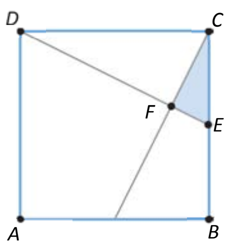
que: $2\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{2}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow \cancel{2}\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{\cancel{2}}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow b_1 = \dfrac{b_2 \cdot \cancel{h}}{2 \cdot \cancel{h}} = \dfrac{b_2}{2}$

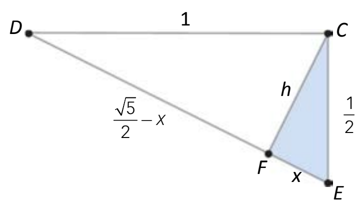
**130.** **Los segmentos interiores trazados son diagonales o unen vértices con puntos medios de lados opuestos. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?**




Trazando las 3 medianas del triángulo rectángulo $ABC$ se forman 6 triángulos de igual área.
El área sombreada es uno de esos 6 triángulos:

$$A_{\text{Triángulo } BLG} = \frac{1}{12}$$



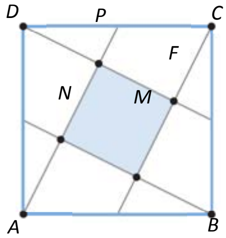




En el triángulo $ECD$: $1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \overline{DE}^2 \rightarrow \overline{DE} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

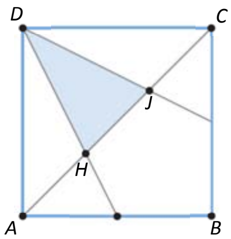
En el triángulo $EFC$: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = h^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{4} - h^2}$

En el triángulo $DFC$: $1^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - x\right)^2 + h^2 \xrightarrow{x = \sqrt{\frac{1}{4} - h^2}} \sqrt{\dfrac{5}{4} - 5h^2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow h = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ x = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$

$$A_{EFC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{20}$$

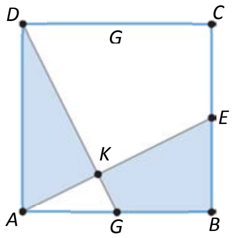



$$\overline{PF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad A_{FMNP} = \overline{PF}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$




$$A_{\text{Triángulo } AGH} = \frac{1}{12} \qquad A_{\text{Triángulo } DAG} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2} = \frac{1}{4} \qquad A_{\text{Triángulo } DAH} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$A_{\text{Triángulo } DAC} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \qquad A_{\text{Triángulo } DHJ} = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

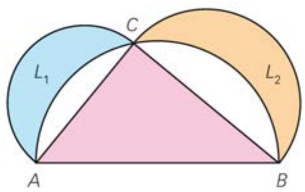



$$A_{\text{Triángulo } AKG} = \frac{1}{20} \qquad A_{\text{Triángulo } ABE} = A_{\text{Triángulo } DAG} = \frac{1}{4} \qquad A_{KGBE} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

$$A_{\text{Triángulo } DAK} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \qquad A_{\text{Sombreada}} = \frac{2}{5}$$

**131. ¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de $L_1$ y $L_2$?**

**(Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo).**

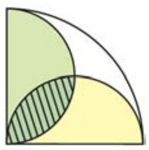



Si $A_1$ y $A_2$ fuesen las áreas de los semicírculos completos correspondientes a $L_1$ y $L_2$, las áreas de los tres semicírculos serían: $A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2}$ $\quad A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2}$ $\quad A_3 = \frac{\pi r_3^2}{2}$

Por el teorema de Pitágoras: $A_1 + A_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{\pi r_3^2}{2} = A_3$

Como el área que le falta al triángulo para ser igual que el semicírculo mayor es la que le falta a $L_1$ y $L_2$, las áreas de $L_1$ y $L_2$ serán iguales que la del triángulo.

**132. Observa la figura y compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.**



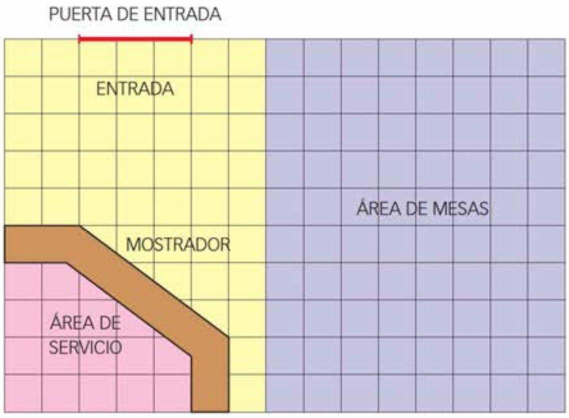
Si $r$ es el radio del cuarto del círculo mayor, $r/2$ es el radio de los dos semicírculos menores, y sus áreas son:

$$A_1 = \frac{\pi\cdot r^2}{4} \qquad A_2 = A_3 = \frac{\pi\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\cdot r^2}{8} \qquad A_2 + A_3 = \frac{\pi\cdot r^2}{4} = A_1$$

Como el área del cuarto del círculo es la misma que la suma de las áreas de los semicírculos, su intersección, que es la zona rayada, es igual que la zona blanca, que es exterior a los semicírculos.

# PRUEBAS PISA

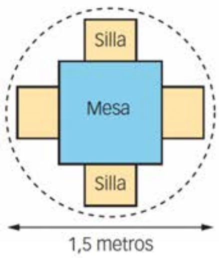
**133. Este es el plano de la heladería de María. Está renovando la tienda. El área de servicio está rodeada por el mostrador.**




Nota: Cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5 metros × 0,5 metros.

a) María quiere colocar un nuevo borde a lo largo de la parte externa del mostrador. ¿Cuál es la longitud total del borde que necesita?

b) María también va a poner un nuevo revestimiento para suelo en la tienda. ¿Cuál es la superficie (área) total del suelo de la tienda, excluidos el área de servicio y el mostrador?




c) María quiere tener en su tienda conjuntos de una mesa y cuatro sillas como el que se muestra más arriba. El círculo representa la superficie de suelo necesaria para cada conjunto.

Para que los clientes tengan suficiente espacio cuando estén sentados, cada conjunto (tal y como representa el círculo) debe estar situado según las siguientes condiciones:

- Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de las paredes.
- Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de los otros conjuntos.

¿Cuál es el número máximo de conjuntos que María puede colocar en la zona de mesas sombreada de su tienda?

*(Prueba PISA 2010)*

a) Llamando *d* a la longitud de la parte exterior oblicua del mostrador, se tiene:

$d^2 = 2^2 + 1,5^2 \rightarrow d = \sqrt{6,25} = 2,5$ m $\qquad$ Longitud $= 1 + d + 1 = 2 + 2,5 = 4,5$ m

b) Área total =
= Área a la derecha del mostrador de 4,5 m × 5 m + Área por encima del mostrador de 2,5 m × 3 m +
+ Área del triángulo rectángulo de catetos 2 m y 1,5 m situado por encima del lado oblicuo del mostrador:

$A = 4,5 \cdot 5 + 3 \cdot 2,5 + \dfrac{2 \cdot 1,5}{2} = 22,5 + 7,5 + 1,5 = 31,5$ m$^2$

c) A la izquierda de la zona de mesas no hay pared, por lo que el requerimiento de “a 0,5 m de la pared” se aplica a la pared de la derecha, a la de arriba y a la de abajo en el dibujo. Con ello queda una zona de 4 m × 3,5 m. Como el círculo de cada conjunto tiene un diámetro de 1,5 m y entre los círculos debe haber mínimo 0,5 m, se pueden colocar dos conjuntos arriba y otros dos abajo (ancho = alto = 1,5·2 + 0,5 = 3,5 m).

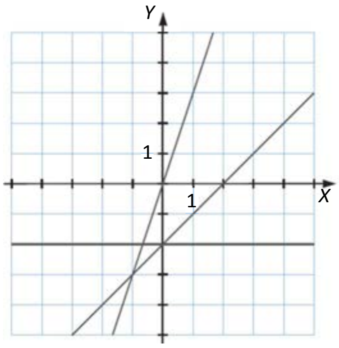
# Movimientos y semejanzas

# 9

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Representa gráficamente estas rectas.**

a) $y = x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = -2$




**2. Halla el término que falta en cada proporción.**

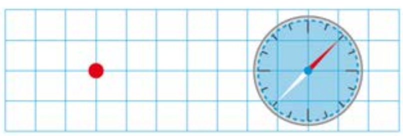
a) $\frac{4}{x} = \frac{6}{12}$ b) $\frac{2{,}5}{3} = \frac{x}{24}$ c) $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

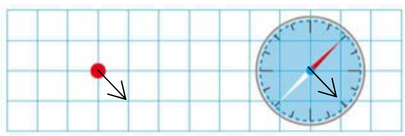
a) $12 \cdot 4 = 6x \rightarrow x = 8$ b) $24 \cdot 2{,}5 = 3x \rightarrow x = 20$ c) $12 \cdot 3 = x^2 \rightarrow x = \pm 6$

## VIDA COTIDIANA

**La brújula es un instrumento que sirve para orientarse y que tiene su fundamento en la propiedad de las agujas magnetizadas. Posee una aguja imantada que señala siempre al norte magnético.**

- **Marca en tu cuaderno la dirección en la cual se mueve el punto si lo hace hacia el este.**





## RESUELVE EL RETO

**Una butaca muy pesada solo se puede mover mediante giros de 90° alrededor de cualquiera de sus esquinas. ¿Es posible colocarla justo detrás de donde estaba y mirando en la misma dirección?**

Fijamos un vector en uno de los lados de la butaca, y queremos ver si se puede trasladar varias unidades hacia atrás. Como solo podemos realizar giros de 90°, no es posible realizar la traslación pedida.

**¿Son semejantes la parte pintada y el cuadro con el marco?**

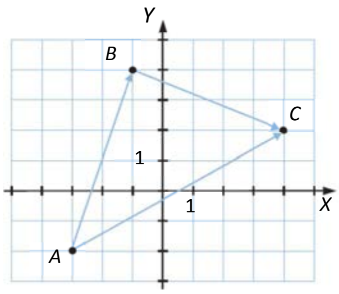
No son semejantes ya que, como el ancho de los lados del marco es el mismo, los lados homólogos del cuadro y del marco no son proporcionales.

**La Torre Eiffel tiene 320 m de altura y pesa 7 000 toneladas. Si construimos un modelo a escala, con el mismo material y la mitad de altura, ¿cuánto pesaría?**

Si reducimos a la mitad la altura, se reduce también a la mitad el ancho y el fondo de la torre. Por tanto, el volumen de la maqueta queda dividido entre $2^3 = 8$. Como la densidad de la torre Eiffel y la de la maqueta es la misma, el peso de la maqueta sería 7 000/8 = 875 toneladas.

## ACTIVIDADES

1. **Sean los puntos $A(-3, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 2)$. Dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$, y halla sus coordenadas y su módulo. Comprueba que los módulos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CA}$, y $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ coinciden.**




$$\overrightarrow{AB} = (-1+3, 4+2) = (2, 6) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+3, 2+2) = (7, 4) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4+1, 2-4) = (5, -2) \rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\overrightarrow{BA} = (-3+1, -2-4) = (-2, -6) \rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{CA} = (-3-4, -2-2) = (-7, -4) \rightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-7)^2+(-4)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1-4, 4-2) = (-5, 2) \rightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-5)^2+2^2} = \sqrt{29}$$

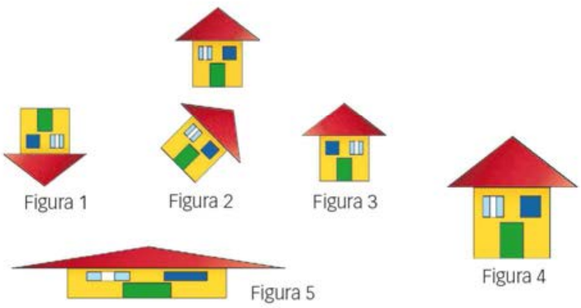
2. **Calcula las coordenadas del punto $B$ si $\overrightarrow{AB} = (5, -1)$ y $A = (0, 3)$.**

$$B(b_1, b_2) \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (5, -1) = (b_1 - 0, b_2 - 3) \rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 5 \\ b_2 = 2 \end{array}\right\}$$

3. **¿Cuántos vectores $\overrightarrow{AB}$, con $A$ un punto fijo, tienen igual módulo?**

Infinitos. Todos aquellos cuyo extremo pertenece a la circunferencia de centro $A$ y radio el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

**4. Debajo puedes ver varias transformaciones de la figura de la derecha. Determina cuáles son movimientos.**




Las figuras 1, 2 y 3, porque tienen la misma forma y tamaño.

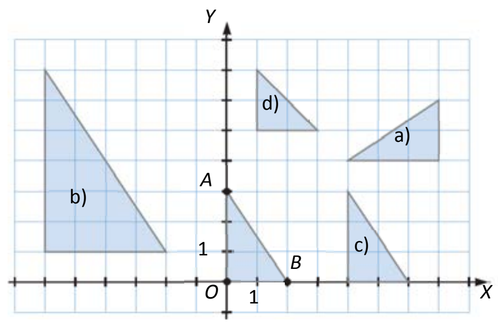
**5. Dibuja un triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(0, 3)$ y $B(2, 0)$. Dibuja a partir de él otros triángulos en los que se conserven estas características.**

a) El tamaño

b) La forma

c) El tamaño y la forma

d) Ni el tamaño ni la forma




**6. Dibuja la figura geométrica que más te guste y aplícale distintas transformaciones. Indica cuáles de ellas son movimientos.**

Respuesta libre. Depende de la figura que se quiera y de las transformaciones que se apliquen.

**7. Para cada punto $A$ y vector $\vec{v}$, determina las coordenadas del transformado de $A$ mediante la traslación $t_{\vec{v}}$:**

a) $A(3, -2)$, $\vec{v} = (2, -1)$

b) $A(-4, 5)$, $\vec{v} = (7, 2)$

c) $A(1, 6)$, $\vec{v} = (-4, -3)$

d) $A(-3, 1)$, $\vec{v} = (-5, 1)$

a) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(3+2, -2-1) = A'(5, -3)$

b) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(-4+7, 5+2) = A'(3, 7)$

c) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(1-4, 6-3) = A'(-3, 3)$

d) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(-3-5, 1+1) = A'(-8, 2)$

**8. Determina el vector de la traslación que transforma el punto $A(-1, 4)$ en $A'(5, 2)$.**

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$A(-1,4) \xrightarrow{\vec{v}} A'(5,2) = A'(-1+v_1, 4+v_2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = -1+v_1 \\ 2 = 4+v_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 = v_1 \\ -2 = v_2 \end{array}\right\}$$

**9.** **Aplica la traslación de vector $\vec{v} = (2, 3)$ seguida de un giro de centro $B(3, 2)$ y ángulo 270°. ¿Es lo mismo aplicar el giro y luego la traslación?**

No, el resultado es diferente.

**10.** **Traza el segmento $AB$ determinado por estos puntos y calcula su transformado mediante una traslación de vector $\vec{v} = (3, 4)$.**

a) $A(1, -2), B(3, -1)$ c) $A(3, 1), B(0, 4)$

b) $A(-1, 4), B(-3, 2)$ d) $A(7, 2), B(4, -1)$

a) $\begin{cases} A(1,-2) \xrightarrow{\vec{v}} A'(4,2) \\ B(3,-1) \xrightarrow{\vec{v}} B'(6,3) \end{cases}$ c) $\begin{cases} A(3,1) \xrightarrow{\vec{v}} A'(6,5) \\ B(0,4) \xrightarrow{\vec{v}} B'(3,8) \end{cases}$

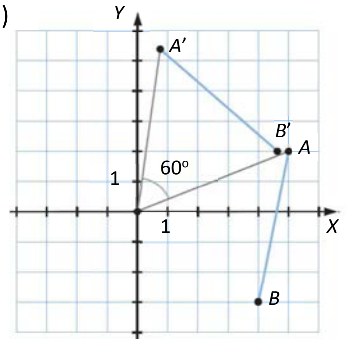
b) $\begin{cases} A(-1,4) \xrightarrow{\vec{v}} A'(2,8) \\ B(-3,2) \xrightarrow{\vec{v}} B'(0,6) \end{cases}$ d) $\begin{cases} A(7,2) \xrightarrow{\vec{v}} A'(10,6) \\ B(4,-1) \xrightarrow{\vec{v}} B'(7,3) \end{cases}$

**11.** **Para cada pareja de puntos $A$ y $B$, traza el segmento $AB$ y su transformado mediante un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 60°.**

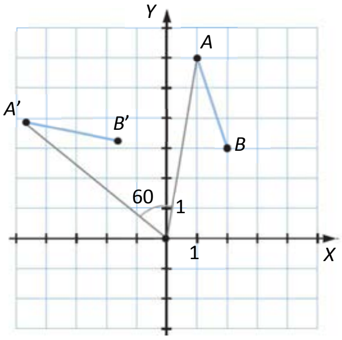
a) $A(5, 2), B(4, -3)$ c) $A(1, 6), B(2, 3)$

b) $A(-2, 4), B(-3, 1)$ d) $A(1, -2), B(4, 5)$

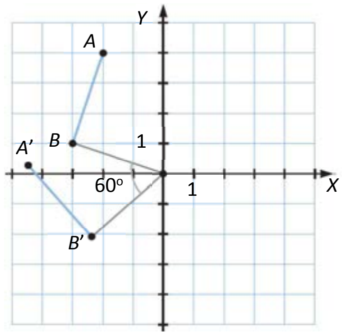
a)



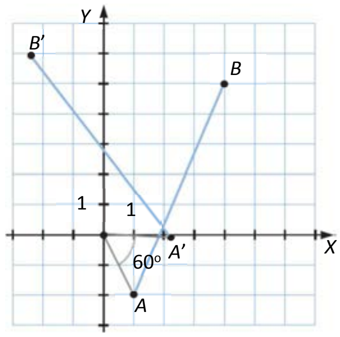

c)



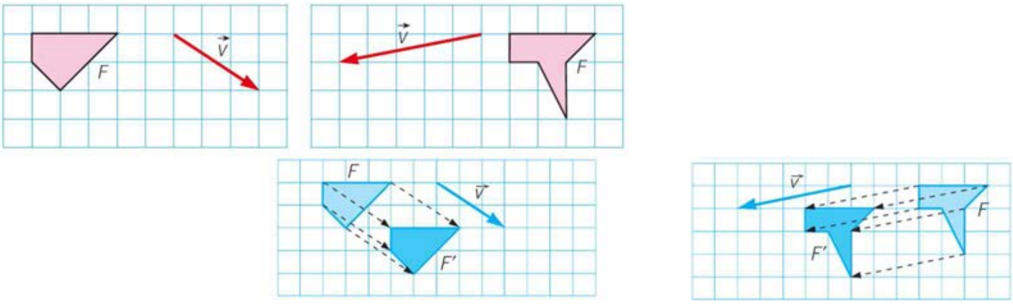

b)



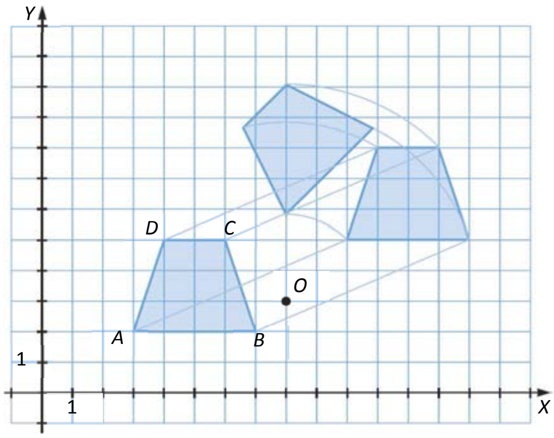

d)



**12.** **Obtén la transformada de la figura *F* mediante una traslación de vector $\vec{v}$.**

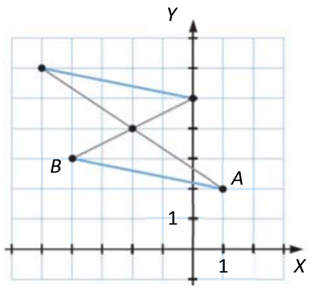



**13.** **Dibuja el trapecio isósceles de vértices *A*(3, 2), *B*(7, 2), *C*(6, 5) y *D*(4, 5), y transfórmalo mediante una traslación de vector $\vec{v} = (7, 3)$ y a continuación un giro de centro (8, 3) y ángulo de 45°.**

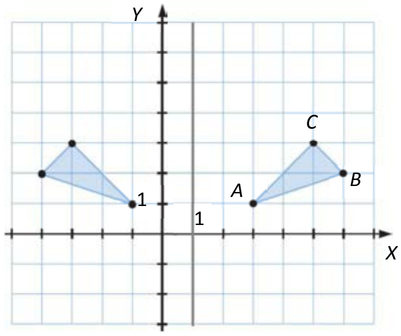



**14.** **Realiza una simetría central de centro *C*(−2, 4) sobre estos elementos.**

- Punto *A*(1, 2)
- Punto *B*(−4, 3)
- Segmento *AB*, con *A* y *B* los anteriores.




**15.** **Dado el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(6, 2) y *C*(5, 3), haz una simetría axial de eje la recta $x = 1$.**

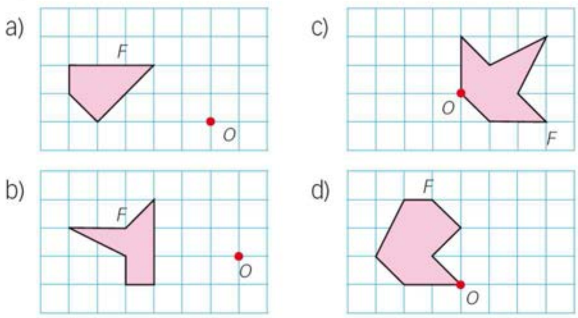


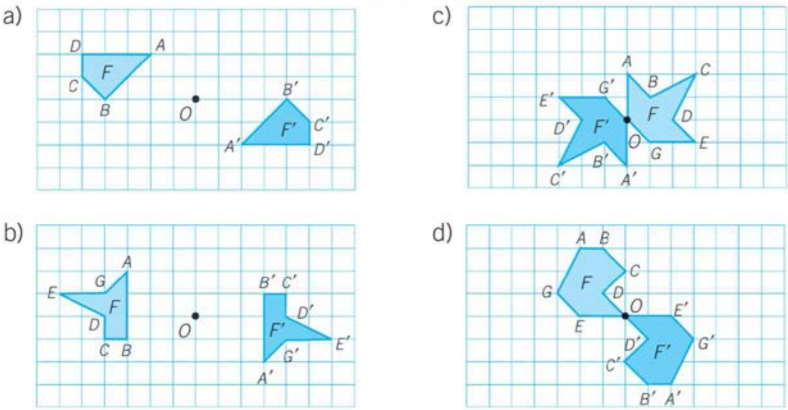
**16.** **Completa en tu cuaderno la tabla.**

| Punto | Eje de simetría | Punto trasladado |
|---|---|---|
| $A(1, 3)$ | Ordenadas | |
| | Ordenadas | $B'(0, 3)$ |
| $C(2, -1)$ | Abscisas | |

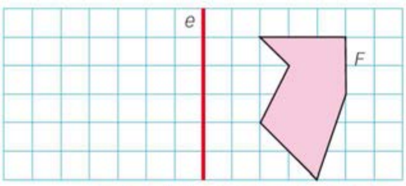
| Punto | Eje de simetría | Punto trasladado |
|---|---|---|
| $A(1, 3)$ | Ordenadas | $A'(-1, 3)$ |
| $B(0, 3)$ | Ordenadas | $B'(0, 3)$ |
| $C(2, -1)$ | Abscisas | $C'(2, 1)$ |

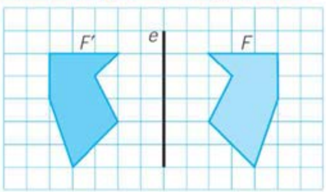
**17.** **Aplica a *F* una simetría central de centro *O*.**



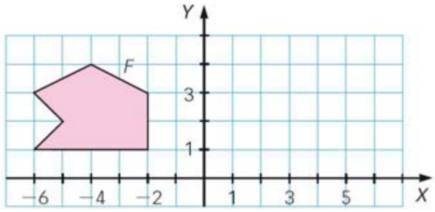




**18.** **Aplica a *F* una simetría de eje *e*.**

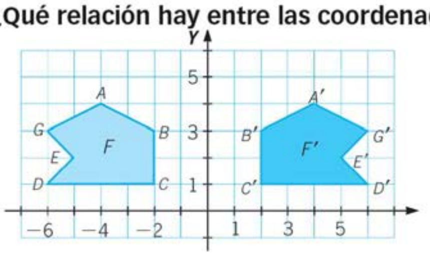


**19.** **Determina la figura transformada de *F* mediante una simetría de eje el eje de ordenadas.**




**¿Qué relación hay entre las coordenadas de los vértices de *F* y los de sus transformados?**



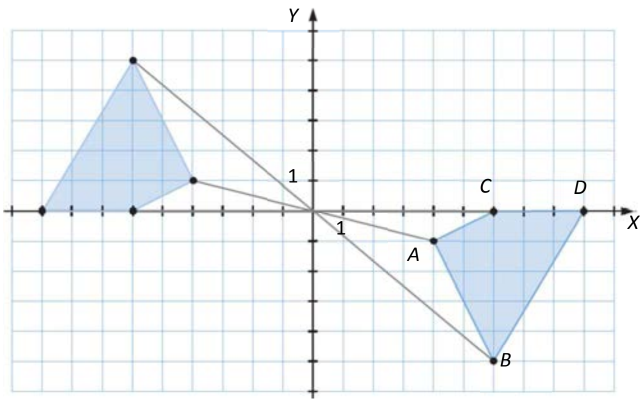

$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, 4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(3, 2)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(1, 2)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(1, 6)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, 2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(3, 6)$

Las abscisas son las opuestas al aplicar la simetría.

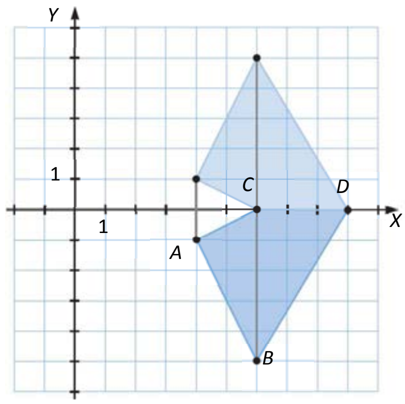
**20.** **Dibuja la figura de vértices: $A(4, -1)$, $B(6, -5)$, $C(6, 0)$, $D(9, 0)$. Calcula su transformada por una:**

a) Simetría central de centro el origen.
b) Simetría central de centro el punto $A(4, 2)$.
c) Simetría axial de eje el eje de abscisas.
d) Simetría axial de eje la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

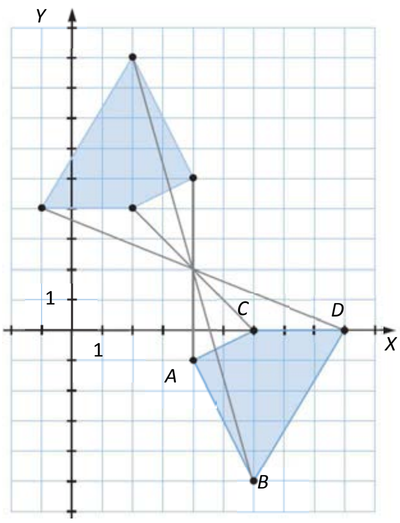
a)



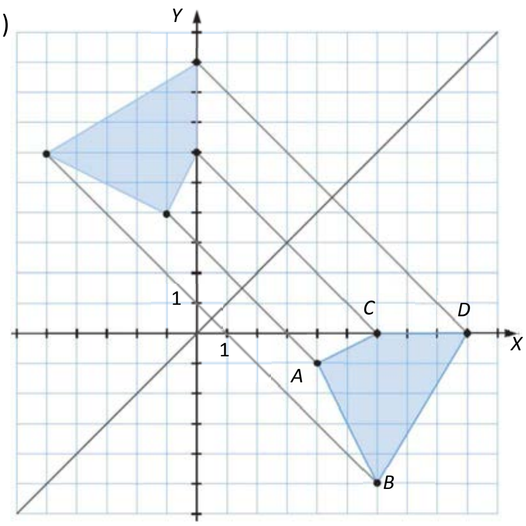

c)



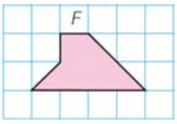

b)

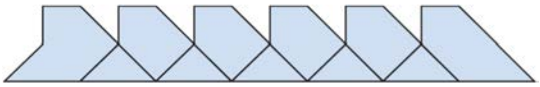



d)



**21. Construye un friso a partir de esta figura utilizando una traslación cuyo vector mide la mitad de la base de la figura.**



**22. Dibuja una figura y construye un friso utilizando giros de 90° con centro en un punto exterior a la figura y una traslación.**

Solución libre, depende de la figura y el punto que se tome.

**23. ¿Cuál es la figura básica que se ha utilizado para construir este mosaico de la Alhambra de Granada?**

**¿A partir de qué movimientos se ha obtenido?**

La figura básica es:

Los movimientos son giros de 120° y traslaciones.

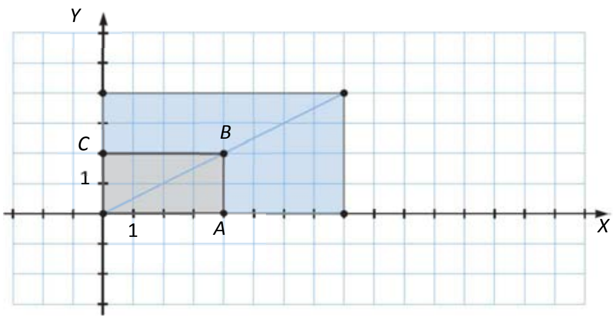
**24. Dibuja el rectángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$ y $C(0, 2)$ y aplica una:**

a) Homotecia de centro el origen y razón 2.

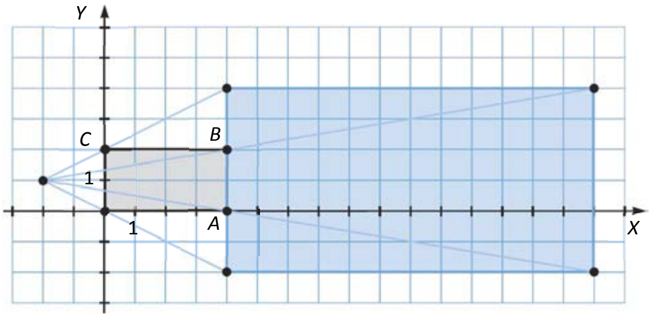
b) Homotecia de centro $(-2, 1)$ y razón 3.

c) Homotecia de centro $(0, 4)$ y razón $\frac{1}{2}$.

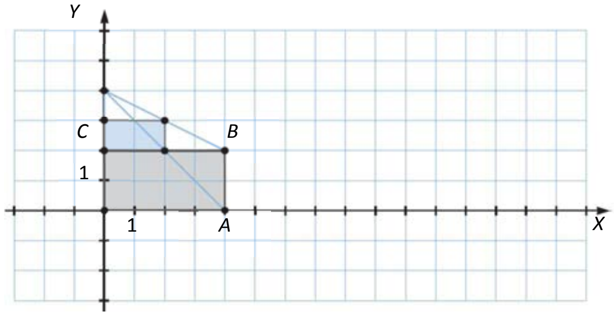
a)



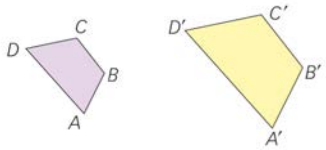
b)

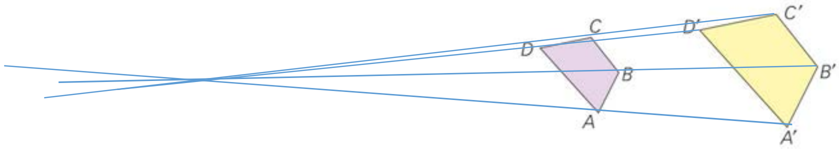



c)




**25. Encuentra el centro y calcula la razón de esta homotecia.**



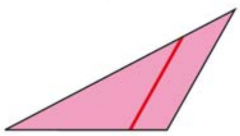

La razón de la homotecia es 1,5.

**26. Determina los puntos y rectas dobles de una homotecia.**

El único punto doble de una homotecia es el centro de la homotecia, *O*.

Las rectas dobles son las rectas que se transforman en sí mismas, es decir, las rectas que pasan por el centro de la homotecia.

**27. Sabiendo que $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AB'} = 6$ cm y $\overline{AC} = 5$ cm, calcula la longitud del segmento $\overline{AC'}$.**



$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \to \frac{6}{4} = \frac{\overline{AC'}}{5} \to \overline{AC'} = 7{,}5 \text{ cm}$$

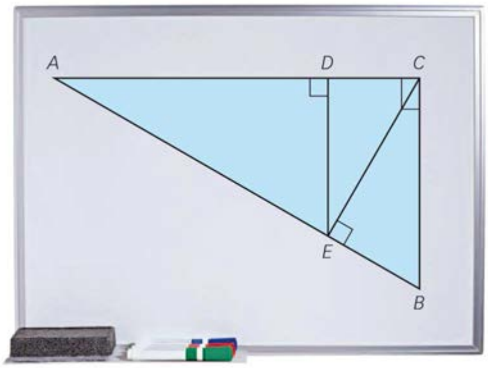
**28.** **Considera el triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm. Calcula la medida de los catetos de otro triángulo semejante a él cuya hipotenusa mide 9 cm.**

La hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm mide $\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm.

Llamando $c_1$ y $c_2$ a los catetos del triángulo semejante al anterior cuya hipotenusa mide 9 cm, se tiene:

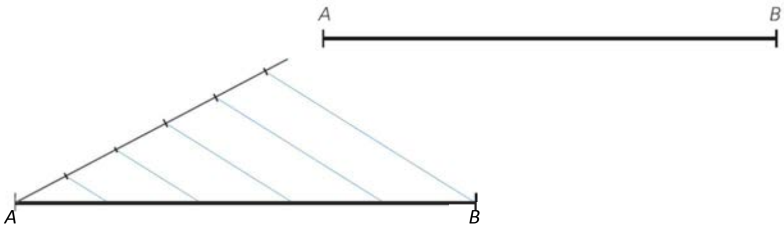
$\frac{10}{9}=\frac{6}{c_1}=\frac{8}{c_2}\rightarrow c_1=\frac{54}{10}=5{,}4 \text{ cm y } c_2=\frac{72}{10}=7{,}2 \text{ cm}$

**29.** **Identifica los triángulos semejantes.**

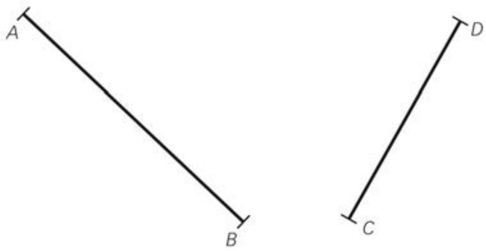


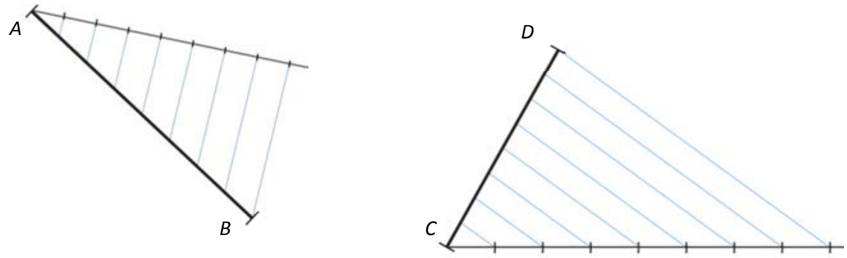

Son semejantes los triángulos: $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{AED}$, $\overset{\triangle}{CBE}$, $\overset{\triangle}{ACE}$, $\overset{\triangle}{ECD}$

**30.** **Copia en tu cuaderno este segmento y divídelo en cinco partes iguales aplicando el teorema de Tales.**

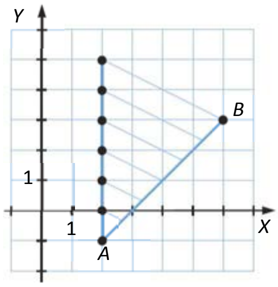



**31.** **Copia estos segmentos en tu cuaderno y divídelos en ocho partes iguales aplicando el teorema de Tales.**

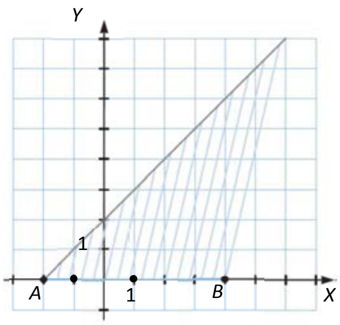




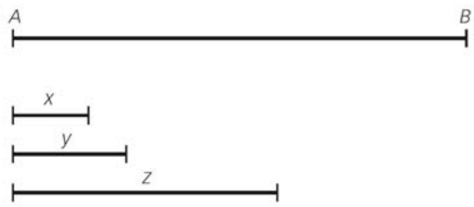

**32.** **Dibuja sobre unos ejes de coordenadas el segmento de extremos $A(2, -1)$ y $B(6, 3)$ y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en seis partes iguales.**

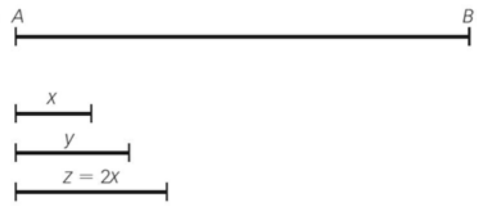


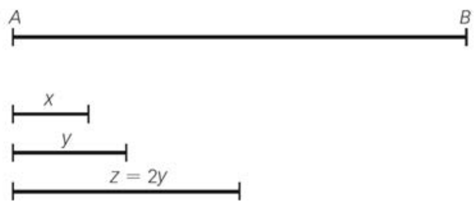

**33.** **Dibuja sobre unos ejes de coordenadas el segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(4, 0)$ y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en cuatro partes proporcionales a 2, 5 y 8.**



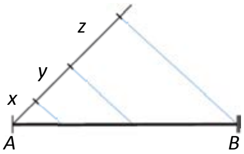

**34.** **Copia en tu cuaderno el segmento *AB*. Divídelo en partes proporcionales a los segmentos *x*, *y* y *z* aplicando el teorema de Tales.**

a) 


c) 


b) 

Los tres apartados se hacen de modo similar. Desde un extremo del segmento *AB, A,* se traza una línea en la que se sitúan uno a continuación de otro, los segmentos *x, y, z*. Desde el extremo de *z*, se traza una línea que une ese extremo con *B* y luego paralelas por cada uno de los extremos de los segmentos *x* e *y*.




**35. Observa esta foto a escala 1 : 5 500.**


a) ¿Qué distancia real hay entre *A* y *B*?

b) Si dos puntos de la ciudad distan 4 km, ¿qué distancia habrá entre ellos en un mapa con esta escala?

a) La distancia entre *A* y *B* es 35 cm.

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 5\,500\text{ cm} \\ 3\text{ cm} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3\text{ cm} \cdot 5\,500\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 16\,500\text{ cm} = 16{,}5\text{ m}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 5\,500\text{ cm} = 55\text{ m} \\ x \rightarrow 4\text{ km} = 4\,000\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\text{ cm} \cdot 4\,000\text{ m}}{55\text{ m}} = 72{,}72\text{ cm}$$

**36. Antonio va a hacer un dibujo de su huerto. Su huerto es un trozo de terreno rectangular de 75 m de largo y 34 m de ancho. Quiere utilizar una escala 1 : 150. ¿Le cabrá el dibujo en un papel de tamaño DIN A4?**

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 150\text{ cm} = 1{,}5\text{ m} \\ x \rightarrow 75\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\text{ cm} \cdot 75\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} = 50\text{ cm de largo}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 150\text{ cm} = 1{,}5\text{ m} \\ y \rightarrow 34\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{1\text{ cm} \cdot 34\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} = 22{,}67\text{ cm de ancho}$$

Por tanto, no podrá dibujarlo porque las medidas del huerto a escala son mayores que las medidas del papel DIN A4, que son 29 cm × 21 cm.

**37. Carlos ha utilizado una escala 12 : 5 para realizar un boceto de sus esculturas.**

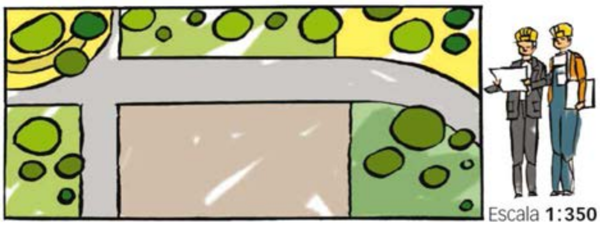
a) ¿Qué será mayor, el boceto o las esculturas?

b) Si una de sus esculturas mide 12 cm, ¿qué altura tendrá en el boceto?

a) Será mayor el boceto.

b) $$\left.\begin{array}{l} 12\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm} \\ x \rightarrow 12\text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 28{,}8\text{ cm}$$

**38.** **Este es el plano de un terreno donde se construirá una casa. Si se quiere dejar un patio de 150 m², ¿qué dimensiones como máximo tendrá la casa? ¿Qué superficie máxima puede ocupar?**




Medimos el terreno, que tiene un ancho de 6,3 cm y un alto de 2,8 cm. En la realidad estas medidas son:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 350\text{ cm} = 3{,}5\text{ m}\\ 2{,}8\text{ cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2{,}8\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ m}}{1\text{ cm}} = 9{,}8\text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 350\text{ cm} = 3{,}5\text{ m}\\ 6{,}3\text{ cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6{,}3\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ m}}{1\text{ cm}} = 22{,}05\text{ m}$$

El área de esa zona es $22{,}05 \cdot 9{,}8 = 216{,}09$ m². Si se dejan 150 m² de patio, la planta de la casa podrá tener como máximo 66,06 m².

**39.** **Considera este cuadrado.**

6 cm

a) Calcula sus medidas si lo representamos a una escala 1 : 5.

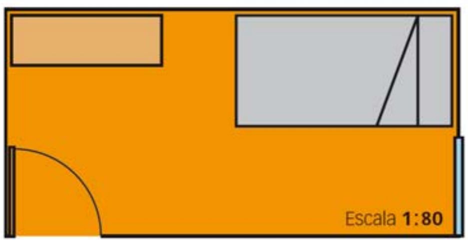
b) Calcula sus medidas y su área si lo representamos a una escala 5 : 12.

a) La medida del lado del cuadrado será: $\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm}\\ 6\text{ cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 30\text{ cm}$.

b) La medida del lado del cuadrado será: $\left.\begin{array}{l}5\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm}\\ 6\text{ cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{72}{5}\text{ cm} = 14{,}4\text{ cm}$.

Y su área será $14{,}4^2 = 207{,}36$ cm².

**40.** **Este es el plano de la habitación de Tomás.**




a) ¿Cabe un armario que mide 4,5 m de largo y 1 m de profundidad?

b) ¿Qué superficie queda en la habitación si se pone una cama de 150 × 200 cm?

c) ¿Caben el armario y la cama en la habitación?

a) Tomamos medidas de la habitación: 6 cm de largo y 3 cm de ancho. En la realidad la habitación mide:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 6\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{6\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=480\text{ cm}=4{,}8\text{ m}\qquad \left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 3\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{3\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=240\text{ cm}=2{,}4\text{ m}$$

Tomamos medidas de la cama: 2,8 cm de largo y 1,4 cm de ancho. En la realidad la cama tendrá estas medidas:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 2{,}8\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{2{,}8\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=224\text{ cm}=2{,}24\text{ m}\qquad \left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 1{,}4\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{1{,}4\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=112\text{ cm}=1{,}12\text{ m}$$

Si tenemos en cuenta la situación de la puerta y de la cama no cabe el armario.

b) $\text{Área}_{\text{Habitación}} = 4{,}8\cdot 2{,}4 = 11{,}52\text{ m}^2$. $\text{Área}_{\text{Cama}} = 1{,}5\cdot 2 = 3\text{ m}^2$. Por tanto, el área sobrante es $8{,}52\text{ m}^2$.

c) No, por las medidas de ambos.

**41. ¿A qué escala está dibujado un hexágono regular en el que el lado mide 3 cm si la medida real es 60 cm? Halla la relación entre las áreas.**

$$\left.\begin{array}{l}3\text{ cm}\to 60\text{ cm}\\ 1\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{1\text{ cm}\cdot 60\text{ cm}}{3\text{ cm}}=20\text{ cm}$$ → Por tanto, la escala es 1:20.

Llamando $A_D$ al área del dibujo y $A_R$ al área real, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}A_D=\dfrac{P_D\cdot ap_D}{2}\\ A_R=\dfrac{P_R\cdot ap_R}{2}\end{array}\right\}\to \frac{A_R}{A_D}=\frac{P_R\cdot ap_R}{P_D\cdot ap_D}=\frac{20\cdot P_D\cdot 20\cdot ap_D}{P_D\cdot ap_D}=20\cdot 20=20^2$$

Área real = 400 · Área del dibujo

# ACTIVIDADES FINALES

**42. Considera los puntos:**

**$A(0,4)$, $B(6,0)$, $C(5,7)$, $D(4,-4)$ y $E(-2,-1)$**

**Halla las coordenadas de los siguientes vectores.**

$\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{EB}$ $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AC}=(5-0,7-4)=(5,3)$  $\overrightarrow{AE}=(-2-0,-1-4)=(-2,-5)$  $\overrightarrow{BD}=(4-6,-4-0)=(-2,-4)$

$\overrightarrow{EB}=(6+2,0+1)=(8,1)$  $\overrightarrow{CD}=(4-5,-4-7)=(-1,-11)$  $\overrightarrow{EC}=(5+2,7+1)=(7,8)$

**43. Considera los puntos: $A(2,3)$ y $C(3,-1)$.**

a) Halla las coordenadas de $B$ tales que $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.

b) Si la segunda coordenada de $B$ y la de $D$ son iguales, encuentra $D$ para que $|\overrightarrow{BD}|=8$.

c) Halla el módulo del vector $\overrightarrow{DA}$.

a) Sea $B(b_1, b_2)$ → $\overrightarrow{AB}=(3,-1)=(b_1-2,b_2-3)\to\begin{cases}3=b_1-2\\-1=b_2-3\end{cases}\to\begin{cases}5=b_1\\2=b_2\end{cases}$

b) $B(5,2)=D(d_1,2)$ → $|\overrightarrow{BD}|=8=\sqrt{(d_1-5)^2+(2-2)^2}=\sqrt{(d_1-5)^2}=\pm(d_1-5)\to\begin{cases}d_1=13\\d_1=-3\end{cases}\to\begin{cases}D_1(13,2)\\D_2(-3,2)\end{cases}$

c) $\overrightarrow{D_1A}=(2-13,3-2)=(-11,1)$  $|\overrightarrow{D_1A}|=\sqrt{(-11)^2+1^2}=\sqrt{121+1}=\sqrt{122}$

$\overrightarrow{D_2A}=(2+3,3-2)=(5,1)$  $|\overrightarrow{D_2A}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

**44.** **Los vértices de un rectángulo son:**

$$A(-4,\ 4),\ B(2,\ 4),\ C(2,\ 1)\ \text{y}\ D(-4,\ 1)$$

a) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$.

b) Halla el módulo de las diagonales del rectángulo.

a) $\overrightarrow{AB}=(6,0)$ $\quad \overrightarrow{BC}=(0,-3)$ $\quad \overrightarrow{CD}=(-6,0)$ $\quad \overrightarrow{DA}=(0,3)$

b) $\overrightarrow{AC}=(6,-3)$ $\quad \overrightarrow{BD}=(-6,-3)$ $\quad \left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$ $\quad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

**45.** **¿Qué significa que una de las dos coordenadas de un vector sea cero?**

Si la primera coordenada es 0, el vector tiene dirección vertical, y sentido hacia arriba si la 2.ª coordenada es positiva y sentido hacia abajo si la 2.ª coordenada es negativa.

Si la segunda coordenada es 0, el vector tiene dirección horizontal, y sentido hacia la derecha si la 1.ª coordenada es positiva y sentido hacia la izquierda si la 1.ª coordenada es negativa.

**46.** **Indica, observando este dibujo, si las siguientes figuras se han obtenido mediante un movimiento o no. Razona tu respuesta.**

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Las figuras 1 y 2 conservan la forma y el tamaño, por lo que se han obtenido mediante un movimiento. Las figuras 3 y 4, no; la figura 3 no conserva ni la forma ni el tamaño, y la figura 4 conserva la forma pero no el tamaño.

**47.** **Dibuja, a partir de las figuras, otras figuras en las que se conserve lo indicado.**

a) El tamaño

b) La forma

c) El tamaño y la forma

d) Ni el tamaño ni la forma

a)

b)

c)

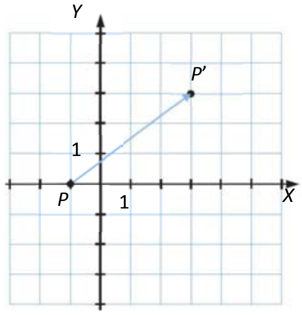
d)

**48. Dibuja y obtén el trasladado del punto *P* por el vector $\vec{v}$ en cada caso:**

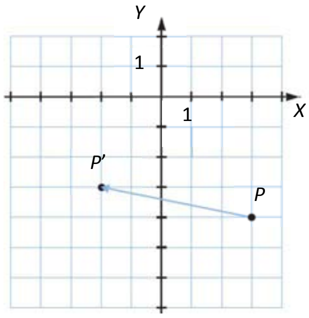
a) $P(-1, 0)$ y $\vec{v} = (4, 3)$ c) $P(3, -4)$ y $\vec{v} = (-5, 1)$

b) $P(4, -3)$ y $\vec{v} = (1, -5)$ d) $P(-2, 6)$ y $\vec{v} = (-3, -2)$

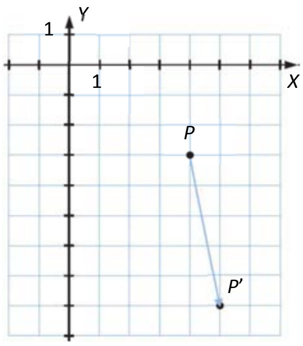
a) $P(-1,0) \xrightarrow{\vec{v}} P'(3,3)$



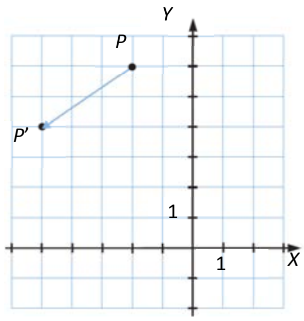

c) $P(3,-4) \xrightarrow{\vec{v}} P'(-2,-3)$




b) $P(4,-3) \xrightarrow{\vec{v}} P'(5,-8)$




d) $P(-2,6) \xrightarrow{\vec{v}} P'(-5,4)$

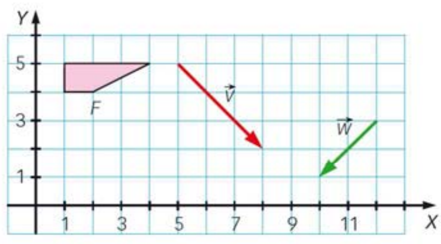



**49. Halla el vector de traslación que transforma *P* en *P′*.**

a) $P(2, -1), P'(-1, 3)$ b) $P(-5, 0), P'(0, -2)$

a) $\vec{v} = (-3,4)$ b) $\vec{v} = (5,-2)$

**50. Obtén la figura *F′* transformada de la figura *F* por una traslación de vector $\vec{v}$. Después, halla la transformada de *F′* por la traslación de vector $\vec{w}$, *F″*.**




a) ¿Puedes pasar directamente de *F* a *F″* con una traslación? Si crees que sí, dibuja el vector de dicha traslación y escribe sus coordenadas.

b) Escribe las coordenadas de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y suma sus abscisas y ordenadas. ¿Qué relación tiene el resultado con el del apartado anterior?

$\vec{v} = (8, 2) - (5, 5) = (3, -3)$

Los puntos de $F$ se convertirán en:

$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{v} = (3, -3)} A'(4, 2)$

$B(4, 5) \longrightarrow B'(7, 2)$

$C(2, 4) \longrightarrow C'(5, 1)$

$D(1, 4) \longrightarrow D'(4, 1)$

$\vec{w} = (10, 1) - (12, 3) = (-2, -2)$

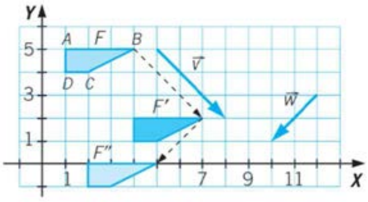
Los puntos de $F'$ se convertirán en:

$A'(4, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (-2, -2)} A''(2, 0)$

$B'(7, 2) \longrightarrow B''(5, 0)$

$C'(5, 1) \longrightarrow C''(3, -1)$

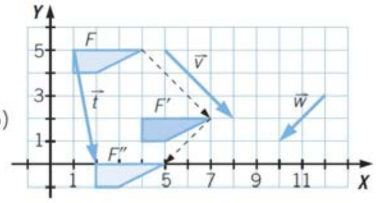
$D'(4, 1) \longrightarrow D''(2, -1)$



a) Sí, porque mantienen la forma y el tamaño. Lo comprobamos con la transformación de un punto de *F* en *F''* y lo aplicamos a los otros tres puntos de *F*.

$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{t} = (x, y)} A''(2, 0)$

$\left.\begin{matrix} 1 + x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 5 + y = 0 \rightarrow y = -5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{t} = (1, -5)$



Si aplicamos el vector $\vec{t}$ a los otros tres puntos de $F$:

$B(4, 5) \xrightarrow{\vec{t} = (1, -5)} B''(5, 0)$

$C(2, 4) \longrightarrow C''(3, -1)$

$D(1, 4) \longrightarrow D''(2, -1)$

Vemos que coinciden con los puntos obtenidos mediante los dos movimientos.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -3) + (-2, -2) = (1, -5)$

Se trata del vector $\vec{t}$ obtenido en el apartado a).

**51. Dibuja los siguientes elementos geométricos y sus transformados por el vector de traslación $\vec{v} = (3, -4)$.**

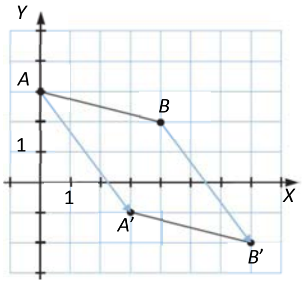
a) Segmento $AB$: $A(0, 3)$ y $B(4, 2)$.

b) Triángulo $ABC$: $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(1, 2)$.

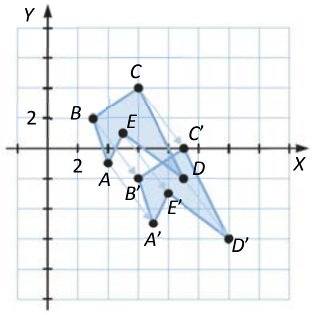
c) Pentágono $ABCDE$: $A(4, -1)$, $B(3, 2)$, $C(6, 4)$, $D(9, -2)$ y $E(5, 1)$.

d) Círculo de centro $C(-3, 2)$ y radio $r = 2$.

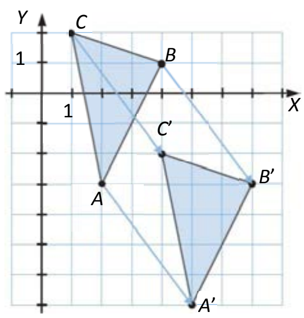
a)



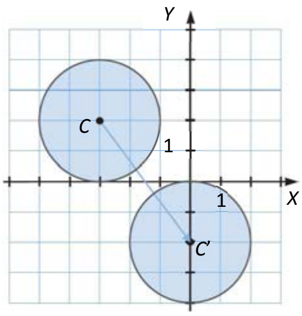
c)



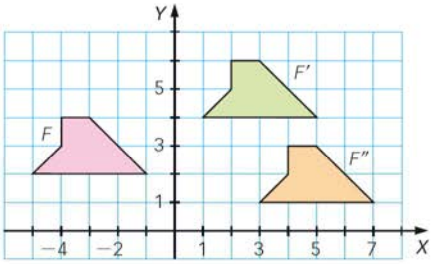
b)



d)



**52. Determina gráficamente los vectores de las traslaciones que transforman la figura *F* en *F′* y *F″*, respectivamente. Obtén también sus coordenadas.**




Tomamos el vértice superior izquierdo de las tres figuras:

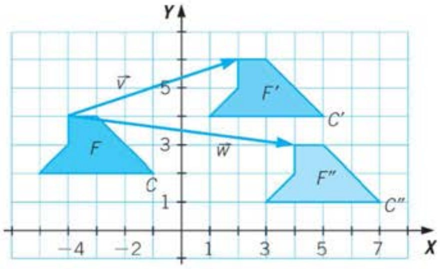
En $F \rightarrow A(-4, 4)$

En $F' \rightarrow A'(2, 6)$

En $F'' \rightarrow A''(4, 3)$

$\rightarrow \vec{v} = (2 - (-4), 6 - 4) = (6, 2)$

$\rightarrow \vec{w} = (4 - (-4), 3 - 4) = (8, -1)$



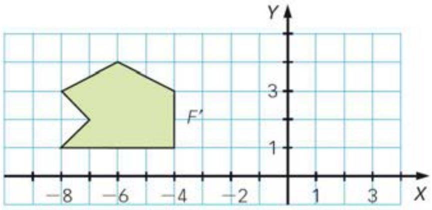

Lo comprobamos transformando el vértice derecho de la figura $F$:

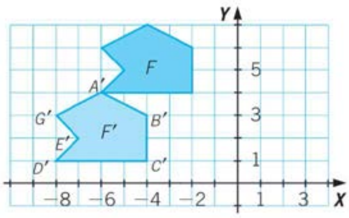
$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{v} = (6, 2)} C'(5, 4)$$

$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (8, -1)} C''(7, 1)$$

que corresponden a las coordenadas de los picos de $F'$ y $F''$.

**53. Halla la figura *F* que ha dado lugar a la figura *F′*, al aplicarle una traslación de vector $\vec{v} = (-2, -3)$. Antes de hacerlo, determina cuáles serán las coordenadas de los vértices de la figura *F*.**




$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} A'(-6, 4) \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = -6 \rightarrow x_1 = -4 \\ y_1 - 3 = 4 \longrightarrow y_1 = 7 \end{cases}$$

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} B'(-4, 3) \rightarrow \begin{cases} x_2 - 2 = -4 \rightarrow x_2 = -2 \\ y_2 - 3 = 3 \longrightarrow y_2 = 6 \end{cases}$$

$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} C'(-4, 1) \rightarrow \begin{cases} x_3 - 2 = -4 \rightarrow x_3 = -2 \\ y_3 - 3 = 1 \longrightarrow y_3 = 4 \end{cases}$$

$$D(x_4, y_4) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} D'(-8, 1) \rightarrow \begin{cases} x_4 - 2 = -8 \rightarrow x_4 = -6 \\ y_4 - 3 = 1 \longrightarrow y_4 = 4 \end{cases}$$

$$E(x_5, y_5) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} E'(-7, 2) \rightarrow \begin{cases} x_5 - 2 = -7 \rightarrow x_5 = -5 \\ y_5 - 3 = 2 \longrightarrow y_5 = 5 \end{cases}$$

$$G(x_6, y_6) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} G'(-8, 3) \rightarrow \begin{cases} x_6 - 2 = -8 \rightarrow x_6 = -6 \\ y_6 - 3 = 3 \longrightarrow y_6 = 6 \end{cases}$$

**54. ¿Qué observas al hallar los vectores de traslación que transforman *P* en *P′*, *P′* en *P″* y *P* en *P″*?**

a) $P(-3, -1)$ $P'(2, 0)$ $P''(3, 8)$

b) $P(4, 2)$ $P'(-1, 3)$ $P''(-2, -2)$

Sea $\vec{v}$ el vector de traslación que transforma *P* en *P'*; sea $\vec{u}$ el vector de traslación que transforma *P'* en *P''* y sea $\vec{w}$ el vector de traslación que transforma *P* en *P''*.

a) $\vec{v}=(5,1)$ $\vec{u}=(1,8)$ $\vec{w}=(6,9)\rightarrow\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$

b) $\vec{v}=(-5,1)$ $\vec{u}=(-1,-5)$ $\vec{w}=(-6,-4)\rightarrow\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$

**55. Dado el triángulo $\widehat{ABC}$: $A(-2, -1)$, $B(2, 6)$ y $C(6, -4)$.**

a) ¿En qué puntos se transforman *B* y *C* mediante la traslación que transforma *A* en *B*?

b) ¿En qué puntos se transforman *A* y *C* mediante la traslación que transforma *B* en *C*?

c) ¿En qué puntos se transforman *A* y *B* en la traslación que transforma *C* en *A*?

a) $\overrightarrow{AB}=(4,7)$

$$B(2,6)\xrightarrow{\overrightarrow{AB}}B'(6,13)$$
$$C(6,-4)\xrightarrow{\overrightarrow{AB}}C'(10,3)$$

b) $\overrightarrow{BC}=(4,-10)$

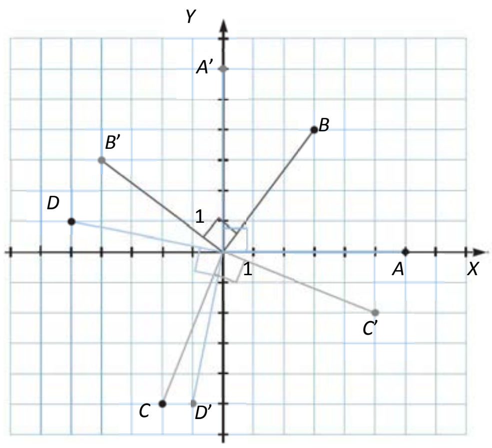
$$A(-2,-1)\xrightarrow{\overrightarrow{BC}}A'(2,-11)$$
$$C(6,-4)\xrightarrow{\overrightarrow{BC}}C'(10,-14)$$

c) $\overrightarrow{CA}=(-8,3)$

$$A(-2,-1)\xrightarrow{\overrightarrow{CA}}A'(-10,2)$$
$$B(2,6)\xrightarrow{\overrightarrow{CA}}B'(-6,9)$$

**56. Dibuja el punto transformado de estos puntos por un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 90°.**

***A*(6, 0)** ***B*(3, 4)** ***C*(−2, −5)** ***D*(−5, 1)**



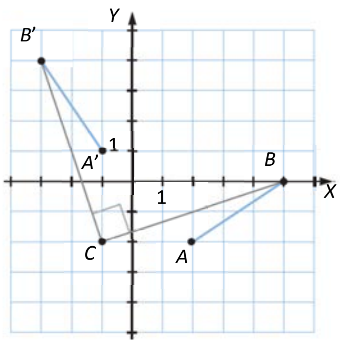
**57.** **Dibuja los puntos y el segmento que forman *A* y *B*. Halla su transformado por un giro de 90° de centro *C*(−1, −2).**

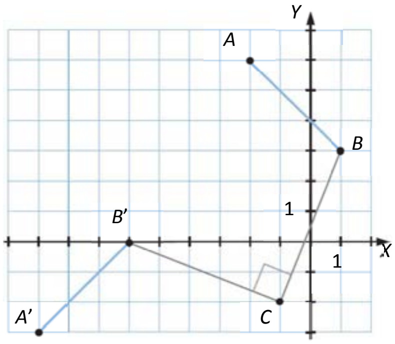
a) $A(2, -2)$, $B(5, 0)$

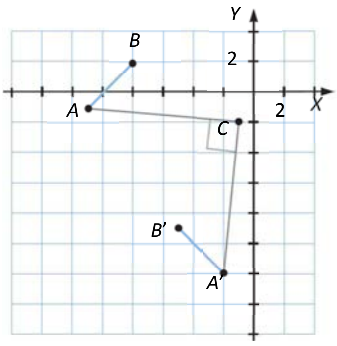
b) $A(-11, -1)$, $B(-8, 2)$

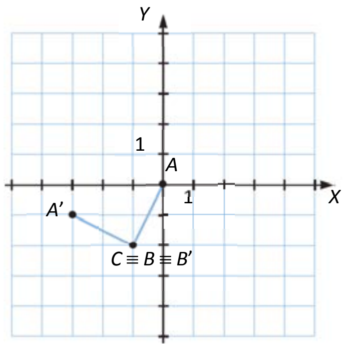
c) $A(-2, 6)$, $B(1, 3)$

d) $A(0, 0)$, $B(-1, -2)$

a)



c)


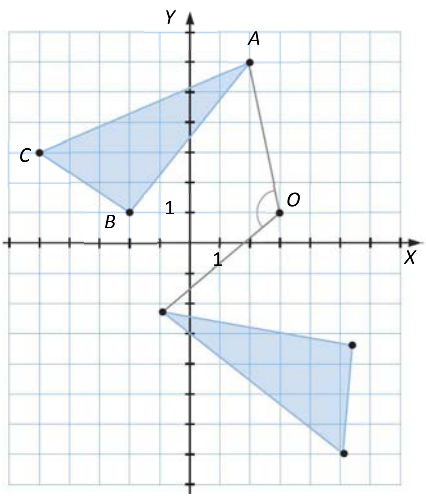

b)


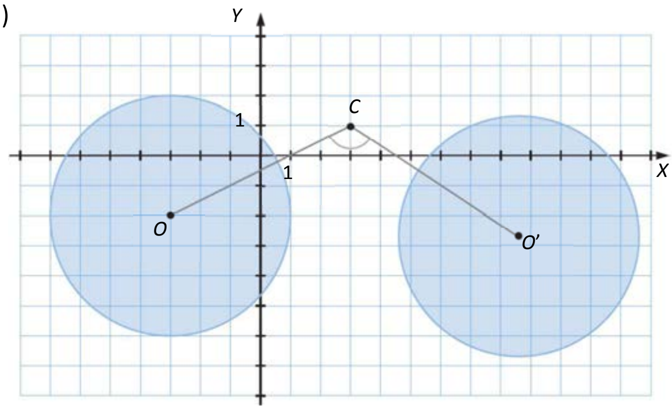

d)



**58.** **Dibuja estos elementos y sus transformados por el giro de centro *O*(3, 1) y ángulo 120°.**

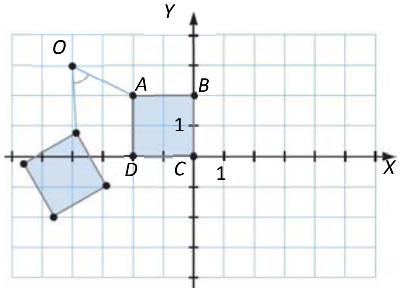
a) Triángulo de vértices: $A(2, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$.

b) Círculo de centro $C(-3, -2)$ y radio $r = 4$.

a)



b)


**59. Dibuja el cuadrilátero *ABCD*, *A*(−2, 2), *B*(0, 2), *C*(0, 0) y *D*(−2, 0) y aplícale un giro de centro *O*(−4, 3) y ángulo −60°.**




**60. Obtén la transformación que aplica varios giros al punto *P*(3, 5) con el mismo centro *C*(0, 0).**

a) Dos giros, uno de 40° y otro de 40°.

b) Tres giros, uno de 60°, otro de 30° y el último de 90°.

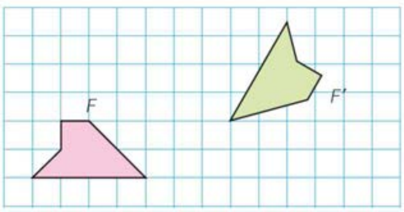
c) Dos giros, uno de −30° y otro de 120°.

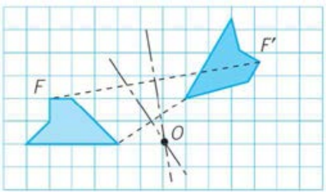
a) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 80º.

b) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 180º.

c) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 90º.

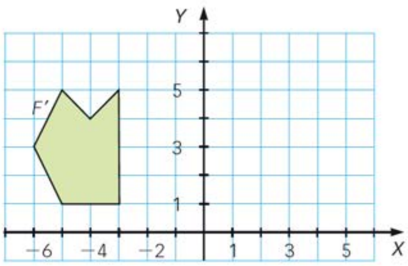
**61. Determina el centro y el ángulo del giro que transforma *F* en *F′*.**




El centro *O* es el de la figura. El ángulo del giro es de –120º, aproximadamente.

**62. Halla la figura *F* de la que procede la figura *F′* al aplicarle un giro de centro el origen y ángulo de 90°.**



Al aplicar un giro de 90° a los vértices de $F$, se cumple que:

$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(-6, 3) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = 6$

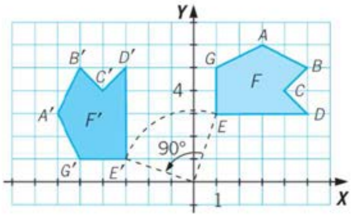
$B(x_2, y_2) \rightarrow B'(-5, 5) \rightarrow x_2 = 5, y_2 = 5$

$C(x_3, y_3) \rightarrow C'(-4, 4) \rightarrow x_3 = 4, y_3 = 4$

$D(x_4, y_4) \rightarrow D'(-3, 5) \rightarrow x_4 = 5, y_4 = 3$

$E(x_5, y_5) \rightarrow E'(-3, 1) \rightarrow x_5 = 1, y_5 = 3$

$G(x_6, y_6) \rightarrow G'(-5, 1) \rightarrow x_6 = 1, y_6 = 5$




**63. Indica los dos transformados de estos puntos por una simetría respecto a ambos ejes de coordenadas.**

$A(2, 0)$ $B(6, 2)$ $C(0, 8)$ $D(-1, 4)$

$E(-5, 0)$ $F(-3, -4)$ $G(0, -9)$ $H(2, -6)$

| Punto | Simétrico respecto al eje *X* | Simétrico respecto al eje *Y* |
|---|---|---|
| *A*(2, 0) | (2, 0) | (–2, 0) |
| *B*(6, 2) | (6, –2) | (–6, 2) |
| *C*(0, 8) | (0, –8) | (0, 8) |
| *D*(–1, 4) | (–1, –4) | (1, 4) |
| *E*(–5, 0) | (–5, 0) | (5, 0) |
| *F*(–3, –4) | (–3, 4) | (3, –4) |
| *G*(0, –9) | (0, 9) | (0, –9) |
| *H*(2, –6) | (2, 6) | (–2, –6) |

**64. Halla el transformado por el movimiento indicado del triángulo *ABC*: *A*(−1, 6), *B*(−2, 1) y *C*(−5, 3).**

a) Simetría central respecto del origen, $O(0, 0)$.

b) Simetría central de centro el punto $D(4, 2)$.

c) Simetría respecto al eje de ordenadas.

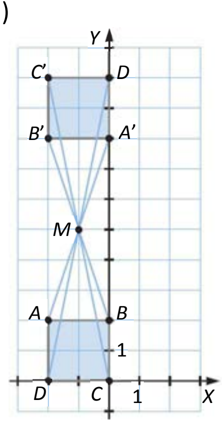
a) $A'(1, -6)$ $B'(2, -1)$ $C'(5, -3)$ b) $A'(9, -2)$ $B'(10, 3)$ $C'(13, 1)$ c) $A'(1, 6)$ $B'(2, 1)$ $C'(5, 3)$

**65. Realiza una simetría central respecto al punto *M*(−1, 5), a cada una de las figuras.**

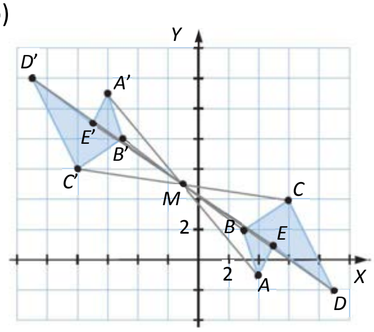
a) Cuadrado *ABCD*: $A(-2, 2)$, $B(0, 2)$, $C(0, 0)$ y $D(-2, 0)$.

b) Polígono de vértices: $A(4, -1)$, $B(3, 2)$, $C(6, 4)$, $D(9, -2)$ y $E(5, 1)$.

a)




b)

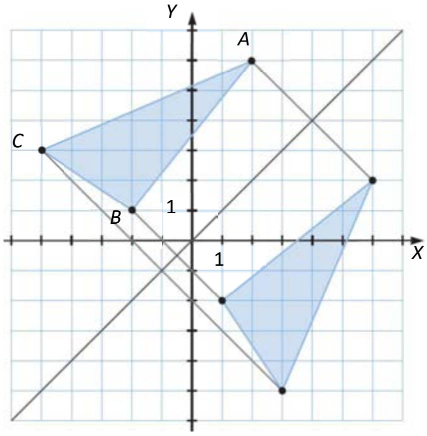


**66. Construye la figura simétrica respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.**

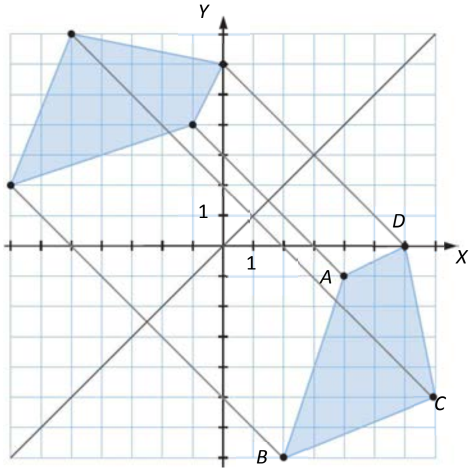
a) Triángulo: $A(2, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$.

b) Cuadrilátero: $A(4, -1)$, $B(2, -7)$, $C(7, -5)$ y $D(6, 0)$.

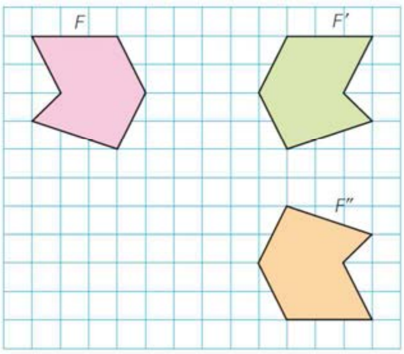
a)

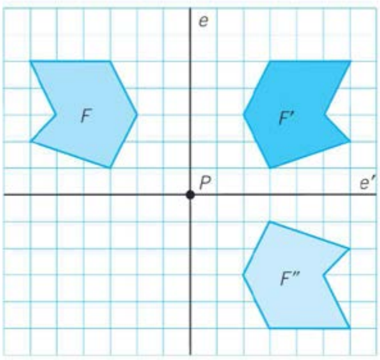



b)




**67. Determina el centro de simetría que transforma *F* en *F′* y *F′* en *F″*, y el eje de simetría que realiza las mismas transformaciones.**



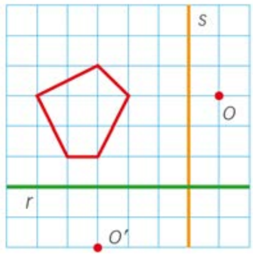




La simetría respecto al eje *e* transforma *F* en *F′* y la simetría respecto a *e′* transforma *F′* en *F″*.

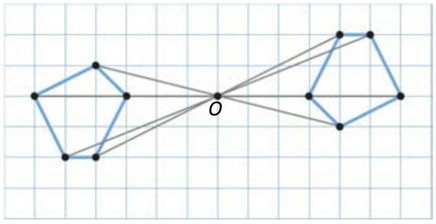
La simetría respecto al punto *P* transforma *F* en *F″*.

**68.** **Considera el pentágono *ABCDE*.**
**Dibuja los siguientes simétricos del pentágono:**

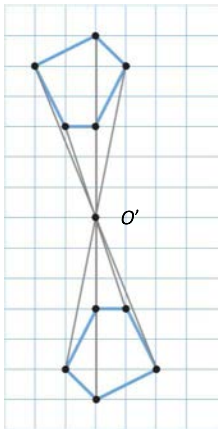
a) El simétrico respecto al centro de simetría *O*.
b) El simétrico respecto al centro de simetría *O'*.
c) El simétrico respecto a *r* como eje de simetría.
d) El simétrico respecto a *s* como eje de simetría.



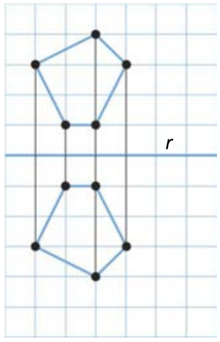

a)



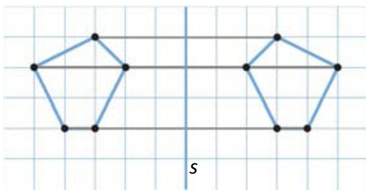

b)




c)



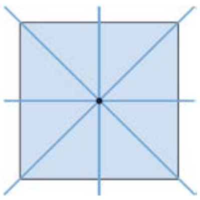

d)



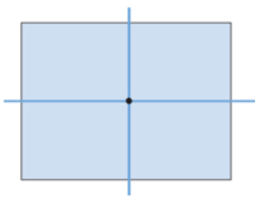

**70.** **Dibuja los ejes de simetría y el centro de estas figuras.**

a) Un cuadrado
b) Un rombo
c) Un rectángulo
d) Un trapecio isósceles
e) Un triángulo isósceles
f) Un hexágono regular

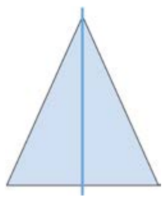
a)



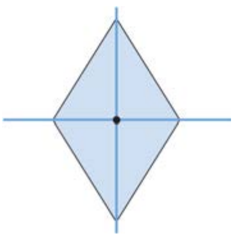
c)



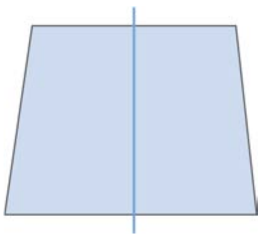
e)



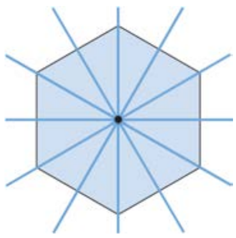
b)



d)



f)



**71. Dado el triángulo cuyos lados miden 3, 6 y 8 cm, respectivamente, calcula:**

a) La longitud de los lados de otro triángulo semejante a este con razón de semejanza $k = 2$.

b) La longitud de los lados de otro triángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza que hay entre los dos triángulos transformados?

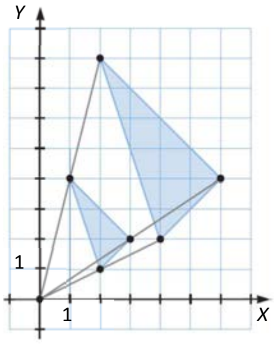
a) 6 cm, 12 cm y 16 cm  b) 1,5 cm, 3 cm y 4 cm  c) $k = 4$

**72. Dibuja los polígonos que se detallan a continuación y los que se obtienen aplicándoles una homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón $k = 2$.**

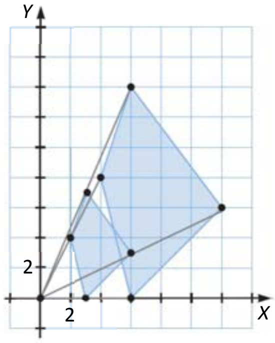
a) Triángulo $ABC$: $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ y $C(3, 2)$.

b) Cuadrilátero $ABCD$: $A(3, 0)$, $B(6, 3)$, $C(2, 4)$ y $D(3, 7)$.

a)

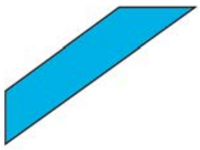



b)

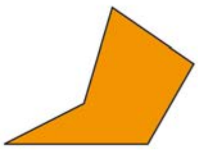



**74. Construye dos figuras semejantes a estas con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$, respectivamente.**

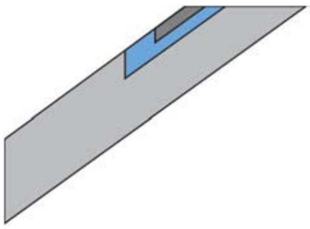
a)



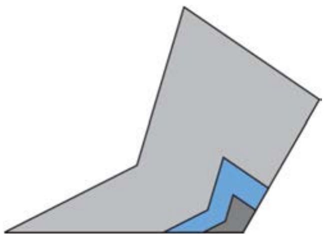
b)



a)



b)



**75. $A(1, 3)$, $B(4, 1)$ y $C(3, 4)$ son los vértices de un triángulo. Construye los siguientes transformados:**

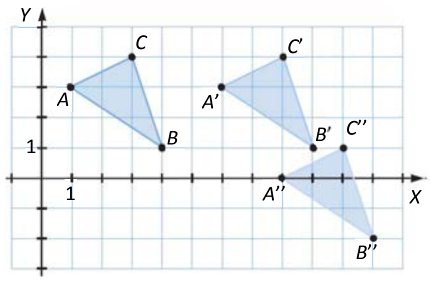
a) Traslación de vector $\vec{v} = (5, 0)$ seguida de otra traslación de vector $\vec{v} = (2, -3)$.

b) Homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón $k = 4$ seguida de un giro de centro $A'$ y ángulo de 90°.

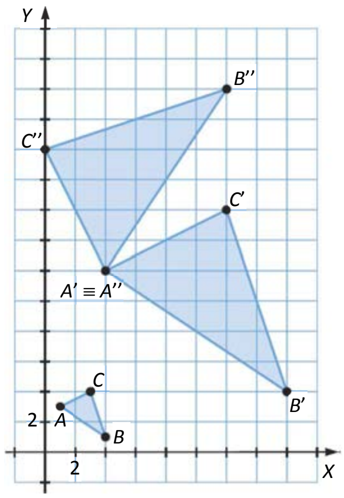
c) Simetría de eje el eje de ordenadas y una homotecia de centro $O(-3, 0)$ y razón $k = 3$.

d) Giro de centro $O(-1, 5)$ y ángulo de $-120°$ y una simetría de eje la bisectriz del 2.° y 4.° cuadrantes.

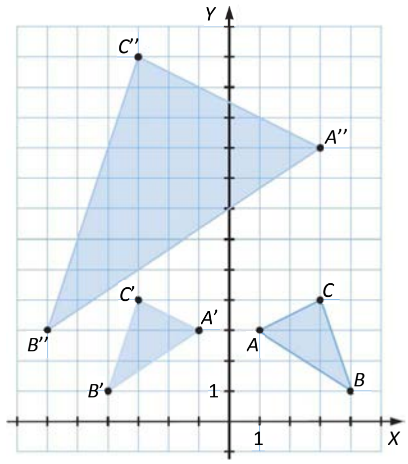
a)



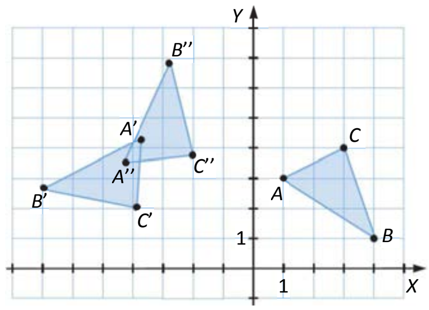

b)




c)




d)




**76.** **Los lados de un rectángulo miden 4 y 7 cm, y es semejante a otro cuyo perímetro es 132 cm.**

a) Halla las dimensiones del segundo rectángulo.

b) Calcula la razón de semejanza entre ambos rectángulos.

a) Perímetro del rectángulo de lados 4 y 7 cm: $(4 + 7) \cdot 2 = 22$ cm.

Perímetro del rectángulo semejante: $132 = 22k$ de donde $k = 6$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo semejante son: $4k = 4 \cdot 6 = 24$ cm y $7k = 7 \cdot 6 = 42$ cm.

b) $k = 6$

**77.** **Razona si es verdadero o falso:**

a) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

b) Si la razón de semejanza de dos figuras es $r$, entonces una figura es la transformada de la otra en una homotecia de razón $r$.

c) Si los lados de dos hexágonos regulares son proporcionales, entonces son semejantes.

d) Si la razón de semejanza entre dos cuadrados es $m$, la razón entre sus perímetros es $4m$ y entre sus áreas es $m^2$.

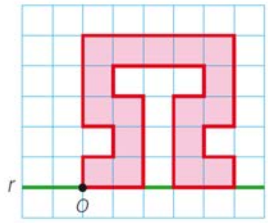
a) Falso, los ángulos agudos pueden ser diferentes.

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso, la razón entre los perímetros es $m$, no $4m$.

**78. Construye, en cada caso, un friso a partir de la figura que se da y siguiendo las indicaciones.**

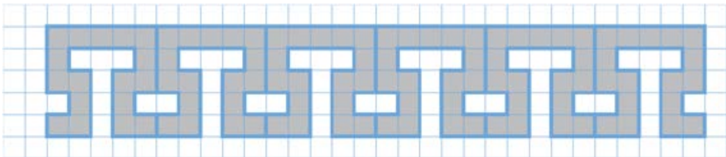



a) Utilizar una traslación de vector $\vec{v} = (5, 0)$.

b) Realizar un giro de 90° con centro en $O$ y una traslación de vector $\vec{u} = (7, 0)$.

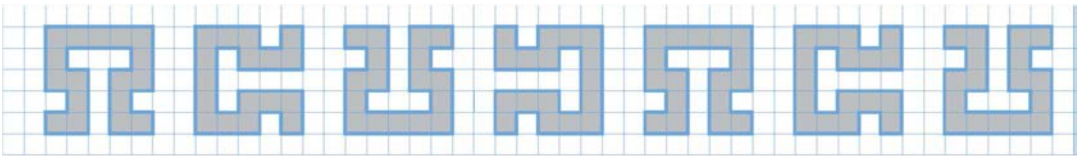
c) Aplicar una simetría axial respecto de la recta $r$ y una traslación de vector $\vec{w} = (8, 0)$.

a)

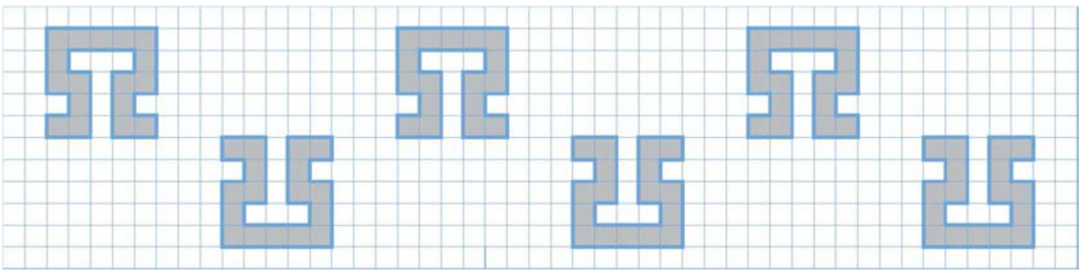


b) Con estos dos movimientos las figuras se solapan y no se forma un friso.

Bastaría cambiar el centro de giro por el centro de la figura, y se obtendía:

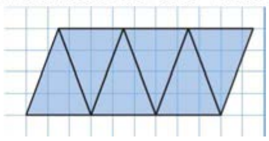


c)

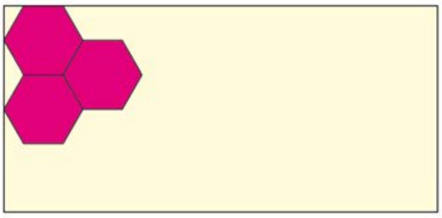


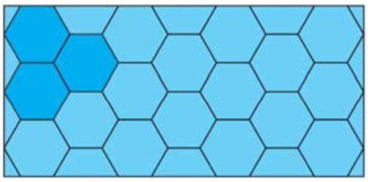
**79. Dibuja el friso que se obtiene a partir de un triángulo rectángulo aplicándole una tras otra simetrías axiales respecto de una recta vertical situada una unidad a su derecha.**

**80. Dibuja el friso que se obtiene a partir de un triángulo isósceles aplicándole uno tras otro giros de ángulo −180° con centro en el punto medio de uno de los lados de igual medida.**

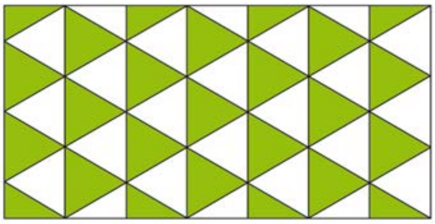


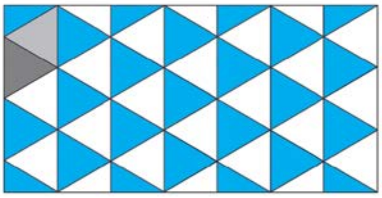
**81.** **Completa en tu cuaderno el mosaico formado por hexágonos que ves a la derecha.**





**82.** **Identifica qué movimientos intervienen en este mosaico.**

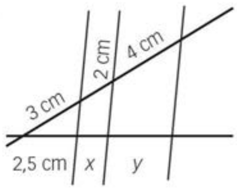




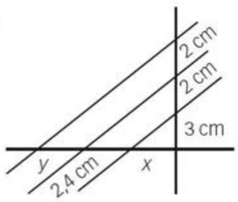
Los movimientos que intervienen son dos giros de 120º cada uno y una traslación.

**83.** **Halla las medidas desconocidas.**

a)




b)




a) $\frac{3}{2{,}5} = \frac{2}{x} = \frac{4}{y} \rightarrow x = \frac{5}{3}$ cm, $y = \frac{10}{3}$ cm

b) $\frac{3}{x} = \frac{2}{2{,}4} = \frac{2}{y} \rightarrow x = 3{,}6$ cm; $y = 2{,}4$ cm

**84.** **El lado desigual de un triángulo isósceles mide 3 cm y los lados iguales miden 8 cm. Calcula la medida del lado desigual de un triángulo isósceles semejante al anterior cuyos lados iguales miden 14 cm.**

$\frac{8}{14} = \frac{3}{x} \rightarrow x = 5{,}25$ cm

**85. Averigua si son semejantes estos triángulos:**

I. 4 cm; 7 cm y 9 cm  III. 6,75; 9 cm y 13 cm

II. 3 cm; 4 cm y 6 cm  IV. 6 cm; 10,5 y 13,5 cm

Son semejantes I y IV: $\frac{6}{4}=\frac{10,5}{7}=\frac{13,5}{9}=1,5$

No son semejantes I y II: $\frac{4}{3}\neq\frac{7}{4}\neq\frac{9}{6}$

No son semejantes I y III: $\frac{4}{6,75}\neq\frac{7}{9}\neq\frac{9}{13}$

No son semejantes II y III: $\frac{3}{6,75}=\frac{4}{9}\neq\frac{6}{13}$

No son semejantes II y IV: $\frac{3}{6}\neq\frac{4}{10,5}\neq\frac{6}{13,5}$

No son semejantes III y IV: $\frac{6}{6,75}\neq\frac{10,5}{9}\neq\frac{13,5}{13}$

**86. Halla la medida de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de perímetro 37,17 cm semejante a otro de catetos 5 cm y 2 cm.**

La hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 2 cm mide $\sqrt{25+4}=\sqrt{29}=5,39\text{ cm}$, con lo que el perímetro es 5 + 2 + 5,39 = 12,39 cm.

La razón de semejanza entre los dos triángulos es $k=\frac{37,17}{12,39}=3$.

Así, los catetos pedidos miden 5 · 3 = 15 cm y 2 · 3 = 6 cm; y la hipotenusa mide 5,39 · 3 = 16,17 cm.

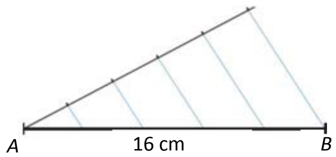
**87. Divide gráficamente cada segmento.**

a) Segmento de longitud 16 cm en 5 partes iguales.

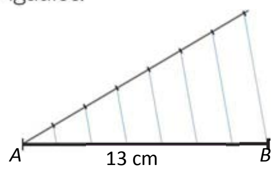
b) Segmento de longitud 13 cm en 7 partes iguales.

c) Segmento de longitud 20 cm en 15 partes iguales.

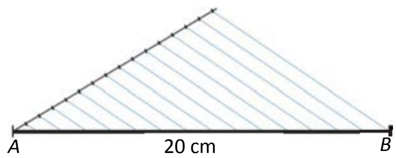
a)




b)




c)



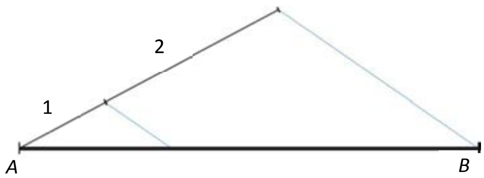

**88. Divide un segmento de 12 cm.**

a) En partes proporcionales a 1 y 2.

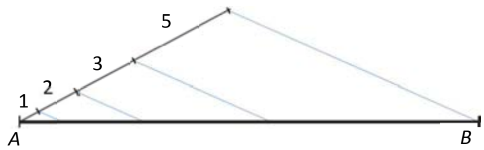
b) En partes proporcionales a 2, 3 y 4.

c) En partes proporcionales a 1, 2, 3 y 5.

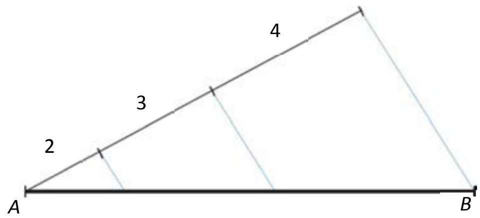
a)




c)




b)



**89. La escala de un mapa es 1 : 400 000. Halla:**

a) La distancia real que separa dos ciudades si en el mapa es 11 cm.

b) La distancia en el mapa de dos localidades que en la realidad se distancian 236 km.

a) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 400\,000 \\ 11 \to x \end{array}\right\} \to x = 4\,400\,000 \text{ cm} = 44 \text{ km}$$

b) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 400\,000 \text{ cm} = 4 \text{ km} \\ y \to 236 \text{ km} \end{array}\right\} \to y = \frac{236}{4} = 59 \text{ cm}$$

**90. En el plano de una casa cada metro de la vivienda mide 0,5 cm. Calcula:**

a) La escala a la que se ha realizado el plano.

b) Dimensiones reales de una habitación que en el plano mide 1,75 cm de ancho y 2,5 cm de largo.

c) Dimensiones en el plano de la terraza cuadrada de la vivienda que ocupa una superficie de 16 m².

a) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5 \to 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ 1 \to x \end{array}\right\} \to x = 200 \text{ cm} \quad \to \quad \text{La escala es } 1:200$$

b) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ 1{,}75 \text{ cm} \to x \end{array}\right\} \to x = 1{,}75 \cdot 2 = 3{,}5 \text{ m} \qquad \left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ 2{,}5 \text{ m} \to y \end{array}\right\} \to y = 2{,}5 \cdot 2 = 5 \text{ m}$$

c) Área = 16 m² → lado = 4 m

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ x \to 4 \text{ m} \end{array}\right\} \to x = 4 : 2 = 2 \text{ m}$$ → El lado de la terraza cuadrada en el plano mide 2 cm.

**91. La carretera que va de Pedroche a Pajuelo mide 45 km. Halla esa longitud en un plano de escala:**

a) 1 : 25 000 b) 1 : 50 000 c) 1 : 350 000

a) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 25000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4500000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 180 \text{ cm}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 50000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4500000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 90 \text{ cm}$$

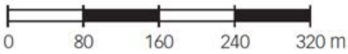
c) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 350000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4500000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 12{,}85 \text{ cm}$$

**92. ¿A qué escala está dibujado un mapa en el que la distancia entre dos poblaciones es 6,2 cm y la distancia real es 372 km?**

$$\left.\begin{array}{l} 6{,}2 \text{ cm} \to 372 \text{ km} = 37200000 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \to x \end{array}\right\} \to x = \frac{37200000}{6{,}2} = 6000000$$

La escala es 1:6 000 000.

**93. En un mapa aparece esta escala gráfica:**




a) ¿Cuál es su escala numérica?

b) ¿Qué distancia real separa dos puntos que en el mapa distan 8 cm?

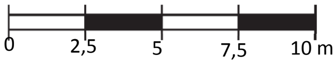
a) 1 : 8 000

b) $8 \cdot 8\,000 = 64\,000$ cm $= 640$ m

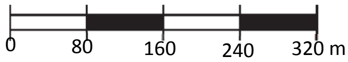
**94. Construye la escala gráfica que corresponde a estas escalas numéricas:**

a) 1 : 250    b) 1 : 8000

a)




b)




**95. Determina la medida de cada parcela en el lado que da a la calle de las Rosas.**


$16 + 14 + 12 + 10 + 8 = 60$

$\frac{60}{90} = \frac{16}{x} = \frac{14}{y} = \frac{12}{z} = \frac{10}{w} = \frac{8}{t}$    $\frac{60}{90} = \frac{16}{x} \rightarrow x = 24$    $\frac{60}{90} = \frac{14}{y} \rightarrow y = 21$

$\frac{60}{90} = \frac{12}{z} \rightarrow z = 18$    $\frac{60}{90} = \frac{10}{w} \rightarrow w = 15$    $\frac{60}{90} = \frac{8}{t} \rightarrow t = 12$

**96. Para amueblar su casita de muñecas, Laura pide un armario y una cómoda, réplicas de las que tiene en su habitación. Calcula las dimensiones que tendrán las réplicas a una escala de 1 : 12 si las dimensiones reales del armario son 180 × 110 × 60 cm y las de la cómoda son 120 × 80 × 45 cm.**

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 180\text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180}{12} = 15\text{ cm}$    $\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 110 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{110}{12} = 9{,}17\text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 60 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{60}{12} = 5\text{ cm}$

Las dimensiones de la réplica del armario son $15 \times 9{,}17 \times 5$ cm.

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 120 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{120}{12} = 10\text{ cm}$    $\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 80 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{80}{12} = 6{,}67\text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 45 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{45}{12} = 3{,}75\text{ cm}$

Las dimensiones de la réplica de la cómoda son $10 \times 6{,}67 \times 3{,}75$ cm.

**97. Toma un papel tamaño DIN A4 (297 × 210 mm). Indica si es semejante con estos otros:**

a) La mitad de esa hoja, dividiéndola al medio por su lado largo.

b) La mitad de esa hoja, dividiéndola al medio por su lado corto.

c) El doble de esa hoja, uniendo las hojas por su lado largo.

d) El doble de esa hoja, uniendo las hojas por su lado corto.

a) $\frac{297}{210}=\frac{210}{148,5}$ b) $\frac{210}{105}\neq\frac{297}{297}$ c) $\frac{297}{210}=\frac{420}{297}$ d) $\frac{210}{210}\neq\frac{594}{297}$

Son semejantes el papel de tamaño DIN A4 con el papel descrito en el apartado a) y el del apartado c).
No son semejantes al papel de tamaño DIN A4 los papeles de los apartados b) y d).

**98. Considera un mapa a escala 1 : 250 000 y dos lugares que se encuentran a 50 km uno de otro. Calcula:**

a) ¿Qué distancia separa a estos lugares en el mapa?

b) ¿Cuánto distan en una fotocopia reducida un 20 %?

c) ¿Cuánto distan en una fotocopia ampliada un 20 %?

d) Calcula las nuevas escalas de los nuevos mapas.

a) $\left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\rightarrow 250\,000\text{ cm}=2,5\text{ km}\\ x\rightarrow 50\text{ km}\end{array}\right\}\rightarrow x=\frac{50}{2,5}=20\text{ cm}$

b) $20\cdot 0,8=16$ cm

c) $20\cdot 1,2=24$ cm

d) En la fotocopia reducida: $\left.\begin{array}{l}0,8\text{ cm}\rightarrow 250\,000\text{ cm}\\ 1\rightarrow x\end{array}\right\}\rightarrow x=\frac{250\,000}{0,8}=312\,500$, es decir, la escala es 1: 312 500.

En la fotocopia ampliada: $\left.\begin{array}{l}1,2\text{ cm}\rightarrow 250\,000\text{ cm}\\ 1\rightarrow x\end{array}\right\}\rightarrow x=\frac{250\,000}{1,2}=208\,333,33$, es decir, la escala es 1: 208 333,33.

**99. ¿Cuántos aumentos tiene un microscopio electrónico que permite ver una célula de 3,5 micrómetros con un diámetro de 1,75 cm?**

3,5 micrómetros $=3,5\cdot 10^{-4}$ cm $=0,00035$ cm

$\frac{1,75}{0,00035}=5000$ aumentos

**100. A las 18:00 h la sombra de Luis mide 2,3 m. Si su altura es 1,8 m, calcula:**

a) La altura de un árbol cuya sombra en este instante mide 4 m.

b) La altura de una casa cuya sombra mide 6,75 m.

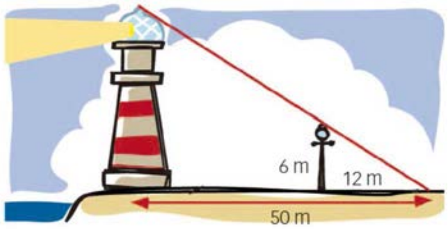
a) $\frac{4}{2,3}=\frac{\text{altura del árbol}}{1,8}\rightarrow\text{altura del árbol}=3,13\text{ m}$

b) $\frac{6,75}{2,3}=\frac{\text{altura de la casa}}{1,8}\rightarrow\text{altura de la casa}=5,28\text{ m}$

**102.** **La sombra de un edificio, a una determinada hora del día, medía 15 m. En ese mismo momento, la sombra de una farola de 5 m de altura medía 3 m. ¿Cuál es la altura del edificio?**

$$\frac{15}{3}=\frac{\text{altura del edificio}}{5} \rightarrow \text{altura del edificio} = 25 \text{ m}$$

**103.** **¿Cuál es la altura del faro?**




$$\frac{50}{12}=\frac{\text{altura del faro}}{6} \rightarrow \text{altura del faro} = 25 \text{ m}$$

**104.** **A las 15:00 h la sombra de Luis mide 0,8 m. Si su altura es 1,6 m, calcula:**

a) La altura de un árbol cuya sombra en este instante mide 3 m.

b) La altura de una torre cuya sombra mide 25 m.

a) $\frac{3}{0,8}=\frac{\text{altura del árbol}}{1,6} \rightarrow \text{altura del árbol} = 6 \text{ m}$

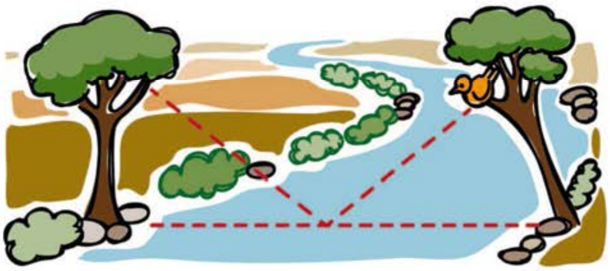
b) $\frac{25}{0,8}=\frac{\text{altura de la casa}}{1,6} \rightarrow \text{altura de la casa} = 50 \text{ m}$

**105.** **Se va a hacer un desvío en una carretera de forma que su trazado sea una línea recta respecto a dos poblaciones, *A* y *B*. Calcula en qué punto de la carretera habrá que hacer el desvío para que el trayecto hacia ambas poblaciones sea el mínimo.**


El desvío debe hacerse en el punto en el que se formen dos triángulos semejantes.

$$\frac{3}{x}=\frac{6}{12-x} \rightarrow 36-3x=6x \rightarrow 9x=36 \rightarrow x=4 \text{ km}$$

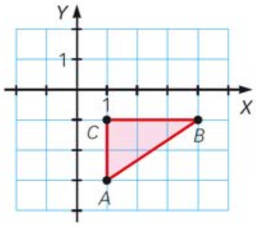
**106.** **Un pájaro está posado sobre la rama de un árbol (punto *A*), situado al borde de un río, y quiere pasar a otro árbol de la orilla opuesta (punto *B*), aprovechando para beber agua sin parar su vuelo. ¿Hacia qué punto del río debe dirigirse para hacer el recorrido más corto?**



Debe dirigirse hacia el punto en el que los dos triángulos que se forman con su trayectoria, el río y las alturas de los puntos, sean semejantes. Es el punto donde el pájaro ve reflejado el punto *B* en el agua.

## DEBES SABER HACER

**1.** **Halla las coordenadas y módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ de este triángulo.**




$$\overrightarrow{AB}=(4-1,-1+3)=(3,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC}=(1-4,-1+1)=(-3,0)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$$

$$\overrightarrow{CA}=(1-1,-3+1)=(0,-2)\rightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$$

**2.** **Al aplicar a *A*(5, 1) una traslación se obtiene *B*(3, −2). ¿Cuál es su vector de traslación $\vec{v}$? Al aplicar a *B* una traslación de vector $\vec{u}=(-4,6)$ se obtiene *C*, ¿cuáles son las coordenadas de *C*? ¿Qué vector de traslación transforma *A* en *C*?**

$A(5,1)\xrightarrow{\vec{v}}B(3,-2)$

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(3-5,-2-1)=(-2,-3)$

$A(5,1)\xrightarrow{\vec{w}=?}C(-1,4)$

$\vec{w}=(-1-5,4-1)=(-6,3)=\vec{v}+\vec{u}$

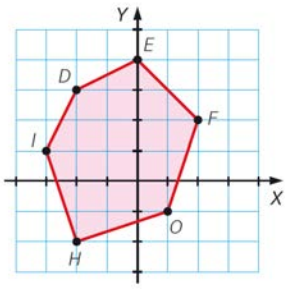
$B(3,-2)\xrightarrow{\vec{u}=(-4,6)}C$

$C(3-4,-2+6)=C(-1,4)$

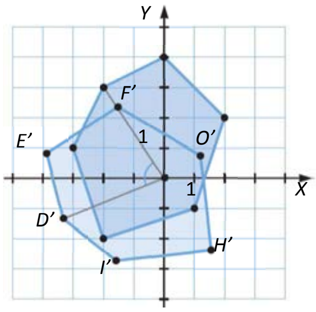
**3.** **Gira la figura de la imagen:**

a) Mediante un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 80°.

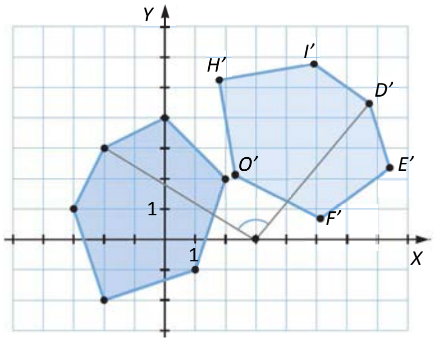
b) Mediante un giro de centro el punto *C*(3, 0) y ángulo de −100°.



a)




b)




**4. Halla las coordenadas del transformado del segmento de extremos $A(4, -3)$ y $B(0, 2)$:**

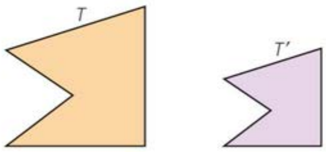
a) Por una simetría de centro el punto $C(0, -3)$.

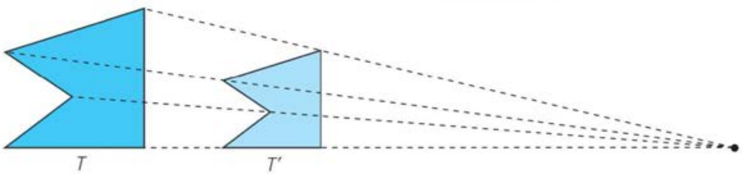
b) Por una simetría de eje la recta vertical que pasa por $B$.

c) Por una simetría de eje el eje de abscisas.

a) $A'(-4,-3)$ y $B'(0,-8)$ b) $A'(-4,-3)$ y $B' = B$ c) $A'(4,3)$ y $B'(0,-2)$

**5. Las figuras $T$ y $T'$ son semejantes. Halla el centro y la razón de la homotecia.**



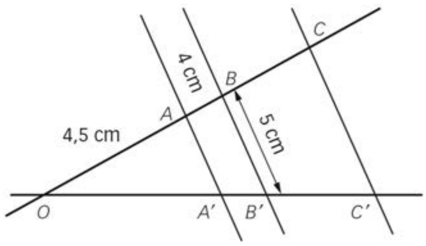

La razón de la homotecia es 0,7.

**6. En esta figura se cumple que la razón $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8$. Calcula $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{CC'}$.**

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{4{,}5}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8 \rightarrow \overline{OA'} = \frac{4{,}5}{0{,}8} = 5{,}625 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{4}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8 \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{4}{0{,}8} = 5 \text{ cm}$$

$\overline{CC'}$ no se puede calcular con los datos que tenemos.




**7. La altura de un árbol en la realidad es 4,05 m. ¿Cuál será su altura en un dibujo realizado a escala 1 : 45? Si en el mismo dibujo aparece una farola de 5,6 cm de altura, ¿qué altura real tiene la farola?**

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 45 \text{ cm} = 0{,}45 \text{ m} \\ x \rightarrow 4{,}05 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{4{,}05}{0{,}45} = 9 \text{ cm}$$

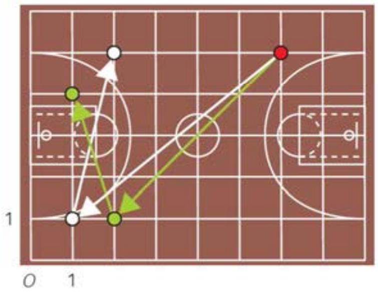
$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 45 \text{ cm} = 0{,}45 \text{ m} \\ 5{,}6 \text{ cm} \rightarrow y \end{array}\right\} \rightarrow y = 5{,}6 \cdot 0{,}45 = 2{,}52 \text{ m}$$

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**107.** **En la actualidad, las brújulas han sido sustituidas por los sistemas GPS. El uso de estos sistemas ha crecido gracias a las numerosas aplicaciones que tienen. Por ejemplo, en el deporte, colocando un GPS a cada jugador, podemos saber todos sus posicionamientos durante el partido y analizarlos posteriormente.**

- **Un entrenador de baloncesto analiza los movimientos de sus jugadores mediante un GPS.**

**En el gráfico se ven los movimientos de un jugador; el punto rojo es la posición inicial, y los puntos blancos, los movimientos durante la jugada.**




**El entrenador propone un nuevo movimiento señalado por las flechas verdes. Utilizando el sistema de coordenadas que se ha superpuesto en el dibujo, calcula las coordenadas de los vectores que muestran los movimientos del jugador.**

Movimientos en blanco: $\begin{cases} J(6,5) \xrightarrow{\vec{v}=(-5,-4)} J'(1,1) \\ J'(1,1) \xrightarrow{\vec{w}=(1,4)} J''(2,5) \end{cases}$ Movimientos en verde: $\begin{cases} J(6,5) \xrightarrow{\vec{u}=(-4,-4)} J'(2,1) \\ J'(2,1) \xrightarrow{\vec{t}=(-1,3)} J''(1,4) \end{cases}$

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

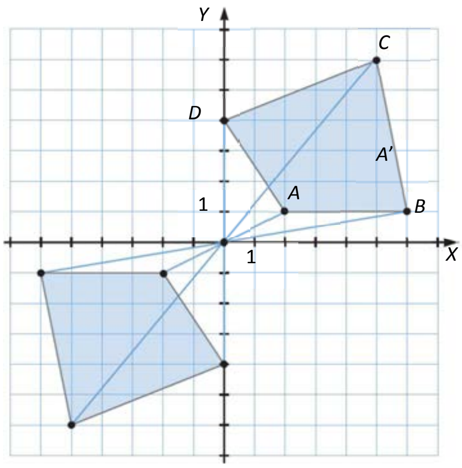
**108.** **Si *P′* es el transformado de *P* por un giro de centro *O* y ángulo $\alpha$, ¿con qué transformación se obtiene *P* desde *P′*?**

Con un giro de centro *O* y ángulo $-\alpha$.

**109.** **Halla el movimiento que equivale a realizar, a la misma figura, varios giros de distintas amplitudes con el mismo centro.**

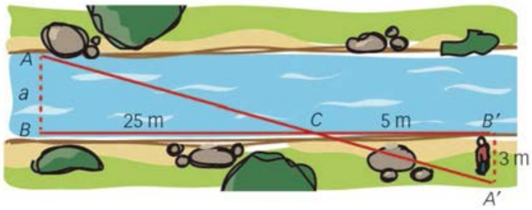
Un giro de centro el mismo centro y amplitud la suma de las amplitudes.

**110.** **Dibuja la figura de vértices *A*(2, 1), *B*(6, 1), *C*(5, 6) y *D*(0, 4) y aplícale una simetría de centro el origen de coordenadas. Comprueba que este movimiento equivale a un giro de centro el centro de la simetría y ángulo de 180°. ¿Pasa siempre esto?**




Sí, siempre sucede esta equivalencia.

**111. Halla el ancho del río.**




*ABC* y *A'B'C'* son semejantes por ser triángulos rectángulos y tener un ángulo agudo igual (por ser opuestos por el vértice). Entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{a}{3} = \frac{25}{5} \rightarrow a = 15 \text{ m}$$

**112. Verifica que resulta lo mismo en estas dos transformaciones:**

- **Aplicar consecutivamente a una figura dos simetrías axiales de ejes paralelos, $e_1$ y $e_2$.**
- **Aplicar una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes $e_1$ y $e_2$, y tiene por módulo el doble de la distancia entre ellos.**

El desplazamiento de cada punto se hace perpendicularmente a los dos ejes (por ser paralelos).

Si la distancia de un punto $A$ al eje $e_1$ es $d_1$ y al eje $e_2$ es $d_2$:

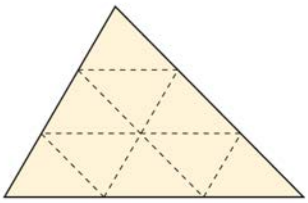
Distancia de $A$ a $A' = 2d_1$ Distancia de $A'$ a $e_2 = d_2 - 2d_1$

Por tanto:

Distancia de $A'$ a $A'' = 2(d_2 - 2d_1)$ Distancia de $A$ a $A'' = 2(d_2 - 2d_1) + 2d_1 = 2(d_2 - d_1)$.

La traslación que sufren todos los puntos tiene la misma dirección y la misma longitud, por lo que todos los puntos de la figura sufren la misma traslación de módulo $2(d_2 - d_1)$.

**113. Escribe el perímetro, *p*, la altura, *h*, y el área, *a*, de los triángulos pequeños en función del perímetro, *P*, la altura, *H*, y el área, *A*, del triángulo grande.**

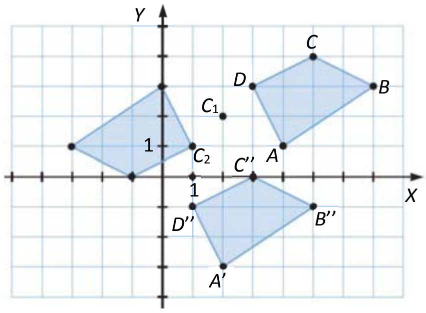


Los lados y la altura de cada triángulo pequeño son un tercio de los del triángulo grande:

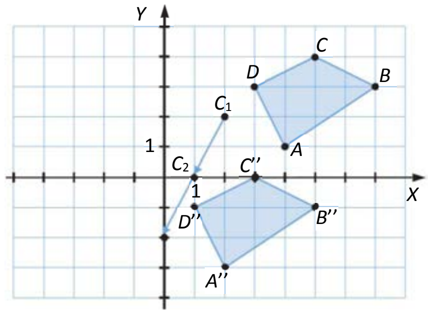
$$h = \frac{H}{3} \qquad p = \frac{P}{3} \qquad a = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{\frac{\text{BASE}}{3} \cdot \frac{H}{3}}{2} = \frac{A}{9}$$

**114. Comprueba, con ayuda de algunos ejemplos, que si aplicas consecutivamente a una figura dos simetrías centrales con distintos centros, $C_1$ y $C_2$, resulta lo mismo que si aplicas una traslación cuyo vector es igual al doble del vector definido por los dos centros de simetría.**

Aplicando dos simetrías:

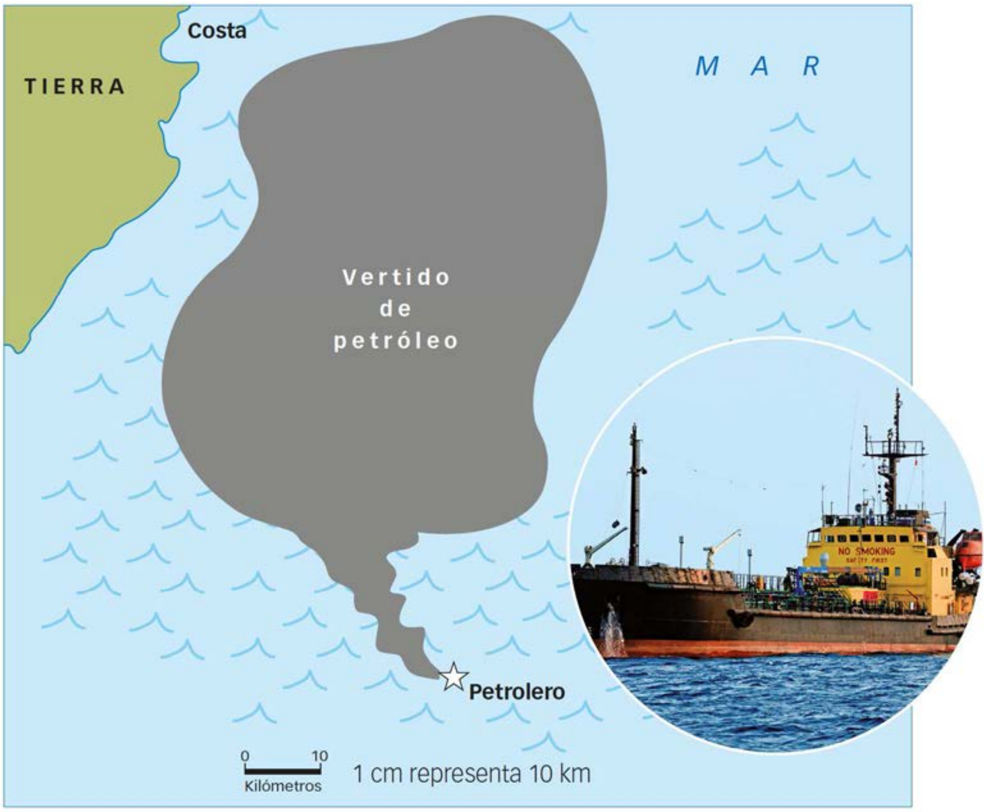



Aplicando la traslación:




## PRUEBAS PISA

**115. Un petrolero chocó contra una roca en medio del mar y esta produjo un agujero en los tanques de almacenamiento de petróleo. El petrolero se encontraba a unos 65 km de tierra. Unos días después, el petróleo se había extendido tal y como se muestra en el mapa de la derecha.**
**Utilizando la escala del mapa, calcula la superficie (área) del vertido de petróleo en kilómetros cuadrados (km²).**




*(Prueba PISA 2010)*

La mancha de vertido, irregular y curva, tiene aproximadamente 5 cm de ancho y 6 cm de alto. Así, aproximadamente la superficie de vertido de petróleo en el plano es $5 \cdot 6 = 30$ cm$^2$.
Por tanto, en la realidad serán aproximadamente $50 \cdot 60 = 3\,000$ km$^2$.

# Cuerpos geométricos

# 10

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Contesta si es verdadero o falso.**

a) Un polígono puede tener más lados que vértices.

b) Un polígono puede tener más ángulos que vértices.

c) Un polígono puede tener más diagonales que vértices.

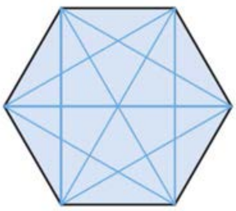
d) Un polígono puede tener más lados que ángulos.

e) Un polígono puede tener más lados que diagonales.

a) Falso. Tiene tantos lados como vértices.

b) Falso. A cada ángulo le corresponde un vértice, de modo que tiene el mismo número de vértices que de ángulos.

c) Verdadero.

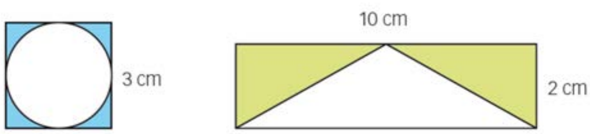


Por ejemplo, un hexágono (6 vértices) tiene 9 diagonales.

d) Falso. Tiene tantos lados como ángulos, ya que estos vienen determinados por los vértices y hay el mismo número de vértices que de lados.

e) Verdadero. Por ejemplo, un triángulo tiene 3 lados y ninguna diagonal.

**2. Calcula el área coloreada.**




PRIMER DIBUJO:

Representa el área de un cuadrado de lado 3 cm, menos el área de un círculo de diámetro 3 cm.

$$A = 3^2 - \pi \cdot 1{,}5^2 = 9 - 7{,}07 = 1{,}93\ \text{cm}^2.$$

SEGUNDO DIBUJO:

Representa el área de un rectángulo de lados 10 y 2 cm, menos el área de un triángulo de base 10 cm y altura 2 cm.

$$A = 10 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2}{2} = 20 - 10 = 10\ \text{cm}^2$$

## VIDA COTIDIANA

**Las pilas son necesarias para que muchos de los aparatos electrónicos funcionen.**

**El problema comienza cuando ya no son útiles y hay que eliminarlas. ¿Sabes que una sola pila de mercurio puede contaminar hasta 600 000 ℓ de agua al liberar sus componentes?**

**Otro de los problemas de las pilas es su forma. Su superficie curva las hace inestables y por eso son difíciles de almacenar.**

- **¿Cuál es el cuerpo geométrico de la pila de la figura?**

Es un cilindro.

## RESUELVE EL RETO

**¿Cómo formarías con 12 cerillas 6 cuadrados iguales?**

Formaría un cubo.

**El radio de la Tierra es 6 371 km. Si tuviéramos una cinta de longitud el Ecuador más un metro y la separáramos uniformemente de la superficie, ¿podría pasar un conejo por el hueco?**

Longitud del Ecuador $= 2\pi \cdot 6\,371$ km Longitud de la cinta $= 2\pi \cdot 6\,371 + 0{,}001$ km

Radio de la circunferencia que se forma con la cinta: $r = \dfrac{2\pi \cdot 6371 + 0{,}001}{2\pi} = 6371 + \dfrac{0{,}001}{2\pi} = 6371{,}00016$ km

El conejo podría pasar si midiera menos de 16 cm.

**Un tonel de forma cilíndrica lleno pesa 35 kg. Si lo llenamos hasta la mitad del mismo líquido pesa 19 kg. ¿Cuánto pesa el tonel vacío?**

Peso del líquido + peso del tonel = 35

$\dfrac{1}{2}$ peso del líquido + peso del tonel = 19

Resolvemos el sistema por reducción, multiplicando la segunda ecuación por 2:

–peso del tonel = –3 → peso del tonel = 3 kg

**¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro podrás meter en una caja vacía con forma de cubo de 1 m de lado?**

Cada lado del cubo equivale a 10 bolas, es decir, podré meter $10^3$ bolas.

## ACTIVIDADES

1. **¿Cómo son las aristas de un poliedro regular?**

Iguales, ya que sus caras están formadas por el mismo polígono regular y este tiene todos sus lados iguales.

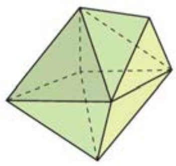
**2. Justifica si es verdadero o falso que el menor número de caras de un poliedro es 4.**

Verdadero.

Por un lado, podemos afirmar que existe un poliedro de 4 caras, que es una pirámide de base triangular.

Por otro lado, supongamos que existe un poliedro de 3 caras. Si los polígonos que forman sus caras tienen más de 3 lados, necesitamos para poder cerrarlo tantas caras como lados, de modo que serán más de 3. Si sus caras son triángulos y solo tenemos 3, los podemos unir formando una pirámide, pero no habrá base, de modo que no será un poliedro. Por tanto, no podemos construir un poliedro de 3 caras.

**3. El siguiente poliedro, ¿es regular? ¿Por qué? ¿Verifica la fórmula de Euler?**



El poliedro no es regular, pues sus caras no son polígonos regulares iguales.

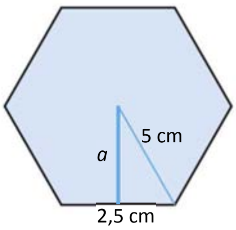
Debería verificar la fórmula de Euler pues es un poliedro convexo. Veamos: el poliedro tiene 10 caras, 7 vértices, 15 aristas, de modo que $10 + 7 = 15 + 2$. Efectivamente verifica la fórmula de Euler.

**4. Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma pentagonal.**

Un prisma pentagonal tiene 7 caras, 10 vértices y 15 aristas.

**5. Halla el área de un prisma hexagonal regular cuya arista de la base mide 5 cm, y su altura, 9 cm.**

Tenemos que calcular el área de su base y multiplicarla por 2, y el área de un rectángulo de base $5 \cdot 6 = 30$ cm y altura 9 cm.




Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono, sabiendo que el lado y el radio miden igual:

$5^2 = 2{,}5^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75 \rightarrow a = 4{,}33$ cm

El área del hexágono es:

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

De modo que el área del prisma es $2 \cdot 64{,}95 + 30 \cdot 9 = 399{,}9$ cm$^2$.

**6. Calcula la altura de un prisma octogonal regular sabiendo que su área total es 83,28 cm$^2$, y en la base, la apotema mide 2,41 cm, y las aristas, 2 cm.**

Si al área total le restamos el área de las bases, tendremos el área lateral.

Veamos, pues, cuál es el área de las bases: $\frac{8 \cdot 2 \cdot 2{,}41}{2} = 19{,}28 \text{ cm}^2$ .

Como hay dos bases, el área correspondiente a ellas es 38,56 cm$^2$.

Restamos el área de las bases al área total: $83{,}28 - 38{,}56 = 44{,}72$ cm$^2$ es el área lateral.

El área lateral viene dada por el perímetro de la base, $2 \cdot 8 = 16$ cm, y la altura del prisma, es decir:

$44{,}72 = 16 \cdot h \rightarrow h = 2{,}795$ cm.

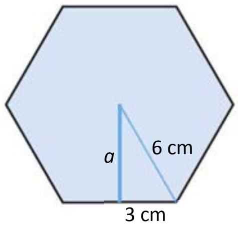
**7. Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene una pirámide pentagonal.**

Una pirámide pentagonal tiene 6 caras, 6 vértices y 10 aristas.

**8. Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 6 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm.**

La pirámide está compuesta por una base que es un hexágono de lado 6 cm, y por 6 triángulos de base 6 cm y altura 12 cm; la suma de todas las áreas de estos polígonos nos da el área total del poliedro.

Calculamos el área de la base:



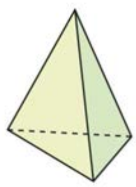

Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono:
$6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow a = 5{,}20$ cm

El área de la base es $6 \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm$^2$.

El área lateral es $6 \cdot \frac{6 \cdot 12}{2} = 216$ cm$^2$.

El área total de la pirámide es $93{,}6 + 216 = 309{,}6$ cm$^2$.

**9. Con cualquier triángulo como base se puede construir una pirámide recta. ¿Es posible hacerlo con cualquier cuadrilátero?**

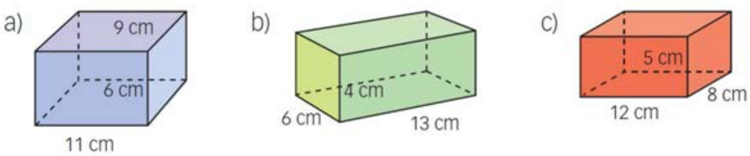


Las pirámides rectas son aquellas cuyas caras son triángulos isósceles. Esto es equivalente a que la proyección del vértice de la pirámide sobre la base coincida con su circuncentro.

Dado cualquier triángulo es posible obtener su circuncentro, pero no es así en el caso de cualquier cuadrilátero, pues algunos no lo tienen.

Por tanto, con cualquier cuadrilátero como base, no es posible construir una pirámide recta.

**10. Halla el área de estos ortoedros.**



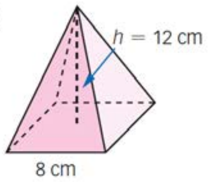
a) $A = (11 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 6 + 2 \cdot 11 \cdot 9 = 438\ \text{cm}^2$

b) $A = (13 \cdot 2 + 6 \cdot 2) \cdot 4 + 2 \cdot 13 \cdot 6 = 308\ \text{cm}^2$

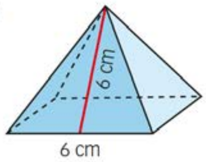
c) $A = (12 \cdot 2 + 8 \cdot 2) \cdot 5 + 2 \cdot 12 \cdot 8 = 392\ \text{cm}^2$

**11. Calcula el área de estas pirámides.**

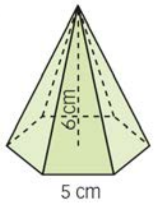
a)




b)




c)




a) Calculamos el valor de la altura de las caras triangulares usando el teorema de Pitágoras:
$a^2 = 12^2 + 4^2 = 160 \rightarrow a = 12{,}65$ cm

$$A = 8^2 + \frac{(8 \cdot 4) \cdot 12{,}65}{2} = 266{,}40\ \text{cm}^2$$

b) $A = 6^2 + \dfrac{(6 \cdot 4) \cdot 6}{2} = 108\ \text{cm}^2$

c) Para calcular la apotema de la base y de este modo poder calcular la altura de las caras laterales, usamos el teorema de Pitágoras con el triángulo que se forma en el hexágono:

$5^2 = 2{,}5^2 + ap^2 \rightarrow ap^2 = 18{,}75 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm

Usando el teorema de Pitágoras de nuevo calculamos la altura de los triángulos laterales:

$a^2 = 6^2 + 4{,}33^2 = 54{,}75 \rightarrow a = 7{,}40$ cm

$$A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + \frac{(5 \cdot 6) \cdot 7{,}4}{2} = 175{,}95\ \text{cm}^2$$

**12. Considera un prisma triangular recto de 8 cm de altura. Halla su área sabiendo que su base es:**

a) Un triángulo equilátero de 7 cm de lado.

b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 9 cm y el lado desigual mide 5 cm.

a) Calculamos la altura del triángulo de la base: $7^2 = 3{,}5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 36{,}75 \rightarrow h = 6{,}06$ cm

$$A = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} + (7 \cdot 3) \cdot 8 = 210{,}42\ \text{cm}^2$$

b) Calculamos la altura del triángulo de la base: $9^2 = 2{,}5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 74{,}75 \rightarrow h = 8{,}65$ cm

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 8{,}65}{2} + (9 + 9 + 5) \cdot 8 = 227{,}25\ \text{cm}^2$$

**13. Calcula el área de un prisma hexagonal regular de altura 14 cm, 250 cm² de área de la base y apotema de la base 8,5 cm.**

Necesitamos saber el lado de la base para así poder calcular el área lateral.

Es un hexágono regular, su área, que es 250 cm², viene dada por $6 \cdot \dfrac{l \cdot 8{,}5}{2} = 25{,}5l = 250 \rightarrow l = 9{,}80$ cm

De modo que el área del prisma será:

$A = 2 \cdot 250 + (6 \cdot 9{,}8) \cdot 14 = 1\,323{,}2\ \text{cm}^2$

**14. Halla el área de una pirámide regular de altura 16 cm y cuya base es:**

a) Un cuadrado de área 27,04 cm².

b) Un cuadrado de 52 cm de perímetro.

a) Si el área del cuadrado es 27,04 cm², su lado es $\sqrt{27,04} = 5,2$ cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 16^2 + 2,6^2 = 262,76 \rightarrow a = 16,21$ cm

$A = 27,04 + \frac{(4 \cdot 5,2) \cdot 16,21}{2} = 195,62$ cm²

b) Si el perímetro es 52 cm, el lado es 52/4 = 13 cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 16^2 + 3,5^2 = 268,25 \rightarrow a = 16,38$ cm

$A = 13^2 + \frac{(4 \cdot 13) \cdot 16,38}{2} = 594,88$ cm²

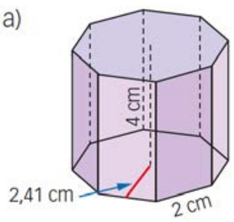
**15. Calcula el área lateral de la pirámide regular de arista lateral 6 cm y cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.**

Si la arista lateral es 6 cm, quiere decir que los triángulos laterales son triángulos isósceles de lados iguales 6 cm y lado desigual 4 cm. Calculamos su altura usando el teorema de Pitágoras:

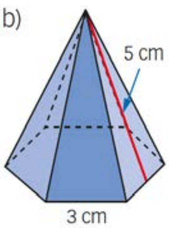
$6^2 = a^2 + 2^2 \rightarrow a^2 = 36 - 4 = 32 \rightarrow a = 5,66$ cm $\rightarrow$ El área lateral viene dada por $\frac{(3 \cdot 4) \cdot 5,66}{2} = 33,96$ cm².

**16. Calcula el área total de estos cuerpos geométricos.**

a)




b)




a) $A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{2 \cdot 2,41}{2} + (8 \cdot 2) \cdot 4 = 102,56$ cm²

b) Calculamos la apotema de la base usando el teorema de Pitágoras ya que es un hexágono regular, el radio es igual al lado: $3^2 = ap^2 + 1,5^2 \rightarrow ap^2 = 6,75$ cm² $\rightarrow ap = 2,60$ cm.

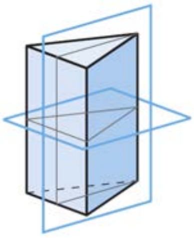
$A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} + \frac{(6 \cdot 3) \cdot 5}{2} = 68,4$ cm²

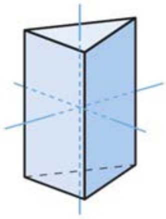
**17. Dibuja en tu cuaderno 3 planos de simetría y 3 ejes de simetría de estas figuras.**

a)

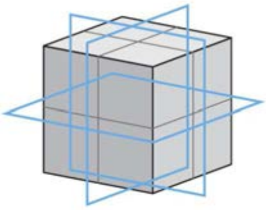
b)

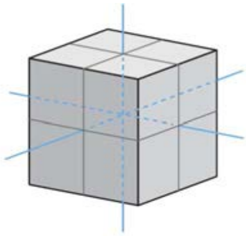
a) Es un prisma cuyas bases son triángulos isósceles. No se pueden dibujar tres planos de simetría, solo tiene dos. En cambio, sí tiene 3 ejes de simetría.





b) El cubo tiene tres planos y tres ejes de simetría.





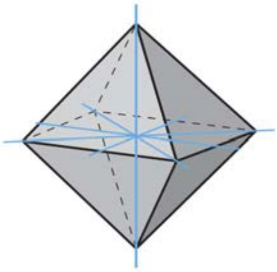
**18. Determina todos los planos y ejes de simetría de un octaedro.**

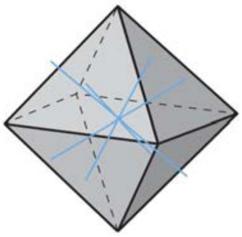
Tiene 13 ejes de simetría:

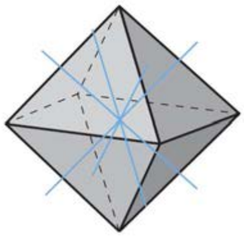
3 que unen dos vértices opuestos.

4 que unen los puntos medios de caras opuestas.

6 que unen los puntos medios de aristas opuestas.







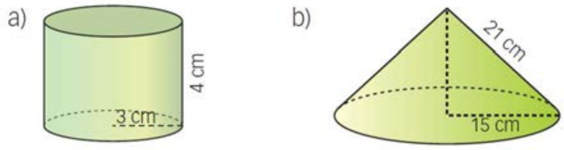
Teniendo en cuenta estos ejes de simetría, sus planos de simetría se trazan de modo análogo a los de un cubo, es decir, tendrá 9 planos de simetría.

**19. En un poliedro, ¿todos los planos de simetría del poliedro contienen a uno de sus ejes de simetría?**

El plano de simetría divide al poliedro en dos partes iguales. Es decir, si giramos el poliedro 180º con respecto al plano de simetría, obtenemos el mismo poliedro.

Por tanto, todos los planos de simetría contienen, al menos, a uno de sus ejes de simetría.

**20. Calcula el área de estas figuras.**




a) $A = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 131{,}95$ cm$^2$

b) $A = \pi \cdot 15\ (21 + 15) = 1\ 696{,}46$ cm$^2$

**21. Halla el área del cono obtenido al girar el triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 32 cm alrededor del cateto menor.**

Al girar este triángulo alrededor del cateto menor, obtenemos un cono cuyo radio de la base es 32 cm y altura 24 cm. La generatriz la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 24^2 + 32^2 = 1\ 600 \rightarrow g = 40$ cm

Ahora calculamos el área:

$A = \pi \cdot 32\ (40 + 32) = 7\ 238{,}23$ cm$^2$

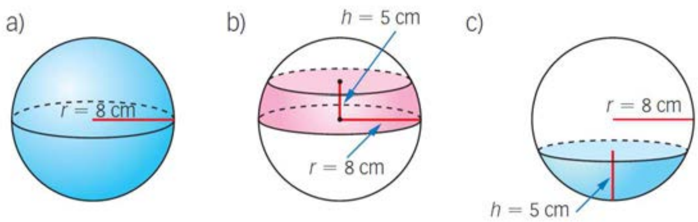
**22. Un cono tiene la misma base que un cilindro y su área es la mitad. ¿Cuál tendrá mayor altura?**

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r\ (h + r) = 2\ (\pi r\ (g + r)) = 2\ A_{\text{cono}} \rightarrow h = g$

La generatriz es la hipotenusa en un triángulo rectángulo que se forma con la altura del cono y el radio de la base, de modo que la generatriz es mayor que la altura del cono.

En este caso, tenemos que la altura del cilindro es igual a la generatriz del cono, que es mayor que la altura del cono, de modo que el cilindro tiene mayor altura.

**23. Calcula el área de estas superficies esféricas.**




a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25$ cm$^2$

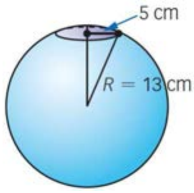
b) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251{,}33$ cm$^2$

c) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251{,}33$ cm$^2$

**24. Queremos recubrir una esfera de 12 cm de diámetro con una placa de metal. ¿Qué superficie de placa de metal necesitamos?**

$A = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39$ cm$^2$

**25.** **¿Cuál es el área del casquete esférico? ¿Qué pasa si la altura es igual al radio?**



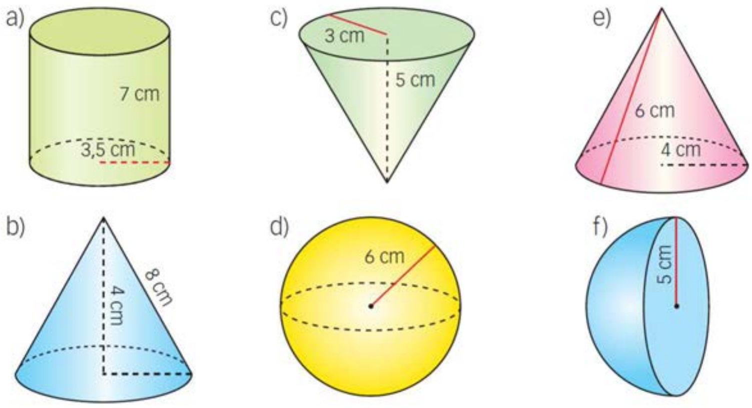

Calculamos la altura hasta el casquete usando el teorema de Pitágoras: $13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 12$ cm

La altura del casquete es $13 - 12 = 1$ cm.

$A = 2\pi \cdot 13 \cdot 1 = 81{,}68$ cm$^2$

Si la altura del casquete es igual al radio, tenemos una semiesfera.

**26.** **Calcula el área de estos cuerpos de revolución.**




a) $A = 2\pi \cdot 3{,}5\ (7 + 3{,}5) = 230{,}91$ cm$^2$

b) Calculamos el radio de la base usando el teorema de Pitágoras: $8^2 = 4^2 + r^2 \rightarrow r = 6{,}93$ cm

$A = \pi \cdot 6{,}93\ (8 + 6{,}93) = 325{,}04$ cm$^2$

c) Calculamos la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow g = 5{,}83$ cm

$A = \pi \cdot 3\ (5{,}83 + 3) = 83{,}22$ cm$^2$

d) $A = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39$ cm$^2$

e) $A = \pi \cdot 4\ (6 + 4) = 125{,}66$ cm$^2$

f) $A = (4\pi \cdot 5^2)/2 = 157{,}08$ cm$^2$

**27.** **Calcula el radio de un cilindro de altura 10 cm sabiendo que su área total es 747,7 cm².**

$A = 2\pi \cdot r\ (10 + r) = 747{,}7 \rightarrow r^2 + 10r = 119 \rightarrow r^2 + 10r - 119 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y descartamos la solución negativa. Por tanto, $r = 7$ cm.

**28.** **Determina la generatriz de un cono de 12 cm de altura y área de la base 19,63 cm².**

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $19{,}63 = \pi r^2 \rightarrow r = 2{,}50$ cm.

Para calcular la generatriz, usamos el teorema de Pitágoras: $g^2 = 12^2 + 2{,}5^2 \rightarrow g = 12{,}26$ cm.

**29.** **Averigua la altura de un cono sabiendo que el área de la base es 18,1 cm² y el área lateral es 45,24 cm².**

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $18{,}1 = \pi r^2 \rightarrow r = 2{,}40$ cm

Sabemos el área lateral y el radio, podemos calcular la generatriz: $45{,}24 = \pi \cdot 2{,}4 \cdot g \rightarrow g = 6$ cm

Con el radio y la generatriz, podemos calcular la altura usando el teorema de Pitágoras:
$6^2 = h^2 + 2{,}4^2 \rightarrow h = 5{,}5$ cm

**30.** **Considera un rectángulo de 4 cm de ancho y 12 cm de largo. Halla el área del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor de estos elementos.**

a) Su ancho

b) Su largo

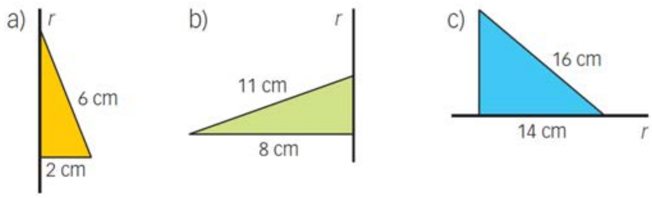
a) Si lo giramos alrededor de su ancho, tenemos un cilindro con una base de radio 12 cm y una altura 4 cm.

$A = 2\pi \cdot 12\ (4 + 12) = 1\ 206{,}37$ cm²

b) Si lo giramos alrededor de su largo, tenemos un cilindro con una base de radio 4 cm y una altura 12 cm.

$A = 2\pi \cdot 4\ (12 + 4) = 402{,}12$ cm²

**31.** **Halla el área de los conos que se obtienen al girar estos triángulos rectángulos alrededor de *r*:**




a) $A = \pi \cdot 2\ (6 + 2) = 50{,}27$ cm²

b) $A = \pi \cdot 8\ (11 + 8) = 477{,}52$ cm²

c) Tenemos que calcular el radio de la base, usamos el teorema de Pitágoras: $16^2 = 14^2 + r^2 \rightarrow r = 7{,}75$ cm.

$A = \pi \cdot 7{,}75\ (16 + 7{,}75) = 578{,}25$ cm²

**32.** **Halla el área de la esfera que se obtiene al hacer girar estos semicírculos.**

a) 16 cm de diámetro

b) $\sqrt{7}$ cm de radio

c) 5,09 cm² de área

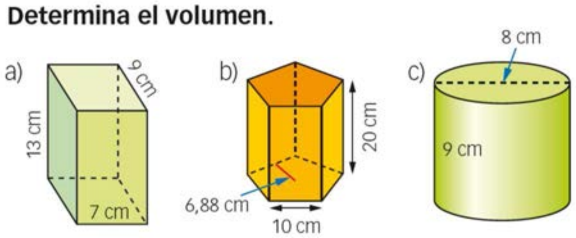
a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25$ cm²

b) $A = 4\pi \cdot (\sqrt{7})^2 = 87{,}96$ cm²

c) Primero calculamos el radio: $5{,}09 = \dfrac{\pi r^2}{2} \rightarrow \pi r^2 = 10{,}19 \rightarrow r = 1{,}8$ cm

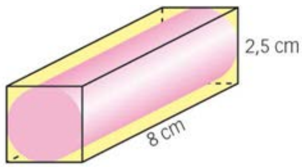
El área de la esfera es: $A = 4\pi \cdot 1{,}8^2 = 40{,}72$ cm²

**33.** **Determina el volumen.**




a) $V = 13 \cdot 7 \cdot 9 = 819$ cm³   b) $V = 5 \cdot \dfrac{10 \cdot 6{,}88}{2} \cdot 20 = 3\,440$ cm³   c) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 452{,}39$ cm³

**34.** **Halla el volumen del cilindro que está dentro del prisma.**




El lado del cuadrado del prisma es igual al diámetro del cilindro, y la altura del prisma es igual a la altura del cilindro:

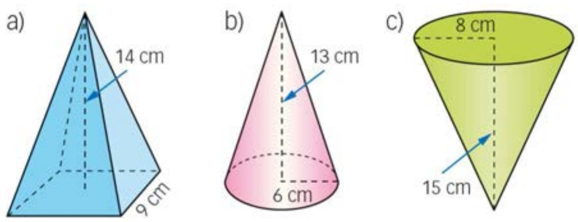
$V = \pi \cdot 1{,}25^2 \cdot 8 = 39{,}27$ cm³

**35.** **Tenemos dos cilindros, uno tiene la mitad de altura que el otro y el doble de radio. ¿Qué relación hay entre sus volúmenes?**

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h$   $V_2 = \pi \cdot (2r)^2 \cdot (h/2) = \pi\, 4r^2 \cdot h/2 = 2\pi \cdot r^2 \cdot h$

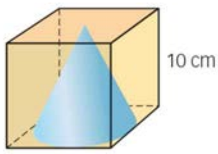
El cilindro cuya altura es la mitad y radio es el doble, tiene el doble de volumen que el inicial.

**36.** **Determina el volumen.**




a) $\dfrac{1}{3}\, 9^2 \cdot 14 = 378$ cm³   b) $\dfrac{1}{3}\, \pi \cdot 6^2 \cdot 13 = 490{,}09$ cm³   c) $\dfrac{1}{3}\, \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 1\,005{,}31$ cm³

**37.** **Halla el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura.**




Volumen del cubo: $10^3 = 1\,000$ cm³

Volumen del cono: $\dfrac{1}{3}\, \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261{,}80$ cm³

El volumen comprendido entre ambos es $1\,000 - 261{,}80 = 738{,}2$ cm³.

**38. Dado un cono de radio *r* y altura *h*, ¿cómo aumenta más su volumen: aumentando 1 cm el radio o al incrementar 1 cm la altura?**

Veamos qué ocurre al aumentar el radio:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (r+1)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi \cdot (2r+1) \cdot h \rightarrow \text{Aumenta en } \frac{1}{3}\pi \cdot (2r+1) \cdot h \text{ cm}^3.$$

Veamos qué ocurre al aumentar la altura:

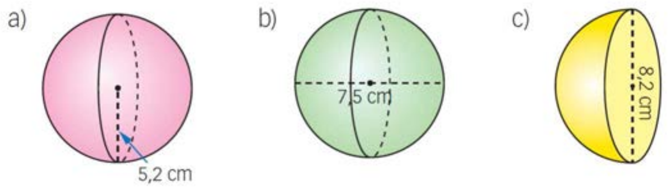
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (h+1) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \rightarrow \text{Aumenta en } \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \text{ cm}^3.$$

Igualando los dos resultados anteriores: $\frac{1}{3}\pi(2r+1)h = \frac{1}{3}\pi r^2 \rightarrow h = \frac{r^2}{2r+1}$

El volumen al aumentar en 1 cm el radio será menor si $h < \frac{r^2}{2r+1}$.

El volumen al aumentar en 1 cm el radio será mayor si $h > \frac{r^2}{2r+1}$.

**39. Halla el volumen de estas esferas.**




a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}2^3 = 588{,}98 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}75^3 = 220{,}89 \text{ cm}^3$

c) $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}1^3 = 144{,}35 \text{ cm}^3$

**40. Halla el radio de una esfera de 73,62 cm³ de volumen.**

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 73{,}62 \text{ cm}^3 \rightarrow r = 2{,}6 \text{ cm}$

**41. Si tenemos un cubo y una esfera y el área de cada uno de ellos es de 216 cm², averigua cuál de los dos (el cubo o la esfera) tiene mayor volumen.**

Veamos qué ocurre con el cubo:

Si el área del cubo es 216 cm², quiere decir que el área de cada cara es 216/6 = 36 cm², por lo que el lado mide 6 cm.

El volumen del cubo sería $6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

Veamos qué ocurre con la esfera:

Si el área de la esfera es $216 \text{ cm}^2 = 4\pi \cdot r^2 \rightarrow r = 4{,}15$ cm.

De modo que el volumen sería $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}15^3 = 299{,}39 \text{ cm}^3$.

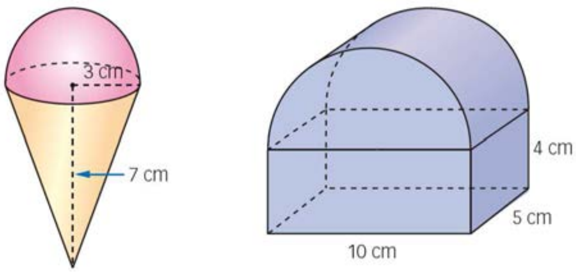
Por tanto, tiene mayor volumen la esfera.

**42.** **Calcula el volumen de un prisma pentagonal regular de 17 cm de altura, 9 cm de arista básica y 6,2 cm de apotema básica.**

El área de la base es $5 \cdot \dfrac{9 \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5$ cm$^2$.

De modo que el volumen del prisma es $V = 17 \cdot 139{,}5 = 2\,371{,}5$ cm$^3$.

**43.** **Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.**




En la primera figura sumamos el volumen del cono al volumen de la semiesfera:

$V = \dfrac{1}{3}\,(\pi \cdot 3^2 \cdot 7) + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\,\pi \cdot 3^3 = 122{,}53$ cm$^3$

El volumen de la segunda figura es la suma de un prisma de base rectangular más medio cilindro:

$V = 10 \cdot 5 \cdot 4 + \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 396{,}35$ cm$^3$

**44.** **Calcula el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 433,54 cm² de área lateral.**

Si el área lateral es 433,54 cm$^2$, quiere decir que $2\pi r \cdot h = 433{,}54$. Como la altura es 15 cm:

$r = 433{,}54 : (2\pi \cdot 15) = 4{,}60$ cm $\rightarrow V = \pi \cdot 4{,}6^2 \cdot 15 = 997{,}14$ cm$^3$

**45.** **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de altura 17 cm y arista básica de 10 cm.**

Como la base es un hexágono regular, podemos calcular su apotema con el teorema de Pitágoras, ya que el radio es igual al lado:

$10^2 = ap^2 + 5^2 \rightarrow ap = 8{,}66$ cm

$V = \dfrac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} \cdot 17 = 4416{,}6$ cm$^3$

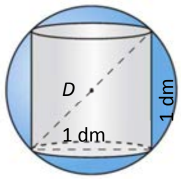
**46.** **Calcula el volumen de un cono de 37,7 cm de longitud de la circunferencia de la base y altura igual a dos tercios del radio de la base.**

Primero calculamos el radio de la base: $2\pi r = 37{,}7$ cm $\rightarrow r = 6$ cm.

La altura será $\dfrac{2}{3}$ de 6 cm, es decir, 4 cm.

$V = \dfrac{1}{3}\,(\pi \cdot 6^2 \cdot 4) = 150{,}80$ cm$^3$

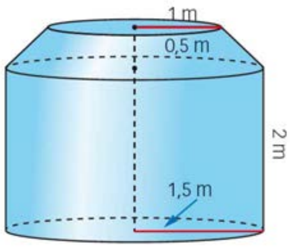
**47.** **Calcula el volumen de una esfera que circunscribe a un cilindro de 1 dm de altura y 1 dm de diámetro de la base.**



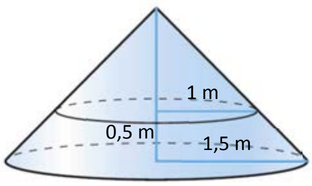

Calculamos el diámetro de la esfera usando el teorema de Pitágoras: $D^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow D = 1{,}41$ dm $\rightarrow R = 0{,}705$ dm

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}705^3 = 1{,}47\ \text{dm}^3$

**48.** **Calcula el coste de la arena que contiene este almacén si está completamente lleno y el metro cúbico de arena cuesta 18 €.**




$V_{\text{Figura}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Tronco de cono}}$ $\qquad V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 2 = 14{,}14\ \text{m}^3$




$H$ = altura del cono grande $\qquad h$ = altura del cono pequeño

Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{h+0{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1} \rightarrow h + 0{,}5 = 1{,}5h \rightarrow h = 1 \rightarrow H = 1{,}5$

$V_{\text{Tronco de cono}} = V_{\text{Cono grande}} - V_{\text{Cono pequeño}} = \frac{1{,}5^3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2{,}49\ \text{m}^3$

$V_{\text{Figura}} = 14{,}14 + 2{,}49 = 16{,}63\ \text{m}^3$

Así, el coste de la arena es $18 \cdot 16{,}63 = 299{,}34$ €.

**49.** **Encuentra en Internet la latitud y la longitud de estas ciudades.**

a) Johannesburgo
b) Tokio
c) Londres
d) Nueva York
e) Buenos Aires
f) Quito

a) 26° 8′ 42″ S, 28° 3′ 1″ E
b) 35° 41′ 2″ N, 139° 46′ 28″ E
c) 51° 30′ 26″ N, 0° 7′ 39″ O
d) 40° 40′ 12″ N, 73° 56′ 24″ O
e) 34° 35′ 59″ S, 58° 22′ 55″ O
f) 0° 13′ 7″ S, 78° 30′ 35″ O

**50.** **¿Qué longitud y latitud separan estos puntos situados sobre la esfera terrestre?**

**$A$(34° E, 25° N)  $B$(50° O, 46° S)  $C$(167° E, 72° S)**

Diferencia entre $A$ y $B$: longitud 84º y latitud 71º

Diferencia entre $A$ y $C$: longitud 133º y latitud 97º

Diferencia entre $B$ y $C$: longitud 217º y latitud 26º

**51.** **¿Qué diferencia horaria hay entre dos puntos si la diferencia entre sus longitudes es 90°?**

Cada franja horaria son 15º, es decir, si la diferencia de longitud es 90º se recorren 90 : 15 = 6 franjas horarias, de modo que la diferencia es de 6 horas.

**52.** **Calcula la diferencia horaria que corresponde a estas cantidades que indican la diferencia en grados entre las longitudes de dos puntos de la esfera terrestre.**

a) 5,8°  c) 38,52°  e) 123,2°

b) 12,4°  d) 55,752°  f) 164°

a) 5,8 : 15 = $0{,}38\widehat{6}$ h = 23 min 12 s

b) 12,4 : 15 = $0{,}82\widehat{6}$ h = 49 min 36 s

c) 38,52 : 15 = 2,568 h = 2 h 34 min 4,8 s

d) 55,752 : 15 = 3,7168 h = 3 h 43 min 0,48 s

e) 123,2 : 15 = $8{,}21\widehat{3}$ = 8 h 12 min 48 s

f) 164 : 15 = $10{,}9\widehat{3}$ = 10 h 56 min

**53.** **Las coordenadas de la ciudad $A$ son 40° E 30° N y las de la ciudad $B$, 60° O 25° S. ¿Cuál es la diferencia horaria entre estas dos ciudades?**

La diferencia de longitud entre las ciudades es de 100º, de modo que la diferencia horaria será:

100 : 15 = $6{,}\widehat{6}$ h → 6 h 40 min

**54.** **¿Qué diferencia horaria hay entre Tarragona, con coordenadas geográficas 1° 15′ E 41° 7′ N, y Cáceres, con coordenadas 6° 23′ O 39° 28′ N?**

La diferencia de longitud es 7º 38’ = $7{,}6\widehat{3}$ º, de modo que la diferencia horaria será:

$7{,}6\widehat{3}$ : 15 = $0{,}50\widehat{8}$ h = 30 min 32 s

**55.** **Sabiendo que Fornells (isla de Menorca) tiene una longitud de 4° 7′ E, ¿qué diferencia horaria tiene con Madrid, cuya longitud es 3° 41′ O?**

La diferencia de longitud es 7º 48’ = 7,8º, de modo que la diferencia horaria será: 7,8 : 15 = 0,52 h = 31 min 12 s

**56.** **Si la longitud de Madrid es de 3° 41′ O:**

a) ¿Qué diferencia horaria tiene con Tarragona?

b) ¿Y con Almería, cuya longitud es 2° 26′ O?

c) ¿Con qué ciudades no tiene Madrid diferencia horaria?

a) La longitud de Tarragona es 1º 15’ E, de modo que la diferencia de longitud con Madrid es 4º 56’ = $4,9\widehat{3}$ º.
Por lo tanto, la diferencia horaria será: $4,9\widehat{3} : 15 = 0,32\widehat{8}$ h = 19 min 44 s.

b) En este caso la diferencia de longitud es 1º 15’ = 1,25º, por lo tanto, la diferencia horaria será:
1,25 : 15 = $0,08\widehat{3}$ h = 5 min

c) Madrid no tiene diferencia horaria con ciudades que tengan su misma longitud, es decir, 3º 41’ O, tomando cualquier latitud en ese meridiano.

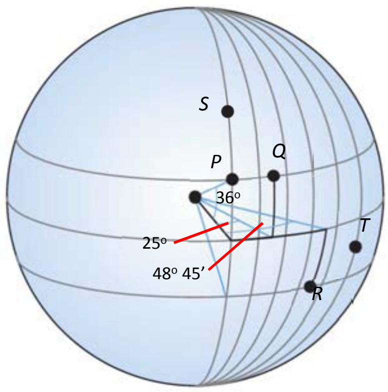
**57.** **Señala en un mapa un punto *P* de latitud 36° N.**

a) Halla un punto *Q* de igual latitud y una diferencia horaria de 1 hora y 40 minutos con respecto a *P*.

b) Marca sobre el mapa un punto *R* con la misma latitud pero sur y con una diferencia horaria de 3 horas y cuarto con respecto a *P*.

c) Determina un punto *S* con distinta latitud pero sin diferencia horaria con respecto a *P*.

d) Señala otro punto *T* con distinta latitud y con diferencia horaria de 5 horas con respecto a *P*.




a) Si la diferencia horaria es de 1 h 40 min = $1,\widehat{6}$ h, quiere decir que la diferencia de longitud es
$1,\widehat{6} \cdot 15 = 25º$

b) Si la diferencia horaria es de 3 h 15 min = 3,25 h, quiere decir que la diferencia de longitud es
3,25 · 15 = 48,75º = 48º 45’

c) Tiene que tener la misma longitud que *P.*

d) La latitud puede ser la que queramos, pero al tener una diferencia horaria de 5 horas, tendrá que tener una longitud que difiera de la de *P* en 5 · 15 = 75º.

## ACTIVIDADES FINALES

**58.** **Contesta a estas cuestiones.**

a) ¿Cuál es el número de aristas de un pentaedro que tiene 6 vértices?

b) ¿Cuál es el número de vértices de un pentaedro si tiene 8 aristas?

c) ¿Cuál es el número de aristas de un heptaedro que tiene 7 vértices?

d) ¿Cuál es el número de vértices de un heptaedro si tiene 15 aristas?

a) Un pentaedro tiene 5 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$5 + 6 = 2 + A \rightarrow A = 9$ aristas.

b) Un pentaedro tiene 5 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$5 + V = 2 + 8 \rightarrow V = 5$ vértices.

c) Un heptaedro tiene 7 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$7 + 7 = 2 + A \rightarrow A = 12$ aristas.

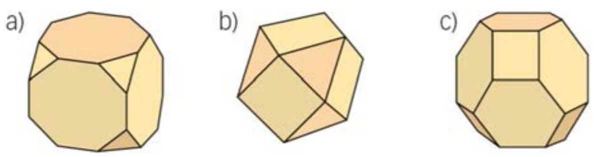
d) Un heptaedro tiene 7 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$7 + V = 2 + 15 \rightarrow V = 10$ vértices.

**59. Calcula el número que falta en cada caso.**

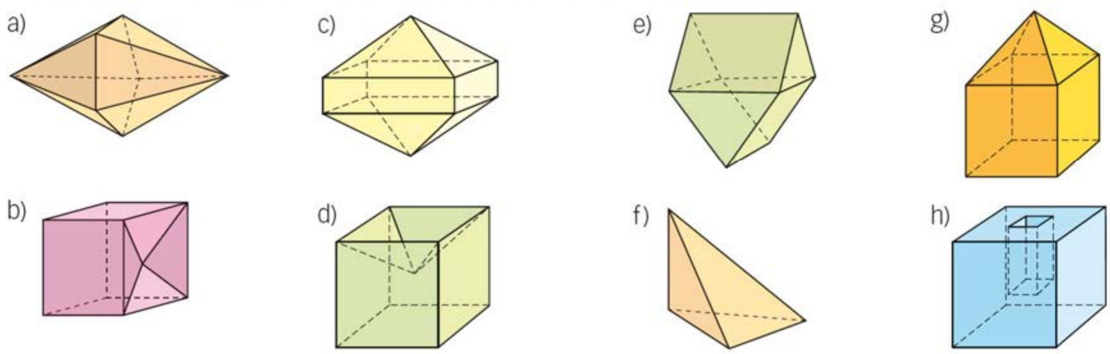
| Caras | Aristas | Vértices |
|---|---|---|
| 6 | **12** | 8 |
| 6 | **10** | 6 |
| 8 | **20** | 14 |
| **10** | 18 | 10 |

**60. Los siguientes poliedros, ¿son regulares? Razónalo.**




Ninguno de los tres es regular, pues en un poliedro regular las caras son polígonos regulares iguales, y en estos casos, aunque las caras regulares, en los tres hay polígonos regulares diferentes.

**61. Comprueba si estos poliedros cumplen la fórmula de Euler.**




La fórmula de Euler: n.º de caras + n.º de vértices = 2 + n.º de aristas

a) $10 + 7 = 2 + 15$. Se cumple.

b) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

c) $12 + 10 = 2 + 20$. Se cumple.

d) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

e) $8 + 8 = 2 + 14$. Se cumple.

f) $4 + 4 = 2 + 6$. Se cumple.

g) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

h) $11 + 16 \neq 2 + 24$. No se cumple.

**62. Di cuál es la base de estos prismas que tienen el número de elementos indicado.**

a) 9 caras
b) 18 aristas
c) 20 vértices
d) 10 vértices
e) 21 aristas
f) 18 caras

a) 9 caras → 2 de las caras son las bases, quedan 7 caras que son las laterales, es un prisma heptagonal.

b) 18 aristas → Hay tantas aristas en cada base como aristas laterales, 18 : 3 = 6, es un prisma hexagonal.

c) 20 vértices → Los vértices que hay en un prisma son los de sus bases, de modo que como hay dos bases, 20 : 2 = 10, es un prisma decagonal.

d) Es un prisma pentagonal.

e) Es un prisma heptagonal.

f) Es un prisma de base un polígono de 16 lados.

**63. ¿Qué polígono es la base de estas pirámides?**

a) 7 vértices
b) 20 aristas
c) 8 caras
d) 9 vértices
e) 18 aristas
f) 10 caras

a) La pirámide tiene tantos vértices como la base más uno:
7 − 1 = 6. Es una pirámide de base hexagonal.

b) La pirámide tiene tantas aristas básicas como laterales:
20 : 2 = 10. Es una pirámide de base un decágono.

c) La pirámide tiene tantas caras como vértices:
8 − 1 = 7. Es una pirámide de base heptagonal.

d) Es una pirámide de base un octógono.

e) Es una pirámide de base un eneágono.

f) Es una pirámide de base un eneágono.

**65. Halla la apotema de una pirámide regular de base cuadrada de altura 7 cm y arista básica 9 cm.**

La apotema de la pirámide forma un triángulo rectángulo con la altura y un segmento que va desde el centro de la base al lado. En este caso, al ser la base cuadrada es la mitad de su lado, es decir, 4,5 cm.

$ap^2 = 7^2 + 4{,}5^2 \rightarrow ap = 8{,}32$ cm

**66. Halla la altura de estas pirámides regulares.**

a) Pirámide hexagonal de apotema 10 cm y arista básica 10 cm.
b) Pirámide pentagonal de apotema 9 cm y apotema básica 4,13 cm.

a) Como la base es un hexágono, podemos calcular la apotema de la base, que nos hace falta para calcular la altura: $ap^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow ap = 8{,}66$ cm

Ahora calculamos la altura, que forma un triángulo rectángulo con la apotema de la pirámide y la de la base, de modo que usando el teorema de Pitágoras: $10^2 = h^2 + 8{,}66^2 \rightarrow h = 5$ cm.

b) La altura forma un triángulo rectángulo con las dos apotemas, usando el teorema de Pitágoras:

$9^2 = 4{,}13^2 + h^2 \rightarrow h = 8$ cm

**67.** **Calcula la diagonal de un ortoedro de dimensiones:**

a) $8 \times 5 \times 4$ cm b) $10 \times 7 \times 3$ cm

a) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 8^2 + 5^2 \to d = 9{,}43$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 9{,}43^2 + 4^2 \to D = 10{,}24$ cm

b) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 10^2 + 7^2 \to d = 12{,}21$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 12{,}21^2 + 3^2 \to D = 12{,}57$ cm

**68.** **La diagonal de un cubo mide $\sqrt{27}$ cm. Obtén la medida de la arista y de la diagonal de una de sus caras.**

$l$ = longitud de la arista

$d$ = longitud de la diagonal de una cara

$D$ = longitud de la diagonal del cubo

Por el teorema de Pitágoras, aplicado en una de las caras: $d^2 = l^2 + l^2 \to d^2 = 2l^2 \to d = l\sqrt{2}$

De nuevo, por el teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{27}\right)^2 = l^2 + \left(l\sqrt{2}\right)^2 \to 27 = 3l^2 \to l = 3$ cm

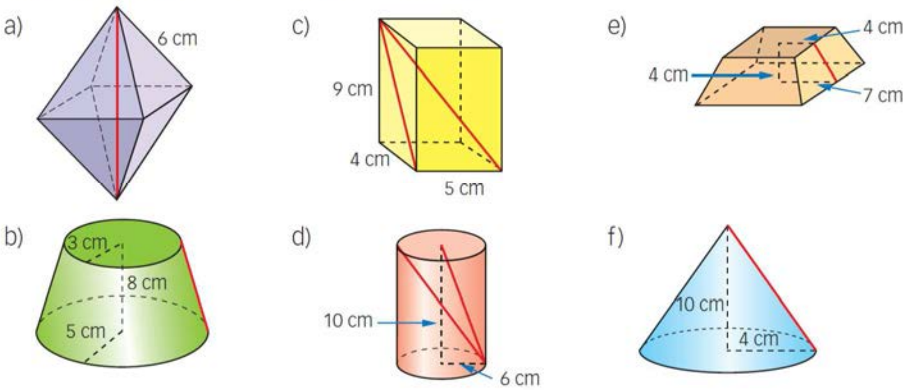
Por tanto, $d = l\sqrt{2} \xrightarrow{l=3} d = 3\sqrt{2}$ cm

**69.** **Halla la diagonal de un prisma cuadrangular regular de 9 cm de arista básica y 12 cm de altura.**

Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 9^2 + 9^2 \to d = 12{,}73$ cm.

La diagonal del prisma es: $D^2 = 12^2 + 12{,}73^2 \to D = 17{,}49$ cm.

**70.** **Halla la medida de los segmentos marcados.**




a) Los triángulos laterales son equiláteros, de modo que el lado del cuadrado medirá 6 cm.

Calculamos la diagonal del cuadrado: $d^2 = 6^2 + 6^2 \to d = 8{,}49$ cm. Su mitad es 4,245 cm.

La mitad de la altura del poliedro viene dada por $6^2 = h^2 + 4{,}245^2 \to h = 4{,}24$ cm.

Por tanto, la línea roja mide 8,48 cm.

b) La línea roja es la generatriz del tronco de cono. Si desde la circunferencia más pequeña trazamos una paralela a la altura se nos forman dos figuras, un rectángulo de base 3 cm y altura 8 cm, y un triángulo rectángulo de catetos 8 cm y 2 cm e hipotenusa la generatriz del tronco de cono.

$g^2 = 8^2 + 2^2 \to g = 8{,}25$ cm

c) Calculamos primero diagonal de la cara: $d^2 = 9^2 + 4^2 \rightarrow d = 9{,}85$ cm.

Calculamos ahora la diagonal de la base, pues nos hace falta para calcular la diagonal del ortoedro: $d'^2 = 5^2 + 4^2 \rightarrow d' = 6{,}40$ cm.

$D^2 = 6{,}4^2 + 9^2 \rightarrow D = 11{,}04$ cm

d) La línea roja que va al centro de la base mide: $d^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow d = 11{,}66$ cm

La línea roja que cruza el cilindro mide: $D^2 = 10^2 + 12^2 \rightarrow D = 15{,}62$ cm

e) $ap^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow ap = 5$ cm

f) $g^2 = 10^2 + 4^2 \rightarrow g = 10{,}77$ cm

**71. Halla el área de estos poliedros regulares.**

a) Tetraedro de arista 12 cm

b) Octaedro de arista 10 cm

c) Icosaedro de arista 8 cm

d) Cubo de arista 7 cm

e) Dodecaedro de arista 6 cm y apotema de cada pentágono 4,13 cm

a) Es el área de 4 triángulos equiláteros de lado 12 cm.

Calculamos la altura de las caras: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10{,}39$ cm.

$$A = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 249{,}36 \text{ cm}^2$$

b) Es el área de 8 triángulos equiláteros de lado 10 cm.

Calculamos la altura de las caras: $10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 8{,}66$ cm.

$$A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$$

c) Es el área de 20 triángulos equiláteros de lado 8 cm.

Calculamos la altura de las caras: $8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 6{,}93$ cm.

$$A = 20 \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 554{,}4 \text{ cm}^2$$

d) Es el área de 6 cuadrados de lado 7 cm.

$A = 6 \cdot 7^2 = 294$ cm$^2$

e) El área de 12 pentágonos de lado 6 cm y apotema 4,13 cm.

$$A = 12 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 4{,}13}{2} = 743{,}4 \text{ cm}^2$$

**72. Halla el área total de un prisma triangular regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista básica.**

Calculamos la altura de los triángulos de las bases, y con ella, el área:

$$2^2 = h^2 + 1^2 \rightarrow h = 1{,}73 \text{ cm} \rightarrow A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} + (3 \cdot 2) \cdot 4 = 27{,}46 \text{ cm}^2$$

**73. Calcula el área total de un prisma recto cuya altura es de 12 cm y las bases son:**

a) Trapecios isósceles de bases 6 y 10 cm, y lado oblicuo 3 cm.

b) Trapecios rectángulos de base mayor 21,38 cm, altura 9 cm y diagonal menor 15 cm.

a) Calculamos la altura del trapecio:

$\frac{10-6}{2}=\frac{4}{2}=2 \qquad 3^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 2{,}24$ cm

$A = 2 \cdot \frac{(6+10)\cdot 2{,}24}{2} + (10 + 6 + 2 \cdot 3) \cdot 12 = 299{,}84 \text{ cm}^2$

b) Podemos calcular la base menor con la diagonal menor y la altura: $15^2 = 9^2 + b^2 \rightarrow b = 12$ cm

Ahora calculamos el lado oblicuo, que nos hace falta para saber el perímetro:
$l^2 = 9^2 + (21{,}38 - 12)^2 \rightarrow l = 13$ cm

$A = 2 \cdot \frac{(21{,}38+12)\cdot 9}{2} + (21{,}38 + 9 + 12 + 13) \cdot 12 = 964{,}98 \text{ cm}^2$

**74. Halla el área total de estos poliedros.**

a) Un ortoedro cuyas aristas miden 3, 4 y 5 cm.

b) Un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 5 cm de arista básica.

a) $A = 2 \cdot (3 \cdot 4) + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) \cdot 5 = 94 \text{ cm}^2$

b) Calculamos la apotema de la base: $5^2 = 2{,}5^2 + ap^2 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm.

$A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{5\cdot 4{,}33}{2} + (6 \cdot 5) \cdot 8 = 369{,}9 \text{ cm}^2$

**75. Calcula la arista de estos cuerpos.**

a) Un tetraedro de área total $16\sqrt{3}$ cm².

b) Un icosaedro cuyas caras miden $\sqrt{3}$ cm².

c) Un octaedro de área total $18\sqrt{3}$ cm².

a) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 16\sqrt{3} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4$ cm

Es un tetraedro con una arista de 4 cm.

b) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 20 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = \sqrt{3} \rightarrow 5l^2 = 1 \rightarrow l = 0{,}45$ cm

Es un icosaedro con una arista de 0,45 cm.

c) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 8 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 18\sqrt{3} \rightarrow 2l^2 = 18 \rightarrow l = 3$ cm

Es un octaedro con una arista de 3 cm.

**76.** **Calcula la medida de la arista de un cubo sabiendo que su área total es 486 cm².**

Es el área de 6 cuadrados de lado $l$, de modo que $6l^2 = 486 \rightarrow l = 9$ cm.

Es un cubo con una arista de 9 cm.

**77.** **Halla la arista de un tetraedro regular sabiendo que su área total es 80,09 cm².**

Es el área de 4 triángulos equiláteros. Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm.

$A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 80{,}09 \rightarrow l = 6{,}80$ cm $\rightarrow$ Es un tetraedro con una arista de 6,80 cm.

**78.** **Calcula el área total de estas pirámides regulares.**

| Base | Arista lateral | Apotema | Arista básica | Apotema básica |
|---|---|---|---|---|
| Pentágono | 17 cm | | 10 cm | 6,88 cm |
| Pentágono | | 23,32 cm | 18 cm | 12,39 cm |
| Hexágono | 4,24 cm | | 3 cm | |
| Hexágono | | 15 cm | 5 cm | |
| Triángulo | 6 cm | | 4 cm | |
| Triángulo | | 6,54 cm | 5 cm | |

- Calculamos la apotema de la pirámide teniendo en cuenta el triángulo rectángulo que forma con la arista lateral y la mitad de la arista básica: $17^2 = ap^2 + 5^2 \rightarrow ap^2 = 264 \rightarrow ap = 16{,}25$ cm.

  $A = 5 \cdot \frac{10 \cdot 6{,}88}{2} + \frac{50 \cdot 16{,}25}{2} = 578{,}25 \text{ cm}^2$

- $A = 5 \cdot \frac{18 \cdot 12{,}39}{2} + \frac{90 \cdot 23{,}32}{2} = 1\,606{,}95 \text{ cm}^2$

- Calculamos la apotema básica: $3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \rightarrow a = 2{,}60$ cm.

  Calculamos la apotema de la pirámide: $4{,}24^2 = ap^2 + 1{,}5^2 \rightarrow ap = 3{,}97$ cm.

  $A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{18 \cdot 3{,}97}{2} = 59{,}13 \text{ cm}^2$

- Calculamos la apotema básica: $5^2 = a^2 + 2{,}5^2 \rightarrow a = 4{,}33$ cm.

  $A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + \frac{30 \cdot 15}{2} = 289{,}95 \text{ cm}^2$

- Calculamos la altura del triángulo de la base: $4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 3{,}46$ cm.

  Calculamos la apotema: $6^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 5{,}66$ cm.

  $A = \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} + \frac{12 \cdot 5{,}66}{2} = 40{,}88 \text{ cm}^2$

- Calculamos la altura del triángulo de la base: $5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \rightarrow h = 4{,}33$ cm.

  $A = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + \frac{15 \cdot 6{,}54}{2} = 59{,}88 \text{ cm}^2$

**79.** **Si el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada es 80 cm², y el perímetro de la base es 32 cm, ¿cuál es la medida de la apotema de la pirámide?**

$A_{\text{Lateral}} = \dfrac{32a}{2} = 80 \rightarrow a = 5$ cm

**80.** **Halla el área total de los siguientes cilindros.**

a) Radio de la base: 8 cm; altura: 14 cm

b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: 37,7 cm; altura: 9 cm

c) Altura: 12 cm; área de una base: 78,54 cm²

a) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot (14 + 8) = 1\,105{,}84$ cm²

b) Si la longitud de la circunferencia es 37,7 cm, quiere decir que $2\pi r = 37{,}7 \rightarrow r = 6{,}00$ cm.

$A = 2\pi \cdot 6 \cdot (9 + 6) = 565{,}49$ cm²

c) Necesitamos saber el radio para poder calcular el área lateral, lo obtenemos con el área de la base:

$\pi r^2 = 78{,}54 \rightarrow r = 5{,}00$ cm $\qquad A = 2\pi \cdot 5 \cdot (12 + 5) = 534{,}07$ cm²

**81.** **Calcula el área total de los siguientes conos.**

a) Generatriz: 5 cm; radio de la base: 4 cm

b) Altura: 12 cm; radio de la base: 9 cm

c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm; generatriz: 10 cm

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (5 + 4) = 113{,}10$ cm

b) Calculamos la generatriz: $g^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow g = 15$ cm. $\qquad A = \pi \cdot 9 \cdot (15 + 9) = 678{,}58$ cm

c) Calculamos el radio: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7{,}00$ cm. $\qquad A = \pi \cdot 7 \cdot (10 + 7) = 373{,}85$ cm

**82.** **Considera un cilindro de altura 20 cm y radio de la base 4 cm. ¿Qué altura tendrá un cono en cada uno de estos supuestos?**

a) Cono con la misma base que el cilindro.

b) Cono con una base de 8 cm de radio.

c) Cono con una base de área doble que la base del cilindro.

Suponemos que el cilindro y el cono tienen áreas iguales:

Calculamos el área del cilindro: $A = 2\pi \cdot 4\,(20 + 4) = 603{,}18$ cm².

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (g + 4) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 44$ cm

La altura del cono será: $44^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 43{,}82$ cm.

b) $A = \pi \cdot 8 \cdot (g + 8) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 16$ cm

La altura del cono será: $16^2 = h^2 + 8^2 \rightarrow h = 15{,}49$ cm.

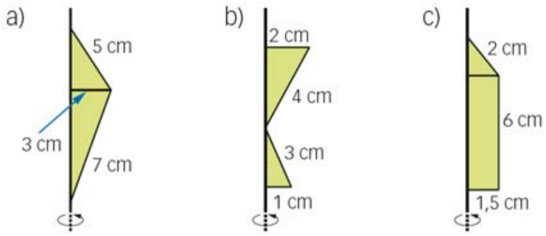
c) El área de la base del cilindro es $\pi \cdot 4^2 = 50{,}27$ cm². Así:

$A_{\text{Base cono}} = 100{,}54 \text{ cm}^2 \rightarrow \pi r^2 = 100{,}54 \rightarrow r = 5{,}66$ cm

$A = \pi \cdot 5{,}66 \cdot (g + 5{,}66) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 28{,}26$ cm

La altura del cono será: $28{,}26^2 = h^2 + 5{,}66^2 \rightarrow h = 27{,}69$ cm.

**83.** **Halla el área total de los cuerpos de revolución que se obtienen al girar las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica.**




a) Es la suma del área lateral de dos conos: $A = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 7 = 113{,}10\ \text{cm}^2$.

b) Es la suma del área total de dos conos: $A = \pi \cdot 2 \cdot (4 + 2) + \pi \cdot 1 \cdot (3 + 1) = 50{,}27\ \text{cm}^2$.

c) Es la suma del área lateral de un cono y el área lateral de un cilindro más el área de una de sus bases:
$A = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 6 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 73{,}04\ \text{cm}^2$

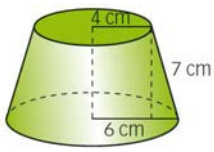
**84.** **Halla el área de estos cuerpos geométricos.**

a) Una esfera de 15 cm diámetro

b) Una esfera de 7,8 cm de radio

a) $A = 4\pi \cdot 7{,}5^2 = 706{,}86\ \text{cm}^2$ b) $A = 4\pi \cdot 7{,}8^2 = 764{,}54\ \text{cm}^2$

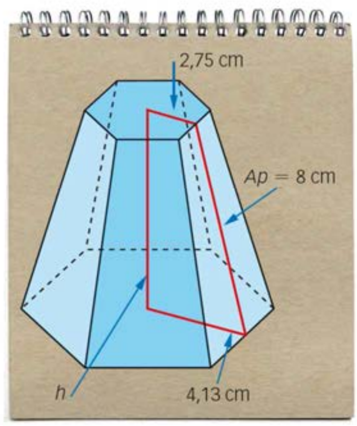
**86.** **Obtén la altura del tronco de cono que ves en la figura.**




Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz del tronco de cono:

$$7^2 = h^2 + (6 - 4)^2 \rightarrow h = 6{,}71\ \text{cm}$$

**87.** **Calcula la altura del tronco de pirámide hexagonal regular que dibuja María en su cuaderno.**




Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

$$8^2 = h^2 + (4{,}13 - 2{,}75)^2 \rightarrow h = 7{,}88\ \text{cm}$$

**88.** **Calcula la altura de un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 5 y 3 cm, y apotema del tronco 2,9 cm y de un tronco de cono de radios 5 y 3 cm y generatriz 2,9 cm.**

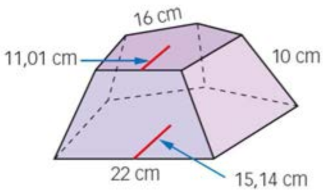
En el caso del tronco de pirámide, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

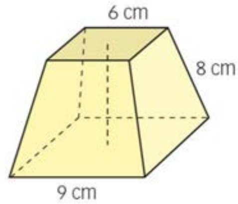
$$2{,}9^2 = h^2 + (2{,}5 - 1{,}5)^2 \rightarrow h = 2{,}72 \text{ cm}$$

En el caso del tronco de cono, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz:

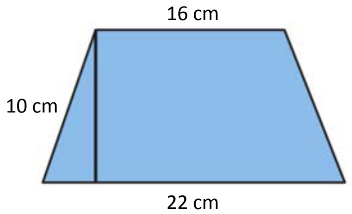
$$2{,}9^2 = h^2 + (5 - 3)^2 \rightarrow h = 2{,}1 \text{ cm}$$

**90.** **Calcula el área total de estas figuras.**




La primera figura es un tronco de pirámide pentagonal. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura. Para ello usamos el teorema de Pitágoras:




$$10^2 = h^2 + \left(\frac{22-16}{2}\right)^2 \rightarrow h = 9{,}54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Lateral}} = 5 \cdot \frac{(22+16)\cdot 9{,}54}{2} = 906{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base mayor}} = \frac{(22\cdot 5)\cdot 15{,}14}{2} = 832{,}7 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{Base menor}} = \frac{(16\cdot 5)\cdot 11{,}01}{2} = 440{,}4 \text{ cm}^2$$

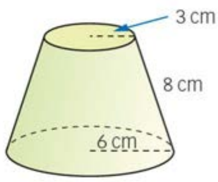
$A_{\text{Total}} = 906{,}3 + 832{,}7 + 440{,}4 = 2\,179{,}4 \text{ cm}^2$.

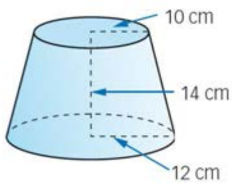
La segunda figura es un tronco de pirámide cuadrangular. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura.
Para ello usamos el teorema de Pitágoras:

$$8^2 = h^2 + \left(\frac{9-6}{2}\right)^2 \rightarrow h = 7{,}86 \text{ cm} \qquad A_{\text{Lateral}} = 4 \cdot \frac{(9+6)\cdot 7{,}86}{2} = 235{,}8 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{Base mayor}} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{Base menor}} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{Total}} = 235{,}8 + 81 + 36 = 352{,}8 \text{ cm}^2$.

**91.** **Calcula el área total de estas figuras.**



El área lateral de un tronco de cono viene dada por $A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$

Para el primer tronco de cono:

$$A_T = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 8 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 367{,}57 \text{ cm}^2$$

Para el segundo tronco de cono:

Tenemos que calcular la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 14^2 + (12 - 10)^2 \rightarrow g = 14{,}14$ cm

$$A_T = \pi \cdot (12 + 10) \cdot 14{,}14 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 10^2 = 1\,743{,}84 \text{ cm}^2$$

**92. Sabiendo que el círculo máximo de una esfera tiene un área de 201,06 cm², calcula.**

a) Su radio.

b) Su área total.

c) El área de un huso esférico de 40°.

d) El área de un casquete esférico de 3 cm de altura.

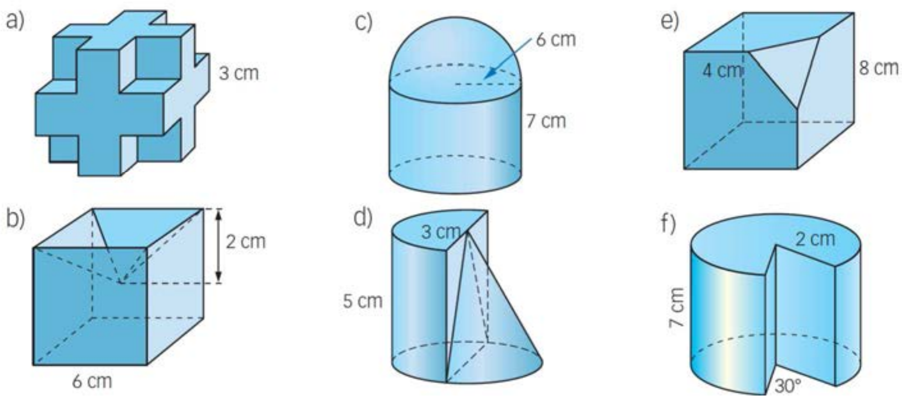
a) $\pi r^2 = 201{,}06 \rightarrow r = 8$ cm

b) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 8^2 \cdot 40}{360} = 89{,}36 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{casquete}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 150{,}80 \text{ cm}^2$

**93. Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.**




a) El área de la figura es equivalente a la de un cubo de lado 9 cm. Así:

$A = 9^2 \cdot 6 = 486 \text{ cm}^2$.

b) Tenemos el área de 5 cuadrados de lado 6 más 4 triángulos de base 6 y de los que necesitamos calcular la altura (que sería la apotema de la pirámide invertida que se mete en el cubo).

Para calcular la altura de los triángulos usamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow h = 3{,}60$ cm.

De modo que el área total es $A = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot \dfrac{6 \cdot 3{,}6}{2} = 223{,}2 \text{ cm}^2$.

c) Es el área de un cilindro de altura 7 cm y radio 6 cm con solo una base, más el área de una semiesfera de radio 6 cm.

$A = 2\pi \cdot 6 \cdot 7 + \pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6^2 = 603{,}19 \text{ cm}^2$

d) Es el área de medio cilindro de altura 5 cm y radio 1,5 cm, más el área de medio cono de altura 5 cm y radio 1,5 cm más el área de dos triángulos rectángulos de base 1,5 cm y altura 5 cm.

Calculamos primero la generatriz del cono para poder calcular su área: $g^2 = 5^2 + 1{,}5^2 \rightarrow g = 5{,}22$ cm.

$A = \pi \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}5 + 5) + \dfrac{1}{2}\, \pi \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}5 + 5{,}22) + 2 \cdot \dfrac{1{,}5 \cdot 5}{2} = 30{,}63 + 15{,}83 + 7{,}5 = 53{,}96 \text{ cm}^2$

e) Es el área de 6 cuadrados de lado 8 cm, en 3 de esos cuadrados restamos el área de un triángulo rectángulo de base 4 cm y altura 4 cm y añadimos al área total de la figura el área de un triángulo equilátero.

Calculamos primero el lado y la altura del triángulo equilátero:

$l^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow l = 5{,}66$ cm $\qquad 5{,}66^2 = h^2 + \left(\frac{5{,}66}{2}\right)^2 \rightarrow h = 4{,}90$ cm

$$A = 6 \cdot 8^2 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{5{,}66 \cdot 4{,}90}{2} = 384 - 24 + 13{,}87 = 373{,}87 \text{ cm}^2$$

f) Es el área de dos sectores circulares de radio 2 cm y ángulo 330º, más el área de dos rectángulos de base 2 cm y altura 7 cm más el área de un rectángulo de altura 7 cm y cuya base es un arco de radio 2 cm y ángulo 330º.

$$A = 2\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{330}{360} + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{330}{360} \cdot 7 = 23{,}04 + 28 + 80{,}63 = 131{,}67 \text{ cm}^2$$

**94. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 7 cm de altura y 3 cm de arista básica.**

Calculamos la altura del triángulo de la base usando el teorema de Pitágoras: $3^2 = h^2 + 1{,}5^2 \rightarrow h = 2{,}60$ cm

$$V = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 7 = 27{,}3 \text{ cm}^3$$

**95. Halla el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 4, 6 y 12 cm.**

$V = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^3$

**96. Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 4 cm de arista básica.**

Calculamos la apotema de la base: $4^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 3{,}46$ cm.

$$V = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} \cdot 8 = 332{,}16 \text{ cm}^3$$

**97. Calcula el volumen de estas pirámides regulares de base triangular:**

a) Arista lateral: 8 cm; arista básica: 7 cm.

b) Apotema de la pirámide: 6,54 cm; arista básica: 5 cm.

a) Calculamos la altura de la base: $7^2 = h^2 + 3{,}5^2 \rightarrow h = 6{,}06$ cm.

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 6{,}06 = 2{,}02$ cm

Calculamos la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 3{,}5^2 \rightarrow ap = 7{,}19$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $7{,}19^2 = 2{,}02^2 + H^2 \rightarrow H = 6{,}9$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} \cdot 6{,}9 = 48{,}78 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos la altura de la base: $5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \rightarrow h = 4{,}33$ cm.

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 4{,}33 = 1{,}44$ cm

Calculamos la altura de la pirámide: $6{,}54^2 = 1{,}44^2 + H^2 \rightarrow H = 6{,}38$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} \cdot 6{,}38 = 23{,}02 \text{ cm}^3$$

**98.** **Un tetraedro regular es una pirámide de base triangular donde todas sus caras son iguales. Calcula el volumen de esta pirámide si su superficie total es de 40 m².**

Esto quiere decir que el área de cada cara es de 10 m².

Calculamos la altura de cada cara en función del lado, que coincide con la apotema de la pirámide:

$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l.$

Como el área es 10 m², tenemos que $10 = \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} \rightarrow l = 4{,}81$ m, $h = 4{,}17$ m

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 4{,}17 = 1{,}39$ cm

La altura de la pirámide viene dada por $4{,}17^2 = H^2 + 1{,}39^2 \rightarrow H = 3{,}93$ m.

$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3{,}93 = 13{,}1 \text{ m}^3$

**99.** **Obtén el volumen de estas pirámides hexagonales regulares.**

a) Apotema: 8 cm; arista básica: 5 cm.

b) Arista lateral: 6 cm; arista básica: 3 cm.

a) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = ap^2 + 2{,}5^2 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm

$8^2 = h^2 + 4{,}33^2 \rightarrow h = 6{,}73$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 5) \cdot 4{,}33}{2} \cdot 6{,}73 = 145{,}70 \text{ cm}^3$

b) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$3^2 = ap^2 + 1{,}5^2 \rightarrow ap = 2{,}60$ cm

$6^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 5{,}20$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 3) \cdot 2{,}60}{2} \cdot 5{,}20 = 40{,}56 \text{ cm}^3$

**100.** **Halla el volumen de los siguientes cilindros.**

a) Radio de la base: 4 cm; altura: 10 cm.

b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: 37,7 cm; altura: 12 cm.

a) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 502{,}65 \text{ cm}^3$

b) Calculamos el radio de la circunferencia: $2\pi r = 37{,}7 \rightarrow r = 6{,}00$ cm.

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$

**101.** **Halla el volumen de los siguientes conos.**

a) Generatriz: 8 cm; radio de la base: 5 cm.

b) Altura: 18 cm; radio de la base: 8 cm.

c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm; generatriz: 11 cm.

a) Calculamos la altura del cono: $8^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 6{,}24$ cm.

$V = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}36\ \text{cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 8^2 \cdot 18 = 1\,206{,}37\ \text{cm}^3$

c) Calculamos el radio de la circunferencia: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7{,}00$ cm.

Calculamos la altura: $11^2 = h^2 + 7^2 \rightarrow h = 8{,}49$ cm.

$V = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 7^2 \cdot 8{,}49 = 435{,}64\ \text{cm}^3$

**102. Halla el volumen de un cubo sabiendo que:**

a) La diagonal de una de sus caras mide 9,9 cm.

b) La diagonal del cubo mide 8,66 cm.

a) Calculamos el lado: $9{,}9^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = 7{,}00$ cm. $\rightarrow V = 7^3 = 343\ \text{cm}^3$

b) La diagonal del cubo viene dada por $D^2 = d^2 + l^2$. Y podemos expresar $d$ en función de $l$ como $d = \sqrt{2}\ l$, de modo que $D^2 = 2l^2 + l^2$. Así $8{,}66^2 = 3l^2 \rightarrow l = 5{,}00$ cm $\rightarrow V = 5^3 = 125\ \text{cm}^3$

**103. Halla el volumen de un tetraedro que tiene la característica indicada.**

a) Su arista es 8 cm.

b) La apotema es 8 cm.

a) Calculamos la altura de la base, que es igual a la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 4^2 \rightarrow ap = 6{,}93$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $6{,}93^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 \rightarrow h = 6{,}53$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6{,}53 = 60{,}34\ \text{cm}^3$

b) Calculamos su arista: $a^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow a = 9{,}24$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $8^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 8\right)^2 \rightarrow h = 7{,}54$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9{,}24 \cdot 8}{2} \cdot 7{,}54 = 92{,}89\ \text{cm}^3$

**104. Calcula el volumen de las siguientes esferas.**

a) Esfera de radio 6 cm.

b) Esfera de diámetro 20 cm.

c) Esfera cuyo círculo máximo contiene un área de 78,54 cm².

a) $V = \frac{4}{3}\ \pi \cdot 6^3 = 904{,}78\ \text{cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3}\ \pi \cdot 10^3 = 4\,188{,}79\ \text{cm}^3$

c) $78{,}54 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = 5{,}00$ cm. $\rightarrow V = \frac{4}{3}\ \pi \cdot 5^3 = 523{,}60\ \text{cm}^3$

**105. El área de una esfera es 452,39 cm². Halla el volumen de estos cuerpos y responde cuál es el mayor de ellos.**

a) El cilindro en el que estaría contenida ajustándose completamente a él.

b) El cubo que la circunscribe.

a) La altura del cilindro se correspondería con el diámetro de la esfera y el radio de la base con el radio de la esfera.

Calculamos el radio de la esfera, ya que conocemos su área:
$452{,}39 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 6$ cm $\rightarrow d = 12$ cm

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$$

b) El cubo tiene un lado igual al diámetro de la esfera, de modo que el volumen del cubo es:

$$V = 12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$$

**106. Sabiendo que un cubo y una esfera tienen igual área, 96 cm², ¿cuál de los dos tiene mayor volumen?**

Veamos cuál es el radio de la esfera: $96 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 2{,}76$ cm.

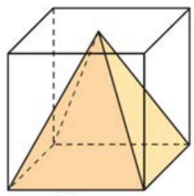
Por lo tanto, el volumen de la esfera será: $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}76^3 = 88{,}07$ cm³.

Veamos cuál es el lado del cubo: $96 = 6 \cdot l^2 \rightarrow l = 4$ cm.

Por lo tanto, el volumen del cubo será: $V_{\text{Cubo}} = 4^3 = 64$ cm³.

Es mayor el volumen de la esfera.

**107. En el interior de un cubo de 12 cm de arista construimos una pirámide cuya base es una cara del cubo y el vértice es el centro de la cara opuesta. Calcula el área y el volumen de esta pirámide.**




La altura de la pirámide es igual al lado del cubo. El área de la base es el área de un cuadrado de 12 cm de lado, de modo que el volumen es:

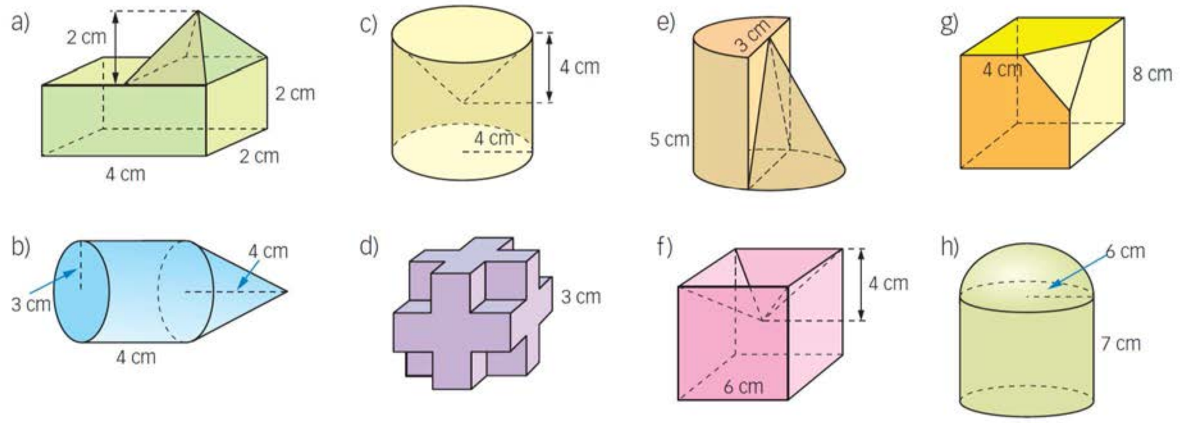
$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576$ cm³

Para calcular el área necesitamos saber la apotema de la pirámide, que calculamos usando el teorema de Pitágoras:

$ap^2 = 12^2 + 6^2 \rightarrow ap = 13{,}42$ cm.

$A = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 13{,}42}{2} = 466{,}08$ cm²

**108.** **Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**




a) Es el volumen de un ortoedro de aristas 4 cm, 2 cm y 2 cm, más una pirámide de base cuadrada de lado 2 cm y altura 2 cm.

$$V = 4 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = 18{,}67 \text{ cm}^3$$

b) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm, más un cono de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 150{,}80 \text{ cm}^3$$

c) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 4 cm y altura 8 cm, menos un cono de radio de la base 4 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 335{,}10 \text{ cm}^3$$

d) Es el volumen de un cubo de arista 9 cm, menos el volumen de 8 cubos de arista 3 cm.

$$V = 9^3 - 8 \cdot 3^3 = 513 \text{ cm}^3$$

e) Es el volumen de medio cilindro de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm, más el volumen de medio cono de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm.

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 23{,}56 \text{ cm}^3$$

f) Es el volumen de un cubo de arista 6 cm, menos el de una pirámide de base un cuadrado de lado 6 cm y altura 4 cm.

$$V = 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 168 \text{ cm}^3$$

g) Es el volumen de un cubo de arista 8 cm, menos el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero.

Calculamos primero el lado y la altura del triángulo equilátero:

$$l^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow l = 5{,}66 \text{ cm} \qquad 5{,}66^2 = h^2 + \left(\frac{5{,}66}{2}\right)^2 \rightarrow h = 4{,}9 \text{ cm}$$

Calculamos la altura de la pirámide: $4^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 4{,}9\right)^2 \rightarrow H = 2{,}3$ cm

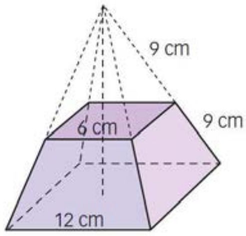
$$V = 8^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5{,}66 \cdot 4{,}9}{2} \cdot 2{,}3 = 501{,}37 \text{ cm}^3$$

h) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 6 cm y altura 7 cm, más el de una semiesfera de radio 6 cm.

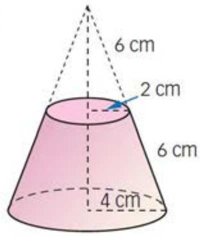
$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 1\,244{,}07 \text{ cm}^3$$

**109. Calcula el volumen de estas figuras.**

a)




b)




a) Es el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 12 cm y altura $H$, menos el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 6 cm y altura $h$.

Calculamos la apotema de la pirámide mayor: $18^2 = ap^2 + 6^2 \rightarrow ap = 16{,}97$ cm.

Calculamos la apotema de la pirámide menor: $9^2 = ap'^2 + 3^2 \rightarrow ap' = 8{,}48$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide mayor: $16{,}97^2 = H^2 + 6^2 \rightarrow H = 15{,}87$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide menor: $8{,}48^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 7{,}93$ cm.

$$V = 12^2 \cdot 15{,}87 - 6^2 \cdot 7{,}93 = 1\,999{,}8 \text{ cm}^3$$

b) Es el volumen de un cono de radio de la base 4 cm y altura $H$, menos el volumen de un cono de radio de la base 2 cm y altura $h$.

Calculamos la altura del cono mayor: $12^2 = H^2 + 4^2 \rightarrow H = 11{,}31$ cm.

Calculamos la altura del cono menor: $6^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 5{,}66$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 11{,}31 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5{,}66 = 165{,}79 \text{ cm}^3$$

**110. Las coordenadas terrestres, longitud y latitud, se expresan en grados.**

a) ¿Cuáles son los límites de estos valores?

b) ¿Dónde está situado el origen?

a) La longitud varía entre 0º y 180º y la latitud entre 0º y 90º.

b) Para la longitud en el meridiano de Greenwich y para la latitud en el ecuador.

**111. Observa un mapa y calcula los valores máximo y mínimo de la longitud y la latitud de tu provincia y tu Comunidad Autónoma.**

Respuesta abierta.

**112. El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros. Calcula el área de su superficie y el volumen de la Tierra.**

Considerando la Tierra como una esfera:

$A = 4\pi \cdot 6\,371^2 = 510\,064\,471{,}91 \text{ km}^2$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,371^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$.

**113. Responde razonadamente.**

a) ¿Cuánto mide aproximadamente un meridiano?

b) ¿Cuántos grados abarca cada huso horario?

c) ¿Cuál es el área de un huso horario?

d) ¿Hay un meridiano que pasa por cada punto de la Tierra?

a) $2\pi \cdot 6\,371 = 40\,030{,}17$ km

b) $360^{\circ} : 24 = 15^{\circ}$

c) $A = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 6\,371^2 \cdot 15}{360} = 2{,}13 \cdot 10^7$ km²

d) Sí, el que indica su longitud.

**114. Si Moscú está a 37° 36′ E, ¿qué diferencia horaria tiene con Venecia, que está a 12° 20′ E?**

La longitud de Moscú es 37º 36’ = 37,6º E, y la de Venecia 12º 20’ = 12,33º E, la diferencia de longitud entre las ciudades es 37,6º − 12,33 º = 25,27º.

De modo que la diferencia horaria es 25,27 : 15 = 1,68 = 1 h 41 min 4,8 s.

**115. Halla la diferencia horaria que hay entre Madrid y Nueva York sabiendo que las coordenadas de ambas ciudades son:**

**Madrid: 40° 18′ N, 3° 43′ O**
**Nueva York: 40° 45′ N, 74°O**

Vemos cuál es la diferencia entre sus longitudes: 74º − 3º 43’ = 74 º − 3,72 º = 70,28 º

De modo que la diferencia horaria es 70,28 : 15 = 4,69 h = 4 h 41 min 24 s.

**116. La longitud de Viena es de 16° 20′ E.**

a) Cuando en Viena son las 3 de la tarde, ¿qué hora es en una ciudad 40° al oeste?

b) ¿Y en una ciudad 70° al este?

c) ¿Qué longitud tiene una ciudad en la que amanece 3 horas después que en Viena?

d) ¿Y si amanece 3 horas antes?

a) La diferencia de longitud con una ciudad 40º al oeste es de 56º 20’ = 56,33º, de modo que la diferencia horaria es 56,33 : 15 = 3,76 h = 3 h 45 min 36 s.

Como nos desplazamos al oeste, restamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán las 15 − 3 h 45 min 36 s = 11 h 14 min 24 s, es decir, aproximadamente las 11 y cuarto de la mañana.

b) La diferencia de longitud con una ciudad 70º al este es de 53,67º, de modo que la diferencia horaria es 53,67 : 15 = 3,58 h = 3 h 34 min 48 s.

Como nos desplazamos al este, aumentamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán aproximadamente las 6 y media de la tarde.

c) Si amanece tres horas después, quiere decir que está al oeste de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es 3 · 15 = 45º al oeste de Viena.

Como Viena está al este, si $x$ es la longitud de la ciudad: $x$ + 16º 20’ = 45º → $x$ = 28º 40’ O.

d) Si amanece tres horas antes, quiere decir que está al este de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es 3 · 15 = 45º al este de Viena.

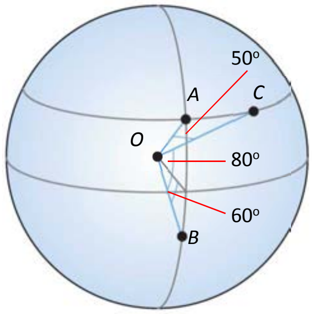
Como Viena está al este, si $x$ es la longitud de la ciudad: $x$ − 16º 20’ = 45º → $x$ = 61º 20’ E.

**117.** **Considera tres ciudades, *A*, *B* y *C*: *A* y *B* se encuentran en el mismo meridiano pero distintos hemisferios y sus latitudes se diferencian en 80°; *C* se encuentra en el hemisferio norte en el mismo paralelo que *A* y distanciada de esta 50°. Dibuja una esfera y sitúa estas tres ciudades sabiendo que la latitud de *B* es 60° S.**

a) ¿Puedes deducir las coordenadas de las tres ciudades?

b) Encuentra las posibles coordenadas de *A*, *B* y *C* sabiendo que *C* está en un meridiano que se distancia 65° del meridiano cero.

c) ¿Qué falta para determinar definitivamente las coordenadas de esas ciudades?




a) Como las latitudes de *A* y *B* difieren en 80ºy están situadas en hemisferios diferentes, entonces la latitud de *A* es 20º N. Al estar *C* en el mismo paralelo que *A*, la latitud de *C* es 20º N.

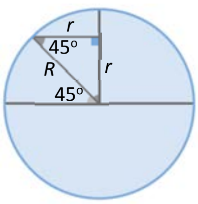
No podemos calcular las longitudes porque no tenemos datos suficientes.

b) Si *C* dista 65º del meridiano cero, su longitud puede ser 65º E o 65º O. Sabemos que *A* dista 50º de *C*, de modo que su longitud (y por tanto también la de *B* ya que están en el mismo meridiano) puede ser alguna de las siguientes:

115º E  15º E  115º O  15º O

c) Es necesario conocer si *C* está el este o al oeste del meridiano cero y si *A* está al este o al oeste de *C*.

**118.** **¿Cuál es la longitud del paralelo situado a 45° N de latitud? ¿Y el situado a 45° S?**




$R = 6\,371$ km es el radio de la Tierra.

El triángulo formado es un triángulo rectángulo isósceles, es decir, los catetos son iguales. Llamando *r* al radio del paralelo:

$$R^2 = r^2 + r^2 \rightarrow R^2 = 2r^2 \rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}R \xrightarrow{R=6371} r = 4\,504{,}98 \text{ km}$$

Los paralelos situados a 45º N y 45º S son simétricos con respecto al ecuador y tienen la misma longitud:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot 4\,504{,}98 = 28\,305{,}61 \text{ km}$$

**119.** **En cierta fábrica de conservas alimenticias utilizan latas con forma cilíndrica. Su proveedor le ofrece estas posibilidades, siendo 0,02 €/cm² el precio del material con que se elaboran las latas.**

| Tipo de lata | Radio de la base | Altura |
|---|---|---|
| *A* | 12 | 3 |
| *B* | 10 | 5 |
| *C* | 6 | 12 |

**¿Qué tipo de lata se debe emplear para envasar la máxima cantidad posible con el menor precio?**

$A_{\text{Lata } A} = 2\pi \cdot 12\ (12 + 3) = 1\,130{,}97\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 1\,130{,}97 \cdot 0{,}02 = 22{,}62$ €

$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,357{,}17\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 22{,}62 : 1\,357{,}17 = 0{,}016667$ €/$\text{cm}^3$

$A_{\text{Lata } B} = 2\pi \cdot 10\ (10 + 5) = 942{,}48\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 942{,}48 \cdot 0{,}02 = 18{,}85$ €

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1\,570{,}80\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 18{,}85 : 1\,570{,}80 = 0{,}01200$ €/$\text{cm}^3$

$A_{\text{Lata } C} = 2\pi \cdot 6\ (6 + 12) = 678{,}58\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 678{,}58 \cdot 0{,}02 = 13{,}57$ €

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357{,}17\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 13{,}57 : 1\,357{,}17 = 0{,}009999$ €/$\text{cm}^3$

Lo más rentable es hacer latas de tipo *C*.

**120. Averigua si los siguientes listones de madera caben en una caja de 40 cm de largo, 25 cm de ancho y 18 cm de alto.**

a) 46,5 cm b) 50,3 cm c) 50,6 cm d) 51 cm

**¿Cuáles se pueden apoyar en el fondo de la caja?**

La mayor longitud de la caja es su diagonal, de modo que cabrán todos los listones que midan menos. Calculamos la diagonal de la base para poder calcular la de la caja:

$d^2 = 40^2 + 25^2 \rightarrow d = 47{,}17$ cm

(En la base de la caja se puede poner el listón de 46,5 cm, de modo que ese cabe en la caja)

Calculamos ahora la diagonal de la caja:

$D^2 = 47{,}17^2 + 18^2 \rightarrow D = 50{,}49$ cm

De modo que cabe el listón de 50,3 cm, pero los de 50,6 cm y 51 cm no caben en la caja.

**121. La habitación de Ramón tiene forma de ortoedro de dimensiones 3,5 m de ancho, 4,2 m de largo y 2,5 m de altura. Decide pintar las paredes y el techo. Tiene una ventana cuadrada de 1,2 m de lado y la puerta mide 90 cm de ancho y 2,1 m de altura. Si con cada bote de pintura puede cubrir una superficie de 20 m², ¿cuántos botes necesitará?**

Calculamos el área de la habitación (excluyendo el suelo, es decir, una de las bases del ortoedro) y le restamos el área de la ventana y de la puerta.

$A_{\text{ortoedro}} = 3{,}5 \cdot 4{,}2 + (3{,}5 \cdot 2 + 4{,}2 \cdot 2) \cdot 2{,}5 = 53{,}2\ \text{m}^2$

$A_{\text{ventana}} = 1{,}2^2 = 1{,}44\ \text{m}^2$ $A_{\text{puerta}} = 0{,}9 \cdot 2{,}1 = 1{,}89\ \text{m}^2$

$A_{\text{pintar}} = 53{,}2 - 1{,}44 - 1{,}89 = 49{,}87\ \text{m}^2$

Necesitará 3 botes, porque con dos botes, cubriría 40 m² que no es suficiente. Con tres botes podría pintar 60 m², de modo que le sobrará pintura.

**122. Un arquitecto diseña dos torres: una cúbica de 6 m de arista con un tejado en forma piramidal y altura total 7,42 m, y otra cilíndrica de base 24,63 m² y altura 7 m con tejado cónico, siendo la generatriz del cono cuatro veces el radio de la base. Si el coste de cada metro cuadrado de fachada es 205,60 €, ¿qué torre saldrá más cara?**

Necesitamos en cada caso calcular el área lateral de las figuras.

En el caso de la pirámide, necesitamos saber la altura de cada uno de los lados, es decir, la apotema, que podemos calcularla ya que conocemos la altura total de la torre: $ap^2 = 1{,}42^2 + 3^2 \rightarrow ap = 3{,}32$ m

$A_{\text{Torre cúbica}} = 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 3{,}32}{2} = 183{,}84 \text{ m}^2$

Calculamos el radio del cilindro: $\pi r^2 = 24{,}63 \rightarrow r = 2{,}8$ m

La generatriz del cono será: $4 \cdot 2{,}8 = 11{,}2$ m

$A_{\text{Torre cilíndrica}} = 2\pi \cdot 2{,}8 \cdot 7 + \pi \cdot 2{,}8 \cdot 11{,}2 = 221{,}67 \text{ m}^2$

Saldrá más cara la torre de base cilíndrica, pues tiene más metros cuadrados de fachada.

**123. El rodillo de amasar de Laura tiene un radio de 1,8 cm y 24 cm de largo.**

a) ¿Qué área cubre en cada vuelta?

b) ¿Cuántas vueltas tiene que dar el rodillo para amasar una pieza circular de radio 9,5 cm?

c) ¿Cuántas vueltas ha dado Laura al rodillo si la superficie cubierta ha sido 5428,6 cm²?

a) El área que cubre en cada vuelta, es el área lateral del cilindro: $A = 2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 24 = 271{,}43 \text{ cm}^2$

b) El área de la pieza es $\pi \cdot 9{,}5^2 = 283{,}53 \text{ cm}^2$

$\frac{283{,}53}{271{,}43} = 1{,}04 \rightarrow$ Son necesarias 2 vueltas.

c) $\frac{5428{,}6}{271{,}43} = 20$ vueltas

**124. David quiere meter en el ascensor un tubo metálico de 2,88 m. Las medidas del ascensor son 1 × 1 × 2,5 m. ¿Podrá hacerlo?**

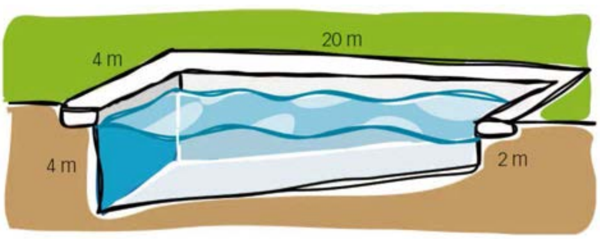
Calculamos la diagonal del ascensor.

La diagonal de la base del ascensor es $d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{2}$ m.

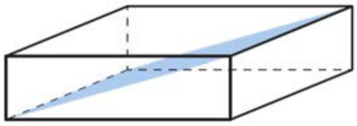
La diagonal del ascensor es $D^2 = (\sqrt{2})^2 + 2{,}5^2 \rightarrow D = 2{,}87$ m.

No podrá meter el tubo en el ascensor, porque la máxima longitud en este es de 2,87 m.

**125. Halla el volumen de esta piscina.**



Podemos dividir la piscina en dos partes: un ortoedro de lados 4 m, 20 m y 2 m y un prisma que es la mitad del ortoedro anterior, ya que se trata de un ortoedro partido por un plano de este modo:



Es decir, el volumen es $\frac{3}{2}$ del volumen de un ortoedro de dimensiones 4 × 20 × 2.

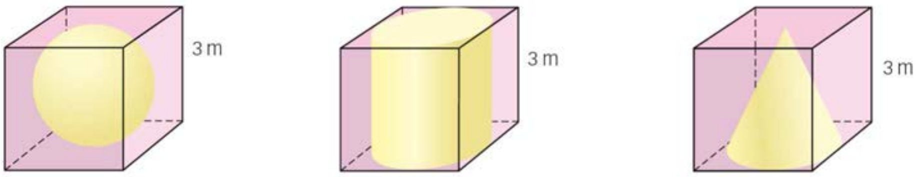
$V = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot 2 = 240\ m^3$

**126. En un depósito cúbico lleno de agua y de arista 3 m, introducimos los siguientes cuerpos.**

a) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de agua hay en el cubo después de introducir una esfera de radio 1,5 m?

b) ¿Qué porcentaje queda de la cantidad inicial de agua si introducimos un cilindro de diámetro y altura 3 m?

c) ¿Y cuál es el porcentaje si introducimos un cono de 3 m de diámetro e igual altura?




$V_{inicial} = 3^3 = 27\ m^3$

a) $V_{queda} = 3^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = 12{,}86\ m^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{12{,}86}{27} \cdot 100 = 47{,}63$ %.

b) $V_{queda} = 3^3 - \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 5{,}79\ m^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{5{,}79}{27} \cdot 100 = 21{,}44$ %.

c) $V_{queda} = 3^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 19{,}93\ m^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{19{,}93}{27} \cdot 100 = 73{,}81$ %.

## DEBES SABER HACER

**1. Calcula el número de caras de estos poliedros.**

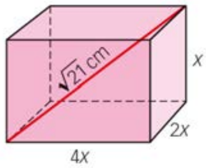
a) Tiene 16 vértices y 24 aristas.

b) Tiene 6 vértices y 12 aristas.

a) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $16 + C = 2 + 24 \rightarrow C = 10$ caras.

b) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $6 + C = 2 + 12 \rightarrow C = 8$ caras.

**2. El largo de un ortoedro es el doble que el ancho, y el ancho es el doble que la altura. Si su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm, halla el área total.**




La diagonal de la base es $d^2 = (4x)^2 + (2x)^2 \rightarrow d = x\sqrt{20}$ .

La diagonal del ortoedro es $D^2 = (\sqrt{21})^2 = x^2 + (x\sqrt{20})^2 \rightarrow 21 = 21x^2 \rightarrow x = 1$.

El área total es $2 \cdot (4 \cdot 2) + (4 \cdot 2 + 2 \cdot 2) \cdot 1 = 28$ cm$^2$.

**3. Halla el área total de un prisma hexagonal regular de 25 cm de altura y 12 cm de arista básica.**

Calculamos la apotema de la base (por ser un hexágono regular el radio de la base es igual al lado):

$12^2 = ap^2 + 6^2 \rightarrow ap = 10{,}39$ cm

$A = 2 \cdot \dfrac{(6 \cdot 12) \cdot 10{,}39}{2} + (6 \cdot 12) \cdot 25 = 2\,548{,}08$ cm$^2$.

**4. Calcula el área de una pirámide cuadrangular regular de arista básica 6 cm y apotema 8 cm.**

$A = 6^2 + 4 \cdot \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 132$ cm$^2$

**5. ¿Qué altura tiene un cilindro de área lateral 75,36 cm$^2$ y radio de la base 4 cm?**

El área lateral del cilindro viene dada por $2\pi r \cdot h = 75{,}36$ cm$^2$, como $r = 4$ cm, tenemos que $h = 3$ cm.

**6. Halla el área del cono que se obtiene al girar el triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 13 cm.**

Calculamos la generatriz del cono, que es la diagonal del triángulo: $g^2 = 13^2 + 6^2 \rightarrow g = 14{,}32$ cm.

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 13 cm:

$A = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 14{,}32) = 383{,}02$ cm$^2$

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 6 cm:

$A = \pi \cdot 13 \cdot (13 + 14{,}32) = 1\,115{,}77$ cm$^2$

**7. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que una de sus caras tiene un área de 70,56 cm$^2$.**

Calculamos la arista del cubo: $70{,}56 = l^2 \rightarrow l = 8{,}4$ cm.

$V = 8{,}4^3 = 592{,}704$ cm$^3$

**8. Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que la base tiene un perímetro de 42,73 cm y la altura es el doble del radio de la base.**

Calculamos el radio de la base: $42{,}73 = 2\pi r \rightarrow r = 6{,}8$ cm.

$h = 6{,}8 \cdot 2 = 13{,}6$ cm $\rightarrow V = \pi \cdot 6{,}8^2 \cdot 13{,}6 = 1\,975{,}63$ cm$^3$

**9. ¿Qué longitud y latitud separan los puntos *A*, *B* y *C*? ¿Cuál es la diferencia horaria entre ellos?**

***A* (14° E, 55° N) *B* (37° O, 46° S) *C* (118° E, 72° S)**

Diferencia de latitud entre *A* y *B*: 101º

Diferencia de latitud entre *A* y *C*: 127º

Diferencia de latitud entre *B* y *C*: 26º

Diferencia de longitud entre *A* y *B*: 51º

La diferencia horaria entre *A* y *B* es 51 : 15 = 3,4 h = 3 h 24 min

Diferencia de longitud entre *A* y *C*: 104º

La diferencia horaria entre *A* y *C* es 104 : 15 = 6,93 h = 6 h 55 min 48 s

Diferencia de longitud entre *B* y *C*: 155º

La diferencia horaria entre *B* y *C* es 155 : 15 = 10,33 h = 10 h 19 min 48 s

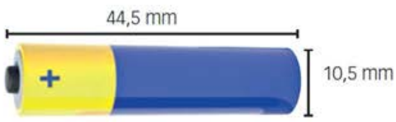
## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**127. La mayoría de los fotógrafos llevan en su bolsa pilas para que funcionen sus *flashes*, incluso pilas especiales para alguna de sus cámaras antiguas que no disponen de baterías recargables.**

**Uno de los problemas que tienen es que dada su forma cilíndrica no son fáciles de almacenar en bolsas. Con este fin han aparecido unos estuches en forma de pequeñas cajas de plástico donde poder llevarlas con comodidad.**

- **Una página web dedicada a la venta de material fotográfico anuncia este producto.**


**Estas son las dimensiones de una pila de tipo AAA. ¿Cuántos centímetros cúbicos quedan sin ocupar por las cuatro pilas en la caja que se publicita en el anuncio?**




La caja es un ortoedro, su volumen es $V_{\text{Caja}} = 62 \cdot 57 \cdot 18 = 63\,612$ mm$^3$.

El volumen de cada pila es $V_{\text{Pila}} = \pi \cdot 5{,}25^2 \cdot 44{,}5 = 3\,853{,}26$ mm$^3$.

El volumen de 4 pilas es: $3\,853{,}26 \cdot 4 = 15\,413{,}04$ mm$^3$.

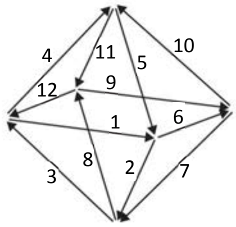
Espacio que sobra: $63\,612 - 15\,413{,}04 = 48\,198{,}96$ mm$^3 \approx 48{,}2$ cm$^3$

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**128. Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.**

**Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.**

Para que la hormiga pudiese recorrer el octaedro sin repetir arista, este se tendría que poder dibujar con un solo trazo y efectivamente se puede.



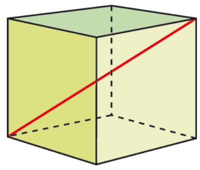

Sin embargo, en un cubo, esto no es posible.

**129. Considera $x$ la medida de la arista de un cubo. Demuestra que la diagonal del cubo se obtiene con la fórmula $d = \sqrt{3}x$.**

**Calcula con ella la diagonal de los siguientes cubos.**

a) Cubo de arista 6 cm

b) Cubo de arista 4,5 cm



Si el lado del cubo es $x$, tenemos que la diagonal de la base es: $d_{base}^2 = x^2 + x^2 \longrightarrow d_{base} = \sqrt{2}\,x$

Calculamos ahora la diagonal del cubo: $d^2 = (\sqrt{2}\,x)^2 + x^2 \longrightarrow d = \sqrt{3}\,x$

a) $d = \sqrt{3} \cdot 6 = 10{,}39$ cm

b) $d = \sqrt{3} \cdot 4{,}5 = 7{,}79$ cm

**130. Encuentra la expresión que da la altura de un tetraedro en función de su arista.**

Necesitamos primero calcular la apotema de la pirámide:

Si la arista mide $x$, entonces $x^2 = ap^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \longrightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$

Como es un triángulo equilátero, sabemos que la distancia de su centro al punto medio de uno de los lados es 1/3 de la altura. Así, calculamos la altura del tetraedro:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 \longrightarrow H = \frac{\sqrt{24}}{6}x = \frac{2\sqrt{6}}{6}x = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

**131. Halla las diagonales trazadas desde un vértice en un prisma hexagonal regular cuyas aristas básicas y aristas laterales miden 12 cm.**

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos radios del hexágono de la base: $d_1^2 = 12^2 + 24^2 \longrightarrow d_1 = 26{,}83$ cm

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos alturas de los triángulos en los que se divide la base. Calculamos la altura de los triángulos: $12^2 = h^2 + 6^2 \longrightarrow h = 10{,}39$ cm.

$d_2^2 = 12^2 + 20{,}78^2 \longrightarrow d_2 = 24$ cm

**132.** **Considera *x*, *y*, *z* las dimensiones de un ortoedro. Demuestra que su diagonal *d* se obtiene con la fórmula: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.**

$d_{Base}{}^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d^2{}_{Ortoedro} = d_{Base}{}^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

**133.** **En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema: «Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos».**

**¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?**

Sea $x$ uno de los lados de la hoja e $y$ el otro.

Si enrollamos el lado $x$, entonces $2\pi r = x \rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y = \frac{x^2y}{4\pi}$

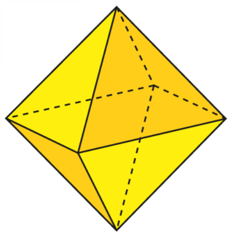
Si enrollamos el lado $y$, entonces $2\pi r = y \rightarrow r = \frac{y}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot x = \frac{y^2x}{4\pi}$

Los volúmenes no son iguales.

**134.** **En un libro de Matemáticas hemos encontrado el siguiente problema sobre volúmenes:**

**«Si el lado de un octaedro es *l*, su volumen es: $V = l^{23} \cdot 0{,}4714$».**

**Investiga cómo se obtiene esta fórmula.**



Calculamos la apotema de la pirámide: $l^2 = ap^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Calculamos ahora la altura de la pirámide: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = 0{,}2357l^3$ $\qquad$ $V_{Octaedro} = 2 \cdot V_{Pirámide} = 0{,}4714l^3$

**135.** **El radio de la base de un cilindro y de un cono mide 10 cm. Si la altura del cilindro es de 10 cm, averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:**

a) La misma área lateral. $\qquad$ b) La misma área total.

a) $A_{Lateral\ Cilindro} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 628{,}32$ $\qquad$ $A_{Lateral\ Cono} = \pi \cdot 10 \cdot g$

$\pi \cdot 10 \cdot g = 628{,}32 \rightarrow g = 20$ cm

b) $A_{Total\ Cilindro} = A_L + 2\pi \cdot r^2 = 628{,}32 + 628{,}32 = 1\,256{,}64$ $\qquad$ $A_{Total\ Cono} = A_L + \pi \cdot r^2 = 10\pi \cdot g + 314{,}16$

$31{,}42 \cdot g + 314{,}16 = 1\,256{,}64 \rightarrow g = 30$ cm

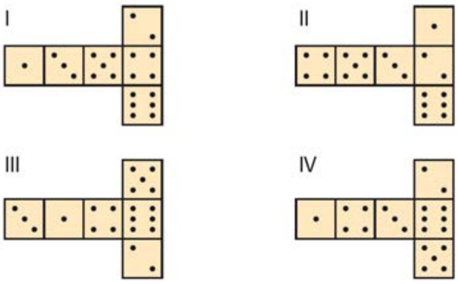
## PRUEBAS PISA

**136.** **A la derecha, hay un dibujo de dos dados. Los dados son cubos con un sistema especial de numeración en los que se aplica la siguiente regla:**

**«El número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete».**

**Puedes construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando cartón. Estos dados se pueden hacer de muchas maneras. En el dibujo siguiente puedes ver cuatro recortes que se pueden utilizar para hacer cubos, con puntos en las caras. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede doblar para formar un cubo que cumpla la regla de que la suma de caras opuestas sea 7?**

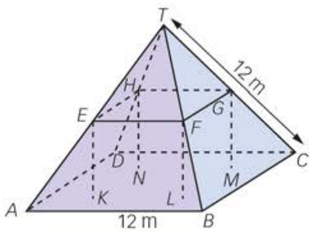
*(Prueba PISA 2006)*




Las figuras II y III.

**137.** **Aquí ves una fotografía de una casa de campo con el tejado en forma de pirámide.**

**Debajo hay un modelo matemático del tejado de la casa con las medidas correspondientes.**




**La planta del ático, *ABCD* en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) *EFGHKLMN*. *E* es el punto medio de $\overline{AT}$, *F* es el punto medio de $\overline{BT}$, *G* es el punto medio de $\overline{CT}$ y *H* es el punto medio de $\overline{DT}$. Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.**

a) Calcula el área de la planta del ático *ABCD*.

b) Calcula la longitud de $\overline{EF}$, una de las aristas horizontales del bloque.

*(Prueba PISA 2006)*

a) $A = 12^2 = 144$ m$^2$

b) Los triángulos de las caras laterales del tejado están en posición de Tales $\rightarrow$ $\overline{EF} = 6$ m

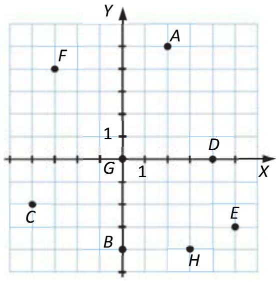
# Funciones

11

## CLAVES PARA EMPEZAR

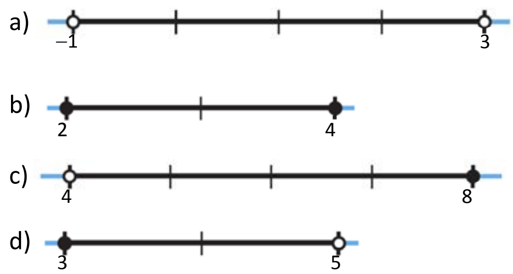
1. **Representa los siguientes puntos.**

$A(2, 5)$ $C(-4, -2)$ $E(5, -3)$ $G(0, 0)$
$B(0, -4)$ $D(4, 0)$ $F(-3, 4)$ $H(3, -4)$




2. **Representa los siguientes intervalos y decide si los extremos pertenecen o no a cada uno de ellos.**

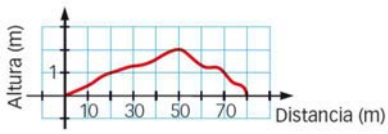
a) $(-1, 3)$ c) $(4, 8]$
b) $[2, 4]$ d) $[3, 5)$




## VIDA COTIDIANA

**La aviación inició su andadura en el siglo XVIII, con los globos aerostáticos que se elevaban impulsados por aire caliente.**

- **Aquí tienes las gráficas de uno de los primeros vuelos de la historia.**




**¿A qué distancia llegó el vuelo? ¿Cuál fue su altura máxima?**

Avanzó 80 metros y la máxima altura alcanzada fueron 2 metros

## RESUELVE EL RETO

**Piensa y completa la tabla.**

| X | Y |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |
| 7 | 2 |
| 8 | 4 |
| 9 | ¿ |

A 9 le corresponde 3, porque tiene 3 divisores: 1, 3 y 9.

**Un caracol sube por un palo de 10 m de altura. Asciende 3 m durante el día y resbala 2 m por la noche. ¿Cuánto tiempo tardará en subir?**

El primer día llega hasta el tercer metro y por la noche cae hasta el primer metro; el segundo día llega hasta el cuarto metro durante el día y por la noche cae hasta el segundo metro; …; el octavo día llega hasta el décimo metro durante el día. Tarda 8 días en subir.

**Si una función continua corta a $Y$ en $y = 3$ y no corta al eje $X$, ¿qué podemos decir de su recorrido?**

Si es lineal, la única opción es que sea la función constante $y = 3$, así que su recorrido es 3. Si no es lineal y no corta al eje $X$, lo que sabemos es que su recorrido solo toma valores positivos.

**La función que mide el ángulo que forman las manecillas del reloj a medida que pasa el tiempo es periódica. ¿Cuál es el valor del período?**

12 horas

## ACTIVIDADES

**1. ¿Son estas relaciones funciones?**

a) Número de jabones comprados y precio a pagar.

b) El número de DNI y la suma de sus dos últimos dígitos.

c) Medida del ancho de un rectángulo y perímetro del rectángulo.

d) Número de monedas de 2 € y cantidad de dinero que representan.

a) Sí, a cada valor de $x$, el número de jabones comprados, le corresponde un único precio a pagar.

b) Sí, para cada par de números finales del DNI solo hay un posible resultado al sumarlos.

c) No, para dos rectángulos del mismo ancho, el perímetro puede ser diferente, es decir, le corresponde más de un valor, dependerá también del valor de la altura.

d) Sí, a cada valor de $x$, número de monedas de 2 €, le corresponde una única cantidad de dinero que representa.

**2. Calcula, para los números 1, 2, 3, 4 y 5, el número o números que les corresponden con estas relaciones, e indica cuáles son funciones.**

a) A cada número, su opuesto.

b) A cada número, su doble más 5.

c) A cada número, su cantidad de divisores.

a) –1, –2, –3, –4 y –5

b) 7, 9, 11, 13 y 15

c) 1, 2, 2, 3 y 2

Las tres relaciones son funciones.

**3. Encuentra una relación que sea función y otra que no lo sea.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Es función la relación entre la longitud del pie y la talla de zapato.

No es función la relación entre la temperatura que hace y la probabilidad de lluvia.

**4. Expresa, mediante un enunciado, las siguientes funciones.**

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -x + 3$

a) El doble de un número menos uno.

b) El opuesto de un número más tres.

**5. Obtén la expresión algebraica de la función que asocia a cada número:**

a) Su triple b) Su cuadrado c) Su doble más 5

a) $y = 3x$

b) $y = x^2$

c) $y = 2x + 5$

**6. Determina la ecuación de la función que asocia a cada número su doble menos 3 unidades. Calcula $f(8)$, $f(-4)$ y $f(10)$.**

$f(x) = 2x - 3$

$f(8) = 2 \cdot 8 - 3 = 13$ $f(-4) = 2 \cdot (-4) - 3 = -11$ $f(10) = 2 \cdot 10 - 3 = 17$

**7. Halla la expresión algebraica de la función que pasa una medida expresada en metros a la misma medida expresada en centímetros.**

Sea $x$ la medida expresada en metros, la función que la expresa en centímetros es $f(x) = 100x$.

**8.** **Construye una tabla de valores para la función que a cada número lo relaciona con:**

a) Su triple menos dos unidades.

b) La suma de su cuadrado y 2 unidades.

c) Su número opuesto más 3 unidades.

a)

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x - 2$ | −8 | −5 | −2 | 1 | 4 |

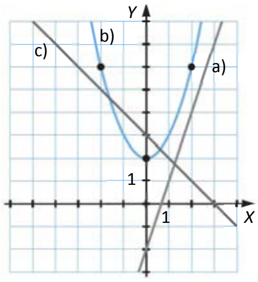
b)

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2 + 2$ | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 |

c)

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = -x + 3$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**9.** **Dibuja las gráficas que determinan las funciones de la actividad anterior.**

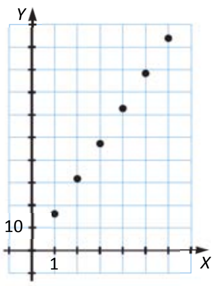



**10.** **El precio de una entrada es 15,75 €. Expresa esta función mediante una ecuación, una tabla y una gráfica.**

El precio final dependerá del número de entradas que se compre y no se puede comprar un número de entradas negativo.

Expresión algebraica: $f(x) = 15{,}75x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 15{,}75x$ | 0 | 15,75 | 31,50 | 47,25 | 63 |



**11.** **Representa la función que relaciona una medida en decámetros con su equivalente.**

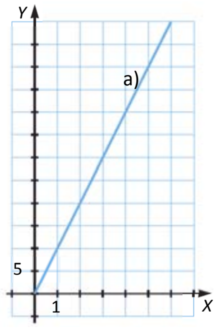
a) En metros  b) En centímetros

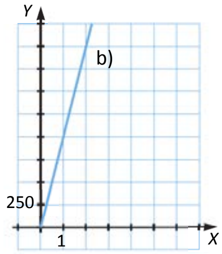
a) Expresión algebraica: $f(x) = 10x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 10x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |

b) Expresión algebraica: $f(x) = 1\,000x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 1\,000x$ | 0 | 1 000 | 2 000 | 3 000 | 4 000 |



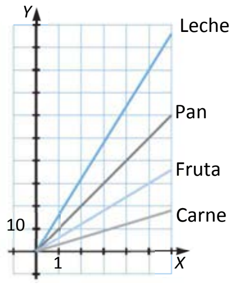

**12.** **Una familia consume semanalmente 10 barras de pan, 3 kg de carne, 16 ℓ de leche y 6 kg de frutas y verduras. Haz en unos ejes de coordenadas, utilizando diferentes colores, la representación gráfica del consumo a lo largo de seis semanas.**

Pan: $10x$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 10x$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |

Carne: $3x$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |




Leche: $16x$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 16x$ | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 |

Fruta: $6x$

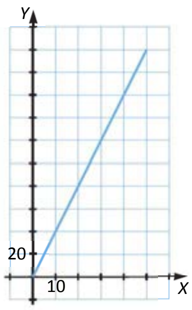
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 6x$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

**13.** **Un grifo, que arroja 4 ℓ de agua por minuto, se mantiene abierto hasta llenar un depósito de 200 ℓ. Representa la gráfica de la función que relaciona los minutos durante los que está abierto el grifo con:**

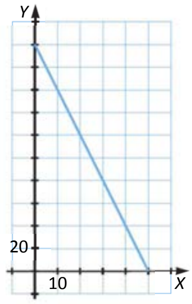
a) La cantidad de agua arrojada

b) La cantidad de agua que falta para llenar el depósito

a) En función del tiempo, de los minutos que esté abierto, la cantidad de agua arrojada es $y = 4x$.

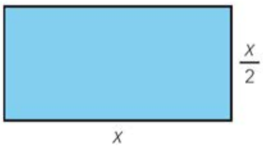


b) En función de los minutos que esté abierto, la cantidad de agua que falta para llenar el depósito es $y = 200 - 4x$.



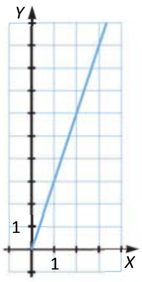

**14. Representa gráficamente la función que relaciona la longitud *x* con el perímetro de la figura en cada caso.**

a)

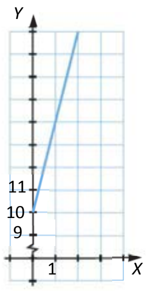



b)


a) $f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{x}{2} = 3x$

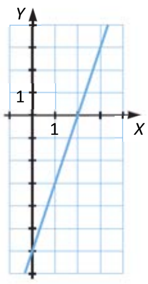



b) $f(x) = 2 \cdot (x + 4) + 2 \cdot (x + 1) = 4x + 10$




**15. Dada la función que asocia a cada número real su triple menos 6, obtén su expresión algebraica, su dominio, recorrido y gráfica.**

$f(x) = 3x - 6$ Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$



**16. Considerando la función que asocia a cada número real su inverso más 3.**

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Obtén su dominio y recorrido.

c) ¿Cuál es el valor de la función si $x = 2$?

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Im $f = \mathbb{R} - \{3\}$ c) $f(2) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

**17. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.**

a) $f(x) = x^2 - 7$ b) $f(x) = \frac{3}{4x}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-7, +\infty)$ b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

**18. Encuentra el dominio y el recorrido de estas funciones.**

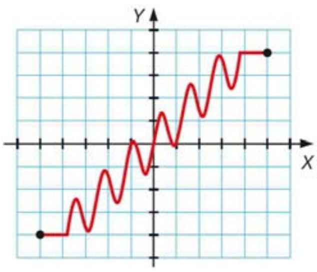
a) $f(x) = \frac{x-1}{2}$ c) $f(x) = -2$

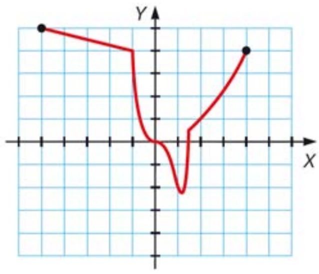
b) $f(x) = |x|$ d) $f(x) = +\sqrt{x}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$ c) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = -2$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, +\infty)$ d) Dom $f = [0, +\infty)$ Im $f = [0, +\infty)$

**19. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones que aparecen de las notas de Sara.**



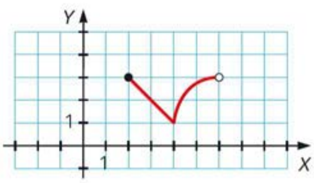

Si cada cuadrícula equivale a una unidad:

Para la primera nota: Dom $f = [-5, +5]$, Im $f = [-4, +4]$

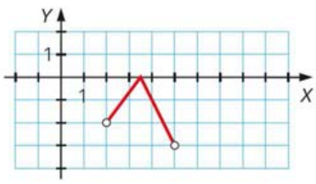
Para la segunda nota: Dom $f = [-5, +4]$, Im $f = [-2, +5]$

**20. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.**

a)



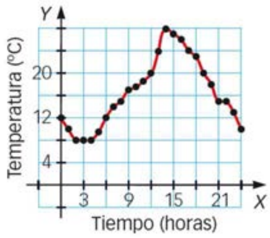

b)




a) Dom $f = [+2, +6)$, Im $f = [+1, +3]$

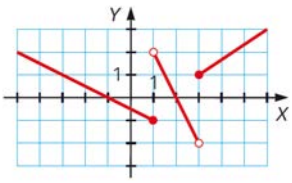
b) Dom $f = (+2, +5)$, Im $f = (-3, 0]$

**21.** **Esta es la gráfica de la temperatura de una ciudad durante todo el día. Indica el dominio y el recorrido.**




Dom $f = [0, 24]$, Im $f = [+8, +28]$

**22.** **Observa la gráfica de esta función y determina los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con los ejes.**

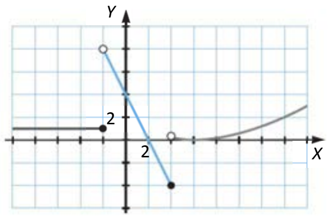



Hay discontinuidades en $x = 1$ y en $x = 3$.

La gráfica corta al eje $X$ en $x = -1$ y en $x = 2$. La gráfica corta al eje $Y$ en $y = -1/2$.

**23.** **Dibuja una función continua para todos los valores de $x$ excepto en $x = -2$ y $x = 4$, y que corte a los ejes en (0, 4), (2, 0) y (6, 0).**

Respuesta abierta. Por ejemplo:




**24.** **Halla los puntos de corte con los ejes de $f(x) = ax + b$, donde $a$ y $b$ son números, sabiendo que pasa por los puntos (1, 1) y (2, −1).**

Si pasa por (1, 1) cumple que: $1 = a \cdot 1 + b$

Si pasa por (2, −1) cumple que: $-1 = a \cdot 2 + b$.

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al resolverlo obtenemos que $a = -2$ y $b = 3$.

La función es $f(x) = -2x + 3$.

Los puntos de corte con los ejes son (0, 3) y (3/2, 0).

**25. Halla los puntos de corte con el eje de abscisas de estas funciones.**

a) $y = 4x - 1$

b) $y = 2x^2 + 4$

c) $y = \dfrac{x^2 - 5}{2}$

d) $y = \dfrac{3x + 2}{5}$

e) $y = (x - 1)^2$

f) $y = 3(x + 1)$

a) Puntos de corte con el eje *X:* $4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/4$.

El punto es (1/4, 0).

b) Puntos de corte con el eje *X:* $2x^2 + 4 = 0. \rightarrow x^2 = -2$

No existen puntos de corte con este eje.

c) Puntos de corte con el eje *X:* $\dfrac{x^2 - 5}{2} = 0 \rightarrow x = +\sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

Los puntos son $(+\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

d) Puntos de corte con el eje *X:* $\dfrac{3x + 2}{5} = 0 \rightarrow x = -2/3$.

El punto es (–2/3, 0).

e) Puntos de corte con el eje *X:* $(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$.

El punto es (1, 0).

f) Puntos de corte con el eje *X:* $3(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$.

El punto es (–1, 0).

**26. Halla los puntos de corte con el eje de ordenadas de estas funciones.**

a) $y = 3 - x$

b) $y = 2 + \dfrac{x}{3}$

c) $y = x^2 - x + 2$

d) $y = \dfrac{x - 3}{5} + 1$

e) $y = (x - 2)^2$

f) $y = \dfrac{x - 8}{3}$

g) $y = -4x - 4$

h) $y = \dfrac{x^2 - 9}{10}$

a) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow 3 - 0 = 3$. El punto de corte es (0, 3).

b) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow 2 + \dfrac{0}{3} = 2$. El punto de corte es (0, 2).

c) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 + 2 = 2$. El punto de corte es (0, 2).

d) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0 - 3}{5} + 1 = \dfrac{2}{5}$. El punto de corte es (0, 2/5).

e) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow (0 - 2)^2 = 4$. El punto de corte es (0, 4).

f) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0 - 8}{3} = -\dfrac{8}{3}$. El punto de corte es (0, –8/3).

g) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow -4 \cdot 0 - 4 = -4$. El punto de corte es (0, –4).

h) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0^2 - 9}{10} = -\dfrac{9}{10}$. El punto de corte es (0, –9/10).

**27. Relaciona cada función con sus puntos de corte.**

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4}$ I) (0, 0)

b) $g(x) = 3x^2$ II) (0, 8), (2, 0)

c) $h(x) = 4(2 - x)$ III) (0; −0,25), (1, 0), (−1, 0)

d) $i(x) = \frac{x + 1}{2}$ IV) (0; 0,25), (−1, 0)

a) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow \frac{0^2 - 1}{4} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$. El punto de corte es (0; –0,25).

b) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

c) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 4 \cdot (2 - 0) = 8$. El punto de corte es (0, 8).

d) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. El punto de corte es (0; 0,5).

Para a) la correspondencia debería ser III). Comprobamos que los otros puntos de corte son los puntos de corte con el eje $X$: $\frac{x^2 - 1}{4} = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -1$. Sí se cumple, la correspondencia con a) es III).

Para b) la correspondencia es I). Los puntos de corte con $X$ son los que cumplen $3x^2 = 0$, de modo que de nuevo tenemos el punto (0, 0).

Para c) la correspondencia debería ser II). Comprobamos que los otros puntos de corte son los puntos de corte con el eje $X$: $4 \cdot (2 - x) = 0 \rightarrow x = 2$. Sí se cumple, la correspondencia con c) es II).

Para d) no hay correspondencia. Los puntos de IV) no se corresponden con ninguna de las funciones indicadas.

**28. Algunas de estas funciones tienen el mismo punto de corte con el eje *Y*. ¿Cuáles son?**

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = -x + 4$

c) $h(x) = 3(x + 1)$

d) $i(x) = \frac{x}{2} + 3$

e) $j(x) = 3$

a) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 3 = 3$. El punto de corte es (0, 3).

b) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow -0 + 4 = 4$. El punto de corte es (0, 4).

c) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 3 \cdot (0 + 1) = 3$. El punto de corte es (0, 3).

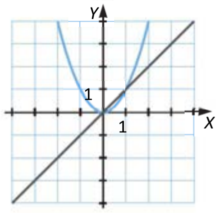
d) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow \frac{0}{2} + 3 = 3$. El punto de corte es (0, 3).

e) Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0$. El punto de corte es (0, 3).

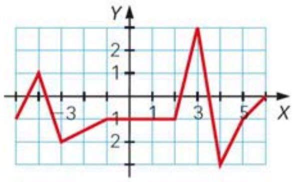
Tienen el mismo punto de corte con el eje $Y$ las funciones a), c), d) y e).

**29.** **¿Pueden tener los mismos puntos de corte con los ejes dos funciones diferentes? Dibuja la gráfica de dos funciones que cumplan esta condición.**

Sí, es posible, por ejemplo la función $y = x$ y la función $y = x^2$.




**30.** **Determina el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos de esta función.**




La función crece en $(-\infty, -4) \cup (-3, -1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$.

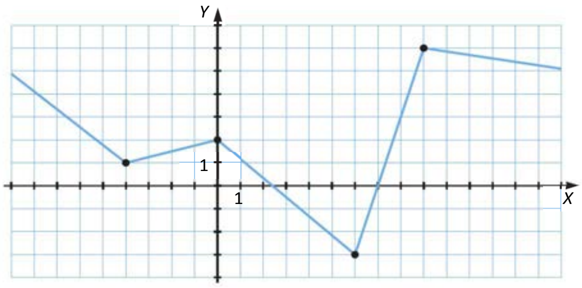
La función decrece en $(-4, -3) \cup (3, 4)$.

La función es constante en $(-1, 2)$.

Tiene máximo para $x = -4$ y $x = 3$. Y tiene mínimo en $x = -3$ y $x = 4$.

**31.** **Dibuja la gráfica de una función que sea creciente en los intervalos $(-4, 0)$ y $(6, 9)$ y decreciente en el resto.**

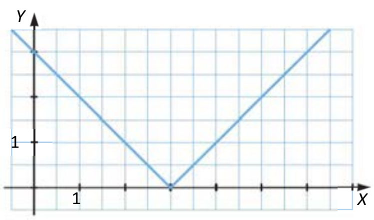
Respuesta abierta, por ejemplo:




**32.** **Analiza el crecimiento y el decrecimiento de la función $y = |x - 3|$.**

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |

La función decrece en $(-\infty, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.



**33. Esta gráfica representa el número de litros por metro cuadrado a lo largo de un día lluvioso.**


a) ¿Cuáles son los intervalos de tiempo en que aumentó la cantidad de litros por metro cuadrado? ¿Y en los que disminuyó?

b) ¿A qué hora del día llovió más?

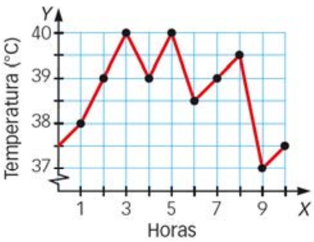
c) ¿Y la hora en que la cantidad de litros por metro cuadrado fue la menor?

a) La cantidad de litros por metro cuadrado aumenta de 8 a 12 de la mañana y de 4 a 6 de la tarde. Disminuye de 12 de la mañana a 2 de la tarde y de 6 de la tarde a 12 de la noche.

b) Llovió más a las 6 de la tarde.

c) A las 8 de la mañana, que no llovía.

**34. La siguiente gráfica muestra la evolución de la temperatura de un paciente a lo largo de 10 horas.**




a) ¿Cuáles son los períodos de tiempo en los que le aumenta la temperatura? ¿Y en los que le disminuye?

b) ¿Cuál fue el momento en que su temperatura fue máxima?

c) ¿A qué hora registró la temperatura mínima?

a) Aumenta su temperatura en las 3 primeras horas de la medición, luego entre la 4.ª y la 5.ª hora, también entre la 6.ª y la 8.ª hora y finalmente la última hora de la medición (entre la 9.ª y la 10.ª).

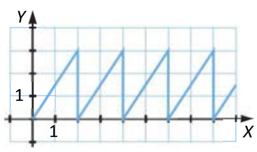
Disminuye entre la 3.ª y la 4.ª hora, entre la 5.ª y la 6.ª hora y entre la 8.ª y la 9.ª hora.

b) Alcanza la máxima temperatura, de 40 ºC, en la 3.ª y la 5.ª hora de la medición.

c) La temperatura mínima se registra 9 horas después de la primera medición.

**35. Dibuja la gráfica de una función periódica de período 2.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



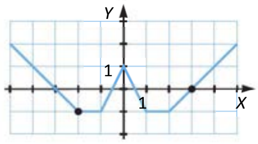

**36. Estudia las simetrías de la función $y = x^3$.**

Simetría par: $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 \neq x^3 = f(x)$. No existe simetría par.

Simetría impar: $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$. Tiene simetría impar.

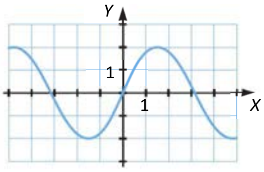
**37.** **Dibuja la gráfica de una función par de la que se sabe que $f(-2) = -1$ y $f(3) = 0$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

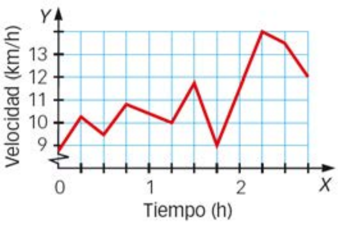



**38.** **Una función simétrica respecto del origen, ¿puede ser periódica?**

Sí, por ejemplo:




**39.** **En la gráfica se muestra la velocidad de Pablo (en kilómetros por hora) durante una carrera.**




a) Analiza su continuidad.

b) ¿En qué puntos corta a los ejes?

c) Estudia su crecimiento.

d) Señala sus máximos y mínimos.

e) ¿A partir de qué minuto supera Pablo los 12 kilómetros por hora?

a) Es continua en todo su dominio.

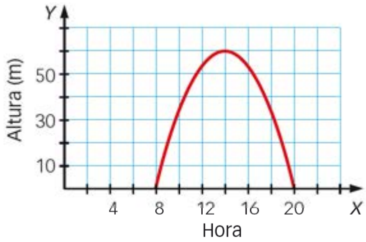
b) Corta al eje *Y* en el momento en que Pablo empieza a correr, a una velocidad un poco inferior a 9 km/h.

c) Crece el primer cuarto de hora, luego decrece otro cuarto de hora. Entonces vuelve a incrementar su velocidad otros 15 minutos, para luego ir decreciendo esta durante media hora (en ese momento lleva corriendo una hora y cuarto). Vuelve a incrementarla durante un cuarto de hora y decelera el cuarto de hora siguiente. Tras esta bajada de velocidad la vuelve a aumentar durante 30 minutos (lleva corriendo 2 horas y cuarto), para bajarla de nuevo los últimos 30 minutos que está corriendo.

d) La velocidad máxima la alcanza tras correr 2 horas y cuarto y la mínima tras llevar corriendo 1 hora y 45 minutos. A lo largo del camino tiene velocidades máximas relativas en $x = 0{,}25$, $x = 0{,}75$ e $x = 1{,}5$. Y velocidades mínimas relativas en $x = 0{,}5$ y $x = 1{,}25$.

e) Pablo supera los 12 km/h tras aproximadamente 2,1 horas corriendo; esto es, 126 minutos corriendo.

**40. El gráfico indica la altura del sol sobre el horizonte (en metros) en una ciudad el día 1 de octubre.**




a) ¿A qué hora sale el sol y a qué hora se pone?

b) ¿Es una función continua?

c) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) ¿Cuál es el máximo de la función?

e) ¿Cuántas horas de sol hay ese día?

a) El Sol sale a las 8 de la mañana y se pone a las 8 de la tarde.

b) Sí, pues no hay ningún salto en el trazo de la función.

c) Crece entre las 8 de la mañana y las 2 de la tarde y decrece entre las 2 de la tarde y las 8 de la noche.

d) El máximo de la función se tiene a las 2 de la tarde, cuando el Sol alcanza una altura de 60 m sobre el horizonte. Es decir, el punto del máximo es (14, 60).

e) Hay 12 horas de sol ese día.

## ACTIVIDADES FINALES

**41. Señala qué relaciones son funciones.**

a) Un número y su mitad

b) Un número y su valor absoluto

c) Un número y su raíz cuadrada

d) Un número y su raíz cúbica

a) Es función. Para cualquier número que consideremos su mitad es única.

b) Es función. Para cualquier número que consideremos su valor absoluto es único.

c) No es función. Si no nos especifican el signo de la raíz cuadrada, para un número tenemos dos posibles valores, por ejemplo, a 1 le corresponderían 1 y –1.

d) Es función. Para cualquier número que consideremos su raíz cúbica es única.

**42. Indica cuáles de estas relaciones geométricas son funciones.**

a) Radio de un círculo y su área

b) Perímetro de un rectángulo y área del rectángulo

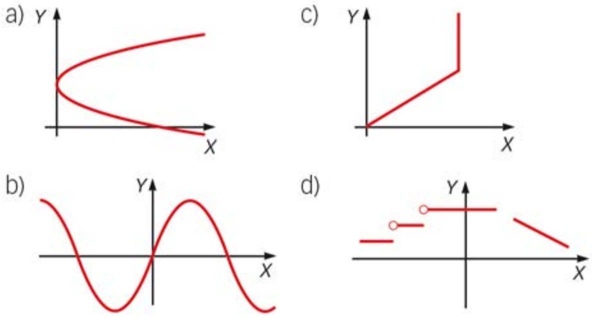
c) Base de un rectángulo y su perímetro

a) Sí es función. Dado un círculo con un radio determinado, solo existe una posibilidad para el valor de su área.

b) No es función.

c) No es función.

**44. Indica cuáles son funciones y cuáles no.**

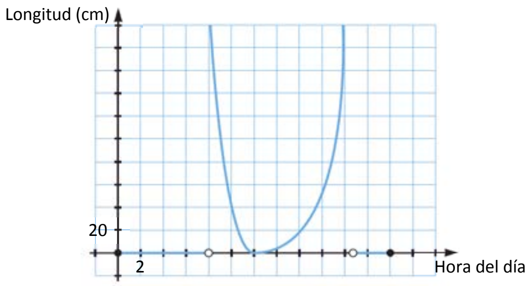



Son funciones b) y d). Las gráficas a) y c) tienen valores de *x* a los que les corresponde más de un valor de *y*.

**45. Realiza una representación gráfica que muestre la medida de la sombra de una farola a lo largo de un día soleado.**

a) Razona si se trata de una función.

b) Si cada día se realizara esta gráfica, ¿sería la misma?




a) Sí, para cada hora del día, solo hay un posible valor de medición de la sombra.

b) No, varía en función del sol (hora de salida, posición, …).

**46. Encuentra la expresión algebraica de la relación que a cada número le hace corresponder:**

a) Su tercera parte más dos

b) La mitad de su triple

c) La raíz cuadrada de su cubo

a) $y = \frac{x}{3} + 2$ b) $y = \frac{3x}{2}$ c) $y = \sqrt{x^3}$

**47. Escribe la relación entre las siguientes magnitudes con una expresión algebraica.**

a) Área de un cuadrado y su lado

b) Apotema de un hexágono regular y lado del hexágono

c) Volumen de una esfera y radio de la esfera

a) $A = l^2$ b) $ap = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

**48.** **Para la función $y = 4x - 3$, calcula el valor de la abscisa o la ordenada en cada caso.**

a) $x = 3$  b) $y = -1$  c) $x = -2$  d) $y = 5$

a) $y = 4 \cdot 3 - 3 = 9$  b) $-1 = 4x - 3 \rightarrow x = 1/2$  c) $y = 4 \cdot (-2) - 3 = -11$  d) $5 = 4x - 3 \rightarrow x = 2$

**49.** **Calcula el valor de las siguientes funciones para $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.**

a) $f(x) = x^2 - 4$  c) $f(x) = 3x - 6$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3}$  d) $f(x) = (x + 2)^2$

a) $f(-1) = -3$, $f(2) = 0$, $f(3) = 5$  c) $f(-1) = -9$, $f(2) = 0$, $f(3) = 3$

b) $f(-1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5/3$  d) $f(-1) = 1$, $f(2) = 16$, $f(3) = 25$

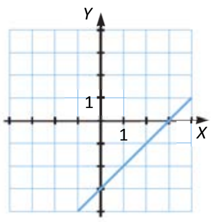
**50.** **Elabora una tabla de valores para cada una de las funciones y realiza su gráfica.**

a) $f(x) = x - 3$  c) $f(x) = 5x - 1$  e) $f(x) = -x + 6$

b) $f(x) = \dfrac{1 - x}{2}$  d) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 4$  f) $f(x) = -2 + \dfrac{3x}{4}$

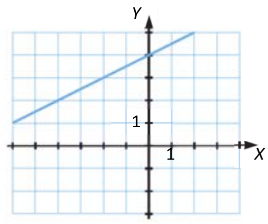
a)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 |



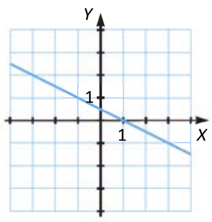

d)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 7/2 | 4 | 9/2 | 5 |



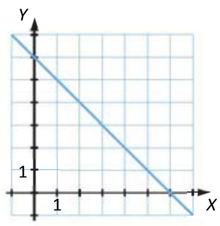

b)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 | –1/2 |



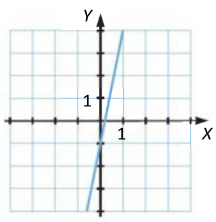

e)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |



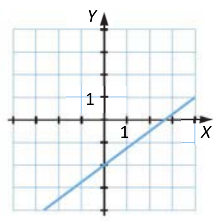

c)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –11 | –6 | –1 | 4 | 9 |

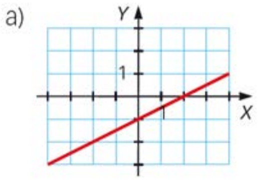


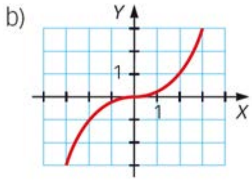

f)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –7/2 | –11/4 | –2 | –5/4 | –1/2 |



**52.** **Haz una tabla de valores para cada gráfica.**



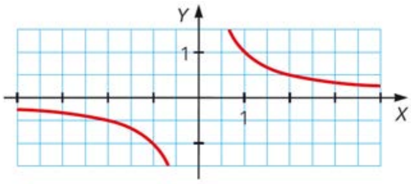

a)

| $x$ | –4 | –2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 |

b)

| $x$ | –3 | –2 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –3 | –1 | 0 | 1 | 3 |

**53.** **Realiza una tabla de valores que se ajuste a esta representación gráfica.**




| $x$ | –4 | –2 | –1 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –0,25 | –0,5 | –1 | 1 | 0,5 | 0,25 |

**54.** **Encuentra la expresión algebraica que relaciona la base y la altura de los rectángulos de área 48 m².** **Elabora una tabla con algunos valores enteros.**

$A = b \cdot h \rightarrow 48 = b \cdot h \rightarrow h = 48/b$

| $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | 48 | 24 | 16 | 12 | 6 |

**55.** **Considera la función $f(x) = 2x^2 + 1$. Responde verdadero o falso razonadamente.**

a) El valor que corresponde a $x = 2$ es $f(2) = 9$.

b) Para $x = 1$ y $x = -1$ tenemos $f(1) = f(-1)$.

c) La función nunca toma el valor 0.

d) La función toma valores negativos para las abscisas negativas.

a) Verdadero. $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

b) Verdadero. $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3 = 2 \cdot (-1)^2 = f(-1)$

c) Verdadero. $2x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1/2$. No hay ningún número real que cumpla esta condición.

d) Falso. Por ejemplo, $f(-1) = 3$

**56.** **Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.**

a) $y = 3x - 4$  c) $y = x^2 + 2$  e) $y = (x - 3)^2$

b) $y = \dfrac{4x}{3}$  d) $y = \dfrac{x}{2} + 6$  f) $y = \dfrac{2x + 4}{5}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

c) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [2, +\infty)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

e) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, +\infty)$

f) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

**57. Calcula el dominio de las siguientes funciones.**

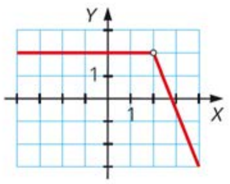
a) $y = \sqrt{x+2}$ b) $y = \dfrac{4}{x-2}$ c) $y = \dfrac{4}{x} - 2$

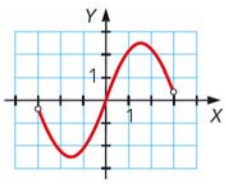
a) Dom $f = [-2, +\infty)$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

**58. Indica el dominio y el recorrido de las funciones representadas. ¿Son continuas?**

a) 


b) 


a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$. No es continua, no está definida en $x = 2$

b) Dom $f = (-3, 3)$. Es continua.

**59. Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones.**

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -2$

c) $y = 4x + 1$

d) $y = x^2 - 2$

e) $y = 5$

f) $y = (x - 1)^2$

a) Puntos de corte con el eje $X$: $3x - 2 = 0 \rightarrow x = 2/3$. El punto de corte es $(2/3, 0)$.

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0 - 2 = -2$. El punto de corte es $(0, -2)$.

b) Puntos de corte con el eje $X$: para cualquier valor de $x$, el valor de $y$ es $-2$, no hay puntos de corte con el eje $X$.

Punto de corte con el eje $Y$: para cualquier valor de $x$, el valor de $y$ es $-2$. El punto de corte es $(0, -2)$.

c) Puntos de corte con el eje $X$: $4x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/4$. El punto de corte es $(-1/4, 0)$.

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0 + 1 = 1$. El punto de corte es $(0, 1)$.

d) Puntos de corte con el eje $X$: $x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = +\sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$. Los puntos de corte son $(+\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 2 = -2$. El punto de corte es $(0, -2)$.

e) Puntos de corte con el eje $X$: para cualquier valor de $x$, el valor de $y$ es 5, no hay puntos de corte con el eje $X$.

Punto de corte con el eje $Y$: para cualquier valor de $x$, el valor de $y$ es 5. El punto de corte es $(0, 5)$.

f) Puntos de corte con el eje $X$: $(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$. El punto de corte es $(1, 0)$.

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow (0 - 1)^2 = 1$. El punto de corte es $(0, 1)$.

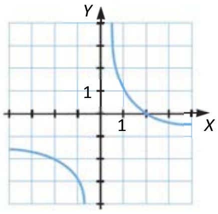
**60.** **Elabora una tabla de valores para cada una de las funciones, haz la representación gráfica y analiza la continuidad.**

a) $y = \frac{2}{x} - 1$ c) $y = \frac{3}{2x}$ e) $y = \frac{x-4}{x}$

b) $y = \sqrt{x+1}$ d) $y = \sqrt{3x}$ f) $y = \sqrt{4-2x}$

a)

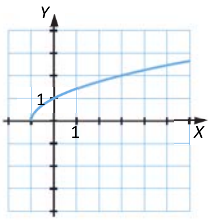
| $x$ | −2 | −1 | −0,5 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −2 | −3 | −5 | 3 | 1 | 0 |



No es continua, tiene una discontinuidad en $x = 0$.

b)

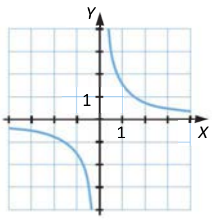
| $x$ | −1 | −3/4 | 0 | 5/4 | 3 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 | 3 |



Es continua.

c)

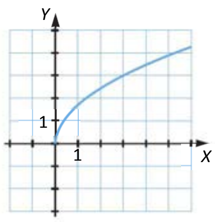
| $x$ | −3 | −2 | −1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −1/2 | −3/4 | −3/2 | 3/2 | 3/4 | 1/2 |



No es continua, tiene una discontinuidad en $x = 0$.

d)

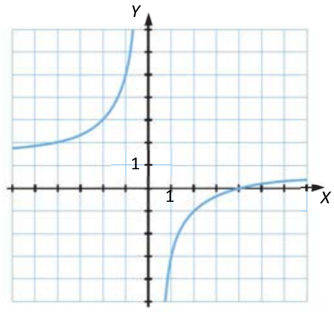
| $x$ | 0 | 1/3 | 1 | 4/3 | 3 | 16/3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | $\sqrt{3} = 1{,}7$ | 2 | 3 | 4 |



Es continua.

e)

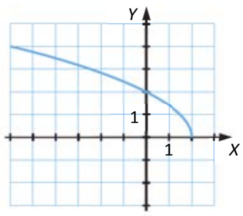
| $x$ | –3 | –2 | –1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7/3 | 3 | 5 | –3 | –1 | –1/3 |




No es continua, tiene una discontinuidad en $x = 0$.

f)

| $x$ | –6 | –5/2 | 0 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

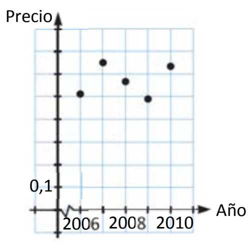



Es continua.

**61.** **Observa los precios, en euros, del kilogramo de patatas en el período 2006-2010.**

**Representa los datos en una gráfica y analiza su crecimiento y decrecimiento.**

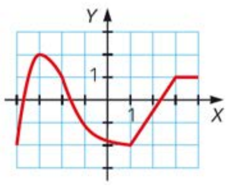
| Año | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|
| Precio | 0,51 | 0,65 | 0,57 | 0,49 | 0,64 |



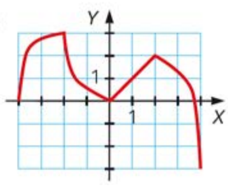

Hay un crecimiento del precio de la patata de 2006 a 2007, de 2007 a 2009 baja y de 2009 a 2010 sube de nuevo.

**62.** **Indica el dominio, el recorrido, la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos, si existen.**

a)



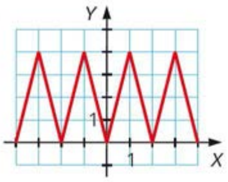

b)

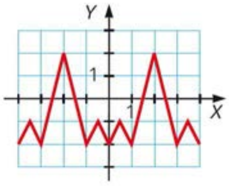


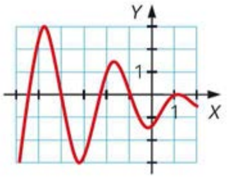

a) Dom $f = [–4, 4]$ Im $f = [–2, 2]$
Crece en $(–4, –3) \cup (1, 3)$. Decrece en $(–3, 1)$.
Excluyendo los extremos, hay:
Un máximo en $x = –3$. Un mínimo en $x = 1$.

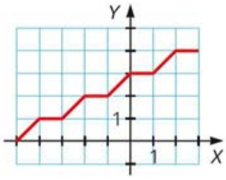
b) Dom $f = [–4, 4]$ Im $f = [–3, 3]$
Crece en $(–4, –2) \cup (0, 2)$. Decrece en $(–2, 0) \cup (2, 4)$.
Excluyendo los extremos, hay:
Máximos en $x = –2$, $x = 2$. Un mínimo en $x = 0$.

**63. Señala las funciones periódicas y escribe su período.**

a)


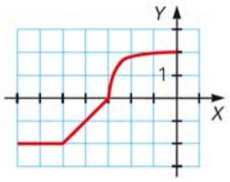

c)


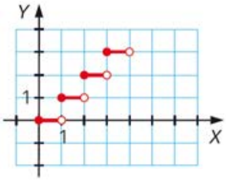

b)


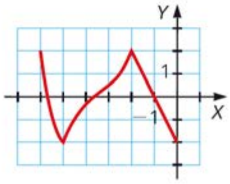

d)


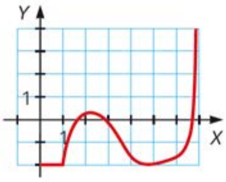

Son periódicas a) (de período 2) y c) (de período 4).

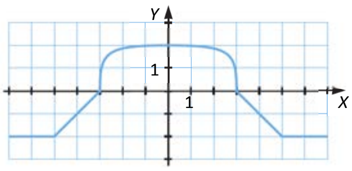
**64. Completa en tu cuaderno las gráficas para que las funciones sean simétricas respecto del eje *Y*.**

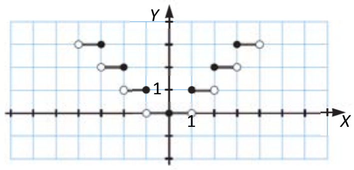
a)


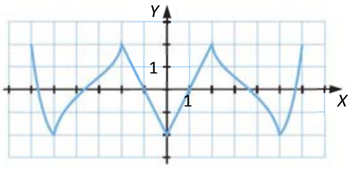

c)


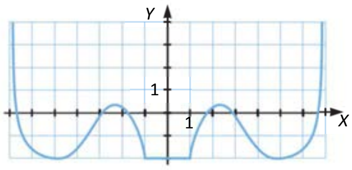

b)



d)


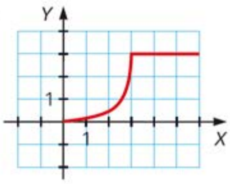

a)


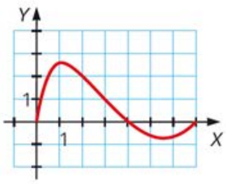

c)



b)


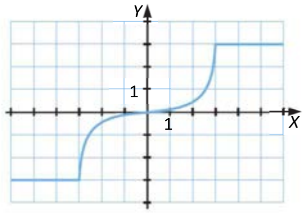

d)



**65. Completa en tu cuaderno las gráficas para que las funciones sean simétricas respecto del origen.**

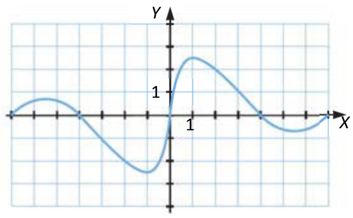
a)



b)


a)



b)



**66. Comprueba si las siguientes funciones son simétricas y si lo son di de qué tipo.**

a) $y = x^2 + x$ c) $y = (x - 2)^2$ e) $y = x^3$

b) $y = \dfrac{x}{2}$ d) $y = x^2 - 2x^3$ f) $y = \dfrac{3}{x}$

a) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ No tiene simetría impar.

b) $f(-x) = -x/2$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Tiene simetría impar.

c) $f(-x) = (-x - 2)^2 = (-1)^2\,(x + 2)^2 = (x + 2)^2$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ No tiene simetría impar.

d) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^3 = x^2 + 2x^3$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ No tiene simetría impar.

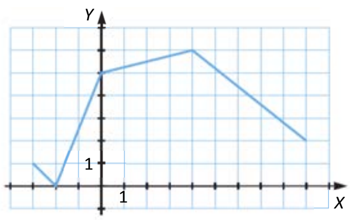
e) $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3\,x^3 = -x^3$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Tiene simetría impar.

f) $f(-x) = 3/(-x) = -3/x$
$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ No tiene simetría par. $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Tiene simetría impar.

**68. Dibuja una función con estas características.**

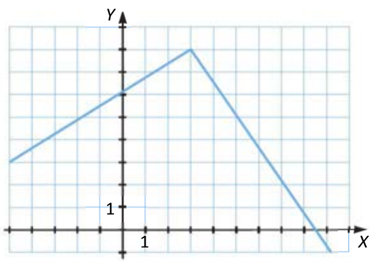
- **Dominio: $[-3, 9]$** • **Recorrido: $[0, 6]$**
- **La ordenada en el origen es 5.**
- **$f(-3) = 1$, $f(-2) = 0$, $f(4) = 6$ y $f(9) = 2$**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



**69. Dibuja una función cuyos dominio y recorrido son $\mathbb{R}$, creciente hasta $x = 3$ y decreciente en el resto, y con un máximo de ordenada 8.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



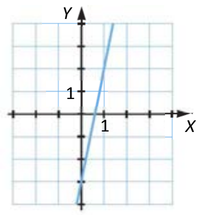
**70. Estudia las características de estas funciones.**

a) $y = 5x - 3$ b) $y = \dfrac{x+3}{2}$ c) $y = x^2 + 2x - 3$

Hacemos una tabla de valores y luego su representación gráfica y a partir de ella analizamos las características.

a)

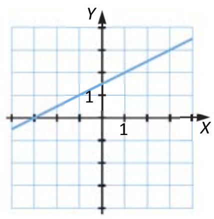
| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –13 | –8 | –3 | 2 | 7 |




Es continua creciente.

b)

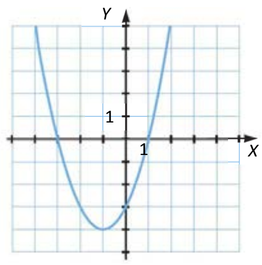
| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 | 5/2 |




Es continua creciente.

c)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –3 | –4 | –3 | 0 | 5 |




Es continua. Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $x = -1$.

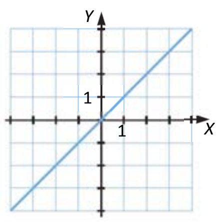
**71. Analiza si existen las siguientes funciones; en caso afirmativo ilustra tu respuesta.**

a) Función siempre creciente y simétrica respecto del origen

b) Función periódica y siempre creciente

c) Función periódica simétrica respecto del eje $X$

a) Sí, por ejemplo, la función $y = x$.



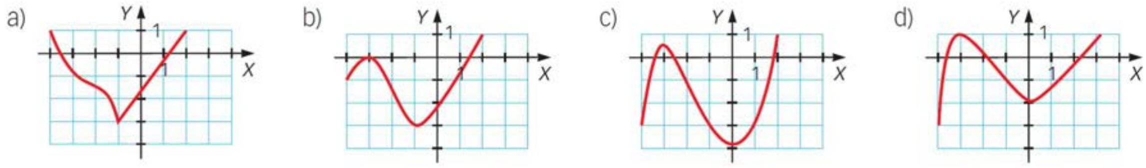

b) Una función es periódica de período $T$ si $f(x) = f(x + T)$.

Si la función es siempre creciente, tenemos que $f(x) < f(x + T)$, para todo $T > 0$. Entonces no puede ser periódica.

c) Si es simétrica respecto del eje $X$ no es función, porque habría más de un posible valor de $y$ para un único valor de $x$.

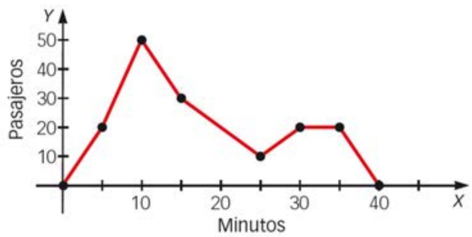
**73.** **Identifica la gráfica que cumple:**

- **Pasa por $(-1, -3)$ y $(2, 1)$.**
- **Crece hasta $x = -3$ y desde $x = 0$.**
- **Decrece entre $x = -3$ y $x = 0$.**




La gráfica a la que se refiere el enunciado es la c).

**74.** **La gráfica muestra el número de pasajeros de un autobús urbano a lo largo de sus paradas.**




a) ¿Cuántos pasajeros van en el autobús después de diez minutos en circulación?

b) ¿En qué momento había menos pasajeros?

c) ¿Cuánto tarda en realizar un viaje completo?

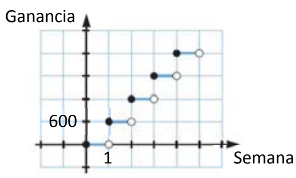
a) 50 pasajeros.

b) Al inicio y al final del trayecto, ya que hay 0 pasajeros.

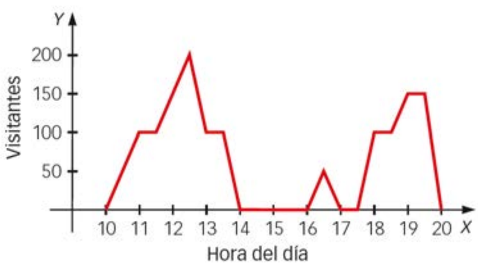
Durante el trayecto hay un mínimo tras 25 minutos de circulación.

c) 40 minutos.

**75.** **Un artesano fabrica relojes que vende a 600 € cada uno. Si emplea una semana en fabricar cada reloj, representa la función *tiempo-ganancia* y determina sus puntos de discontinuidad.**




**76.** **El número de visitantes de un museo a lo largo de un día se muestra en la siguiente gráfica.**



a) ¿Cuál es el horario del museo?

b) ¿En qué momento hay más visitantes?

c) ¿Cuál es el número máximo de visitantes?

d) Indica los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

e) ¿En qué períodos había más de 100 personas en el museo?

f) ¿En algún momento, mientras permanecía abierto el museo, se ha quedado vacío?

a) De 10 a 20 (es decir, de 10 de la mañana a 8 de la tarde).

b) A las 12:30.

c) 200 visitantes.

d) El número de visitantes crece de 10 a 11, de 11:30 a 12:30, de 16:00 a 16:30, de 17:30 a 18:00 y de 18:30 a 19:00. Y decrece de 12:30 a 13:00, de 13:30 a 14:00, de 16:30 a 17:00 y de 19:30 a 20:00.

e) Ha habido más de 100 personas de 11:30 a 13:00 y de 18:30 a 19:30.

f) Sí, de 14:00 a 16:00 y de 17:00 a 17:30.

## DEBES SABER HACER

**1. Considera la relación que a cada número natural impar menor que 50 le asigna su doble más 2. Contesta razonadamente.**

a) ¿Esta relación es una función?

b) Escribe su expresión algebraica.

c) Construye una tabla de 10 valores.

a) Sí, pues para cada posible valor de $x$ solo existe un posible valor de $y$.

b) $y = 2x + 2$, donde $x$ es natural, impar y menor que 50.

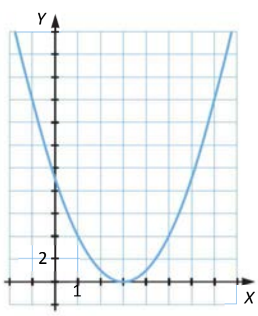
c)

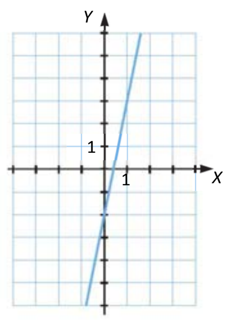
| $x$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 21 | 31 | 41 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 44 | 64 | 84 | 100 |

**2. Completa en tu cuaderno las tablas de valores y realiza la representación gráfica.**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = (x - 3)^2$ | **4** | **1** | **0** | **1** | **4** |

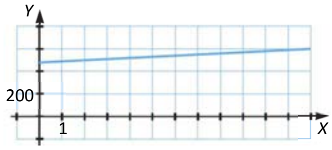
| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x) = 5x - 2$ | **–14** | **–7** | **–2** | **3** | **8** |



**3.** **Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 € y, por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión. Dibuja la gráfica que expresa la ganancia en función del número de muebles vendidos.**

$y = 10x + 480$




**4.** **Halla los puntos de corte de estas funciones.**

a) $f(x) = -x^2 + 6$  b) $g(x) = \dfrac{4 - 5x}{2}$

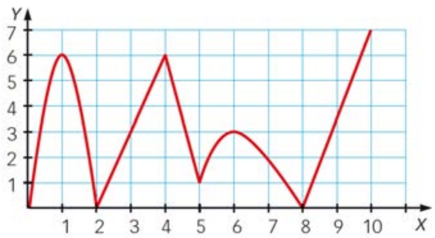
a) Puntos de corte con el eje *X:* $-x^2 + 6 = 0 \rightarrow x = +\sqrt{6}$ y $x = -\sqrt{6}$. Los puntos de corte son $(\sqrt{6}, 0)$ y $(-\sqrt{6}, 0)$.

Puntos de corte con el eje *Y:* $x = 0 \rightarrow -0^2 + 6 = 6$. El punto de corte es (0, 6).

b) Puntos de corte con el eje *X:* $\dfrac{4-5x}{2} = 0 \rightarrow x = 4/5$. El punto de corte es (4/5, 0).

Puntos de corte con el eje *Y:* $x = 0 \rightarrow \dfrac{4-5\cdot 0}{2} = 2$. El punto de corte es (0, 2).

**5.** **Observa la gráfica correspondiente a una función.**




a) Señala su dominio y su recorrido.

b) ¿Es una función continua?

c) Estudia su crecimiento y su decrecimiento.

d) Señala sus máximos y mínimos, si los tiene.

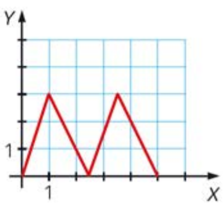
a) Dom $f = [0, 10]$  Im $f = [0, 7]$

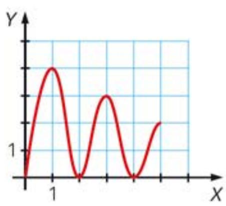
b) Sí, es continua.

c) Crece en $(0, 1) \cup (2, 4) \cup (5, 6) \cup (8, 10)$. Decrece en $(1, 2) \cup (4, 5) \cup (6, 8)$.

d) Excluyendo los extremos, hay máximo en $x = 1$, $x = 4$ y $x = 6$ y hay mínimos en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

**6.** **Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.**

a)


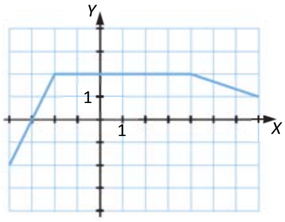

b)



La gráfica a) es de una función periódica, de período 2,5.

**7.** **Representa una función con estas características.**

- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- **Pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$.**
- **Es creciente hasta $x = -2$, constante en el intervalo $(-2, 4)$ y decreciente a partir de $x = 4$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:




## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**77.** **Un avión comercial suele volar a una altura que está entre los 30 000 y los 40 000 pies; teniendo en cuenta que un pie son aproximadamente 0,3 m, esto sería entre unos 9 000 y 12 000 m. La altura máxima que puede alcanzar se conoce como techo de vuelo.**

**De todas formas, la altura que llevan los aviones depende de muchos factores, como las limitaciones de la ruta por cuestiones del tráfico aéreo, el peso del avión, los vientos…**

**Un avión tarda de 15 a 20 minutos en alcanzar la altitud adecuada, y para el descenso necesita en torno a 20 minutos más.**

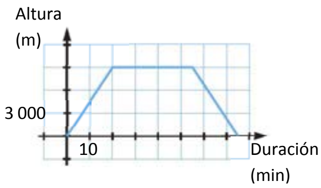
- **Dibuja una gráfica que relacione el tiempo del viaje, en minutos, y la altura del vuelo, en metros, de los siguientes vuelos.**

**a)** **Puente aéreo Madrid/Barcelona. Altura máxima 30 000 pies, duración del vuelo 1 hora 15 minutos.**

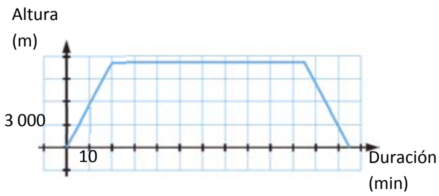
**b)** **Viaje de Milán/Madrid. Altura máxima 37 000 pies, duración del vuelo 2 horas 5 minutos.**

**c)** **Viaje Barcelona/Ibiza. Vuelo de 50 minutos, altura máxima 20 000 pies.**

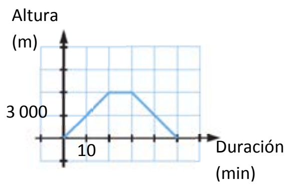
a)




b)

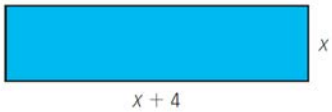



c)

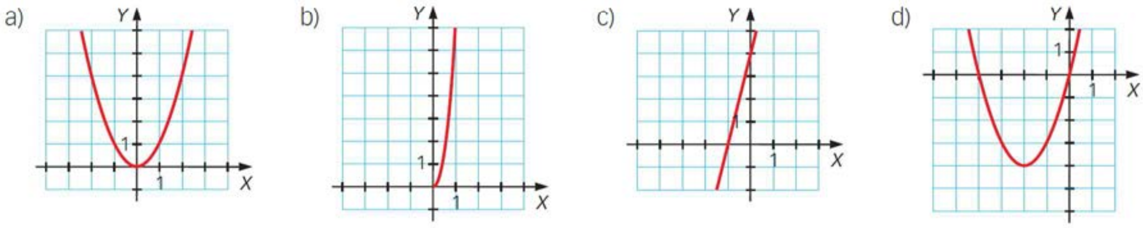


# FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**78.** **Considera el rectángulo cuyo ancho es $x$ y cuyo largo es $x + 4$.**




**Averigua cuál de las gráficas es la que corresponde a la función que asigna a cada valor de $x$ el área del rectángulo.**




Es la gráfica b). Las otras independientemente de si los valores se adecúan o no, no son posibles, ya que $x$ no puede tomar valores negativos, pues es una distancia.

**79.** **Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj desde las 0:00 horas hasta las 2:00 horas. ¿Cuáles son los máximos y los mínimos?**

| Minutero | Horaria |
|---|---|
| 60 min → 360º | 12 · 60 min → 360º |
| 1 min → $x$ | 1 min → $y$ |

$x = 6º$. La aguja del minutero recorre 6º cada minuto. $y = 0,5º$. La aguja horaria recorre 0,5º cada minuto.

Vemos el ángulo que se forma cada 15 minutos.

A las 0:00, ángulo de 0º

A las 0:15, minutero: 6 · 15 = 90º y horaria 0,5 · 15 = 7,5º, ángulo 90 – 7,5 = 82,5º

A las 0:30, minutero: 6 · 30 = 180º y horaria 0,5 · 30 = 15º, ángulo 180 – 15 = 165º

A las 0:45, minutero: 6 · 45 = 270º y horaria 0,5 · 45 = 22,5º, ángulo 270 – 22,5 = 247,5º

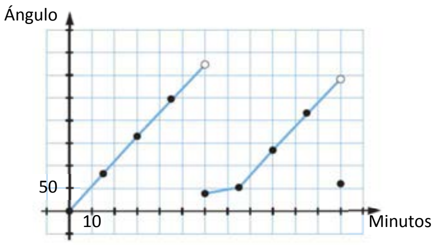
A las 1:00, minutero: 0º y horaria 0,5 · (1 · 60) = 30º, ángulo 30º

A las 1:15, minutero: 6 · 15 = 90º y horaria 0,5 · (1 · 60 + 15) = 37,5º, ángulo 90 – 37,5 = 52,5º

A las 1:30, minutero: 6 · 30 = 180º y horaria 0,5 · (1 · 60 + 30) = 45º, ángulo 180 – 45 = 135º

A las 1:45, minutero: 6 · 45 = 270º y horaria 0,5 · (1 · 60 + 45) = 52,5º, ángulo 270 – 52,5 = 217,5º

A las 2:00, minutero: 0º y horaria 0,5 · (2 · 60) = 60º, ángulo 60º



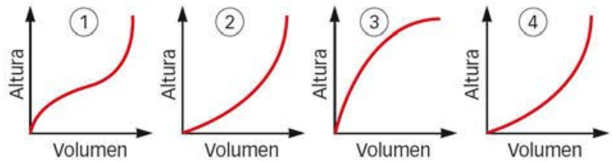

**80.** **¿Cuántos puntos de corte puede tener una función con el eje $Y$? ¿Y con el eje $X$?**

Con el eje $X$ infinitos, pero con el eje $Y$ solo uno, ya que de tener más querría decir que a $x = 0$ le corresponde más de un valor, con lo cual, no sería función.

**81.** **Una función, ¿puede ser simétrica respecto del eje *X*? Razona tu respuesta.**

No, puesto que si es simétrica respecto del eje *X* a cada valor de *x* le corresponde más de un valor en *y*, y por tanto no es función.

**82.** **¿Qué gráfica corresponde al llenado de cada frasco?**




El frasco amarillo se corresponde con 2 o 4.

El frasco rojo no se corresponde con ninguna.

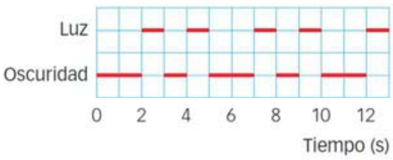
El frasco azul se corresponde con 1.

El frasco verde se corresponde con 3.

## PRUEBAS PISA

**83.** **Los faros son torres con un foco luminoso en la parte superior. Los faros ayudan a seguir su rumbo durante la noche cuando navegan cerca de la costa. Un faro emite destellos de luz según una secuencia regular fija. Cada faro tiene su propia secuencia.**

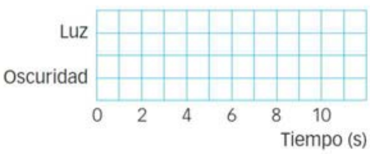
**En el diagrama de abajo se puede ver la secuencia de un faro concreto. Los destellos de luz alternan con períodos de oscuridad.**




**Se trata de una secuencia regular. Después de algún tiempo, la secuencia se repite.**

**Se llama período de la secuencia al tiempo que dura un ciclo completo, antes de que comience a repetirse. Cuando se averigua el período de la secuencia, es fácil ampliar el diagrama para los siguientes segundos, minutos o incluso horas.**

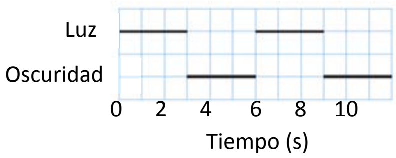
- **¿Cuánto dura el período de la secuencia de este faro?**
- **¿Durante cuántos segundos emite este faro destellos de luz a lo largo de 1 minuto?**
- **Copia en tu cuaderno la cuadrícula de abajo, y traza el gráfico de una posible secuencia de destellos de luz de un faro que emita 30 segundos de destellos de luz cada minuto. El período de esta secuencia debe ser de 6 segundos.**




*(Prueba PISA 2003)*

El período dura 5 segundos.

En 5 segundos emite destellos 2 segundos. En 1 minuto hay $60 : 5 = 12$ grupos de 5 segundos, emitirá destellos $12 \cdot 2 = 24$ segundos.



# Funciones lineales y cuadráticas

12

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Halla la solución de estas ecuaciones.**

a) $-2x + 8 = 2$　　c) $4x - 16 = -5x + 2$

b) $6x - 8 = -20$　　d) $-13 = 8 + 7x$

a) $-2x + 8 = 2 \rightarrow 8 - 2 = 2x \rightarrow x = 3$

b) $6x - 8 = -20 \rightarrow 6x = -20 + 8 \rightarrow x = -2$

c) $4x - 16 = -5x + 2 \rightarrow 4x + 5x = 2 + 16 \rightarrow x = 2$

d) $-13 = 8 + 7x \rightarrow -13 - 8 = 7x \rightarrow x = -3$

**2. Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$　　c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + x - 12 = 0$　　d) $x^2 - 8x - 10 = 0$

a) $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 25}}{2} = 5$

b) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

d) $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \dfrac{8 \pm 10{,}2}{2} = \begin{cases} x = 9{,}1 \\ x = -1{,}1 \end{cases}$

## VIDA COTIDIANA

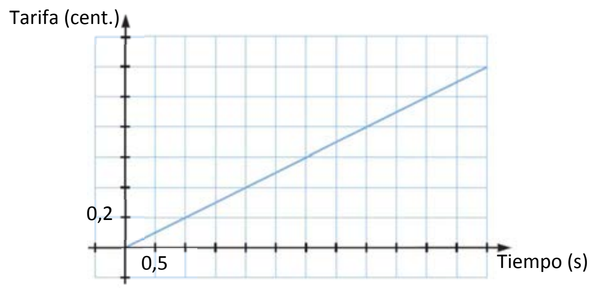
**En las tarifas de móviles, por regla general, el precio suele incluir una cuota fija más un coste por minuto de llamada. Una de las reivindicaciones habituales de las asociaciones de consumidores es que el coste se establezca por segundos.**

- **Los datos de un estudio reflejan que si se tarifara por segundos, el coste medio del segundo sería de 0,2 céntimos. ¿Cuánto costaría una llamada de 25 segundos? ¿Y una de 1 minuto y 14 segundos?**

**Representa mediante una gráfica el tiempo de la llamada y su coste.**

Si no tenemos en cuenta la cuota fija, una llamada de 25 segundos costaría $25 \cdot 0{,}2 = 5$ céntimos y de 1 minuto y 14 segundos costaría $74 \cdot 0{,}2 = 14{,}8$ céntimos.

La gráfica es:

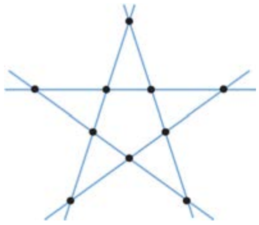


## RESUELVE EL RETO

**Comienzo a escalar una montaña a las 9:00 h y llego a la cima a las 17:00 h. Duermo en la cima y a la mañana siguiente comienzo el descenso a las 9:00 h y llego a la base a las 17:00 h. Estoy seguro de que ha habido algún punto del camino por donde he pasado a la misma hora los dos días.**

Suponiendo que las velocidades de subida y bajada son iguales, a las 13:00 h he pasado por el mismo punto del camino.

**Coloca 10 monedas de tal manera que formen 5 filas con 4 monedas en cada fila.**



**Una función cuadrática pasa por los puntos (3, −1) y (11, −1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Y la abscisa del vértice?**

El eje de simetría es la recta $x = 7$.

La abscisa del vértice se sitúa en el eje de simetría. Por tanto, $x_{\text{Vértice}} = 7$.

**Una catapulta lanza un proyectil con una trayectoria parabólica, el proyectil alcanza una altura de 40 m y recorre una distancia sobre la horizontal de 300 m. ¿Cuánto lleva recorrido al alcanzar su altura máxima?**

El eje de simetría está en la mitad de la trayectoria. Por tanto, alcanza su máxima altura a los 150 m.

## ACTIVIDADES

**1. Identifica las funciones lineales y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.**

a) $y = x - 2$

b) $y = \dfrac{-x + 7}{x}$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = 4x - 1$

e) $y = \dfrac{6}{x}$

f) $y = 4 - x$

a) Es función lineal de pendiente 1 y ordenada en el origen –2.

b) No es función lineal.

c) Es función lineal de pendiente –2 y ordenada en el origen 5.

d) Es función lineal de pendiente 4 y ordenada en el origen –1.

e) No es función lineal.

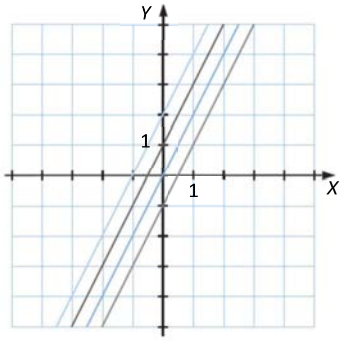
f) Es función lineal de pendiente –1 y ordenada en el origen 4.

**2.** **¿Es creciente o decreciente una función lineal que pasa por (1, −2) y su ordenada en el origen es −4?**

La función será de la forma $y = mx - 4$. Además, sabemos que $-2 = m \cdot 1 - 4 \rightarrow m = 2$.

La pendiente es positiva, de modo que es creciente.

**3.** **Representa la función lineal $y = 2x + n$ para $n = 1$, $n = 2$, $n = -1$ y $n = 0$. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?**




Son paralelas (de izquierda a derecha son: $n = 2$, $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$).

**4.** **Contesta a las siguientes preguntas.**

a) ¿Cuántas funciones lineales tienen pendiente 2?

b) ¿Cuántas funciones lineales de pendiente 2 cortan al eje *Y* en el punto (0, 5)?

c) ¿Alguna función lineal de pendiente 2 corta al eje *X* en el punto (1, 0)?

a) Infinitas, ya que son todas las de la forma $y = 2x + n$, pudiendo asignar a $n$ cualquier valor.

b) Solo una, la que cumple que $5 = 2 \cdot 0 + n \rightarrow n = 5$, es decir, $y = 2x + 5$.

c) Sí, la que cumple que $0 = 2 \cdot 1 + n \rightarrow n = -2$, es decir, $y = 2x - 2$.

**5.** **Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa e indica la pendiente de cada una de ellas.**

a) $y = 2x$ c) $y = -x$ e) $y = -\dfrac{1}{7}x$

b) $y = \dfrac{x}{3}$ d) $y = \dfrac{4x}{5}$ f) $y = 10x$

a) La pendiente es 2.

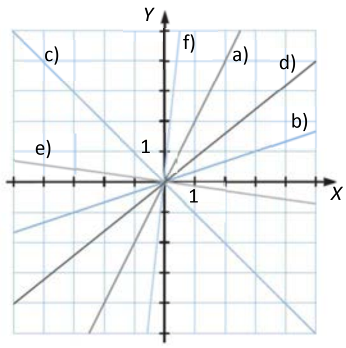
b) La pendiente es 1/3.

c) La pendiente es −1.

d) La pendiente es 4/5.

e) La pendiente es −1/7.

f ) La pendiente es 10.



**6.** **Pon dos ejemplos de función de proporcionalidad directa creciente y otros dos de decreciente.**

Proporcionalidad directa creciente: $y = x$ e $y = 7x$.

Proporcionalidad directa decreciente: $y = -x$ e $y = -7x$.

**7.** **¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la función de proporcionalidad directa cuya pendiente es $\frac{5}{2}$?**

a) (0, 5) b) (2, 0) c) (2, 5)

La función es $y = \frac{5}{2}x$. Comprobamos cuáles pertenecen.

a) $x = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 0 = 0$. El punto (0, 5) no pertenece a la función.

b) $x = 2 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$. El punto (2, 0) no pertenece a la función.

c) $x = 2 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$. El punto (2, 5) pertenece a la función.

**8.** **Da la expresión algebraica de una función de proporcionalidad directa que pase por (2, −4).**

$y = mx$, si pasa por (2, −4) cumple que $-4 = m \cdot 2 \rightarrow m = -2$.

La función es $y = -2x$.

**9.** **Si la representación gráfica de una función es una línea recta que pasa por tres de los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas, ¿es una función lineal o de proporcionalidad directa?**

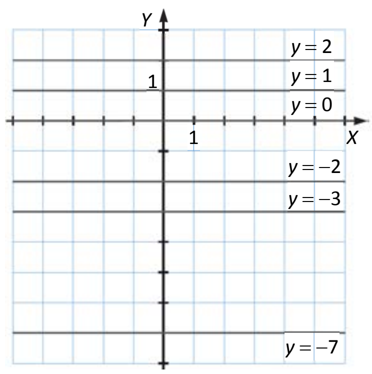
Es una función lineal, ya que una de proporcionalidad directa pasa siempre por el origen, de modo que solo pasaría por dos cuadrantes.

**10.** **Representa las siguientes rectas.**

a) $y = -7$ d) $y = 2$

b) $y = 0$ e) $y = -2$

c) $y = 1$ f) $y = -3$



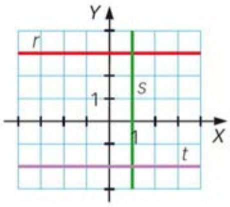
**11. Escribe la ecuación de la función constante que pasa por cada uno de estos puntos.**

a) (0, 6) b) (1, −3) c) (−2, 5) d) (4, 0)

a) $y = 6$ c) $y = 5$

b) $y = -3$ d) $y = 0$

**12. Determina la ecuación de las rectas de la gráfica y calcula las coordenadas de los puntos de corte entre ellas.**




*r*: $y = 3$ *s*: $x = 1$ (no es una función) *t*: $y = -2$

El punto de corte de *r* y *s* es (1, 3) y el de *s* y *t* (1, –2). Las rectas *r* y *t* no se cortan, son paralelas.

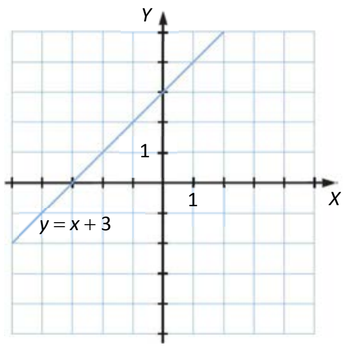
**13. Halla la ecuación de la recta paralela al eje *Y* que pasa por el punto (2, −9).**

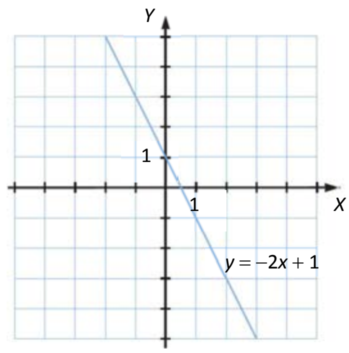
Si es paralela al eje *Y*, será de la forma $x = m$. Dado que pasa por (2, –9), la recta es $x = 2$.

**14. Completa en tu cuaderno estas tablas y representa gráficamente la función.**

| $x$ | 1 | **0** | **–4** | −1 |
|---|---|---|---|---|
| $y = x + 3$ | **4** | 3 | −1 | **2** |

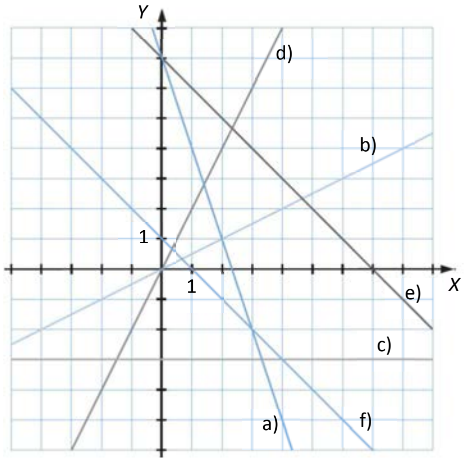
| $x$ | **–1** | 0 | 2 | **1** |
|---|---|---|---|---|
| $y = -2x + 1$ | 3 | **1** | **–3** | −1 |



**15.** **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = -3x + 7$
d) $y = 2x$
b) $y = 0{,}5x$
e) $y = -x + 7$
c) $y = -3$
f) $y = -x + 1$




**16.** **Calcula, para la función $y = -2x + 3$, la ordenada que corresponde a cada uno de estos valores de la abscisa.**

a) $x = 0$
c) $x = \frac{-5}{4}$
e) $x = \frac{3}{2}$
b) $x = 2$
d) $x = -1$
f) $x = -3$

a) $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$
d) $y = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$
b) $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
e) $y = -2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0$
c) $y = -2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 = \frac{11}{2}$
f) $y = -2 \cdot (-3) + 3 = 9$

**17.** **Para la función $y = 4x - 1$, calcula la abscisa que corresponde a estos valores de la ordenada.**

a) $y = 0$
c) $y = -2$
e) $y = -5$
b) $y = 3$
d) $y = 7$
f) $y = -6$

a) $0 = 4x - 1 \rightarrow x = 1/4$
c) $-2 = 4x - 1 \rightarrow x = -1/4$
e) $-5 = 4x - 1 \rightarrow x = -1$
b) $3 = 4x - 1 \rightarrow x = 1$
d) $7 = 4x - 1 \rightarrow x = 2$
f) $-6 = 4x - 1 \rightarrow x = -5/4$

**18.** **¿Pertenecen estos puntos a la función $y = \frac{x-2}{3}$?**

a) $(0, -2)$
b) $(-1, 1)$
c) $(5, 1)$
d) $(-1, -1)$

a) $x = 0 \rightarrow y = \frac{0-2}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow (0, -2)$ no pertenece a la función dada.

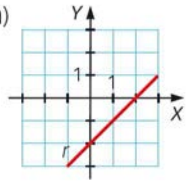
b) $x = -1 \rightarrow y = \frac{-1-2}{3} = -1 \rightarrow (-1, 1)$ no pertenece a la función dada.

c) $x = 5 \rightarrow y = \frac{5-2}{3} = 1 \rightarrow (5, 1)$ pertenece a la función dada.

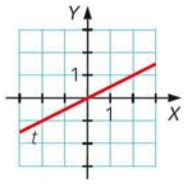
d) $x = -1 \rightarrow y = -1 \rightarrow (-1, -1)$ pertenece a la función dada.

**19.** **Halla la ecuación de estas funciones lineales.**

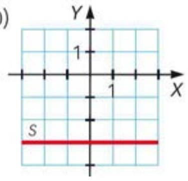
a)



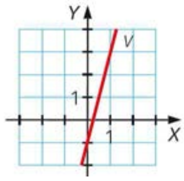

c)




b)




d)




a) Pasa por los puntos (2, 0) y (0, –2).
$0 = m \cdot 2 + n \qquad -2 = m \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad 2m + n = 0$ y $n = -2 \rightarrow 2m - 2 = 0 \rightarrow m = 1$. La ecuación es $y = x - 2$.

b) Es una recta horizontal, su ecuación es $y = -3$.

c) Pasa por el origen, es de la forma $y = mx$.
Pasa por el punto (2, 1) $\rightarrow 1 = m \cdot 2 \rightarrow m = 1/2$. La ecuación es $y = x/2$.

d) Pasa por los puntos (0, –1) y (1, 3).
$-1 = m \cdot 0 + n \qquad 3 = m \cdot 1 + n \quad \rightarrow \quad n = -1$ y $m = 4 \rightarrow$ La ecuación es $y = 4x - 1$.

**20.** **Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, -2)$, traza en un sistema de coordenadas las rectas *r*, *s* y *t* y responde.**

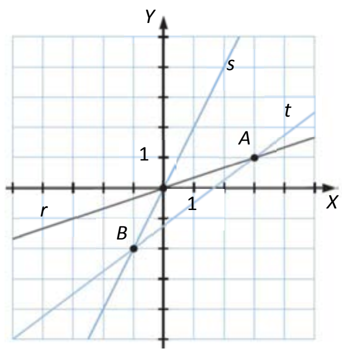
***r*** **→ Recta que pasa por *A* y el origen de coordenadas.**

***s*** **→ Recta que pasa por *B* y el origen de coordenadas.**

***t*** **→ Recta que pasa por *A* y *B*.**

a) Determina la ecuación de las rectas *r*, *s* y *t*.

b) Determina la ecuación de la línea recta que es paralela al eje *X* pasando por *A* y de la línea recta que es paralela al eje *Y* pasando por *B*.




a) Como *r* pasa por el origen y por *A* cumple que $1 = m \cdot 3 \rightarrow m = 1/3$, así la ecuación de *r* es $y = x/3$.

Como *s* pasa por el origen y por *B* cumple que $-2 = m \cdot (-1) \rightarrow m = 2$, así la ecuación de *s* es $y = 2x$.

Como *t* pasa por *A* y *B*:
$1 = m \cdot 3 + n, -2 = m \cdot (-1) + n. \quad \rightarrow \quad m = 3/4, n = -5/4$. La ecuación es $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

b) La ecuación de la recta paralela al eje *X* que pasa por *A* es $y = 1$.

La ecuación de la recta paralela al eje *Y* es $x = -1$.

**21. Determina la ecuación de la función lineal cuya pendiente es 5 y cuya ordenada en el origen es −3.**

$y = 5x - 3$

**22. Determina la ecuación de estas rectas.**

a) Su pendiente es −3 y pasa por el punto (1, −2).

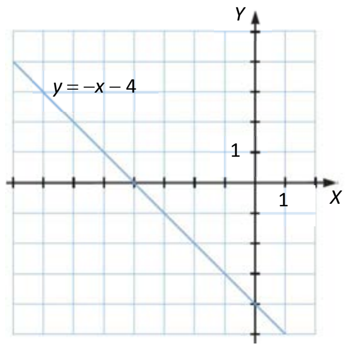
b) Pasa por los puntos (−1, −3) y (4, −2).

a) $-2 = -3 \cdot 1 + n \rightarrow n = 1$. La ecuación de la recta es $y = -3x + 1$.

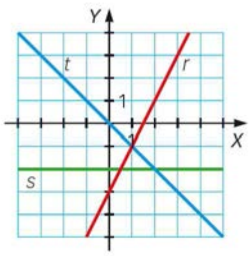
b) $y = -3 + \frac{-2-(-3)}{4-(-1)}\,(x-(-1)) = -3 + \frac{1}{5}\,(x+1) \rightarrow 5y = -15 + x + 1 \rightarrow x - 5y - 14 = 0$

**23. Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta cuya pendiente es −1 y pasa por el punto (0, −4). Represéntala.**

$y = -4 - 1(x - 0) \rightarrow y = -x - 4$




**24. Determina la ecuación punto-pendiente de las rectas representadas en los ejes de coordenadas a la derecha.**




La recta *r* pasa por (0, −3) y (2, 1). Su pendiente es $\frac{1-(-3)}{2-0} = 2$. La ecuación punto–pendiente es $y = -3 + 2\,(x - 0) = 2x - 3$.

La recta *s* es horizontal, no tiene pendiente, su ecuación es $y = -2$.

La recta *t* pasa por (0, 0) y por (1, −1). Su pendiente es $\frac{-1-0}{1-0} = -1$. La ecuación punto–pendiente es $y = -x$.

**25.** **Calcula la ecuación general de estas rectas.**

a) $y = x + 2$

b) $y = -x$

c) $y = 1$

d) Recta con pendiente 3 y que pasa por el punto $(-2, -2)$.

e) Recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-4, -1)$.

a) $x - y + 2 = 0$

b) $x + y = 0$

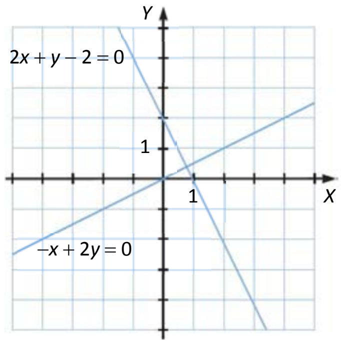
c) $y - 1 = 0$

d) $y = -2 + 3\,(x - (-2)) \rightarrow 3x - y + 4 = 0$

e) $y = 3 + \dfrac{-1-3}{-4-2}\,(x - 2) \rightarrow y = 3 + \dfrac{2}{3}\,(x - 2) \rightarrow 3y = 9 + 2x - 4 \rightarrow 2x - 3y + 5 = 0$

**26.** **Representa estas rectas gráficamente.**

a) $2x + y - 2 = 0$   b) $-x + 2y = 0$

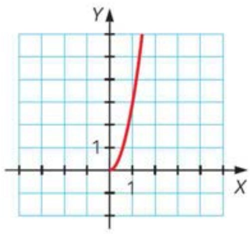



**27.** **¿Cómo expresarías la recta paralela al eje *Y*, $x = 2$, en su forma general? ¿Qué ocurre cuando en la ecuación general de una recta $b = 0$?**

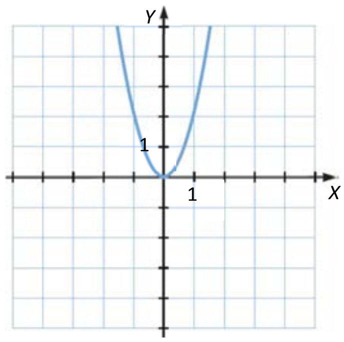
Es $x - 2 = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$.

Si $b$ es 0, no existe el término $y$, de modo que son rectas paralelas al eje $Y$ (y no son funciones).

**28.** **Copia y completa en tu cuaderno esta parábola y señala sus elementos (vértice y eje de simetría) y sus propiedades (orientación de las ramas y tipo de punto que es el vértice).**



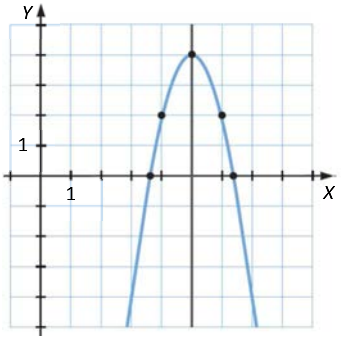

El eje de simetría es el eje $Y$.
El vértice es el punto $(0, 0)$, que es un mínimo, porque las ramas de la parábola van hacia arriba.

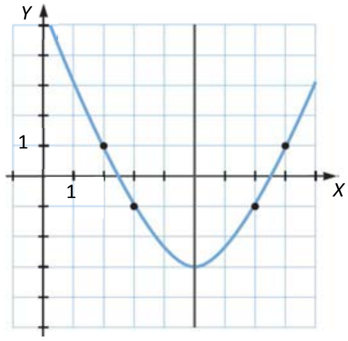


**29. Representa una parábola cuyo eje de simetría es $x = 5$ y que cumple:**

a) Pasa por (4, 2) y $a < 0$.

b) Pasa por (7, −1) y $a > 0$.

a) 


b) 


**30. Si el vértice de una parábola está en (1, 4) y $a > 0$, ¿cuántos puntos de corte tiene con los ejes? ¿Y si $a < 0$?**

Si $a > 0$, las ramas de la parábola van hacia arriba y así no cortará al eje *X* y tendrá un punto de corte con el eje *Y*.

Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo, así que cada una de ellas cortará el eje *X* y además la que esté más a la izquierda tendrá un punto de corte con el eje *Y*.

**31. Calcula el vértice de estas funciones cuadráticas y determina su eje de simetría.**

a) $y = -x^2 + 2x - 5$ c) $y = -x^2 - 6x$

b) $y = -2x^2 + 4x - 3$ d) $y = 3x^2$

a) Su eje de simetría es $x = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$ Su vértice es $\left(1, \frac{-2^2 + 4\cdot(-1)\cdot(-5)}{4\cdot(-1)}\right) = (1, -4)$.

b) Su eje de simetría es $x = \frac{-4}{2\cdot(-2)} = 1$ Su vértice es $\left(1, \frac{-4^2 + 4\cdot(-2)\cdot(-3)}{4\cdot(-2)}\right) = (1, -1)$.

c) Su eje de simetría es $x = \frac{-(-6)}{2\cdot(-1)} = -3$ Su vértice es $\left(-3, \frac{-(-6)^2 + 4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}\right) = (-3, 9)$.

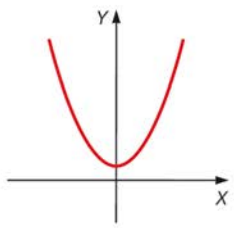
d) Su eje de simetría es $x = \frac{0}{2\cdot 3} = 0$ Su vértice es $\left(0, \frac{-0^2 + 4\cdot 3\cdot 0}{4\cdot 3}\right) = (0, 0)$.

**32. Determina el eje de simetría de la parábola que tiene como puntos de corte con el eje *X*:**

a) (0, 0) y (2, 0) b) (−2, 0) y (2, 0) c) (1, 0) y (4, 0)

a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = 2{,}5$

**33. Explica cómo son los coeficientes de la función cuya gráfica es esta parábola. ¿Hay alguno que sea cero? ¿Qué pasaría si cambiamos de signo a todos?**



Como las ramas están hacia arriba, tenemos que $a > 0$.

Como el eje de simetría es la recta $x = 0$, se tiene que $\frac{-b}{2a} = 0$, es decir, $b = 0$.

El punto del corte con el eje *Y*, $(0, c)$, está en la parte positiva del eje, de modo que $c > 0$.

Si les cambiásemos a todos el signo, tendríamos la simétrica de esta parábola respecto del eje *X*.

**34. Representa gráficamente estas funciones cuadráticas.**

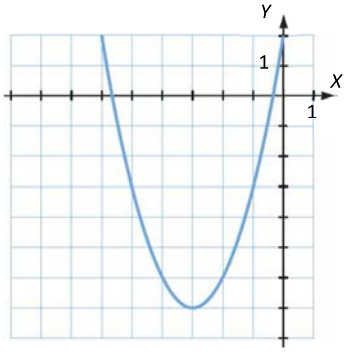
a) $y = x^2 + 6x + 2$
b) $y = -2x^2 + 4x - 5$
c) $y = 3x^2 + 6x - 4$
d) $y = -x^2 - 4x + 1$
e) $y = -2x^2 - 8x + 3$
f) $y = x^2 - 4x + 5$

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$  Vértice: $\left(\frac{-6}{2\cdot 1}, \frac{-6^2 + 4\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 1}\right) = (-3, -7)$  $a > 0 \rightarrow (-3, -7)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x = -0{,}35 \\ x = -5{,}65 \end{cases}$. Los puntos son (–0,35; 0) y (–5,65; 0).

Puntos de corte con el eje *Y*: (0, 2)

| *x* | –5 | –4 | –2 | –1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| *y* | –3 | –6 | –6 | –3 | 9 |

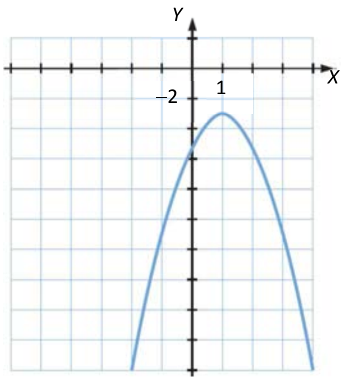



b) $a = -2$, $b = 4$, $c = -5$  Vértice: $\left(\frac{-4}{2\cdot(-2)}, \frac{-4^2 + 4\cdot(-2)\cdot(-5)}{4\cdot(-2)}\right) = (1, -3)$  $a < 0 \rightarrow (1, -3)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{-4}$. No corta al eje *X*.

Puntos de corte con el eje *Y*: (0, –5)

| *x* | –2 | –1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *y* | –21 | –11 | –5 | –11 | –21 |

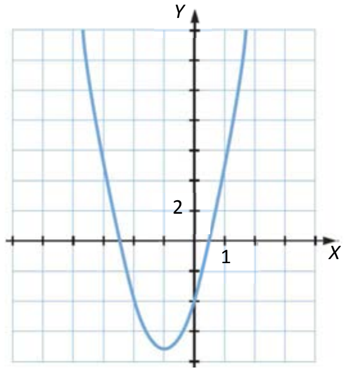


c) $a = 3$, $b = 6$, $c = -4$ Vértice: $\left(\frac{-6}{2\cdot 3}, \frac{-6^2+4\cdot 3\cdot(-4)}{4\cdot 3}\right) = (-1,-7)$ $a > 0 \longrightarrow (-1, -7)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje $X$: $x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \begin{cases} x = 0{,}53 \\ x = -2{,}53 \end{cases}$. Los puntos son (0,53; 0) y (–2,53; 0).

Puntos de corte con el eje $Y$: (0, –4)

| $x$ | –3 | –2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | –4 | 5 | 20 | 41 |

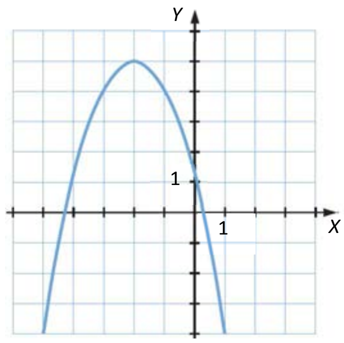



d) $a = -1$, $b = -4$, $c = 1$ Vértice: $\left(\frac{-(-4)}{2\cdot(-1)}, \frac{-(-4)^2+4\cdot(-1)\cdot 1}{4\cdot(-1)}\right) = (-2,5)$ $a < 0 \longrightarrow (-2, 5)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje $X$: $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = \begin{cases} x = -4{,}24 \\ x = 0{,}24 \end{cases}$. Los puntos son (0,24; 0) y (–4,24; 0).

Puntos de corte con el eje $Y$: (0, 1)

| $x$ | –4 | –3 | –1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 4 | –4 | –11 |

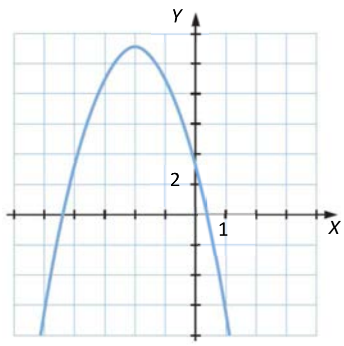



e) $a = -2$, $b = -8$, $c = 3$ Vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2\cdot(-2)}, \frac{-(-8)^2+4\cdot(-2)\cdot 3}{4\cdot(-2)}\right) = (-2,11)$ $a < 0 \longrightarrow (-2, 11)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje $X$: $x = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)} = \begin{cases} x = -4{,}35 \\ x = 0{,}35 \end{cases}$. Los puntos son (0,35; 0) y (–4,35; 0).

Puntos de corte con el eje $Y$: (0, 3)

| $x$ | –4 | –3 | –1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 9 | 9 | –7 | –21 |

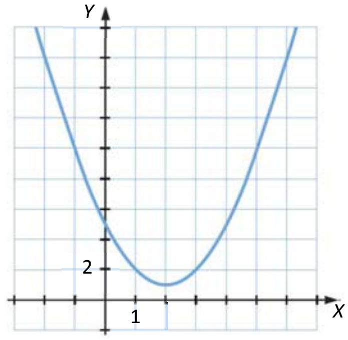


f) $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$ Vértice: $\left(\frac{-(-4)}{2\cdot 1}, \frac{-(-4)^2+4\cdot 1\cdot 5}{4\cdot 1}\right) = (2,1)$ $a > 0 \rightarrow (2, 1)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje $X$: $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$. No corta al eje $X$.

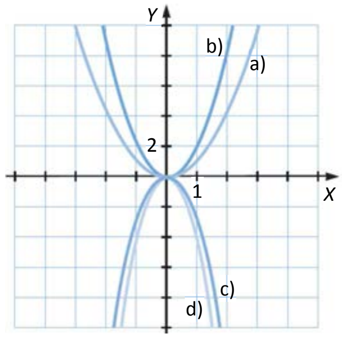
Puntos de corte con el eje $Y$: (0, 5)

| $x$ | −2 | −1 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 17 | 10 | 2 | 2 | 5 |



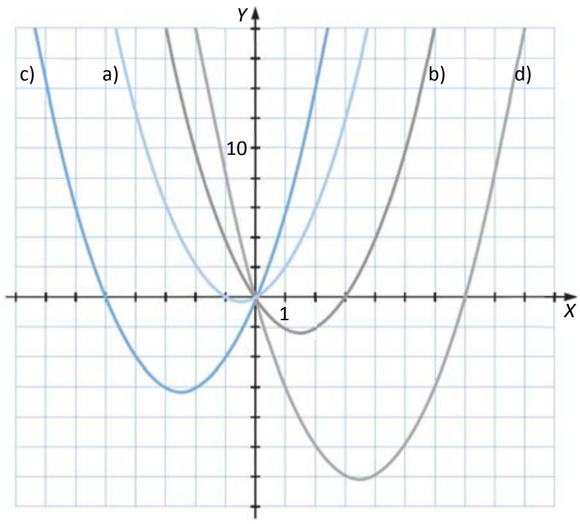

**35.** **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = x^2$
b) $y = 2x^2$
c) $y = -3x^2$
d) $y = -4x^2$




**36.** **Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.**

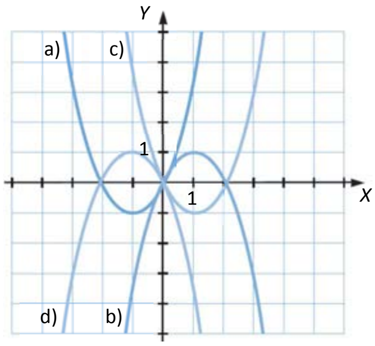
a) $y = x^2 + x$
b) $y = x^2 - 3x$
c) $y = x^2 + 5x$
d) $y = x^2 - 7x$



**37. Representa las parábolas y determina si existe relación entre ellas.**

a) $y_1 = x^2 + 2x$ c) $y_3 = x^2 - 2x$

b) $y_2 = -x^2 + 2x$ d) $y_4 = -x^2 - 2x$




Sí, son la misma parábola solo que trasladada o girada.

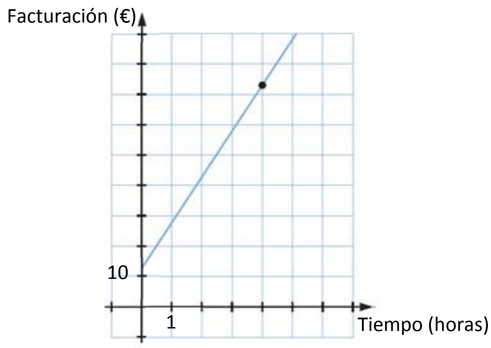
**38. Un fontanero cobra 13 € por la visita a domicilio y 15 € por cada hora de trabajo.**

a) Determina la ecuación de la función que relaciona el dinero que costará la factura de una reparación con el tiempo que le ocupe.

b) Representa gráficamente la función y marca sobre la gráfica el punto que relaciona el coste de la factura con un arreglo que necesita 4 horas.

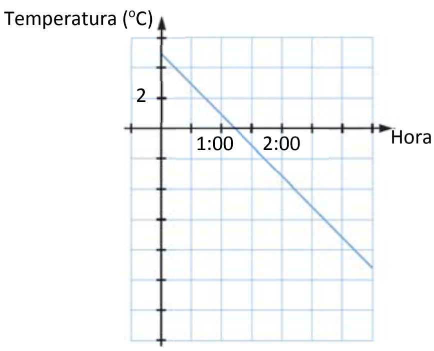
a) $f(x) = 13 + 15x$, donde $x$ es cada hora de trabajo.

b)




**39. La temperatura, en un lugar de la Antártida, a las 12 h es de 5 °C y cada hora baja 4 °C. Expresa esta relación mediante una ecuación y represéntala gráficamente.**

$f(x) = 5 - 4x$



**40.** **En un establecimiento para mayoristas el precio de un producto es 0,6 €/kg, si se compra menos de 10 kg. Si se compran 10 o más kilos, el precio del kilo es un 20% menos. ¿Cuál es la ecuación de la función que relaciona peso y precio?**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}6x & \text{si } x < 10 \\ 0{,}8 \cdot 0{,}6x = 0{,}48x & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

**41.** **El movimiento de una piedra al lanzarse al aire viene dado por la función $y = -6x^2 + 15x$, en la que $x$ es el tiempo, medido en segundos, e $y$ la altura de la piedra, medida en metros. Calcula.**

a) La máxima altura que alcanzará la piedra.

b) En el momento en el que alcanza la altura máxima, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido desde su lanzamiento?

a) Como $a < 0$, el vértice es un máximo.

$$\left(\frac{-15}{2\cdot(-6)}, \frac{-15^2 + 4\cdot(-6)\cdot 0}{4\cdot(-6)}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{75}{8}\right) = (1{,}25;\ 9{,}38)$$

Alcanza 9,38 metros de altura.

b) Han trascurrido 1,25 segundos desde el lanzamiento.

**42.** **Las ecuaciones indican las trayectorias que ha llevado el balón en dos lanzamientos de Cristino Rolán. ¿Qué lanzamiento ha llegado más lejos? ¿Cuál ha alcanzado mayor altura?**

1.er lanzamiento: $y_L = -4x^2 + 14x$

2.º lanzamiento: $y_l = -2(x - 2)^2 + 8$

Desarrollamos primero la ecuación: $-2\,(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2x^2 + 8x$

En los dos casos como $a < 0$, el vértice será un máximo.

Veamos cuál es el vértice para el primer lanzamiento: $\left(\frac{-14}{2\cdot(-4)}, \frac{-14^2 + 4\cdot(-4)\cdot 0}{4\cdot(-4)}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{49}{4}\right) = (1{,}75;\ 12{,}25)$

Veamos cuál es el vértice para el segundo lanzamiento: $\left(\frac{-8}{2\cdot(-2)}, \frac{-8^2 + 4\cdot(-2)\cdot 0}{4\cdot(-2)}\right) = (2,\ 8)$

La mayor altura la alcanza en el segundo lanzamiento, 2 m, pero llega más lejos en el primero, 12,25 m.

**43.** **Escribe la ecuación de una función cuadrática que tenga un máximo en el punto (1, 2).**

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = (1,\ 2)$$

Para que sea máximo, $a < 0$.

Por ejemplo, podría ser $a = -1$, $b = 2$, y entonces tendríamos que:

$$\frac{-2^2 + 4\cdot(-1)\cdot c}{4\cdot(-1)} = 2 \rightarrow -4 - 4c = -8 \rightarrow c = 1$$

Una posible función sería $-x^2 + 2x + 1 = 0$.

# ACTIVIDADES FINALES

**44. Clasifica estas funciones lineales en crecientes o decrecientes y escribe el valor de su pendiente.**

a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x$

c) $y = \frac{x}{3} - 4$

d) $y = -x + 5$

e) $y = 3x$

f) $y = -4 - \frac{x}{4}$

a) Lineal creciente con pendiente 3.

b) Lineal decreciente con pendiente –2.

c) Lineal creciente con pendiente 1/3.

d) Lineal decreciente con pendiente –1.

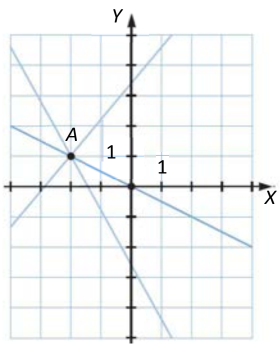
e) Lineal creciente con pendiente 3.

f) Lineal decreciente con pendiente –1/4.

**45. Dibuja en el plano el punto $A(-2, 1)$.**

a) ¿Qué gráficas de funciones lineales pasan por $A$?

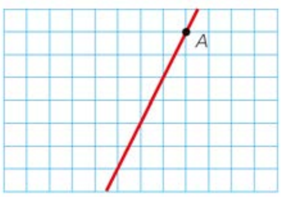
b) ¿Cuántas son de proporcionalidad directa?




a) Infinitas, por un punto pueden pasar infinitas rectas.

b) Solo una, la que pasa por *A* y por (0, 0). Por dos puntos solo pasa una recta.

**46. Este es el gráfico de una función de proporcionalidad directa.**

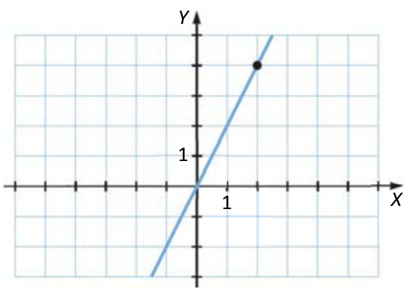



a) Dibuja en tu cuaderno los ejes si la abscisa del punto $A$ es $x = 2$.

b) ¿Cuál es la ordenada del punto $A$?

c) ¿Y la expresión algebraica de la función?

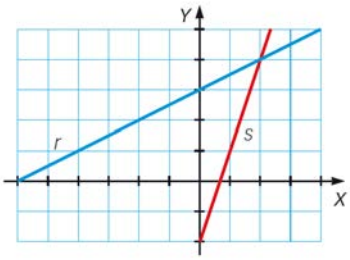
a)




b) La ordenada de *A* es $y = 4$

c) $y = 2x$

**48. Determina la pendiente de estas rectas.**




Consideramos para la recta *r* los puntos (2, 4) y (–2, 2). La pendiente es 2/4 = 1/2.

Consideramos para la recta *s* los puntos (1, 1) y (2, 4). La pendiente es 3/1 = 3.

**49. Indica la pendiente de cada una de estas funciones lineales.**

a) Su gráfica pasa por *A*(2, 4) y *B*(4, 5).
b) Su gráfica pasa por *C*(−1, 3) y *D*(−4, −2).
c) Su gráfica pasa por *O*(0, 0) y *E*(−5, 1).
d) Su gráfica pasa por *F*(0, 3) y *G*(6, 2).
e) Su gráfica pasa por *H*(2, 0) y *I*(0, −5).

a) $m = 1/2$   b) $m = 5/3$   c) $m = -1/5$   d) $m = -1/6$   e) $m = 5/2$

**50. Si la gráfica de una función de proporcionalidad directa pasa por el punto *P*(3, −4), indica por cuáles de los siguientes puntos pasa.**

***A*(3, −6)**   ***C*(2, −3)**   ***E*(−1, −1)**
***B*(−3, 4)**   ***D*(6, −8)**   ***F*(6, 8)**

Por ser de proporcionalidad directa, pasa por (0, 0). De modo que la pendiente será $m = -4/3$. La ecuación de la recta es $y = -4x/3$.

Comprobamos qué puntos pertenecen a la recta:

*A:* $y = -4 \cdot 3/3 = -4 \neq -6$. La función no pasa por *A*.

*B:* $y = -4 \cdot (-3)/3 = 4$. La función pasa por *B*.

*C:* $y = -4 \cdot 2/3 = -8/3 \neq -3$. La función no pasa por *C*.

*D:* $y = -4 \cdot 6/3 = -8$. La función pasa por *D*.

*E:* $y = -4 \cdot (-1)/3 = 4/3 \neq -1$. La función no pasa por *E*.

*F:* $y = -4 \cdot 6/3 = -8 \neq 8$. La función no pasa por *F*.

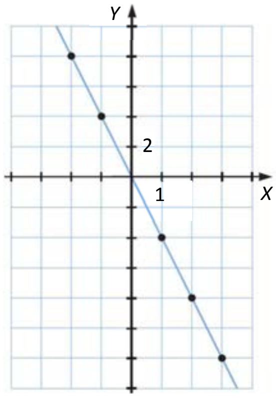
**51. Representa la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto *Q*(1, −4), completa en tu cuaderno la tabla y señala los puntos en la gráfica.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *x* | −2 | | 3 | |
| *y* | | 4 | | −8 |

Si es de proporcionalidad directa, pasa por (0, 0) además de por *Q*. Su pendiente es $m = -4/1 = -4$.

La ecuación de la función es $y = -4x$.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $3$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $8$ | $4$ | $-12$ | $-8$ |




**52. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas y el valor de la ordenada en el origen.**

a) $y = 2x + 4$ c) $y = \dfrac{x-4}{5}$

b) $y = -x$ d) $y = 4x - 1$

El valor de la ordenada en el origen es el punto de corte con el eje *Y*.

a) Punto de corte con el eje *X*: $2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$. Punto $(-2, 0)$
Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 4 = 4$. Punto $(0, 4)$

b) Punto de corte con el eje *X*: $-x = 0 \rightarrow x = 0$. Punto $(0, 0)$
Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow -0 = 0$. Punto $(0, 0)$

c) Punto de corte con el eje *X*: $\dfrac{x-4}{5} = 0 \rightarrow x = 4$. Punto $(4, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$. Punto $(0, -4/5)$

d) Punto de corte con el eje *X*: $4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/4$. Punto $(1/4, 0)$
Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0 - 1 = -1$. Punto $(0, -1)$

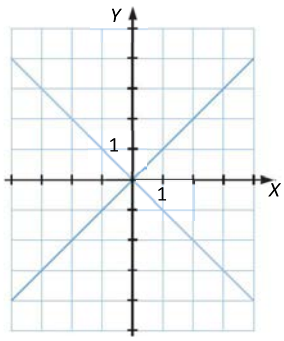
**53. Halla la expresión algebraica de la función lineal que pasa por el origen y su pendiente es:**

a) $m = -3$ b) $m = 5$ c) $m = 1{,}2$ d) $m = -0{,}5$

a) $y = -3x$ b) $y = 5x$ c) $y = 1{,}2x$ d) $y = -0{,}5x$

**54. Representa gráficamente las bisectrices de los cuadrantes y encuentra su expresión algebraica. ¿Son crecientes o decrecientes?**

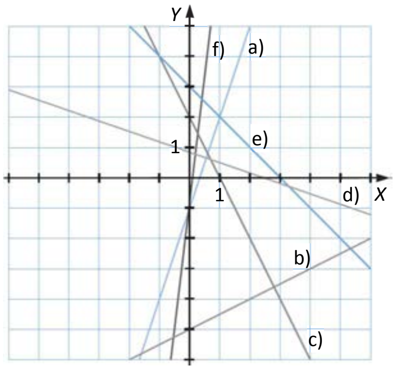
Las expresiones algebraicas son
$y = x$, que es creciente, e $y = -x$, que es decreciente.



**55. Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = 3x - 1$ c) $y = -2x + 2$ e) $y = 3 - x$

b) $y = \frac{x}{2} - 5$ d) $y = \frac{5 - 2x}{6}$ f) $y = 7x - \frac{1}{2}$




**56. Di si los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de la función $f(x) = 3x - 6$ o a la de $g(x) = 4 - 2x$.**

a) $A(0, -6)$ c) $C(1, 2)$ e) $E(3, 3)$

b) $B(2, 0)$ d) $D(-1, 6)$ f) $F(1, -3)$

a) $f(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$, $g(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4 \neq -6$. El punto $A$ pertenece a $f$, pero no pertenece a $g$.

b) $f(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, $g(2) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. El punto $B$ pertenece a $f$ y a $g$.

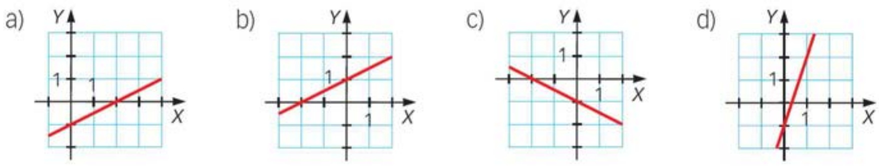
c) $f(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3 \neq 2$, $g(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. El punto $C$ pertenece a $g$, pero no pertenece a $f$.

d) $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 6 = -9 \neq 6$, $g(-1) = 4 - 2 \cdot (-1) = 6$. El punto $D$ pertenece a $g$, pero no pertenece a $f$.

e) $f(3) = 3 \cdot 3 - 6 = 3$, $g(3) = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 3$. El punto $E$ pertenece a $f$, pero no pertenece a $g$.

f) $f(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3$, $g(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \neq -3$. El punto $F$ pertenece a $f$, pero no pertenece a $g$.

**57. ¿Cuál es la representación de $y = -\frac{1}{2}x - 1$?**



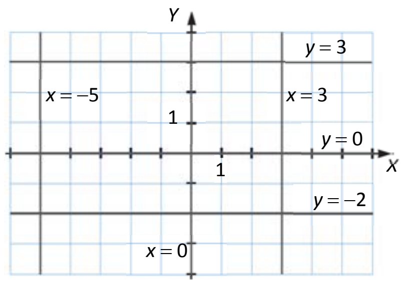

Tiene que ser decreciente, ya que la pendiente es negativa, de modo que no pueden ser ni a) ni b) ni d).

Comprobamos que es c): la recta pasa por (0, –1) y por (–2, 0), es decir, $-\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ y $-\frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = 0$.

De modo que la representación de la función dada efectivamente es c).

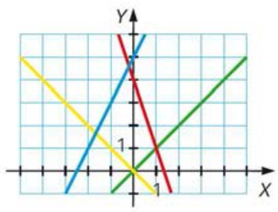
**58. Representa gráficamente e indica cuáles de ellas son funciones y de qué tipo.**

a) $y = 3$
b) $x = 3$
c) $y = 0$
d) $y = -2$
e) $x = -5$
f) $x = 0$




Son funciones constantes a), c) y d).

**59. Escribe la expresión algebraica de las funciones lineales cuya gráfica es la siguiente.**




Recta roja: pasa por (0, 4) y (1, 1), $y = 4 + \frac{1-4}{1-0}(x-0) = 4 - 3x$.

Recta azul: pasa por (0, 5) y (–2, 1), $y = 5 + \frac{1-5}{-2-0}(x-0) = 5 + 2x$.

Recta verde: pasa por (0, 0) y (1, 1), $y = 0 + \frac{1-0}{1-0}(x-0) = x$.

Recta amarilla: pasa por (0, 0) y (–1, 1), $y = 0 + \frac{1-0}{-1-0}(x-0) = -x$.

**60. Calcula la ecuación de la recta cuya pendiente es $-2$ y que pasa por el punto $P(4, -1)$.**

$y = -1 - 2(x-4) = -2x + 7$

**61. Considera los puntos $A(0, 4)$, $B(5, 7)$ y $C(3, 2)$. Determina la ecuación punto-pendiente de cada una de estas rectas.**

a) Recta que pasa por $A$ y $B$.
b) Recta que pasa por el origen y $B$.
c) Recta que pasa por $B$ y $C$.
d) Recta que pasa por el origen y $A$.
e) Recta que pasa por $A$ y $C$.
f) Recta que pasa por el origen y $C$.

a) $y = 4 + \frac{7-4}{5-0}(x-0) = 4 + \frac{3}{5}x$

b) $y = 0 + \frac{7-0}{5-0}(x-0) = \frac{7}{5}x$

c) $y = 7 + \frac{2-7}{3-5}(x-5) = 7 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$

d) $x = 0$

e) $y = 4 + \frac{2-4}{3-0}(x-0) = 4 - \frac{2}{3}x$

f) $y = 0 + \frac{2-0}{3-0}(x-0) = \frac{2}{3}x$

**62. Determina la ecuación punto-pendiente y general de las siguientes rectas.**

a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x$

c) $y = -x + 5$

d) $y = \frac{x}{3} - 4$

e) $y = 3x$

f) $y = -4 - \frac{x}{4}$

a) La recta pasa por el punto (2, 2) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = 2 + 3(x-2)$

Ecuación general: $3x - y - 4 = 0$

b) La recta pasa por el punto (1, –2) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = -2 - 2(x-1)$

Ecuación general: $2x + y = 0$

c) Ecua La recta pasa por el punto (1, 4) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = 4 - 1(x-1)$

Ecuación general: $x + y - 5 = 0$

d) La recta pasa por el punto (3, –3) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = -3 + \frac{1}{3}(x-3)$

Ecuación general: $x - 3y - 12 = 0$

e) La recta pasa por el punto (1, 3) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = 3 + 3(x-1)$

Ecuación general: $3x - y = 0$

f) La recta pasa por el punto (4, –5) ⟶ Ecuación punto-pendiente: $y = -5 - \frac{1}{4}(x-4)$

Ecuación general: $x + 4y + 16 = 0$

**64. Determina el punto de corte de estas funciones lineales; represéntalas para comprobar el resultado.**

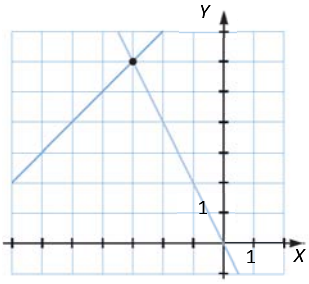
a) $y = x + 9$ $\quad y = -2x$

b) $y = 3x - 5$ $\quad y = 3 - x$

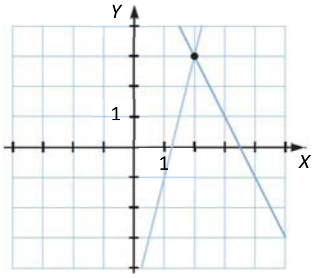
c) $y = 7 - 2x$ $\quad y = 4x - 5$

d) $y = \frac{x+4}{2}$ $\quad y = -x$

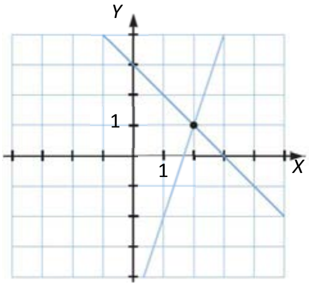
a) $x + 9 = -2x \to x = -3$. Punto de corte $(-3, 6)$



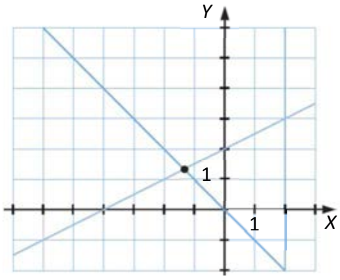

c) $7 - 2x = 4x - 5 \to x = 2$. Punto de corte $(2, 3)$




b) $3x - 5 = 3 - x \to x = 2$. Punto de corte $(2, 1)$




d) $\frac{x+4}{2} = -x \to x = -\frac{4}{3}$. Punto de corte $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$




**65. Obtén la expresión algebraica de estas funciones lineales.**

a) Pasa por $A(-1, 0)$ y es paralela al eje $Y$.

b) Pasa por $B(0, 5)$ y es paralela al eje $X$.

c) Pasa por $C(2, 6)$ y es paralela al eje $X$.

d) Pasa por $D(-4, 1)$ y es paralela al eje $Y$.

a) No es función. Su ecuación es $x = -1$.

b) $y = 5$

c) $y = 6$

d) No es función. Su ecuación es $x = -4$.

**66. Considera la función $f(x) = mx + n$. En cada caso, halla $m$ y $n$ sabiendo que:**

a) $f(1) = -1$ y $f(-1) = 7$

b) $f(0) = -\frac{2}{3}$ y $f(-1) = -1$

c) $f(1) = 1$ y $f(2) = 6$

d) $f(2) = \frac{5}{2}$ y $f(5) = \frac{2}{5}$

a) $f(1) = m \cdot 1 + n = -1$ $\quad f(-1) = m \cdot (-1) + n = 7$. Resolvemos el sistema y $m = -4$ y $n = 3$.

b) $f(0) = m \cdot 0 + n = -2/3$ $\quad f(-1) = m \cdot (-1) + n = -1$. Resolvemos el sistema y $m = 1/3$ y $n = -2/3$.

c) $f(1) = m \cdot 1 + n = 1$ $\quad f(2) = m \cdot 2 + n = 6$. Resolvemos el sistema y $m = 5$ y $n = -4$.

d) $f(2) = m \cdot 2 + n = 5/2$ $\quad f(5) = m \cdot 5 + n = 2/5$. Resolvemos el sistema y $m = -7/10$ y $n = 39/10$.

**67. Halla las expresiones algebraicas de las funciones lineales cuyas gráficas:**

a) Es paralela a la de $y = -x + 6$ y pasa por el origen.

b) Pasa por el punto $P(1, 2)$ y es paralela a la gráfica de la función lineal que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(-2, -1)$.

a) Si es paralela tiene la misma pendiente, y si pasa por el origen su ordenada en el origen es 0, de modo que la expresión algebraica buscada es $y = -x$.

b) Veamos cuál es la pendiente de la recta que pasa por $A$ y $B$: $\frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3}$.

La ecuación punto-pendiente de la recta que buscamos es $y = 2 + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

**68. Sin representarlas, indica el vértice y el eje de simetría de estas parábolas.**

a) $y = x^2 + 4x - 5$
b) $y = -x^2 + 2x - 10$
c) $y = 3x^2 - 6x + 1$
d) $y = -2x^2 - 8x + 5$
e) $y = x^2 - 5x + 2$
f) $y = -x^2 - 3x + 6$

**Di en cuáles el vértice es un máximo y en cuáles es un mínimo.**

a) Vértice: $\left(\frac{-4}{2\cdot 1}, \frac{-4^2+4\cdot 1\cdot(-5)}{4\cdot 1}\right) = (-2,-9)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = -2$

b) Vértice: $\left(\frac{-2}{2\cdot(-1)}, \frac{-2^2+4\cdot(-1)\cdot(-10)}{4\cdot(-1)}\right) = (1,-9)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = 1$

c) Vértice: $\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 3}, \frac{-(-6)^2+4\cdot 3\cdot 1}{4\cdot 3}\right) = (1,-2)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = 1$

d) Vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2\cdot(-2)}, \frac{-(-8)^2+4\cdot(-2)\cdot 5}{4\cdot(-2)}\right) = (-2,13)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = -2$

e) Vértice: $\left(\frac{-(-5)}{2\cdot 1}, \frac{-(-5)^2+4\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 1}\right) = \left(\frac{5}{2},-\frac{17}{4}\right)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = 5/2$

f) Vértice: $\left(\frac{-(-3)}{2\cdot(-1)}, \frac{-(-3)^2+4\cdot(-1)\cdot 6}{4\cdot(-1)}\right) = \left(-\frac{3}{2},\frac{33}{4}\right)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = -3/2$

**69. Considera la parábola $y = -2x^2 + 3x - 1$. ¿Por cuáles de los siguientes puntos pasa?**

a) (0, 1)   b) (1, 0)   c) (−1, −6)   d) (2, 3)

a) $-2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 1 = -1 \neq 1$. No pasa por (0, 1).

b) $-2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 1 = 0$. Pasa por (1, 0).

c) $-2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) - 1 = -6$. Pasa por (−1, −6).

d) $-2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = -3 \neq 3$. No pasa por (2, 3).

**70. Completa en tu cuaderno para que los puntos pertenezcan a la parábola $y = x^2 - 2x + 1$.**

a) $(\square, 4)$ b) $(0, \square)$ c) $(\square, 0)$ d) $(\square, 9)$

a) $x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1$ y $x = 3$

b) $0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 = y$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

d) $x^2 - 2x + 1 = 9 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = -2$ y $x = 4$

**71. Considera la función $y = x^2 - 3x$.**

a) ¿Qué puntos tienen ordenada $-2$?

b) ¿Cuáles tienen ordenada 4?

a) $-2 = x^2 - 3x \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 2$. Los puntos $(1, -2)$ y $(2, -2)$.

b) $4 = x^2 - 3x \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = -1$ y $x = 4$. Los puntos $(-1, 4)$ y $(4, 4)$.

**72. El punto $(-2, 1)$ es vértice de algunas de las siguientes parábolas; indica de cuáles.**

a) $y = x^2 - 4x + 5$
b) $y = x^2 + 4x + 5$
c) $y = -2x^2 - 8x - 9$
d) $y = x^2 - 4x + 3$
e) $y = 3x^2 + 12x + 11$
f) $y = -2x^2 - 8x - 7$

Veamos si pertenece a la parábola y, de pertenecer, si es su vértice.

a) $(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 5 = 17 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

b) $(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1$. Pertenece a la parábola.

Veamos si es su vértice: $\left(\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{-4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1}\right) = (-2, 1)$. Es vértice de la parábola.

c) $(-2) \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 9 = -1 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

d) $(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 15$. No pertenece a la parábola.

e) $3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 11 = -1 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

f) $(-2) \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 7 = 1$. Pertenece a la parábola.

Veamos si es su vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2 \cdot (-2)}, \frac{-(-8)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-7)}{4 \cdot (-2)}\right) = (-2, 1)$. Es vértice de la parábola.

**73. Determina la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y represéntala gráficamente en cada caso.**

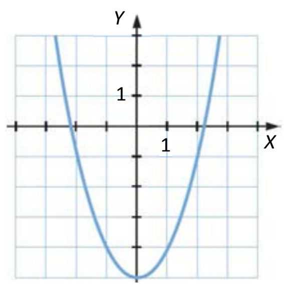
a) Pasa por $(-3, 4)$ y $(3, 4)$ y $a = 1$.

b) Pasa por $(1, 2)$ y $(5, 2)$ y la ordenada del vértice es 4.

a) Si $a = 1$, es de la forma $y = x^2 + bx + c$.

Cumple que $(-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 4$ y que $3^2 + b \cdot 3 + c = 4$.
Resolviendo tenemos que $b = 0$ y $c = -5$.

$y = x^2 - 5$

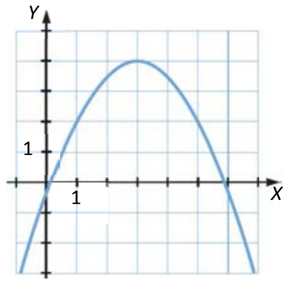


b) Cumple que $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2$ y que $a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 2$.

Además, $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 4$ .

Tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Resolvemos y descartamos el caso en el que $a = 0$.

Por tanto, $a = -1/2$, $b = 3$ y $c = -1/2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$




**74.** **Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 - 6x + 5$
b) $y = x^2 - 4$
c) $y = 3x^2 - 18x + 24$
d) $y = 2x^2 - 4x$
e) $y = -4x + x^2$
f) $y = -2x^2 - 6x$

a) Puntos de corte con el eje $X$: $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 5$. Los puntos son (1, 0) y (5, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$. El punto de corte es (0, 5).

b) Puntos de corte con el eje $X$: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -2$ y $x = 2$. Los puntos son (–2, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 4 = 4$. El punto de corte es (0, 4).

c) Puntos de corte con el eje $X$: $3x^2 - 18x + 24 = 0 \rightarrow x = 2$ y $x = 4$. Los puntos son (2, 0) y (4, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 24 = 24$. El punto de corte es (0, 24).

d) Puntos de corte con el eje $X$: $2 \cdot x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$. Los puntos son (0, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

e) Puntos de corte con el eje $X$: $-4x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 4$. Los puntos son (0, 0) y (4, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow -4 \cdot 0 + 0^2 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

f) Puntos de corte con el eje $X$: $-2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -3$. Los puntos son (0, 0) y (–3, 0).

Punto de corte con el eje $Y$: $x = 0 \rightarrow -2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

**75.** **Deduce cuál es la abscisa del vértice para las parábolas cuyos puntos de corte con el eje *X* son los siguientes.**

a) (−2, 0) y (4, 0)
b) (3, 0) y (5, 0)
c) (−1, 0) y (2, 0)
d) (−3, 0) y (−2, 0)

La abscisa del vértice es la que está en el eje de simetría. El eje de simetría equidista de los dos puntos de corte con el eje $X$.

a) $x = 1$ b) $x = 4$ c) $x = 1/2$ d) $x = -5/2$

**76.** **Deduce cuál es el eje de simetría de una parábola sabiendo que pasa por los puntos:**

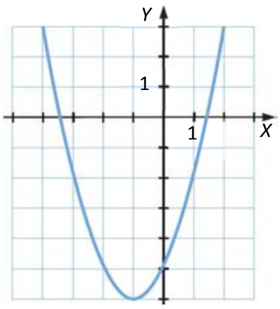
a) (2, 6) y (5, 6)
b) (−3, 2) y (−1, 2)
c) (−2, −1) y (2, −1)
d) (3, 0) y (−3, 0)

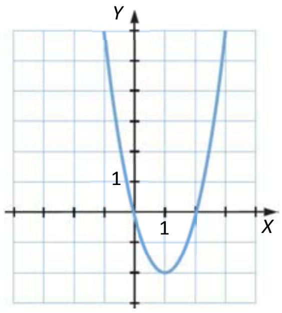
Estos puntos tienen dos a dos la misma ordenada, de modo que son simétricos respecto del eje de simetría, que tiene que distar lo mismo de los dos.

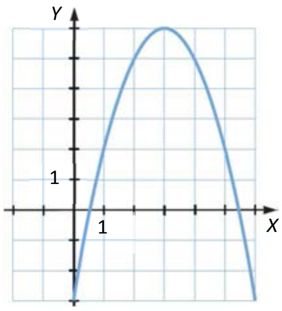
a) $x = 7/2$ b) $x = -2$ c) $x = 0$ d) $x = 0$

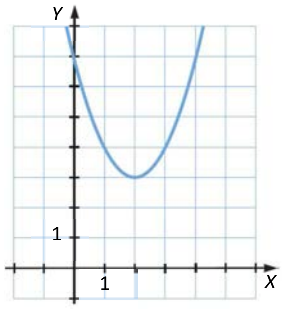
**77.** **Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.**

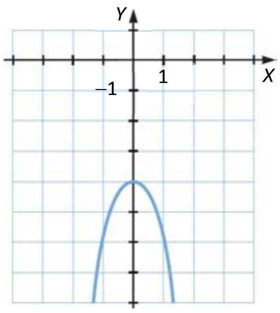
a) $y = (x + 1)^2 - 6$
b) $y = -(x - 3)^2 + 6$
c) $y = -2x^2 - 4$
d) $y = x^2 - x + 2$
e) $y = 2x^2 - 4x$
f) $y = x^2 - 4x + 7$
g) $y = -2x^2 - 4x + 1$
h) $y = x^2 + 2$

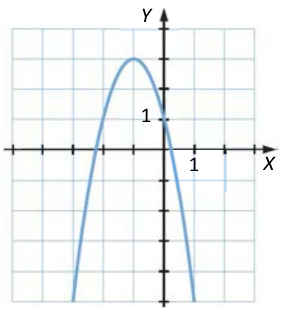
a)


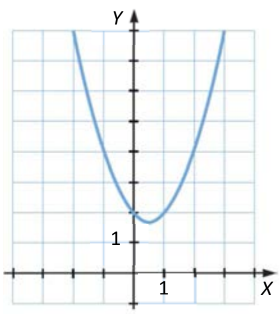

e)


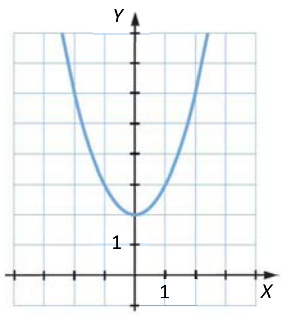

b)



f)



c)


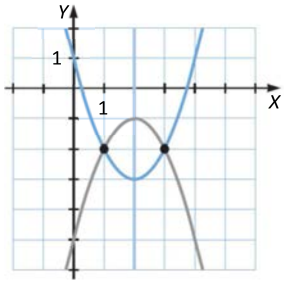

g)



d)



h)


**78. ¿En cuántas funciones cuadráticas su gráfica pasa por (3, −2) y $x = 2$ es la abscisa de su vértice? Escribe varias y represéntalas.**

La función pasa también por el punto (1, –2) porque su eje de simetría es la recta $x = 2$. Planteamos un sistema de dos ecuaciones y lo resolvemos:




$$\left.\begin{aligned} 9a + 3b + c &= -2 \\ a + b + c &= -2 \end{aligned}\right\} \to c = -2 - a - b, b = -4a$$

Dando diferentes valores al parámetro $a$, obtenemos infinitas parábolas que cumplen las condiciones especificadas. Por ejemplo:

Si $a = 1, b = -4, c = 1 \to y = x^2 - 4x + 1$

Si $a = -1, b = 4, c = -5 \to y = -x^2 + 4x - 5$

**79. Completa en tu cuaderno la tabla de valores de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con vértice en (2, −3).**

| $x$ | 0 | −2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | | | 1 |

El vértice está en la recta $x = 2$, por lo que el punto (0, –2) es el simétrico del punto de abscisa $x = 4$. Por la misma razón, los puntos de abscisas $x = –2$ y $x = 6$ son simétricos. Por tanto:

| $x$ | 0 | –2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | –2 | 1 | –2 | 1 |

**80. Razona si es verdadero o falso.**

a) $y = x^2 + 3x - 2$ tiene dos puntos de altura $-2$ y ninguno de altura 0.

b) $y = -x^2 + x - 4$ no corta al eje $X$.

c) La abscisa del vértice de $y = x - x^2 + 3$ es $-\dfrac{1}{2}$.

d) El vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 4x - 5$ pertenece también a la recta $g(x) = 2x - 5$.

a) Falso. Primero calculamos el vértice: $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = V\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{17}{4}\right) = V(-1{,}5; -4{,}25)$

Como $a > 0$ y la ordenada del vértice es menor que –2, la parábola tiene dos puntos de altura –2 y otros dos de altura 0.

b) Verdadero. La solución a la ecuación $-x^2 + x - 4 = 0$ no tiene raíces reales.

c) Falso. La abscisa del vértice es $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2\cdot(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

d) Verdadero. El punto de vértice es (–2, –9), y $g(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$.

**81. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones que aparecen a continuación.**

a) La parábola $y = \dfrac{x - x^2}{5}$ corta al eje $Y$ en el punto $(0, -5)$ y al eje $X$ en el punto $(1, 0)$.

b) $y = (x - 2)^2$ tiene por vértice uno de los puntos de corte con los ejes.

c) $y = x(x + 4) + (x - 1)^2$ tiene como representación una parábola con todas las ordenadas negativas.

a) Falso. Si $x = 0$, entonces el numerador de la fracción es 0, de modo que $y = 0$, así que no pasaría por (0, –5).

b) Verdadero. Su vértice es (2, 0).

c) Falso. Operamos y simplificamos:
$y = x(x + 4) + (x - 1)^2 \rightarrow y = x^2 + 4x + x^2 - 2x + 1 \rightarrow y = 2x^2 + 2x + 1$

Como $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba, de modo que existen puntos cuyas ordenadas son positivas.

**82. Determina el valor de *m* para que las siguientes parábolas cumplan estas condiciones.**

a) $y = -3x^2 + 2mx + m$ tiene un máximo en $x = 2$.

b) $y = (m - 3)x^2 + 2x - 6$ tiene un mínimo en $x = -1$.

a) El vértice tiene abscisa igual a 2, es decir, $\frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow \frac{-2m}{2\cdot(-3)} = 2 \rightarrow m = 6$. Y sabemos que es máximo porque $a < 0$. Así, la ecuación de la parábola es $y = -3x^2 + 12x + 6$.

b) Para que sea mínimo, tiene que cumplirse que $a > 0$. Y para que sea la abscisa de vértice:
$\frac{-b}{2a} = -1 \rightarrow \frac{-2}{2\cdot(m-3)} = -1 \rightarrow m = 4$. Con $m = 4$ se cumple que $a > 0$, de modo que sí es mínimo.
Así, la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2x - 6$.

**83. Conocemos los siguientes datos de una parábola:**

- **Su eje de simetría es el eje *Y*.**
- **Corta al eje *Y* en el punto (0, 3).**
- **Los puntos de corte con el eje *X* son (−1, 0) y (1, 0).**

**Calcula la ecuación de la parábola.**

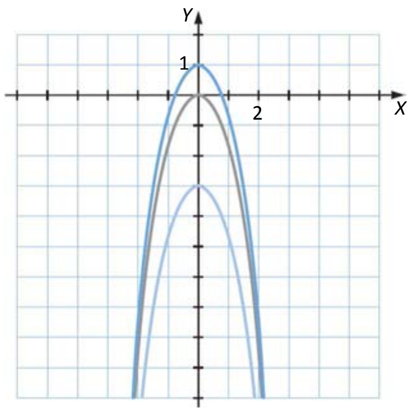
$$x_V = \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$$

La ecuación es de la forma $y = ax^2 + c$. Como pasa por los puntos (–1, 0), (1, 0) y (0, 3):

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 1^2 + c = 0 \\ 3 = a\cdot 0^2 + c \end{array}\right\} \rightarrow a = -3, c = 3 \rightarrow y = -3x^2 + 3$$

**85. Representa gráficamente la parábola $y = -2x^2 + 1$. A partir de esta gráfica representa las parábolas $y = -2x^2$ e $y = -2x^2 - 3$.**

Realizando una traslación de la parábola $y = -2x^2 + 1$ una unidad hacia abajo y cuatro unidades hacia abajo, obtenemos las gráficas de $y = -2x^2$ y $y = -2x^2 - 3$ respectivamente.



**86. A partir de la gráfica de la función $y = x^2$ representa las siguientes funciones.**

a) $y = -x^2$
b) $y = 3x^2$
c) $y = -3x^2$
d) $y = x^2 + 3$
e) $y = x^2 - 3$
f) $y = -x^2 + 3$
g) $y = (x + 3)^2$
h) $y = (x - 3)^2$

a) Es la simétrica respecto del eje *X*.

b) Se multiplican por 3 los valores del eje *Y,* obteniendo una parábola mucho más estrecha.

c) Es la simétrica de la gráfica anterior respecto del eje *X*.

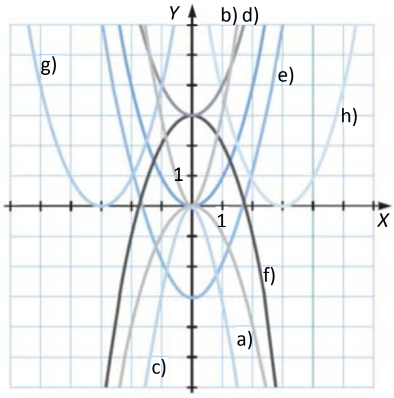
d) Se traslada tres unidades en el eje *Y* hacia arriba.

e) Se traslada tres unidades en el eje *Y* hacia abajo.

f) Se traslada la gráfica simétrica a $y = x^2$ tres unidades en el eje *Y* hacia arriba.

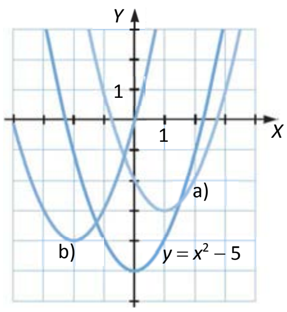
g) Se traslada tres unidades en el eje *X* hacia la izquierda.

h) Se traslada tres unidades en el eje *X* hacia la derecha.




**87. Determina la ecuación de la parábola que resulta de trasladar el vértice de $y = x^2 - 5$ al punto:**

a) $(1, -3)$
b) $(-2, -4)$




a) Hay que trasladarla dos unidades hacia arriba en el eje *Y*, y una a la derecha en el eje *X*, de modo que $y = (x - 1)^2 - 5 + 2 = x^2 - 2x + 1 - 3 = x^2 - 2x - 2$.

b) Hay que trasladarla una unidad hacia arriba en el eje *Y*, y dos a la izquierda en el eje *X*, de modo que $y = (x + 2)^2 - 5 + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$.

**88. Halla $b$ y $c$ para que la parábola $y = x^2 + bx + c$ tenga el vértice en el punto (2, 3).**

La abscisa del vértice es: $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2} = 2 \rightarrow b = -4$

La ordenada del vértice es: $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-16 + 4c}{4} = 3 \rightarrow c = 7$

**89. Calcula $a$ y $b$ para que la parábola $y = ax^2 + bx - 2$ tenga el vértice en (3, 7).**

La abscisa del vértice es: $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2a} = 3 \rightarrow b = -6a$

La ordenada del vértice es: $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 - 8a}{4a} = 7 \rightarrow -b^2 = 36a$

Resolvemos el sistema: $-(-6a)^2 = 36a \rightarrow -36a^2 = 36a \rightarrow -a^2 = a \rightarrow a = 0$ y $a = -1$

Descartamos $a = 0$, pues no tendríamos parábola, de modo que $a = -1$ y entonces $b = 6$.

**90. Obtén los valores de $a$, $b$ y $c$ para que la función $y = ax^2 + bx + c$ pase por (0, 6), (−1, 9) y (4, 14).**

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 6$

$9 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 6 \rightarrow a - b = 3$

$14 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 6 \rightarrow 16a + 4b = 8 \rightarrow 4a + b = 2$

Resolviendo: $a = 1$ y $b = -2$

**91. Analiza las siguientes situaciones y concluye cuáles se corresponden con situaciones de proporcionalidad directa. Escribe para cada una la función con la que se expresa y realiza la representación gráfica.**

a) Espacio recorrido por un automóvil que circula a velocidad constante de 105 km/h.

b) Llenado de un depósito de combustible, en el que hay aún 10 ℓ, a razón de 8 ℓ/min.

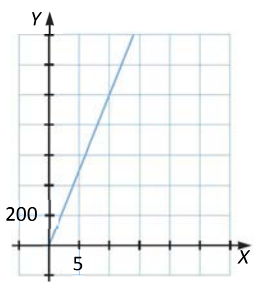
c) Dinero que se debe pagar por comprar naranjas siendo su precio 1,40 €/kg.

d) Sueldo final de un comercial que cobra 600 € fijos más un 15 % de las ventas realizadas.

e) Vaciado de una piscina de 200 m³ a razón de 12 m³ cada 50 minutos.

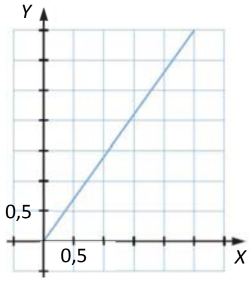
f) Factura de un taller en la que aparece un IVA del 21 % aplicado al coste del arreglo.

a) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 105x$.




b) No es de proporcionalidad directa.

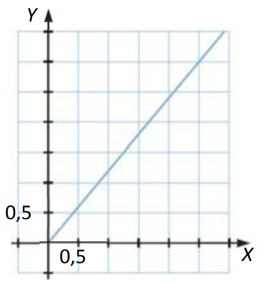
c) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 1{,}4x$.




d) No es de proporcionalidad directa.

e) No es de proporcionalidad directa.

f) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 1{,}21x$.

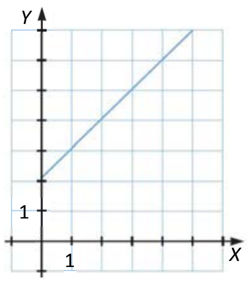



**92. Los taxis de una localidad cobran 2,05 € por la bajada de bandera y 0,98 € por cada kilómetro recorrido.**

a) Estudia y representa la relación *Precio – Distancia recorrida*.

b) ¿Cuántos kilómetros hemos hecho si el viaje nos ha costado 6,95 €?


a) $y = 2{,}05 + 0{,}98x$



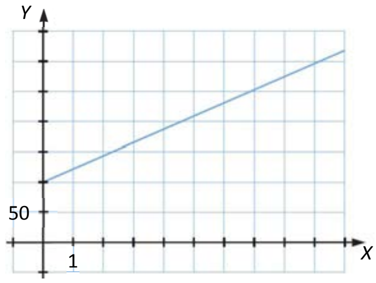

b) $6{,}95 = 2{,}05 + 0{,}98x \rightarrow x = 5$ km

**93.** **Un pintor cobra 100 € como tarifa por el desplazamiento hasta la casa que tiene que pintar y 22 € por cada metro cuadrado que pinta.**

a) Estudia y representa la relación *Superficie pintada* y *Precio*.

b) Si la factura de su último trabajo ha ascendido a 2080 €, ¿cuántos metros cuadrados ha pintado?

a) $y = 100 + 22x$




b) $2\,080 = 100 + 22x \rightarrow x = 90\ \text{m}^2$

**94.** **El precio de la entrada para una obra de teatro es 35 €, y el coste de cada representación es 5 000 €. Suponiendo que no hay entradas con descuento:**

a) Escribe la función que relaciona el dinero recaudado en cada representación con el número de entradas vendidas.

b) ¿Cuántas entradas como mínimo se deben vender para que la representación no tenga pérdidas?

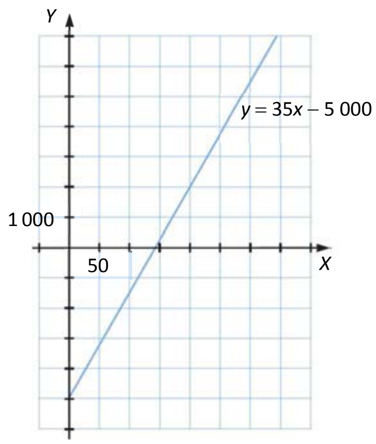
c) ¿Cuál es el beneficio máximo por representación si el teatro tiene 180 butacas?

a) El dinero recaudado en la representación por la venta de $x$ entradas viene dado por la función $y = 35x$.

b) $y = 35x - 5\,000$ es la función que relaciona el número de entradas vendidas con el dinero ganado. Para que la representación no tenga pérdidas se debe cumplir que $y > 0$.

$y = 0 \rightarrow 35x - 5\,000 = 0 \rightarrow x = 142{,}86$.

Por tanto, se deben vender como mínimo 143 entradas.




c) $y = 35 \cdot 180 - 5\,000 = 1\,300$ euros.

**95. Dos obreros levantan un muro de 56 cm de altura en dos horas, y a partir de ese momento, solo trabajará uno de ellos debiendo levantar el muro a razón de 17 cm cada hora.**

a) Encuentra la función que dé la altura del muro en función del tiempo.

b) ¿Qué altura tendrá el muro después de 5 horas?

c) Si el muro debe tener 3,11 m de altura, ¿cuánto tiempo tendrá que trabajar el obrero en solitario?

a) $y = 56 + 17(x - 2)$, para $x > 2$

b) $y = 56 + 17 \cdot 3 = 107$ cm

c) $311 = 56 + 17(x - 2) \rightarrow x = 17$ horas

**96. En unos grandes almacenes aplican un 35 % de descuento al precio de todos sus artículos. Calcula la ecuación de la función que relaciona los precios anteriores a la rebaja con los posteriores.**

$y = (1 - 0{,}35)x = 0{,}65x$

**97. Un establecimiento que se dedica al alquiler de videojuegos establece, para sus clientes, una cuota fija por asociación de 5 € y 2,50 €/semana por cada juego que se alquila. Encuentra la función que calcula la cuantía a pagar por un cliente que se asocia y alquila *x* videojuegos durante *y* semanas.**

Precio $= 5 + 2{,}5xy$

**98. Durante una emergencia, el capitán de un barco dispara una bengala luminosa para advertir a la guardia costera de que necesitan ser rescatados.**

**El camino que recorre la bengala describe una parábola. La función que representa el movimiento de la bengala viene dada por la función $y = 80x - 5x^2$, donde *y* es la altura, en metros, que alcanza la bengala, y *x* el tiempo transcurrido, en segundos, desde que se lanza la bengala.**

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bengala?

b) ¿Cuántos segundos pasan desde que se disparó la bengala hasta que la señal luminosa alcanza su altura máxima?

Calculamos la abscisa del vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-80}{2 \cdot (-5)} = 8$

Entonces, $y_v = 80 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 320$

a) Alcanza una altura máxima de 320 m.

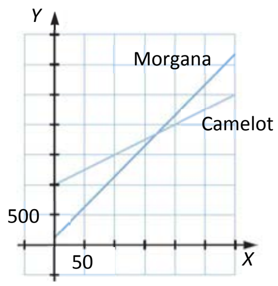
b) Pasan 8 segundos.

**100.** **Para celebrar una fiesta, un grupo de amigos elige entre dos locales cuyas ofertas son:**


**La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas. ¿Cuál de ellos elegirías?**

$X$ = número total de asistentes

Camelot: $y = 1\,000 + 5x$ Morgana: $y = 200 + 10x$

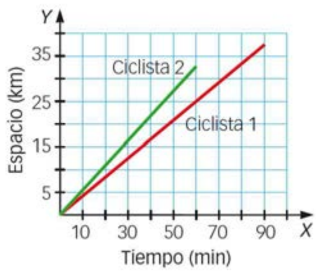



Calculamos el punto de corte entre las dos rectas:

$1\,000 + 5x = 200 + 10x \rightarrow x = 160$

Por tanto, si son menos de 160 invitados, saldrá más barato Morgana; y si son entre 160 y 300 invitados, Camelot.

**101.** **En la gráfica adjunta se puede ver el espacio recorrido por dos ciclistas que inician un viaje al mismo tiempo y desde el mismo sitio.**




a) Halla la velocidad que lleva cada uno.

b) Determina el tiempo durante el que circula cada uno y la distancia que recorren.

c) Escribe la expresión algebraica de cada recta.

d) Suponiendo que el más veloz saliera 20 minutos después, ¿en qué momento y lugar alcanzaría al otro? Dibuja gráficamente esta situación en los ejes coordenados.

e) Si fuera el más lento el que saliera 5 minutos después, pero aumentara su velocidad un 40 %, ¿en qué momento y lugar alcanzaría al otro? Realiza la representación gráfica de esta situación.

a) El ciclista 1 tras 60 minutos ha recorrido 25 km, su velocidad es 25 km/h.

El ciclista 2 tras 60 minutos ha recorrido 32,5 km, su velocidad es 32,5 km/h.

b) El ciclista 1 circula durante 90 minutos y recorre un total de 37,5 km.

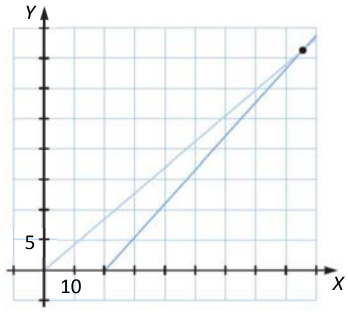
El ciclista 2 circula durante 60 minutos y recorre un total de 32,5 km.

c) Ciclista 1: $y = 25x/60 = 5x/12$

Ciclista 2: $y = 32{,}5x/60 = 13x/24$

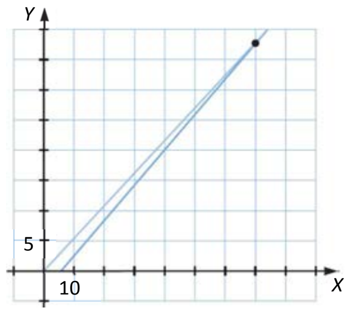
d) $y = 13(x - 20)/24$

$5x/12 = 13(x - 20)/24 \rightarrow x = 86,67$ minutos $y = 36,11$ km




e) $y = (5(x - 5)/12) \cdot 1,40$

$(5(x - 5)/12) \cdot 1,40 = 13x/24 \rightarrow x = 70$ minutos $y = 37,92$ km




**102. Un jugador de fútbol se encuentra frente a una portería sin portero, a 6 metros de distancia. Averigua si con el lanzamiento siguiente metería gol: $y = -0,07x^2 + 0,9x$ (la altura de la portería es de 2,44 m).**

a) ¿A qué distancia se debe poner para meter gol?

b) ¿Y para golpear en el larguero?

c) ¿Desde qué distancia el balón irá fuera?

A una distancia de 6 metros, la altura máxima de la trayectoria es:

$y = -0,07 \cdot 6^2 + 0,9 \cdot 6 = 2,88$ m $\rightarrow$ Como la portería tiene una altura de 2,44 m, el jugador no mete gol.

a) $2,44 = -0,07x^2 + 0,9x \rightarrow x = 3,89$ y $x = 8,97$

La distancia máxima que alcanza: $0 = -0,07x^2 + 0,9x \rightarrow x = 12,86$ m

Se debe poner o a menos de 3,89 metros o a más de 8,97 metros y menos de 12,86 metros.

b) Para golpear el larguero a 3,89 metros justos o 8,97 metros justos.

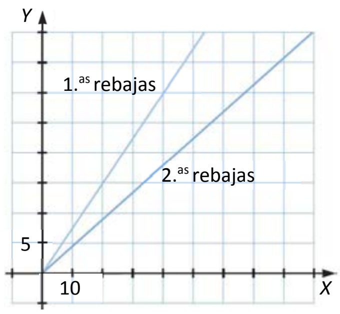
c) A una distancia de entre 3,89 metros y 8,97 metros el balón irá fuera.

**103.** **En las primeras rebajas de verano se ha aplicado un 25 % de descuento al precio inicial, y en las segundas rebajas se ha aplicado un 40 % de descuento sobre el precio ya rebajado.**


**Escribe la expresión algebraica que se corresponde con cada una de estas dos situaciones y represéntalas gráficamente.**

1as rebajas: $y = 0{,}75x$

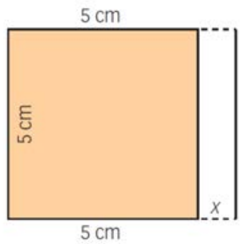
2as rebajas: $y = 0{,}6 \cdot 0{,}75x = 0{,}45x$




**104.** **A partir de un cuadrado de lado 5 cm se construye un rectángulo según indica la figura.**
**Escribe y representa la función que proporciona, en función de *x*:**

a) El perímetro del rectángulo.

b) El área del rectángulo.



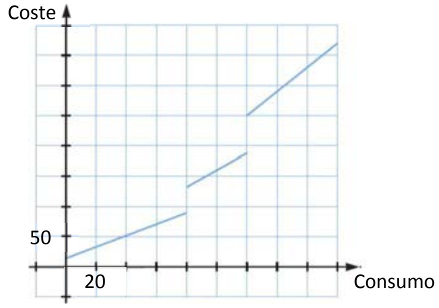

a) $P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (5 + x) = 20 + 2x$

b) $A = 5 \cdot (5 + x) = 25 + 5x$

**105.** **El coste fijo en la factura mensual del agua es de 10 € al mes. A eso hay que añadir el precio por metro cúbico, que depende del consumo.**

- **Consumos menores que 80 m³: 0,90 €.**
- **Consumos entre 80 m³ y 120 m³: 1,50 €.**
- **Consumos mayores que 120 m³: 2 €.**

**Representa sobre los mismos ejes las funciones *Consumo – Precio* para los tres tramos de consumo.**




## DEBES SABER HACER

**1.** **Clasifica las siguientes funciones.**

a) $y = 4x - 3$

b) $y = 5$

c) $y = 3x^2 + 2$

d) $y = -x(1 - x)$

e) $y = \dfrac{x - 1}{2}$

f) $y = x(3 - x) + 4$

a) Función lineal

b) Función constante

c) Función cuadrática

d) Función cuadrática

e) Función lineal

f) Función cuadrática

**2.** **Para las funciones lineales del ejercicio anterior:**

a) Indica la pendiente y la ordenada en el origen.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

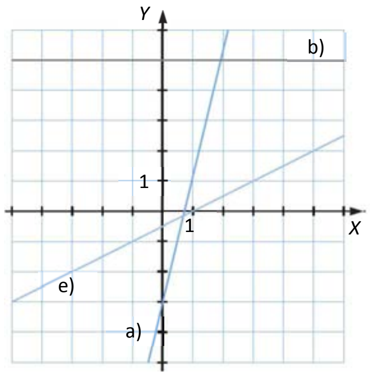
c) Realiza la representación gráfica.

a) $y = 4x - 3$. Pendiente $m = 4$. Ordenada en el origen $n = -3$.
$y = (x - 1)/2$. Pendiente $m = 1/2$. Ordenada en el origen $n = -1/2$.

b) $y = 4x - 3$ corta con el eje $X$ en $(3/4, 0)$ y con el eje $Y$ en el punto $(0, -3)$.

$y = (x - 1)/2$ corta con el eje $X$ en $(1, 0)$ y con el eje $Y$ en el punto $(0, -1/2)$.

c)



**3. Para las funciones cuadráticas del primer ejercicio:**

a) Halla su vértice indicando si es máximo o mínimo.
b) Indica su eje de simetría.
c) Calcula los puntos de corte con los ejes $X$ e $Y$.
d) Haz su representación gráfica.

a) $y = 3x^2 + 2 \rightarrow V\left(\frac{-0}{2\cdot 3}, \frac{-0^2 + 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3}\right) = V(0, 2)$ es un mínimo.

$y = -x(1-x) = x^2 - x \rightarrow V\left(\frac{-(-1)}{2\cdot 1}, \frac{-(-1)^2 + 4\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 1}\right) = V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ es un mínimo.

$y = x(3-x) + 4 = -x^2 + 3x + 4 \rightarrow V\left(\frac{-3}{2\cdot(-1)}, \frac{-3^2 + 4\cdot(-1)\cdot 4}{4\cdot(-1)}\right) = V\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$ es un máximo.

b) $y = 3x^2 + 2 \longrightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = 0$.

$y = x^2 - x \longrightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{2}$.

$y = -x^2 + 3x + 4 \longrightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = \frac{3}{2}$.

c) $y = 3x^2 + 2$

Puntos de corte eje $X$: $3x^2 + 2 = 0 \longrightarrow$ No hay puntos de corte.
Punto de corte eje $Y$: $x = 0 \longrightarrow y = 2 \longrightarrow$ Punto (0, 2)

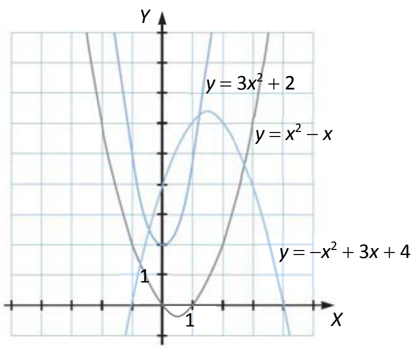
$y = x^2 - x$

Puntos de corte eje $X$: $x^2 - x = 0 \longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \longrightarrow$ Puntos (0, 0) y (1, 0)
Punto de corte eje $Y$: $x = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow$ Punto (0, 0)

$y = -x^2 + 3x + 4$

Puntos de corte eje $X$: $-x^2 + 3x + 4 = 0 \longrightarrow x = 4$ y $x = -1 \longrightarrow$ Puntos (4, 0) y (–1, 0).
Punto de corte eje $Y$: $x = 0 \longrightarrow y = 4 \longrightarrow$ Punto (0, 4).

d)



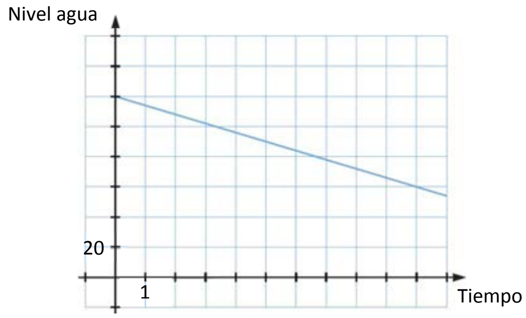

**4. Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.**

a) Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).
b) ¿Qué tipo de función es? Represéntala.
c) ¿Qué nivel de agua habrá a los 15 minutos?
d) ¿Cuánto tarda el estanque en vaciarse?

a)

| Tiempo | 0 | 1 | 2 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nivel agua | 120 | 114 | 108 | 60 | 30 |

b) Es una función lineal.



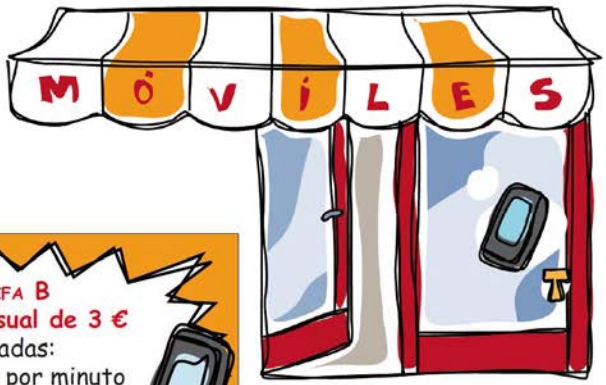

c) Habrá 30 centímetros de altura.

d) $y = 120 - 6x = 0 \rightarrow x = 20$

Tarda en vaciarse 20 minutos.

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**106.** **Quiero cambiar de tarifa para mi móvil y he encontrado estas ofertas.**

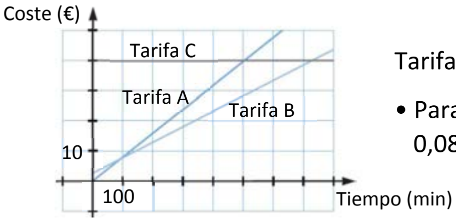





- ¿Qué tarifa me sale más barata? ¿Cuánto tengo que hablar por teléfono para que la tarifa *A* me salga más barata que la *B*?

**Mirando otra compañía he descubierto una tarifa distinta a las anteriores.**


- ¿A partir de cuántos minutos me sale más barata la tarifa *C*?
- Si en el recibo de este mes figura que mis llamadas han durado 2 horas y 36 minutos, ¿cuál de las tres tarifas me hubiese convenido más?




Tarifa $A$: $y = 0{,}08x$ Tarifa $B$: $y = 3 + 0{,}05x$ Tarifa $C$: $y = 40$

- Para que $A$ sea más barata que $B$:
  $0{,}08x = 3 + 0{,}05x \to x = 100 \to$ Hay que hablar entre 0 y 100 minutos.

- Para que la tarifa $C$ compense frente a la $A$:
  $0{,}08x = 40 \to x = 500 \to$ Hay que hablar más de 500 minutos.

  Para que la tarifa $C$ compense frente a la $B$:
  $3 + 0{,}05x = 40 \to x = 740 \to$ Hay que hablar más de 740 minutos.

- 2 horas 36 minutos = 156 minutos $\to$ La tarifa más barata en es la tarifa $B$.

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**107. Estudia si se pueden representar una función lineal y otra de proporcionalidad directa que cumplan estas características.**

a) Se cortan en el origen.
b) No se cortan.
c) Sus pendientes son números uno opuesto del otro.
d) Sus ordenadas en el origen son iguales.

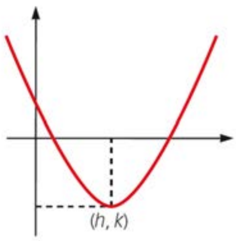
a) No se puede. Si se cortasen en el origen, las dos serían de proporcionalidad directa.

b) Sí se puede, siempre y cuando tengan la misma pendiente (paralelas).

c) Sí se puede. Por ejemplo $y = 4x$ como función de proporcionalidad directa y $y = -4x + 1$ como función lineal.

d) No se puede. La ordenada en el origen de una función de proporcionalidad directa es 0, y si la función lineal tuviera esa ordenada en el origen, sería función de proporcionalidad directa.

**108. La representación gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyo vértice tiene por coordenadas $(h, k)$.**




a) Comprueba que la expresión algebraica de esta función se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

b) ¿Cuál es la ecuación del eje de esta parábola?

a) $\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = h \\ y_V = ah^2 + bh + c = k \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} b = -2ah \\ ah^2 - 2ah^2 + c = k \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} b = -2ah \\ c = ah^2 + k \end{array}\right\} \xrightarrow{y=ax^2+bx+c} y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k \to y = a(x-h)^2 + k$

b) $x = h$

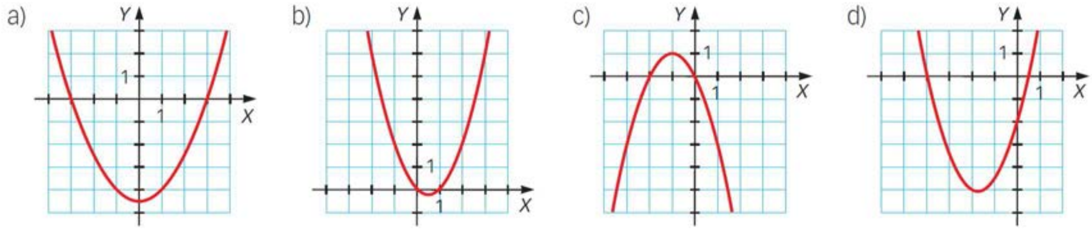
**109. Una de las siguientes parábolas es la que resulta de mover la gráfica de la función $y = 3x^2 + 1$ cuatro unidades hacia arriba y seis unidades a la izquierda. ¿Cuál es?**

a) $y = 3(x - 4)^2 + 6$
c) $y = 3(x - 6)^2 + 5$
b) $y = 3(x + 4)^2 - 6$
d) $y = 3(x + 6)^2 + 5$

Al mover 6 unidades a la izquierda tenemos $3(x + 6)^2 + 1$ y al mover cuatro unidades hacia arriba tenemos $3(x + 6)^2 + 1 + 4 = 3(x + 6)^2 + 5$.

La parábola es d).

**110. Determina, en cada caso, la ecuación de la función cuadrática cuya representación gráfica es:**




a) Como en el vértice $x = 0$, tenemos que $b = 0$. Además, en ese caso $a \cdot 0^2 + c = -9/2$, así que $c = -9/2$.

Calculamos $a$, sabiendo que $0 = a \cdot 3^2 - 9/2 \rightarrow a = 1/2$.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}$$

b) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$.

Además, $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 0 \rightarrow a + b = 0$

Y $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 2 \rightarrow 4a + 2b = 2 \rightarrow 2a + b = 1$

Resolviendo, $a = 1$ y $b = -1$.

$y = x^2 - x$

c) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$.

Además, $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) = 0 \rightarrow 4a - 2b = 0 \rightarrow b = 2a$

Y $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = 1 \rightarrow a - b = 1$

Resolviendo, $a = -1$ y $b = -2$.

$y = -x^2 - 2x$

d) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2 \rightarrow c = -2$.

Además, $a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 2 = 0 \rightarrow 16a - 4b - 2 = 0$

Y también se cumple que $a \cdot 0{,}5^2 + b \cdot 0{,}5 - 2 = 0 \rightarrow 0{,}25a + 0{,}5b - 2 = 0$

Resolviendo, tenemos que $a = 1$ y $b = 3{,}5$.

$y = x^2 + 3{,}5x - 2$

## PRUEBAS PISA

**111.** **Por razones de salud la gente debería limitar sus esfuerzos, por ejemplo al hacer deporte, para no superar una determinada frecuencia cardiaca.**

**Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardiaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula siguiente:**

**Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 220 − edad**

**Investigaciones recientes han demostrado que debería modificarse esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:**

**Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 − (0,7 × edad)**

- Un artículo de periódico afirma:

  *El resultado de usar la nueva fórmula en lugar de la antigua es que el máximo número recomendado de latidos cardiacos por minuto disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores.*

  ¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardiaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Muestra tus cálculos.

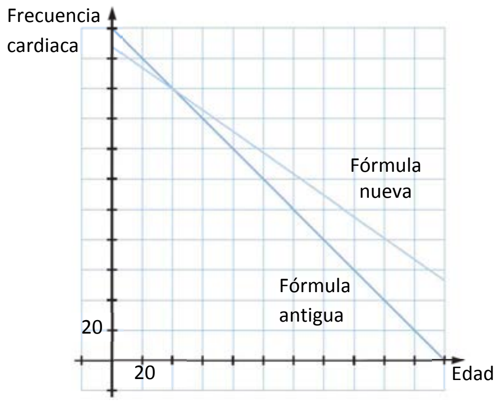
- La fórmula para la *máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 − (0,7 × edad)* se aplica también para determinar cuándo es más eficaz el ejercicio físico. Las investigaciones han demostrado que el entrenamiento físico es más eficaz cuando la frecuencia cardiaca alcanza el 80 % del valor máximo recomendado.

  Escribe una fórmula para hallar, en función de la edad, la frecuencia cardiaca recomendada para que el ejercicio físico sea más efectivo.

*(Prueba PISA 2006)*

- Veamos cuándo son iguales las dos frecuencias cardiacas máximas recomendadas:

  $220 - x = 208 - 0{,}7x \rightarrow x = 40$




A partir de 40 años la nueva frecuencia cardiaca máxima recomendada aumenta con respecto a la anterior.

- La fórmula para ver la frecuencia cardiaca para un ejercicio más efectivo es:

  $y = 0{,}8\,(208 - 0{,}7x) = 166{,}4 - 0{,}56x$

# Estadística

13

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Calcula los puntos medios de estos intervalos e indica tres puntos que pertenezcan a cada uno de ellos.**

**[1, 4) (4, 6] (1, 2) [4, 5]**

Punto medio de [1, 4): $\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$. Están en el intervalo los puntos: 1, 2 y 3.

Punto medio de (4, 6]: $\frac{6+4}{2}=5$. Están en el intervalo los puntos: 5; 5,5 y 6.

Punto medio de (1, 2): $\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$. Están en el intervalo los puntos: 1,25; 1,5 y 1,75.

Punto medio de [4, 5]: $\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}$. Están en el intervalo los puntos: 4, 5 y 4,5.

**2. Calcula.**

a) 20 % de 30 b) 40 % de 120 c) 12 % de 50

a) 6 b) 48 c) 6

## VIDA COTIDIANA

**La lavadora ha facilitado la realización de las tareas domésticas. Pero el reparto de estas tareas no es equitativo.**

**Según la encuesta de *empleo del tiempo* del Instituto Nacional de Estadística, las mujeres dedican dos horas y cuarto más al día a tareas domésticas que los hombres.**

- **Esta tabla muestra las horas semanales que dedican a las tareas domésticas 6 hombres y 6 mujeres.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hombres | 2,3 | 1,5 | 4 | 0,5 | 1,2 | 2,3 |
| Mujeres | 2,5 | 3,5 | 3 | 5 | 3,5 | 3,1 |

**Contrasta si contradice los datos de la encuesta del INE.**

Calculamos la media de cada uno de los grupos:

Media para los hombres: 1,97 horas Media para las mujeres: 3,43 horas

La diferencia de horas es 3,43 − 1,97 = 1,46 horas = 1 hora 27 minutos 36 segundos

Este estudio da una ligera diferencia con respecto a los datos del INE, pero al ser una muestra pequeña no podemos asegurar que contradiga estos datos.

## RESUELVE EL RETO

**He hecho muchos viajes. Todos han sido a París, menos dos. También he ido a Italia, excepto en dos ocasiones. Y a Berlín, menos en dos de mis viajes. ¿Cuántos viajes he hecho?**

Ha hecho tres viajes.

**Hacemos un histograma con intervalos de la misma longitud y los rectángulos tienen todos la misma altura. ¿Cómo es el polígono de frecuencias?**

Una recta paralela al eje horizontal.

**Caminamos en fila india. Lucas, que va justo delante de mí, se encuentra exactamente en el centro de la fila. Si delante de mí hay el doble de gente que detrás de mí, ¿cuántos somos en total?**

Son siete personas. Lucas ocupa la posición cuarta, de modo que la persona que habla es la quinta. Delante de quien habla hay 4 personas y detrás 2.

## ACTIVIDADES

1. **De las 700 bombillas que se producen a diario en una fábrica, se escogen 50 para examinar si tienen algún fallo. Identifica población, muestra, individuo y tamaño de la muestra.**

Población: 700 bombillas.

Muestra: 50 bombillas.

Individuo: cada una de las bombillas.

Tamaño de la muestra: 50.

2. **¿De qué tipo son las variables estadísticas: nivel de estudios, superficie de una casa, edad?**

Nivel de estudios: variable cualitativa.

Superficie de una casa: variable cuantitativa continua.

Edad: variable cuantitativa discreta.

3. **Elige una muestra representativa para estudiar la altura de los alumnos de tu instituto.**

Según la cantidad de alumnos del instituto, se podría considerar como muestra toda la población.

4. **Efectúa el recuento de estos datos.**

a) {1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 2, 5, 1, 1, 2}

b) {*Rojo, Azul, Verde, Verde, Verde, Azul, Azul, Verde*}

a)

| Número | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 6 | 4 | 2 | 1 | 2 |

b)

| Color | Rojo | Azul | Verde |
|---|---|---|---|
| Recuento | 1 | 3 | 4 |

5. **Agrupa los datos en cinco clases y haz el recuento.**

6 3 8 9 12     11 27 10 30 26     18 25 23 19 22

Dato menor: 3     Dato mayor: 30

Dividimos en 5 partes iguales: $\frac{30-3}{5}=5{,}4$. Usamos una amplitud de 6.

| Datos | [3, 9) | [9, 15) | [15, 21) | [21, 27) | [27, 33) |
|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 |

**6. Realiza la actividad anterior:**

a) Agrupando en seis clases.

b) Agrupando en clases de amplitud 4.

c) Observa los cambios si añadimos el dato 40.

a) Dividimos en 6 partes iguales: $\frac{30-3}{6}=4{,}5$. Usamos una amplitud de 5.

| Datos | [3, 8) | [8, 13) | [13, 18) | [18, 23) | [23, 28) | [28, 33) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 2 | 5 | 0 | 3 | 4 | 1 |

b)

| Datos | [3, 7) | [7, 11) | [11, 15) | [15, 19) | [19, 23) | [23, 27) | [27, 31) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 |

c) Dividimos en 6 partes iguales: $\frac{40-3}{6}=6{,}17$. Usamos una amplitud de 7.

| Datos | [3, 10) | [10, 17) | [17, 24) | [24, 31) | [31, 38) | [38, 45) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 4 | 3 | 4 | 4 | 0 | 1 |

| Datos | [3, 7) | [7, 11) | [11, 15) | [15, 19) | [19, 23) | [23, 27) | [27, 31) | [31, 35) | [35, 39) | [39, 43) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Recuento | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 |

**7. ¿Por qué los intervalos en las tablas son cerrados por un lado y abiertos por el otro?**

Para asegurarnos de que todos los puntos pertenecen a un intervalo, pero que ningún punto pertenece a dos intervalos a la vez.

**8. Construye la tabla de frecuencias para: 3, 4, 7, 5, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 6, 7, 3, 5.**

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 4 | 0,29 | 0,29 | 29 % |
| 4 | 4 | 8 | 0,29 | 0,58 | 29 % |
| 5 | 3 | 11 | 0,21 | 0,79 | 21 % |
| 6 | 1 | 12 | 0,07 | 0,86 | 7 % |
| 7 | 2 | 14 | 0,14 | 1 | 14 % |
| | 14 | | 1 | | |

**9. Estas son las horas de estudio de un grupo de alumnos. Realiza la tabla de frecuencias.**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 2 |
| 0 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 |

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 3 | 0,1 | 0,1 | 10 % |
| 1 | 8 | 11 | 0,27 | 0,37 | 27 % |
| 2 | 7 | 18 | 0,23 | 0,60 | 23 % |
| 3 | 6 | 24 | 0,2 | 0,8 | 20 % |
| 4 | 3 | 27 | 0,1 | 0,9 | 10 % |
| 5 | 3 | 30 | 0,1 | 1 | 10 % |
| | 30 | | 1 | | |

**10. Haz una tabla de frecuencias con cinco valores diferentes, sabiendo que cada uno aparece el doble de veces que el anterior y que $f_1 = 3$.**

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 0,03 | 0,03 | 3 % |
| 2 | 6 | 9 | 0,06 | 0,09 | 6 % |
| 3 | 12 | 21 | 0,13 | 0,22 | 13 % |
| 4 | 24 | 45 | 0,26 | 0,48 | 26 % |
| 5 | 48 | 93 | 0,52 | 1 | 52 % |
| | 93 | | 1 | | |

**11. Explica cómo completarías una tabla de frecuencias en la que conoces solo las frecuencias absolutas acumuladas.**

Iría restando a cada frecuencia, la frecuencia siguiente, para así obtener las frecuencias absolutas. Además, el número de datos es la suma de todas las frecuencias.

Una vez se tienen las frecuencias absolutas y el total de datos, se puede calcular el resto de elementos de la tabla.

**12. El número de páginas que los alumnos de una clase han escrito para un trabajo ha sido:**

30 25 34 28 16 29 23 22 31 42 19 24
34 32 13 32 40 36 26 37 32 33 12 51

**Construye una tabla de frecuencias agrupando los datos en seis clases.**

Dato menor: 12 Dato mayor: 51

Dividimos en 6 partes iguales: $\frac{51-12}{6} = 6{,}5$. Hacemos intervalos de longitud 7.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [11, 18) | 3 | 3 | 0,125 | 0,125 | 12,5 % |
| [18, 25) | 4 | 7 | 0,167 | 0,292 | 16,7 % |
| [25, 32) | 6 | 13 | 0,250 | 0,542 | 25 % |
| [32, 39) | 8 | 21 | 0,333 | 0,875 | 33,3 % |
| [39, 45) | 2 | 23 | 0,083 | 0,958 | 8,3 % |
| [45, 52) | 1 | 24 | 0,042 | 1 | 4,2 % |
| | 24 | | 1 | | |

**13. El número de coches que han repostado en una gasolinera, a lo largo de un mes, ha sido:**

125 140 234 167 342 256 276 149 253 331
178 267 236 354 432 298 276 351 387 348
329 430 165 138 207 246 301 224 177 456

**Construye una tabla de frecuencias agrupando los datos en ocho clases.**

Dato menor: 125 Dato mayor: 456

Dividimos en 8 partes iguales: $\frac{456-125}{8} = 41{,}375$. Hacemos intervalos de longitud 42.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [125, 167) | 5 | 5 | 0,167 | 0,167 | 16,7 % |
| [167, 209) | 4 | 9 | 0,133 | 0,3 | 13,3 % |
| [209, 251) | 4 | 13 | 0,133 | 0,433 | 13,3 % |
| [251, 293) | 5 | 18 | 0,167 | 0,6 | 16,7 % |
| [293, 335) | 4 | 22 | 0,133 | 0,733 | 13,3 % |
| [335, 377) | 4 | 26 | 0,133 | 0,866 | 13,3 % |
| [377, 419) | 1 | 27 | 0,033 | 0,9 | 3,3 % |
| [419, 461) | 3 | 30 | 0,100 | 1 | 10 % |
| | 30 | | 1 | | |

**14. Las notas obtenidas por el total de los alumnos de 3.º de ESO de un instituto en una prueba de 50 preguntas han sido:**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 27 | 45 | 35 | 19 | 18 | 27 | 38 | 42 | 38 | 24 | 28 |
| 19 | 29 | 35 | 34 | 42 | 45 | 27 | 18 | 20 | 22 | 26 | 36 |
| 43 | 41 | 30 | 40 | 10 | 8 | 3 | 9 | 39 | 48 | 38 | 44 |
| 26 | 24 | 15 | 12 | 5 | 24 | 34 | 33 | 22 | 35 | 41 | 10 |
| 19 | 18 | 20 | 30 | 44 | 43 | 23 | 32 | 34 | 43 | 42 | 26 |
| 34 | 41 | 20 | 22 | 21 | 32 | 33 | 45 | 44 | 46 | 47 | 18 |
| 23 | 28 | 27 | 38 | 36 | 34 | 4 | 49 | 39 | 37 | 36 | 17 |

**Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos:**

a) En ocho clases

b) En diez clases

c) En clases de amplitud 9

d) En clases de amplitud 8

Dato menor: 3 Dato mayor: 49

a) Dividimos en 8 partes iguales: $\frac{49-3}{8} = 5{,}75$. Hacemos intervalos de longitud 6.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [2, 8) | 3 | 3 | 0,036 | 0,036 | 3,6 % |
| [8, 14) | 5 | 8 | 0,060 | 0,096 | 6 % |
| [14, 20) | 9 | 17 | 0,107 | 0,203 | 10,7 % |
| [20, 26) | 12 | 29 | 0,143 | 0,346 | 14,3 % |
| [26, 32) | 12 | 41 | 0,143 | 0,489 | 14,3 % |
| [32, 38) | 17 | 58 | 0,202 | 0,691 | 20,2 % |
| [38, 44) | 16 | 74 | 0,190 | 0,881 | 19 % |
| [44, 50) | 10 | 84 | 0,119 | 1 | 11,9 % |
| | 84 | | 1 | | |

b) Dividimos en 10 partes iguales: $\frac{49-3}{10} = 4{,}6$. Hacemos intervalos de longitud 5.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [0, 5) | 2 | 2 | 0,024 | 0,024 | 2,4 % |
| [5, 10) | 3 | 5 | 0,036 | 0,060 | 3,6 % |
| [10, 15) | 3 | 8 | 0,036 | 0,096 | 3,6 % |
| [15, 20) | 9 | 17 | 0,107 | 0,203 | 10,7 % |
| [20, 25) | 12 | 29 | 0,143 | 0,346 | 14,3 % |
| [25, 30) | 10 | 39 | 0,119 | 0,465 | 11,9 % |
| [30, 35) | 12 | 51 | 0,143 | 0,608 | 14,3 % |
| [35, 40) | 13 | 64 | 0,155 | 0,763 | 15,5 % |
| [40, 45) | 13 | 77 | 0,155 | 0,918 | 15,5 % |
| [45, 50) | 7 | 84 | 0,083 | 1 | 8,3 % |
| | 84 | | 1 | | |

c) Hacemos intervalos de longitud 9.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [0, 9) | 4 | 4 | 0,048 | 0,048 | 4,8 % |
| [9, 18) | 6 | 10 | 0,071 | 0,120 | 7,1 % |
| [18, 27) | 22 | 32 | 0,262 | 0,382 | 26,2 % |
| [27, 36) | 22 | 54 | 0,262 | 0,644 | 26,2 % |
| [36, 45) | 23 | 77 | 0,274 | 0,918 | 27,4 % |
| [45, 54) | 7 | 84 | 0,083 | 1 | 8,3 % |
| | 84 | | 1 | | |

d) Hacemos intervalos de longitud 8.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | % |
|---|---|---|---|---|---|
| [3, 11) | 7 | 7 | 0,083 | 0,083 | 8,3 % |
| [11, 19) | 7 | 14 | 0,083 | 0,166 | 8,3 % |
| [19, 27) | 18 | 32 | 0,214 | 0,380 | 21,4 % |
| [27, 35) | 19 | 51 | 0,226 | 0,606 | 22,6 % |
| [35, 43) | 20 | 71 | 0,238 | 0,844 | 23,8 % |
| [43, 51) | 13 | 84 | 0,155 | 1 | 15,5 % |
| | 84 | | 1 | | |

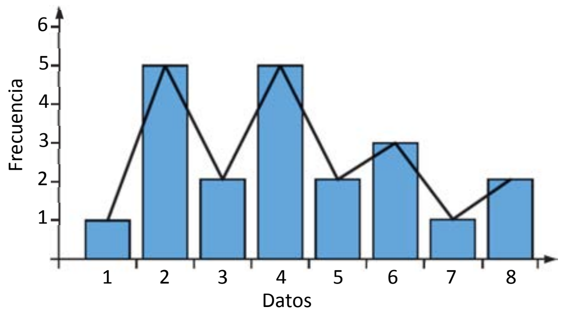
**15. Representa un diagrama de barras para cada uno de estos conjuntos de datos y traza, si es posible, su polígono de frecuencias.**

a) {1, 4, 6, 8, 3, 3, 2, 5, 4, 4, 6, 2, 4, 6, 7, 2, 2, 4, 5, 2, 8}

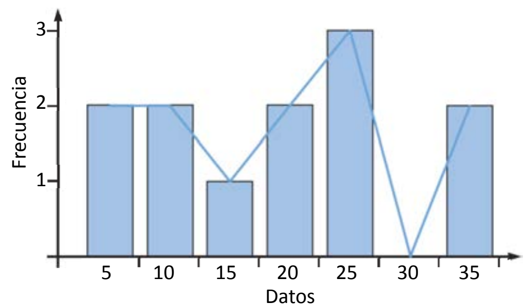
b) {10, 20, 10, 10, 30, 40, 50, 40, 40, 30, 20, 10}

c) {5, 10, 25, 35, 25, 15, 5, 10, 35, 20, 25, 20}

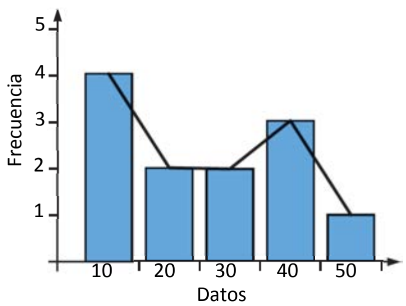
a)




c)

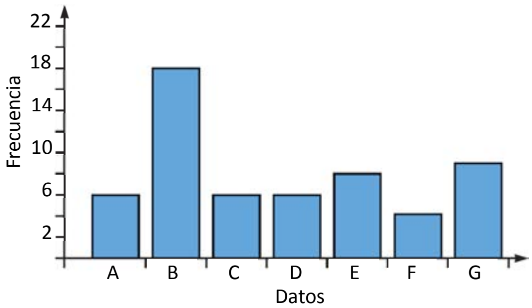



b)



**16. Dibuja el diagrama de barras de un conjunto de datos cuyas frecuencias absolutas son:**

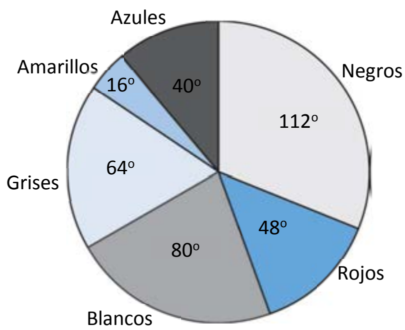
$f_1 = f_3 = f_4 = 6 \qquad f_2 = 3f_1 = 2f_7 \qquad f_5 = 2f_6 = 8$




**17. Explica cómo realizarías un diagrama de barras si solo conoces las frecuencias absolutas acumuladas de los valores de la variable.**

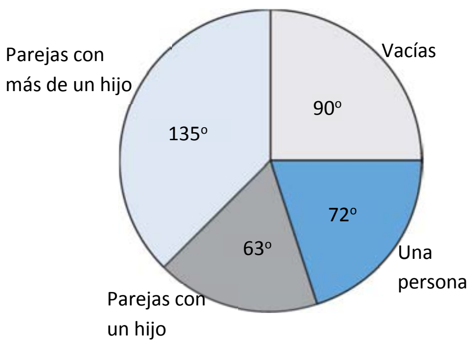
Se podrían ir restando las frecuencias absolutas acumuladas de un dato respecto al anterior, para así encontrar las frecuencias de cada dato y poder dibujar el diagrama.

**18. En un garaje hay 28 coches negros, 12 rojos, 20 blancos, 16 grises, 4 amarillos y 10 azules. Haz un diagrama de sectores de estos datos.**

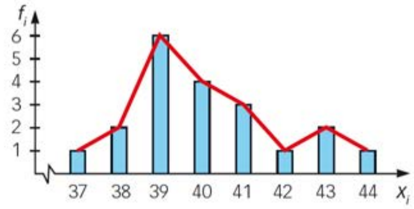


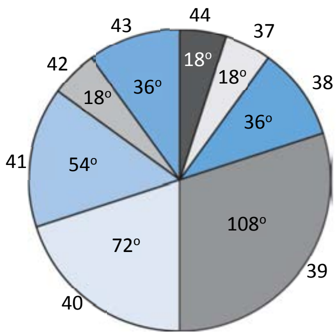

**19. Representa en un diagrama de sectores:**

- **Hay 40 viviendas. El 25 % están vacías.**
- **15 viviendas pertenecen a familias con más de un hijo.**
- **8 viviendas están ocupadas por una sola persona.**
- **En el resto viven parejas con un solo hijo.**



**20.** **Dibuja el diagrama de sectores que equivale a este de barras.**



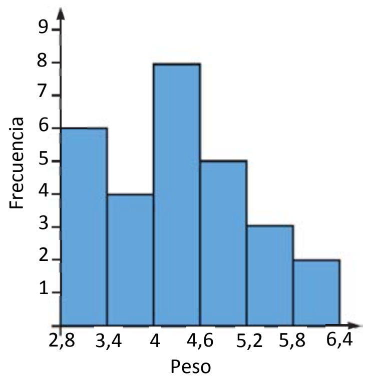




**21.** **El peso, en kg, de las mochilas de 28 alumnos se muestra en la tabla. Representa los datos en un histograma.**

| Peso | $f_i$ |
|---|---|
| [2,8; 3,4) | 6 |
| [3,4; 4) | 4 |
| [4; 4,6) | 8 |
| [4,6; 5,2) | 5 |
| [5,2; 5,8) | 3 |
| [5,8; 6,4) | 2 |

a) ¿Cuántos alumnos llevan una mochila con un peso superior a 4 kg?

b) ¿Qué porcentaje de alumnos llevan una mochila con un peso inferior a 5,2 kg?




a) Llevan $8 + 5 + 3 + 2 = 18$ alumnos.

b) Inferior a 5,2 son $6 + 4 + 8 + 5 = 23$ alumnos de un total de 28, esto es, 82,14 %.

**22.** **Las longitudes, en cm, de 16 hormigas son:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,3 | 1,2 | 1,23 | 1,56 | 1,02 | 1,4 | 1,28 | 1,04 |
| 0,9 | 1,15 | 1,31 | 1,07 | 1,42 | 1,34 | 0,85 | 1,16 |

a) Construye una tabla de frecuencias agrupando los datos en cinco clases.

b) Representa los datos en un histograma.

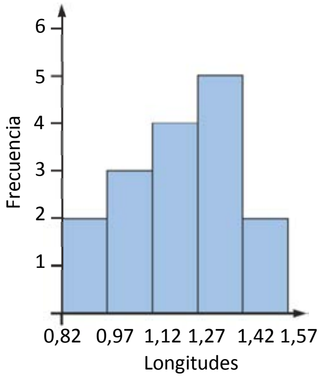
c) Traza el polígono de frecuencias.

a) El dato menor es 0,85 y el mayor 1,56 $\rightarrow$

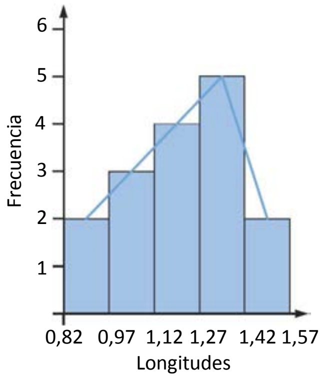
$\rightarrow \frac{1,56 - 0,85}{5} = 0,142$. Longitud intervalos $= 0,15$

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [0,82; 0,97) | 2 |
| [0,97; 1,12) | 3 |
| [1,12; 1,27) | 4 |
| [1,27; 1,42) | 5 |
| [1,42; 1,57) | 2 |

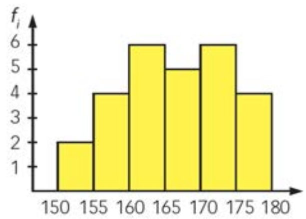
b)




c)




**23.** **Construye la tabla de frecuencias que corresponde a este histograma en el que se muestran las estaturas, en cm, de 27 jóvenes.**




| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [150, 155) | 2 |
| [155, 160) | 4 |
| [160, 165) | 6 |
| [165, 170) | 5 |
| [170, 175) | 6 |
| [175, 180) | 4 |

**24. Representa en un histograma los datos que se muestran en cada tabla.**

a)

| Clases | [3, 4) | [4, 5) | [5, 6) | [6, 7) | [7, 8) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 |

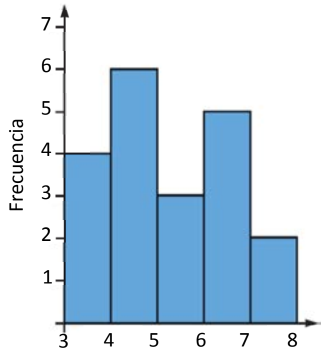
b)

| Clases | [0, 20) | [20, 40) | [40, 60) | [60, 80) |
|---|---|---|---|---|
| $F_i$ | 8 | 12 | 17 | 26 |

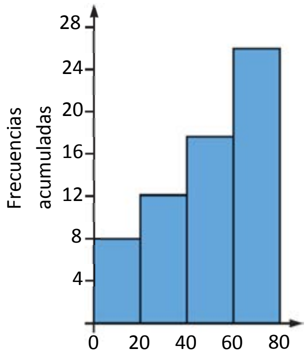
c)

| Clases | [0, 6) | [6, 12) | [12, 18) | [18, 24) |
|---|---|---|---|---|
| $h_i$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{6}$ |

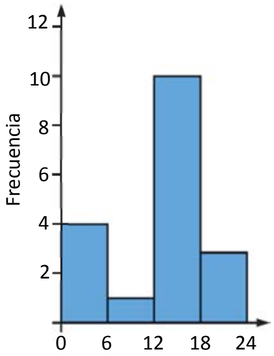
a)




b)




c)




**25. El número de viajeros que ha utilizado el tren durante los 18 últimos días en una cierta estación ha sido:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 450 | 245 | 390 | 470 | 180 | 200 | 350 | 190 | 275 |
| 432 | 538 | 305 | 296 | 374 | 160 | 298 | 437 | 289 |

a) Construye la tabla de frecuencias agrupando los datos en cinco clases.

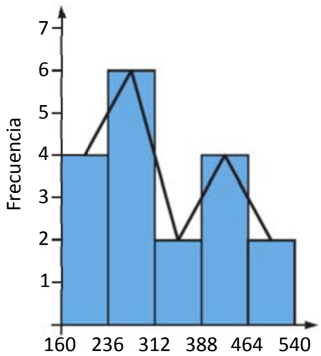
b) Representa los datos en un histograma y realiza su polígono de frecuencias.

a) El dato menor es 160 y el mayor 538 →

$\rightarrow \frac{538-160}{5} = 75{,}6$. Longitud intervalos $= 76$.

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [160; 236) | 4 |
| [236, 312) | 6 |
| [312, 388) | 2 |
| [388, 464) | 4 |
| [464, 540) | 2 |

b)




**26. Las edades, en años, de los pacientes que han acudido durante el día de hoy a un consultorio médico han sido estas:**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 24 | 56 | 48 | 42 | 23 | 12 | 32 | 87 | 59 | 78 | 66 |
| 58 | 49 | 33 | 27 | 11 | 2 | 3 | 1 | 6 | 56 | 34 | 82 |
| 92 | 77 | 48 | 19 | 17 | 3 | 17 | 35 | 13 | 16 | 15 | 53 |

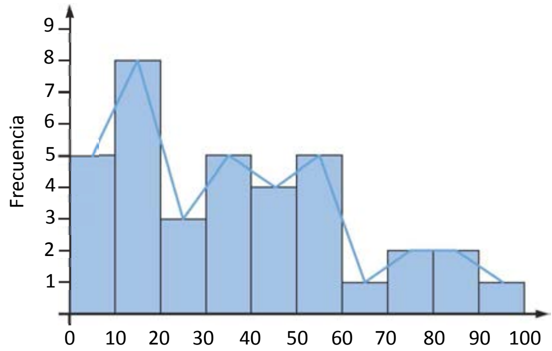
a) Construye la tabla de frecuencias agrupando los datos en diez clases.

b) Representa los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias.

a) Agrupamos las edades de 10 en 10.

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [0, 10) | 5 |
| [10, 20) | 8 |
| [20, 30) | 3 |
| [30, 40) | 5 |
| [40, 50) | 4 |
| [50, 60) | 5 |
| [60, 70) | 1 |
| [70, 80) | 2 |
| [80, 90) | 2 |
| [90, 100) | 1 |

b)




**27.** **Estos son los resultados que han obtenido 32 estudiantes en una prueba que constaba de 12 preguntas.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3,6 | 7,9 | 10 | 11 | 9,5 | 5,8 | 7,3 |
| 8,2 | 6,9 | 10,3 | 7 | 6 | 4 | 3,8 | 8,6 |
| 5 | 9 | 8 | 5 | 9,2 | 8,7 | 6,5 | 9,1 |
| 7,8 | 4,4 | 5,7 | 8 | 10 | 6 | 7,6 | 11 |

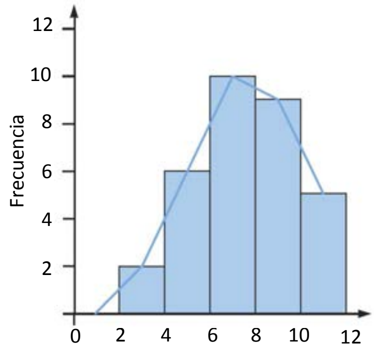
a) Construye la tabla de frecuencias agrupando los datos en seis clases.

b) Representa los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias.

a) Agrupamos las edades de 2 en 2.

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [0, 2) | 0 |
| [2, 4) | 2 |
| [4, 6) | 6 |
| [6, 8) | 10 |
| [8, 10) | 9 |
| [10, 12) | 5 |

b)




**28.** **Calcula las medidas de centralización.**

a)

| $x_i$ | 4 | 5 | 7 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 6 | 3 | 4 | 2 |

b)

| Clases | [3, 4) | [4, 5) | [5, 6) | [6, 7) | [7, 8) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 |

a) Media: $\dfrac{4\cdot 2+5\cdot 6+7\cdot 3+9\cdot 4+10\cdot 2}{17}=6{,}76$

Mediana: 7 (hay 17 datos, se coge el dato en posición 9) Moda: 5

b) Tenemos en cuenta las marcas de clase.

Media: $\dfrac{3{,}5\cdot 4+4{,}5\cdot 6+5{,}5\cdot 3+6{,}5\cdot 5+7{,}5\cdot 2}{20}=5{,}25$

Mediana: $\dfrac{5{,}5+4{,}5}{2}=5$ (hay 20 datos, se coge el dato en posición 10 y 11) Moda: 4,5

**29.** **Halla el valor de la mediana para:**

a) {5, 6, 6, 4, 9, 6, 8, 7, 6, 5, 9, 4, 8, 7, 7}

b) {1, 5, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1}

a) Ordenamos los datos: 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9.

Hay 15 datos, la mediana es 6.

b) Ordenamos los datos: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Hay 18 datos, la mediana es $\frac{2+3}{2} = 2,5$.

**30.** **Sean los datos: 2, 3, 5, 2, 6, 7, 3, 7, 9.**

a) Añade un dato que no haga variar la mediana.

b) Añade dos datos para que $Me = 4$ y $Mo = 3$.

Ordenamos los datos: 2, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 7, 9.

Hay 9 datos, la mediana es 5.

a) Añadimos de dato el 5. b) Añadimos un 3 y un 4.

**31.** **Halla las medidas de posición de estos datos: {1, 5, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1}.**

Ordenamos los datos: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Hay 18 datos. $Q_1 = 1$ $Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2,5$ $Q_3 = 4$

**32.** **Interpreta las medidas que has obtenido en la actividad anterior.**

Hay un 25 % de datos que son 1.

Hay un 50 % de datos que son 1 o 2.

Hay un 75 % de datos que son menores o iguales que 4.

**33.** **A un examen de oposición para el que hay 50 plazas se presentan 200 personas. Si consideramos los datos como las notas de los exámenes, ¿qué indicará $Q_3$?**

50 plazas es un 25 % de los datos, de modo que $Q_3$ indicará la nota de corte para pasar la oposición, ya que por encima estarán el 25 % de las personas con mejor nota.

**34.** **Halla las medidas de dispersión para estos datos: {1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 2, 5, 1, 1, 2}.**

Calculamos la media y obtenemos 2,27.

| $x_i$ | $f_i$ | $\lvert x_i - x \rvert$ | $(x_i - x)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1,27 | 1,61 |
| 2 | 4 | 0,27 | 0,07 |
| 3 | 2 | 0,73 | 0,53 |
| 4 | 1 | 1,73 | 2,99 |
| 5 | 2 | 2,73 | 7,45 |

Rango: $5 - 1 = 4$

$$DM = \frac{6 \cdot 1,27 + 4 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,73 + 1 \cdot 1,73 + 2 \cdot 2,73}{15} = 1,16$$

$$\sigma^2 = \frac{6 \cdot 1,61 + 4 \cdot 0,07 + 2 \cdot 0,53 + 1 \cdot 2,99 + 2 \cdot 7,45}{15} = 1,93$$

$\sigma = \sqrt{1,93} = 1,39$ $CV = \frac{1,39}{2,27} = 0,61$

**35. Las notas de Marcos son: 3, 8, 7, 5 y 4, y las de Luis: 9, 2, 5, 7 y 4. ¿Cuál ha sido más inconstante?**

Marcos:
Media: 5,4
Desviación típica: 1,85
Coeficiente de variación: 0,34

Luis:
Media: 5,4
Desviación típica: 2,42
Coeficiente de variación: 0,45

Ha sido más inconstante Luis.

**36. Calcula las medidas de dispersión de los datos en dos conjuntos de datos, *A* y *B*, si:**

**Grupo *A*: $\overline{x}_A = 0,5$ y $\sigma_A = 0,2$**

**Grupo *B*: $\overline{x}_B = 12$ y $\sigma_B = 2$**

Grupo *A*:
Varianza: 0,04
Coeficiente de variación: 0,2/0,5 = 0,4

Grupo *B*:
Varianza: 4
Coeficiente de variación: 2/12 = 0,17

**37. Halla e interpreta las medidas de centralización, de posición y de dispersión.**

| Clases | [3, 4) | [4, 5) | [5, 6) | [6, 7) | [7, 8) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 |

Utilizamos las marcas de clase.

Medidas de centralización:
Media: 5,25 Mediana: 5 Moda: 4,5

Medidas de posición:
$Q_1 = 4,5$ $Q_2 = 5$ $Q_3 = 6,5$

Medidas de dispersión:
$DM = 1,15$ $\sigma^2 = 1,69$ $\sigma = 1,3$ $CV = 0,25$

**38. El precio, en €, de un limpiador en 16 comercios es:**

1,3 1,2 1,25 1,5 1,4 1,2 1,4 1,1
0,9 1,5 1,3 1,1 1,2 1,3 0,8 0,95

**Halla todas las medidas estadísticas, agrupando los datos en cuatro clases, y sin agruparlos.**

SIN AGRUPAR:

Medidas de centralización:
Media: 1,21 Mediana: 1,225 Moda: es bimodal: 1,2 y 1,3

Medidas de posición:
$Q_1 = 1,1$ $Q_2 = 1,225$ $Q_3 = 1,35$

Medidas de dispersión:
$DM = 0,16$ $\sigma^2 = 0,04$ $\sigma = 0,2$ $CV = 0,17$

AGRUPADOS:

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [0,8; 0,98) | 3 |
| [0,98; 1,16) | 2 |
| [1,16; 1,34) | 7 |
| [1,34; 1,52) | 4 |

Medidas de centralización:
Media: 1,21 Mediana: 1,25 Moda: 1,25
Medidas de posición: $Q_1 = 1,07$ $Q_2 = 1,25$ $Q_3 = 1,34$
Medidas de dispersión:
$DM = 0,15$ $\sigma^2 = 0,03$ $\sigma = 0,17$ $CV = 0,14$

# ACTIVIDADES FINALES

**39. Si para recabar información sobre la altura de los alumnos de tu instituto eliges como muestra a los alumnos de tu clase, ¿crees que sería representativa esa muestra?**

No, puesto que en el instituto hay alumnos de muchas edades, lo cual altera la altura. Así que se cogerá una muestra muy concreta que no refleja la realidad del instituto.

**40. Se quiere obtener información sobre el dinero semanal que reciben los alumnos de tu instituto de sus padres. Determina cómo podrías coger una muestra que fuese representativa de todos los alumnos.**

Se pueden analizar las variables que pueden afectar a la paga semanal, como puede ser la edad o el número de hermanos. En función de estas dos variables, se cogen alumnos que cubran todas las posibilidades.

**41. Se realiza una encuesta para obtener información sobre cada una de estas características. Clasifica las variables en cualitativas o cuantitativas, y si son cuantitativas, en discretas o continuas.**

a) Marca de coche que se desearía tener.
b) Tiempo dedicado a ver la televisión.
c) Número de tareas escolares realizadas.
d) Distancia que se recorre a diario para llegar al centro escolar.
e) Número de libros leídos en un año.
f) Número de hermanos.
g) Comida preferida.
h) Número de dormitorios de la casa en la que se vive.

a) Cualitativa.
b) Cuantitativa continua.
c) Cuantitativa discreta.
d) Cuantitativa continua.
e) Cuantitativa discreta.
f) Cuantitativa discreta.
g) Cualitativa.
h) Cuantitativa discreta.

**42. Manuel quiere realizar un estudio para saber el día de nacimiento, el mes, el peso y la altura de sus compañeros en el momento de nacer. Indica las variables que aparecen en el estudio e identifica el tipo de cada una de ellas.**


Día de nacimiento: variable cuantitativa discreta.

Mes de nacimiento: variable cuantitativa discreta.

Peso: variable cuantitativa continua.

Altura: variable cuantitativa continua.

**43.** **Alberto ha anotado en un cuaderno las preferencias de los alumnos del instituto en relación al tipo de transporte utilizado para asistir a clase:**

| Tipo de transporte | Porcentaje |
|---|---|
| Autobús | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| Metro | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //// |
| Taxi | 𝍸 𝍸 // |
| Bicicleta | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /// |
| Ciclomotor | 𝍸 𝍸 𝍸 /// |
| Andando | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |

a) Completa la tabla de frecuencias absolutas.

b) ¿Puedes hacer la tabla de frecuencias relativas?

| Tipo de transporte | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| Autobús | 30 | 30 | 0,19 |
| Metro | 34 | 64 | 0,22 |
| Taxi | 12 | 76 | 0,08 |
| Bicicleta | 28 | 104 | 0,18 |
| Ciclomotor | 18 | 122 | 0,11 |
| Andando | 35 | 157 | 0,22 |

**44.** **Se realiza una encuesta a 40 personas en la que se les pregunta sobre el número de veces que acudieron al cine en el último mes. Estos son los resultados:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 5 | 0 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 1 | 0 | 5 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

a) Haz el recuento y organiza los datos en una tabla de frecuencias.

b) ¿Qué porcentaje de esas personas no fue al cine durante el último mes?

c) ¿Qué porcentaje fue más de dos veces pero menos de cinco?

d) ¿Qué porcentaje fue tres o más veces?

a)

| Dato | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 4 | 0,1 |
| 1 | 10 | 14 | 0,25 |
| 2 | 7 | 21 | 0,175 |
| 3 | 6 | 27 | 0,15 |
| 4 | 8 | 35 | 0,2 |
| 5 | 4 | 39 | 0,1 |
| 6 | 1 | 40 | 0,025 |

b) 10 %

c) $15 + 20 = 35$ %

d) $15 + 20 + 10 + 2{,}5 = 47{,}5$ %

**45.** **En esta tabla se muestran los resultados de haber preguntado a varias familias sobre el número de televisores que tienen en casa.**

| Televisores | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Familias | 1 | 7 | 6 | 4 | 2 |

**Elabora una tabla en la que aparezcan sus frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.**

| TV | Familias ($f_i$) | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,05 | 0,05 |
| 1 | 7 | 8 | 0,35 | 0,40 |
| 2 | 6 | 14 | 0,30 | 0,70 |
| 3 | 4 | 18 | 0,20 | 0,90 |
| 4 | 2 | 20 | 0,10 | 1 |

**46.** **Considera la cantidad de dinero que han pagado los clientes de un restaurante por su consumición. Explica cómo realizarías el recuento de datos en cada uno de estos casos:**

a) En el restaurante se sirven tres tipos de menús, *A*, *B* y *C*, que cuestan 15 €, 12 € y 9 €, respectivamente.

b) En el restaurante se facilita una carta en la que el cliente elige lo que va a consumir.

a) El recuento se haría para cada uno de los menús.

b) Se agruparían los platos en grupos y el recuento se haría para cada grupo.

**47.** **Completa en tu cuaderno la tabla de frecuencias.**

| Fruta preferida | $f_i$ | $h_i$ | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| Naranja | 15 | **0,1** | 10% |
| Manzana | **18** | **0,12** | 12% |
| Sandía | **60** | 0,4 | **40%** |
| Fresa | **51** | **0,34** | **34%** |
| Uva | 6 | **0,04** | **4%** |

**48.** **Estas son las estaturas, en centímetros, de los miembros del club de ajedrez del instituto.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 157 | 164 | 163 | 171 | 152 | 148 | 162 | 150 |
| 166 | 155 | 149 | 178 | 180 | 163 | 172 | 175 |

a) Construye una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos.

b) ¿Cuál es la marca de clase de cada intervalo que has utilizado?

| Intervalos | Marcas de clase | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [145, 155) | 150 | 4 | 4 | 0,25 |
| [155, 165) | 160 | 6 | 10 | 0,375 |
| [165, 175) | 170 | 3 | 13 | 0,1875 |
| [175, 185) | 180 | 3 | 16 | 0,1875 |

**49.** **Estos datos corresponden al número de mensajes que han enviado, durante una semana, los chicos y chicas de 3.º de ESO de un centro escolar.**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 54 | 45 | 56 | 67 | 47 | 23 | 43 | 44 | 54 | 78 | 79 |
| 56 | 46 | 34 | 24 | 14 | 54 | 39 | 61 | 47 | 86 | 57 | 98 |
| 67 | 78 | 34 | 55 | 66 | 75 | 58 | 24 | 53 | 15 | 12 | 34 |
| 59 | 29 | 71 | 35 | 93 | 43 | 5 | 37 | 2 | 6 | 18 | 14 |
| 29 | 58 | 68 | 45 | 34 | 46 | 72 | 9 | 60 | 45 | 70 | 50 |

**Agrupa los datos en 10 clases y elabora la tabla de frecuencias.**

Dato menor: 2.    Dato mayor: 98.

Vamos a hacer intervalos de longitud 10.

| Mensajes | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| [0, 10) | 4 | 4 | 0,07 |
| [10, 20) | 5 | 9 | 0,08 |
| [20, 30) | 5 | 14 | 0,08 |
| [30, 40) | 8 | 22 | 0,13 |
| [40, 50) | 10 | 32 | 0,17 |
| [50, 60) | 12 | 44 | 0,2 |
| [60, 70) | 6 | 50 | 0,1 |
| [70, 80) | 7 | 57 | 0,12 |
| [80, 90) | 1 | 58 | 0,02 |
| [90, 100) | 2 | 60 | 0,03 |

**50.** **Los resultados del examen de Matemáticas realizado por los alumnos de 3.º de ESO han sido los siguientes:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 6 | 5 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 5 | 6 | 5 | 9 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| 5 | 8 | 2 | 7 | 8 | 9 | 4 | 9 | 7 | 6 |

a) Elabora una tabla de frecuencias.

b) ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido un 4?

c) ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido una nota inferior a 5?

d) ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido una calificación de 7 o superior a 7?

a)

| Nota | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0,03 | 0,03 |
| 3 | 2 | 3 | 0,07 | 0,10 |
| 4 | 3 | 6 | 0,10 | 0,20 |
| 5 | 8 | 14 | 0,27 | 0,47 |
| 6 | 5 | 19 | 0,17 | 0,64 |
| 7 | 5 | 24 | 0,17 | 0,81 |
| 8 | 3 | 27 | 0,10 | 0,91 |
| 9 | 3 | 30 | 0,10 | 1 |

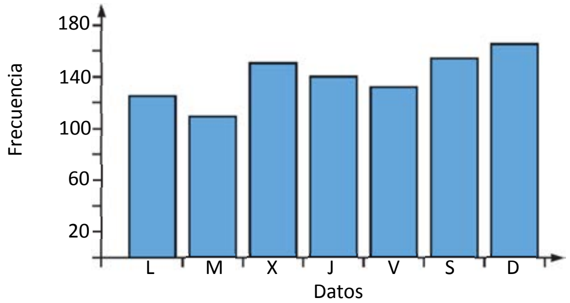
b) Un 10 %

c) Un 20 %

d) $17 + 10 + 10 = 37$ %

**51.** **Esta tabla recoge los minutos de conexión a Internet en una vivienda a lo largo de una semana. Elabora un diagrama de barras con estos datos.**

| Día | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minutos | 125 | 110 | 148 | 140 | 132 | 156 | 165 |

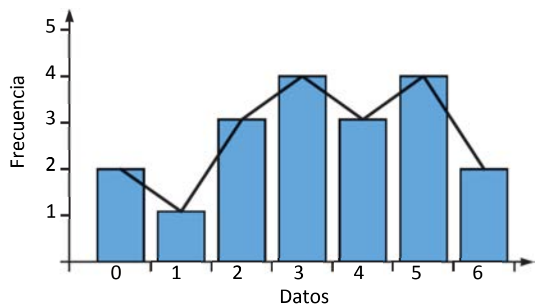



**52.** **Construye el diagrama de barras y representa el polígono de frecuencias, tanto absolutas como acumuladas, para los siguientes datos.**

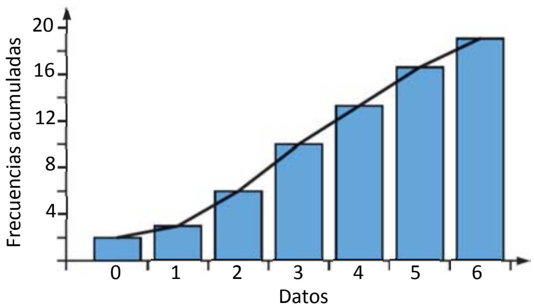
a) 0, 3, 4, 3, 5, 6, 2, 1, 3, 2, 5, 4, 6, 4, 2, 0, 5, 3, 5

b) 10, 30, 40, 50, 40, 50, 60, 50, 40, 30, 50, 60, 50, 80, 60, 50

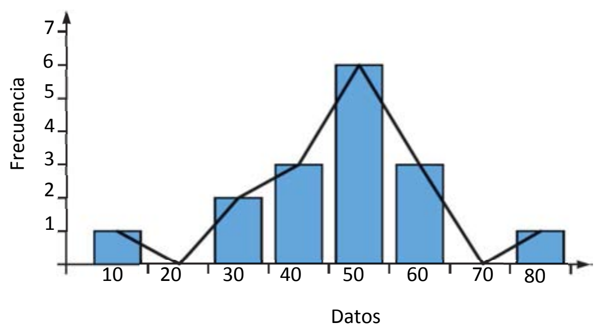
a) Frecuencias absolutas



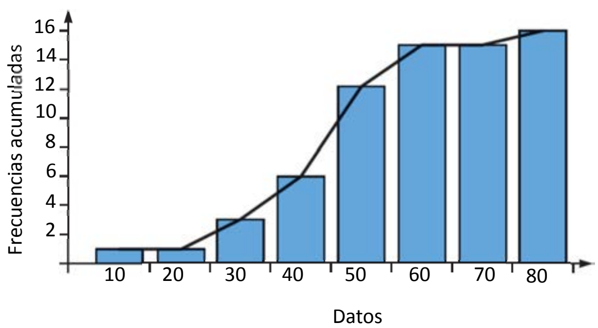

Frecuencias acumuladas




b) Frecuencias absolutas

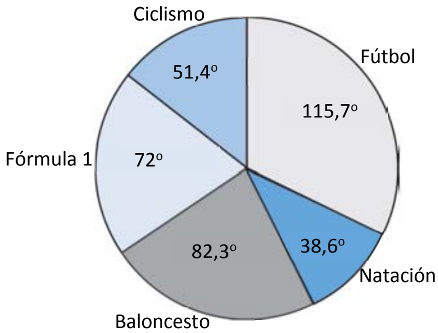


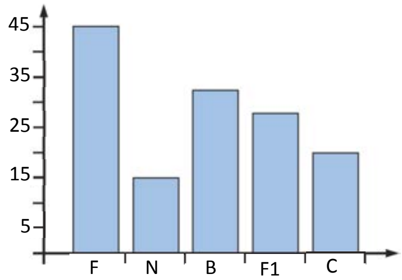

Frecuencias acumuladas



**53.** **Construye un diagrama de sectores para los datos de esta tabla y realiza con los mismos datos un diagrama de barras. ¿Puedes trazar su polígono de frecuencias?**

| Deporte favorito | $f_i$ |
|---|---|
| Fútbol | 45 |
| Natación | 15 |
| Baloncesto | 32 |
| Fórmula 1 | 28 |
| Ciclismo | 20 |



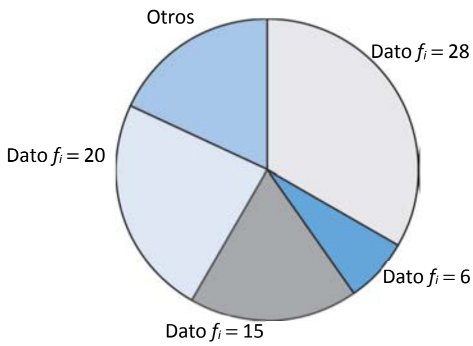

No tiene sentido trazar el polígono de frecuencias, pues son datos cualitativos.

**54.** **Sabiendo que en un diagrama de sectores uno de los sectores tiene una amplitud de 120° y corresponde a un dato con frecuencia absoluta igual a 28, averigua cuál es la amplitud para los datos de frecuencia absoluta 6, 15 y 20. Dibuja el diagrama de sectores.**

Para el dato de frecuencia 6: $\frac{6 \cdot 120}{28} = 25{,}71^{\circ}$

Para el dato de frecuencia 15: $\frac{15 \cdot 120}{28} = 64{,}29^{\circ}$

Para el dato de frecuencia 20: $\frac{20 \cdot 120}{28} = 85{,}71^{\circ}$

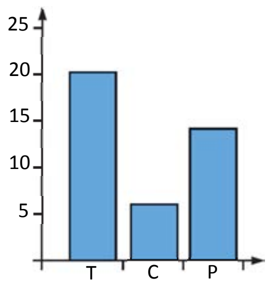



**55.** **De los asistentes a una cena, el 50% comió ternera, el 15% prefirió cordero; el resto, 14, eligió pescado.**

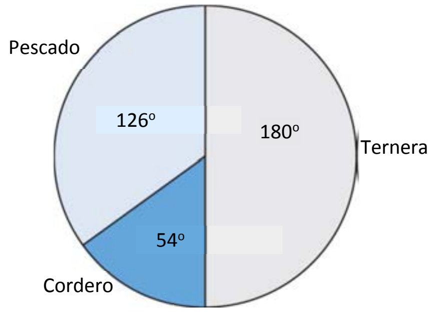
a) Elabora una tabla de frecuencias indicando la variable estadística.

b) Representa los datos en un diagrama de sectores.

a)




b)



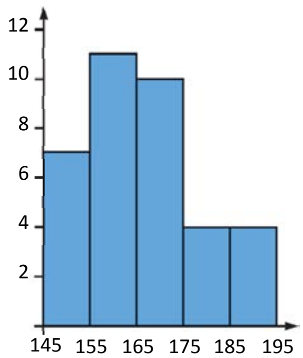

**56.** **Las estaturas de 36 jóvenes de una localidad, medidas en centímetros, son:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 157 | 148 | 167 | 187 | 154 | 169 | 154 | 147 | 164 |
| 157 | 148 | 153 | 188 | 167 | 157 | 163 | 158 | 149 |
| 168 | 155 | 157 | 165 | 164 | 176 | 175 | 174 | 190 |
| 165 | 194 | 165 | 178 | 156 | 176 | 168 | 155 | 171 |

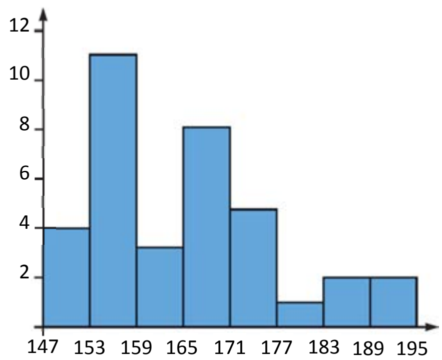
a) Agrupa los datos en cinco clases y dibuja el histograma asociado.

b) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 6 y dibuja el histograma asociado.

a)




b)




**57.** **Calcula para cada grupo de valores la media aritmética, la mediana y la moda.**

a) 0, 1, 0, 2, 3, 1, 1, 2, 0, 3, 4, 1, 5, 3, 1, 2

b) 2, 4, 2, 6, 8, 4, 4, 2, 6, 6, 8

c) 10, 15, 10, 10, 15, 20, 25, 10, 20, 25, 10, 15

a) Ordenamos los datos: 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5

Media: 1,81 Mediana: 1,5 Moda: 1

b) Ordenamos los datos: 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8

Media: 4,72 Mediana: 4 Moda: trimodal → 2, 4 y 6

c) Ordenamos los datos: 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15, 20, 20, 25, 25

Media: 15,42 Mediana: 15 Moda: 10

**58.** **Calcula las medidas de centralización, las de dispersión y el coeficiente de variación para los datos de cada una de las tablas e interpreta los resultados.**

| Horas que escucha música | Personas |
|---|---|
| 3 | 7 |
| 5 | 3 |
| 6 | 1 |
| 8 | 3 |
| 9 | 6 |

| Veces que va al cine | Personas |
|---|---|
| 3 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 5 |
| 8 | 3 |
| 9 | 3 |

Música:

Media: 6 Mediana: 5,5 Moda: 3

Desviación media: 2,4 Varianza: 6,6 Desviación típica: 2,57

Coeficiente de variación: 0,43

Cine:

Media: 5,9 Mediana: 6 Moda: bimodal → 5 y 6

Desviación media: 1,61 Varianza: 3,99 Desviación típica: 2,00

Coeficiente de variación: 0,34

**59.** **El tiempo, en minutos, que los trabajadores de una fábrica emplean para desplazarse desde su casa hasta su lugar de trabajo es:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 45 | 34 | 56 | 12 |
| 55 | 32 | 47 | 18 | 20 |
| 54 | 70 | 60 | 40 | 32 |
| 38 | 35 | 41 | 29 | 40 |
| 45 | 36 | 15 | 42 | 33 |
| 18 | 47 | 51 | 22 | 65 |

**Agrupa los datos en seis clases, calcula e interpreta las medidas de centralización y dibuja su diagrama de cajas.**

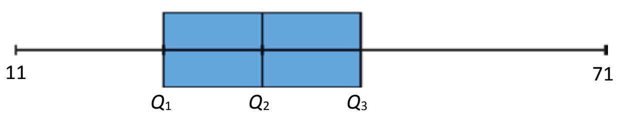
Dato menor: 12 Dato mayor: 70

$\frac{70-12}{6} = 9,67$. Hacemos intervalos de longitud 10.

| Intervalo | Marca de clase | Frecuencia |
|---|---|---|
| [11, 21) | 16 | 5 |
| [21, 31) | 26 | 3 |
| [31, 41) | 36 | 9 |
| [41, 51) | 46 | 6 |
| [51, 61) | 56 | 5 |
| [61, 71) | 66 | 2 |

Media: 39 Mediana: 36 Moda: 36

$Q_1$: 26 $Q_2$: 36 $Q_3$: 46



**60. Halla el valor de $x$ en este conjunto de datos para que la media sea 5.**

5 4 6 7 4 5 6 $x$ 5 4 6

$$\frac{5+4+6+7+4+5+6+5+4+6}{11}+\frac{x}{11}=5 \rightarrow x=3$$

**61. Averigua el valor de $x_4$ para que la media aritmética sea 5.**

a)

| $x_i$ | $x_1 = 1$ | $x_2 = 4$ | $x_3 = 7$ | $x_4$ | $x_5 = 10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 5 | 2 | 7 | 1 |

b)

| $x_i$ | $x_1 = 2$ | $x_2 = 3$ | $x_3 = 6$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 5 | 2 | 4 | 3 |

a) $\frac{1\cdot 3+4\cdot 5+7\cdot 2+10\cdot 1}{18}+\frac{x\cdot 7}{18}=5 \rightarrow x=6{,}14$

b) $\frac{2\cdot 5+3\cdot 2+6\cdot 4}{14}+\frac{x\cdot 3}{14}=5 \rightarrow x=10$

**62. Escoge doce datos de una variable cuantitativa discreta de forma que la media y la mediana sean 8 y que ningún valor sea 8.**

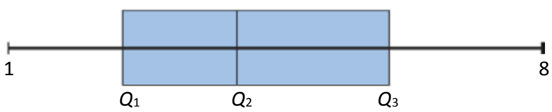
Respuesta abierta. Por ejemplo: 7 7 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9

**63. Calcula los cuartiles y dibuja el diagrama de cajas de este conjunto de datos.**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | 3 | 2 | 5 | 4 | 4 | 8 | 3 |
| 6 | 4 | 2 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 4 | 5 | 7 | 6 | 6 | 1 | 8 |

Ordenamos los datos:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | | |




$Q_1 = 2{,}5$ $Q_2 = 4$ $Q_3 = 6$

**64. Observa esta serie de datos:**

2 5 3 3 4

a) Calcula las medidas de centralización, media, mediana y moda.
b) Añade un dato de tal forma que la media no varíe. ¿Qué le pasa a la mediana y la moda?
c) Añade un dato de tal forma que la mediana no varíe. ¿Qué le pasa a la media y la moda?
d) Añade un dato de tal forma que la moda no varíe. ¿Qué le pasa a la media y la mediana?

a) Media: 3,4 Mediana: 3 Moda: 3

b) Añadimos como dato 3,4. La moda no cambia, pero la mediana pasa a ser 3,2.

c) Añadimos como dato 3. La moda no cambia, pero la media pasa a ser 3,33.

d) Añadimos como dato 1. La mediana no cambia, pero la media pasa a ser 3.

**65.** **Pon algunos ejemplos y contesta razonadamente.**

a) Si en un conjunto de datos la media es sensiblemente menor que la mediana, ¿podemos entender que algún valor muy pequeño influye en la media?

b) ¿Y si el valor de la media fuera menor que el de la mediana?

a) Sí, a la mediana no le afecta que haya un dato muy pequeño, se va a fijar en los valores que están en el centro, sin embargo, en la media sí que influye. Por ejemplo:

1 7 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9

La mediana es 8. Pero la media es 7,25, porque se ve afectada por el dato $x_1 = 1$.

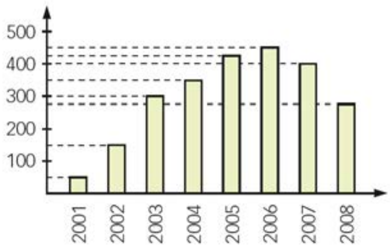
b) Si fuera mayor, sería porque le influye un dato muy grande.

7 7 7 7 7 7 9 9 9 9 9 100

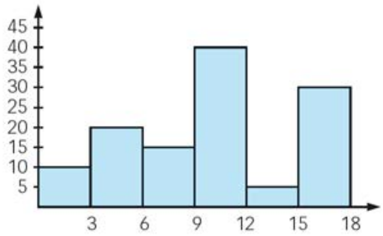
La mediana es 8. Pero la media es 15,58, porque se ve afectada por el dato $x_{12} = 100$.

**66.** **Halla e interpreta las medidas de centralización en cada caso.**

a)




b)




a) La moda se corresponde con el dato 2006.

Tenemos 50 + 150 + 300 + 350 + 425 + 450 + 400 + 275 = 2 400 datos. La mediana es 2006.

La media es 2 005,20.

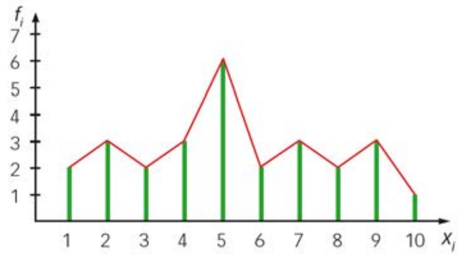
b) La moda se corresponde con el intervalo [9, 12), de media de clase 10,5.

Hay 10 + 20 + 15 + 40 + 5 + 30 = 120 datos. La mediana es la media de clase del intervalo [9, 12); es decir, 10,5.

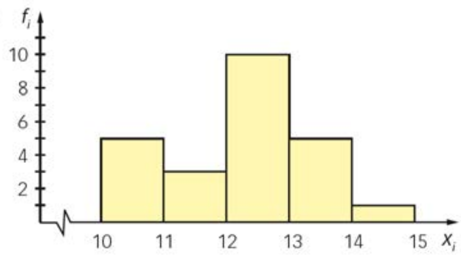
La media es 10.

**67.** **A partir de estos gráficos, determina su tabla de frecuencias y halla la media, mediana, moda y desviación típica de los datos.**

a)




b)



a)

| $x_i$ | $f_i$ | $(x_i - x)^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 18,15 |
| 2 | 3 | 10,63 |
| 3 | 2 | 5,11 |
| 4 | 3 | 1,59 |
| 5 | 6 | 0,07 |
| 6 | 2 | 0,55 |
| 7 | 3 | 3,03 |
| 8 | 2 | 7,51 |
| 9 | 3 | 13,99 |
| 10 | 1 | 22,47 |

Media: 5,26 Mediana: 5 Moda: 5

$\sigma^2$: 6,42 $\sigma$: 2,53

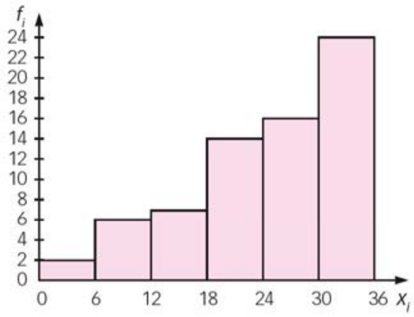
b)

| Intervalo | Marca de clase | $f_i$ | $(x_i - x)^2$ |
|---|---|---|---|
| [10, 11) | 10,5 | 5 | 3,06 |
| [11, 12) | 11,5 | 3 | 0,56 |
| [12, 13) | 12,5 | 10 | 0,06 |
| [13, 14) | 13,5 | 5 | 1,56 |
| [14, 15) | 14,5 | 1 | 5,06 |

Media: 12,25 Mediana: 12,5 Moda: 12,5

$\sigma^2$: 1,27 $\sigma$: 1,13

**68. Observa el histograma de frecuencias absolutas acumuladas de la figura.**




a) Elabora la tabla de frecuencias.

b) Calcula e interpreta las medidas de centralización.

c) Halla las medidas de posición.

d) Calcula e interpreta las medidas de dispersión.

a)

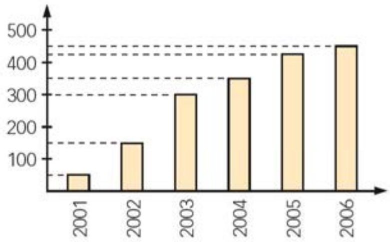
| Intervalo | Marca de clase | $f_i$ | $\|x_i - x\|$ | $(x_i - x)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| [0, 6) | 3 | 2 | 18,75 | 351,56 |
| [6, 12) | 9 | 4 | 12,75 | 162,56 |
| [12, 18) | 15 | 1 | 6,75 | 45,56 |
| [18, 24) | 21 | 7 | 0,75 | 0,56 |
| [24, 30) | 27 | 2 | 5,25 | 27,56 |
| [30, 36) | 33 | 8 | 11,25 | 126,56 |

b) Media: 21,75 Mediana:21 Moda: 33

c) $Q_1$: 12 $Q_2$: 21 $Q_3$: 33

d) $DM = 8,38$ $\sigma^2 = 102,94$ $\sigma = 10,15$ $CV = 0,47$

**69. El siguiente gráfico representa la evolución a través de los años del número de ordenadores personales de una pequeña localidad. Elabora su tabla de frecuencias.**




a) ¿Cuántos ordenadores había en el año 2005?

b) ¿En qué año se superaron los 250 ordenadores?

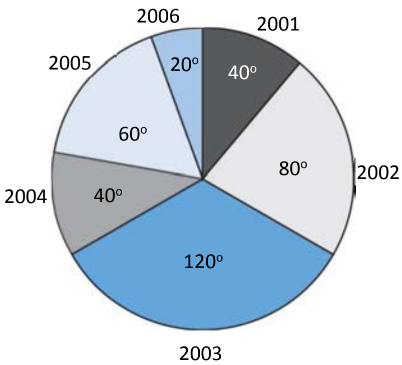
c) Construye un diagrama de sectores con estos datos.

| $x_i$ | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 50 | 100 | 150 | 50 | 75 | 25 |

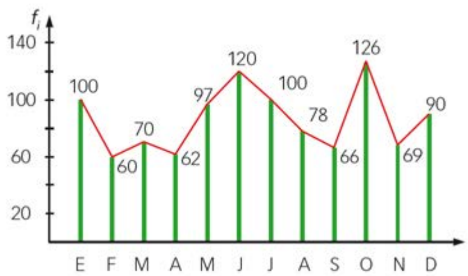
a) En el 2005 había un total de 425 ordenadores.

b) En el 2003.

c) Este diagrama representa la cantidad de ordenadores nuevos respecto del año anterior.




**70. El gráfico muestra el número de veces que se alquiló cada mes la pista de tenis de un polideportivo.**




a) Obtén las frecuencias relativas y acumuladas.

b) ¿En qué porcentaje de meses se alquiló la pista más de 80 veces?

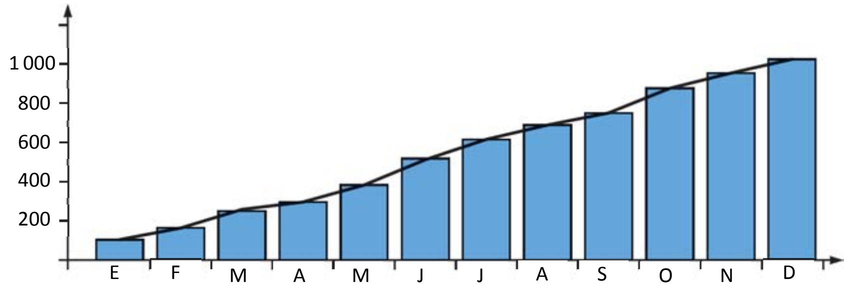
c) Representa el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

a)

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| E | 100 | 100 | 0,096 | 0,096 |
| F | 60 | 160 | 0,058 | 0,154 |
| M | 70 | 230 | 0,067 | 0,221 |
| A | 62 | 292 | 0,060 | 0,281 |
| M | 97 | 389 | 0,093 | 0,374 |
| J | 120 | 509 | 0,116 | 0,490 |
| J | 100 | 609 | 0,096 | 0,586 |
| A | 78 | 687 | 0,075 | 0,661 |
| S | 66 | 753 | 0,064 | 0,725 |
| O | 126 | 879 | 0,121 | 0,846 |
| N | 69 | 948 | 0,066 | 0,912 |
| D | 90 | 1 038 | 0,087 | 1 |

b) Se alquiló la pista más de 80 veces en enero, mayo, junio, julio, octubre y diciembre, que son 6 meses, lo que supone un 50 % de los meses.

c)




**71.** **En la tabla se recoge el número de habitaciones que tienen las viviendas de un bloque de pisos.**

| N.° de habitaciones | N.° de viviendas |
|---|---|
| 1 | 18 |
| 2 | 15 |
| 3 | 25 |
| 4 | 6 |

a) ¿Cuántas habitaciones tiene la cuarta parte de las viviendas?

b) Calcula la mediana y explica su significado.

Hay un total de 64 viviendas.

a) La cuarta parte de viviendas tienen una habitación ($Q_1 = 1$).

b) La mediana es 2, lo que quiere decir que un 50 % de las habitaciones tiene 2 habitaciones o menos.

**72.** **Estas son las edades, en años, de mis vecinos.**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 24 | 56 | 48 | 42 | 23 | 22 | 32 | 67 | 59 | 78 | 66 |
| 33 | 27 | 31 | 24 | 35 | 71 | 64 | 56 | 34 | 82 | 42 | 77 |
| 17 | 63 | 17 | 35 | 13 | 16 | 15 | 53 | 34 | 64 | 20 | 48 |

**Halla e interpreta sus medidas estadísticas agrupando los datos en ocho clases.**

Dato menor: 13 Dato mayor: 82

$\frac{82-13}{8} = 8{,}9$. Hacemos intervalos de longitud 9.

| Intervalo | Marca de clase | $f_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| [12, 21) | 16,5 | 6 | 27 | 729 |
| [21, 30) | 25,5 | 5 | 18 | 324 |
| [30, 39) | 34,5 | 7 | 9 | 81 |
| [39, 48) | 43,5 | 2 | 0 | 0 |
| [48, 57) | 52,5 | 6 | 9 | 81 |
| [57, 66) | 61,5 | 4 | 18 | 324 |
| [66, 75) | 70,5 | 3 | 27 | 729 |
| [75, 84) | 79,5 | 3 | 36 | 1 296 |

Total datos: 36

Medidas de centralización:

Media: 43,5 Mediana: 39 Moda: 34,5

Medidas de posición:

$Q_1$: 25,5 $Q_2$: 39 $Q_3$: 61,5

Medidas de dispersión:

*DM:* 17,5 $\sigma^2$: 400,5 $\sigma$: 20,01 *CV:* 0,46

**73. Calcula e interpreta las medidas de centralización y las de dispersión para los siguientes datos.**

| Estatura (cm) | N.° de alumnos |
|---|---|
| [140, 150) | 25 |
| [150, 160) | 43 |
| [160, 170) | 50 |
| [170, 180) | 38 |
| [180, 190) | 24 |

**¿A partir de qué medida se encuentran el 25 % de los alumnos más altos?**

Medidas de centralización:

Media: 164,61 Mediana: 165 Moda: 165

Medidas de dispersión:

*DM:* 10,04 $\sigma^2$: 153,74 $\sigma$: 12,40 *CV:* 0,08

El 25 % de los alumnos más altos se encuentran a partir de 175 cm.

**75. Las notas de Adrián a lo largo de un curso han sido estas:**

4 7 6 5 4 6 5 7 6 6 5 7

**Y las notas de Rebeca han sido las siguientes:**

2 1 3 8 9 9 3 3 2 3 10 9

a) Halla la media aritmética de cada uno.

b) ¿Cuál de ellos ha sido más regular en su rendimiento académico?

c) ¿Quién obtendría mayor nota si el profesor considerase la mediana para dar la calificación?

a) Media Adrián: 5,67 Media Rebeca: 5,17

b) Desviación típica Adrián: 1,03 Desviación típica Rebeca: 3,31

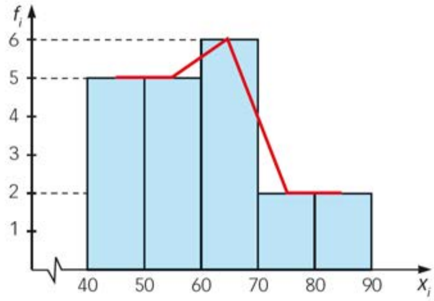
CV Adrián: 0,18 CV Rebeca: 0,64

El rendimiento académico de Adrián ha sido más regular.

c) Mediana Adrián: 6 Mediana Rebeca: 3

Obtendría mayor nota Adrián.

**76. Este es el gráfico relativo al número de kilómetros semanales que realizan los trabajadores de una empresa para llegar desde su domicilio hasta su trabajo.**




a) ¿Cuántos trabajadores tienen que desplazarse menos de 80 km semanales?

b) ¿Cuántos kilómetros recorren, por término medio, los trabajadores?

c) Calcula la mediana e interprétala.

d) ¿Cuántos kilómetros recorren las tres cuartas partes de los trabajadores?

e) Dibuja su diagrama de cajas e interprétalo.

a) Son $5 + 5 + 6 + 2 = 18$ trabajadores.

b) Calculamos la media usando las marcas de clase: 60,5.

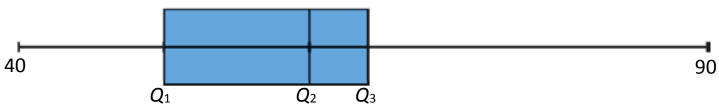
Recorren de media 60,5 km.

c) La mediana está entre el dato 10, que es 55, y el dato 11, que es 65. De modo que la mediana es 60.

El 50 % de los trabajadores recorre menos de 60 km.

d) Las tres cuartas partes recorren menos de 65 km.

e)




**77. Un atleta ha recorrido, de lunes a sábado, las siguientes distancias:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Lunes:** | **6 km** | **Miércoles:** | **6 km** | **Viernes:** | **7 km** |
| **Martes:** | **4 km** | **Jueves:** | **4 km** | **Sábado:** | **3 km** |

**Si decide entrenar el domingo, calcula la distancia que debe recorrer para que se mantengan:**

a) La media b) La mediana c) La moda

Media: 5 Mediana: 5 Moda: es bimodal ⟶ 4 y 6

a) Debe correr el domingo 5 km

b) Debe correr el domingo 5 km

c) Debe correr el domingo una distancia que no sea ni 3, ni 4, ni 6 ni 7, por ejemplo, 5 km.

**78. De los 40 vecinos del edificio Nuevohogar, el 10 % no tiene hijos, el 25 % tiene un hijo, el 50 % tiene dos, y el resto, tres hijos. En el edificio Torreluz, de los 60 vecinos, el 25 % no tiene hijos, el 15 % tiene uno, el 10 %, dos, y el resto, tres hijos.**

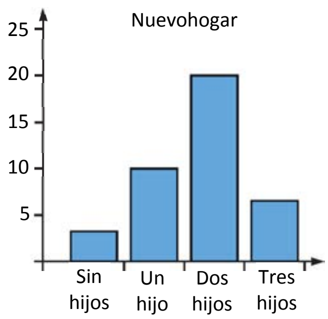
a) Construye un diagrama de barras que refleje la información de cada edificio.

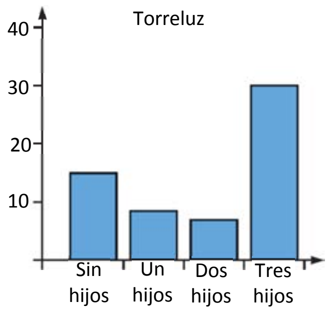
b) ¿Qué edificio tiene mayor número de hijos de media?

c) Existe una medida municipal por la que se dan ayudas al 25 % de las familias con mayor número de hijos por bloque. ¿Cuántos hijos tendrán las familias que recibirán ayuda en cada bloque?

d) Calcula los coeficientes de variación y concluye en qué edificio los datos están menos concentrados alrededor de algún valor de la variable.

a)




b) Media Nuevohogar: 1,7 Media Torreluz: 1,85

La media es mayor en Torreluz.

c) $Q_3$ de Nuevohogar: 2 ⟶ 2 hijos $Q_3$ de Torreluz: 3 ⟶ 3 hijos

d) CV de Nuevohogar: 0,50 CV Torreluz: 0,69

Los datos están menos concentrados en el edificio Torreluz.

**79. Juan ha calculado la media de los pesos de su grupo de amigos y ha obtenido 71,4 kg. Al repasar los cálculos se da cuenta de que hay un error: el peso de su amigo Rafael no es 57 kg, sino 75 kg. Calcula el peso medio real.**

La suma de los pesos de todos menos Rafael son $x$.

Tenemos que $\frac{x}{N}+\frac{57}{N}=71{,}4$

Y ahora $\frac{x}{N}+\frac{75}{N}=M$

Restamos las dos expresiones y tenemos que $\frac{57}{N}-\frac{75}{N}=71{,}4-M \rightarrow M=71{,}4+\frac{18}{N}$.

El peso depende del número de amigos del grupo.

**81.** **Estos son los resultados de una prueba de cálculo mental (CM) y otra de psicomotricidad (P) a 28 alumnos.**

| Puntuación | [10, 20) | [20, 30) | [30, 40) | [40, 50) | [50, 60) | [60, 70) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CM | 2 | 8 | 11 | 4 | 2 | 1 |
| P | 1 | 7 | 9 | 5 | 4 | 2 |

a) ¿En qué prueba se obtuvieron mejores resultados (mayor media)?

b) ¿Y dónde fue mayor la dispersión? (Usa el coeficiente de variación).

a) Media CM: 34,64 Media P: 38,57

La media es mayor en la prueba de psicomotricidad.

b) CV de CM: 0,33 CV de P: 0,33

La dispersión fue igual en ambos casos.

**82.** **Ayúdate de algunos ejemplos y contesta de forma razonada.**

a) Si a todos los datos de una muestra estadística se les suma una cantidad fija, *k*, ¿qué le sucede a la media y a la desviación típica de la nueva muestra?

b) Si a todos los datos de una muestra estadística se les multiplica por una cantidad fija, *k*, ¿cómo afecta eso cuando calculamos las nuevas media y desviación típica?

a) La media variaría, pero los datos seguirían igual de dispersos. Por ejemplo, consideramos los datos del ejercicio anterior para la prueba de psicomotricidad (izquierda) y sumamos 4 a los datos (derecha):

| Dato | Frecuencia |
|---|---|
| 15 | 1 |
| 25 | 7 |
| 35 | 9 |
| 45 | 5 |
| 55 | 4 |
| 65 | 2 |

| Dato | Frecuencia |
|---|---|
| 19 | 1 |
| 29 | 7 |
| 39 | 9 |
| 49 | 5 |
| 59 | 4 |
| 69 | 2 |

Media: 38,57 Desviación típica: 12,88

Media: 42,57 Desviación típica: 12,88

Además, la media incrementa la cantidad que hemos sumado.

b) La media varía porque varían los datos. La desviación típica aumenta si $k > 1$ y disminuye si $0 < k < 1$.

Por ejemplo, para los datos del ejercicio anterior para la prueba de psicomotricidad (izquierda) multiplicamos por 3 (derecha):

| Dato | Frecuencia |
|---|---|
| 15 | 1 |
| 25 | 7 |
| 35 | 9 |
| 45 | 5 |
| 55 | 4 |
| 65 | 2 |

| Dato | Frecuencia |
|---|---|
| 45 | 1 |
| 75 | 7 |
| 105 | 9 |
| 135 | 5 |
| 165 | 4 |
| 195 | 2 |

Media: 38,57 Desviación típica: 12,88

Media: 115,71 Desviación típica: 38,63

La media y la desviación típica quedan multiplicadas por 3.

**83.** **Un equipo de fútbol que juega en una liga de 20 equipos promedia 2,91 goles por partido.**

a) ¿Cuántos goles se espera que meta al acabar el campeonato?

b) ¿Cuántos goles se esperaría que metiera si la liga estuviera compuesta por 18 equipos?

c) ¿Y si fueran 22 los equipos participantes?

a) Al ser 20 equipos, tiene que jugar 19 partidos de ida y 19 partidos de vuelta, lo que hace un total de 38 partidos.

$2{,}91 \cdot 38 = 110{,}58$

Se espera que meta alrededor de 110 goles en total.

b) En este caso, $2{,}91 \cdot 34 = 98{,}94$.

Se espera que meta alrededor de 98 goles.

c) En este caso, $2{,}91 \cdot 42 = 122{,}22$.

Se espera que meta alrededor de 122 goles.

**84.** **Un pescador deportivo durante 7 días ha promediado 1 captura diaria. Si dos días no pescó nada, ¿cuál sería la desviación típica del número de capturas diarias?**

La media es 1. En total debe pescar 7 peces sabiendo que dos días no pesca nada.

Las posibles capturas son:

Dos días 0 peces, tres días 1 pez y dos días 2 peces: $\sigma = 0{,}76$.

Dos días 0 peces, cuatro días 1 pez y un día 3 peces: $\sigma = 0{,}93$.

**85.** **Una encuesta sobre hábitos saludables muestra que el 30 % de los encuestados manifiestan no comer fruta nunca, el 50 % afirma comer alguna pieza de fruta entre comidas y el 35 % come fruta en todas las comidas. ¿Qué porcentaje come fruta en las comidas y entre comidas también?**

Hay un 70 % que come fruta (el contrario del que no come fruta). Tenemos un 85 % de los otros porcentajes, lo que quiere decir que hay un 15 % que están en los dos grupos; es decir, que comen fruta en las comidas y entre comidas.

**86.** **Completa la tabla de frecuencias de cada variable y realiza, si es posible, un diagrama de caja y bigotes.**

| Tiempo en llegar al IES | [0, 15) | [15, 30) | [30, 45) | [45, 60) |
|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 132 | 221 | 86 | 61 |

| Tipo de transporte | Público | Privado |
|---|---|---|
| N.º de alumnos | 325 | 175 |

| Curso | 1 ESO | 2 ESO | 3 ESO | 4 ESO | 1 Bach | 2 Bach |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 140 | 100 | 92 | 70 | 55 | 43 |

| Edad | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 25 | 52 | 77 | 125 | 151 | 40 | 30 |

| Peso de la mochila | [0, 2) | [2, 4) | [4, 6) | [6, 8) | [8, 10) |
|---|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 50 | 188 | 132 | 118 | 12 |

| Tiempo en llegar al IES | [0, 15) | [15, 30) | [30, 45) | [45, 60) | |
|---|---|---|---|---|---|
| N.º alumnos | 132 | 221 | 86 | 61 | 500 |
| $F_i$ | 132 | 353 | 439 | 500 | |
| $h_i$ | 0,26 | 0,44 | 0,17 | 0,12 | 1 |
| $H_i$ | 0,26 | 0,70 | 0,88 | 1 | |
| Porcentaje | 26 % | 44 % | 17 % | 12 % | |

$Q_1$: 7,5 $Q_2$: 22,5 $Q_3$: 37,5


| Tipo de transporte | Público | Privado | |
|---|---|---|---|
| N.º alumnos | 325 | 175 | 500 |
| $F_i$ | 325 | 500 | |
| $h_i$ | 0,65 | 0,35 | 1 |
| $H_i$ | 0,65 | 1 | |
| Porcentaje | 65 % | 35 % | |

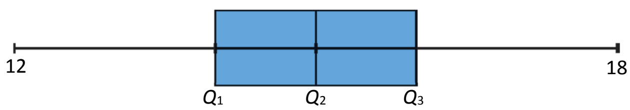
No tiene sentido calcular las medidas de posición ni dibujar el diagrama de cajas porque son datos cualitativos.

| Curso | 1 ESO | 2 ESO | 3 ESO | 4 ESO | 1 Bach | 2 Bach | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 140 | 100 | 92 | 70 | 55 | 43 | 500 |
| $F_i$ | 140 | 240 | 332 | 402 | 457 | 500 | |
| $h_i$ | 0,28 | 0,2 | 0,18 | 0,14 | 0,11 | 0,09 | 1 |
| $H_i$ | 0,28 | 0,48 | 0,66 | 0,80 | 0,91 | 1 | |
| Porcentaje | 28 % | 20 % | 18 % | 14 % | 11 % | 9 % | |

No tiene sentido calcular las medidas de posición ni dibujar el diagrama de cajas porque son datos cualitativos.

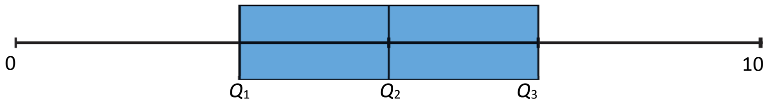
| Edad | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º alumnos | 25 | 52 | 77 | 125 | 151 | 40 | 30 | 500 |
| $F_i$ | 25 | 77 | 154 | 279 | 430 | 470 | 500 | |
| $h_i$ | 0,05 | 0,104 | 0,154 | 0,25 | 0,302 | 0,08 | 0,06 | 1 |
| $H_i$ | 0,05 | 0,154 | 0,308 | 0,558 | 0,860 | 0,940 | 1 | |
| Porcentaje | 5 % | 10,4 % | 15,4 % | 25 % | 30,2 % | 8 % | 6 % | |

$Q_1$: 14 $Q_2$: 15 $Q_3$: 16



| Peso de la mochila | [0, 2) | [2, 4) | [4, 6) | [6, 8) | [8, 10) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º alumnos | 50 | 188 | 132 | 118 | 12 | 500 |
| $F_i$ | 50 | 238 | 370 | 488 | 500 | |
| $h_i$ | 0,1 | 0,376 | 0,264 | 0,236 | 0,024 | 1 |
| $H_i$ | 0,1 | 0,476 | 0,740 | 0,976 | 1 | |
| Porcentaje | 10 % | 37,6 % | 26,4 % | 23,6 % | 2,4 % | |

$Q_1$: 3 $Q_2$: 5 $Q_3$: 7




## DEBES SABER HACER

**1. Completa en tu cuaderno esta tabla con los resultados de una encuesta.**

| Media | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [12, 15) | | 25 | | |
| [15, 18) | 175 | | | |
| [18, 21) | | | 0,29 | |
| [21, 24) | | 400 | | |

a) ¿A cuántas personas se ha preguntado?

b) ¿Qué tanto por ciento sobre el total representa el intervalo [21, 24)?

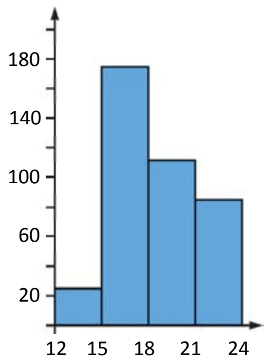
c) Elabora un histograma con estos datos.

| Media | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [12, 15) | **25** | 25 | **0,0625** | **0,0625** |
| [15, 18) | 175 | **200** | **0,4375** | **0,5** |
| [18, 21) | **116** | **316** | 0,29 | **0,79** |
| [21, 24) | **84** | 400 | **0,21** | **1,00** |

a) Han preguntado a 400 personas.

b) 21 %.

c)




**2. Determina la media, la mediana, el recorrido y la desviación típica de los siguientes datos:**

1 2 1 1 3

Media: $\frac{1+2+1+1+3}{5} = 1{,}6$ Mediana: 1 Rango o recorrido: $3 - 1 = 2$

Desviación típica: $\sqrt{\frac{(1-1{,}6)^2+(1-1{,}6)^2+(1-1{,}6)^2+(2-1{,}6)^2+(3-1{,}6)^2}{5}} = 0{,}8$

**3. De los clientes que acudieron a un restaurante un día, 8 pagaron entre 10 y 15 €, 12 pagaron entre 15 y 20 €, 32 pagaron entre 20 y 25 €, 20 pagaron entre 25 y 30 €, y 8 pagaron más de 30 €.**

a) ¿Cuál fue el gasto medio por cliente?

b) ¿Cuánto pagó el 25 % que pagó más?

c) Calcula e interpreta el coeficiente de variación.

| Gasto | Marca de clase | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| [10, 15) | 12,5 | 8 | 8 |
| [15, 20) | 17,5 | 12 | 20 |
| [20, 25) | 22,5 | 32 | 52 |
| [25, 30) | 27,5 | 20 | 72 |
| Más de 30 | 32,5 | 8 | 80 |

a) Media: 23

Fue un gasto medio de 23 euros.

b) Pagaron más de 27,50 euros.

c) El coeficiente de variación es 0,24.

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**87. El reparto de las tareas domésticas no es equitativo en los hogares españoles.**

**Según las últimas encuestas del INE (Instituto Nacional de Estadística), los hombres que realizan tareas domésticas son el 74,7 %, casi cinco puntos más que en 2003. Sin embargo, el porcentaje de mujeres que las realiza sigue siendo muy superior, el 91,9 %. También hay diferencias en cuanto al tiempo empleado. La diferencia entre hombres y mujeres ha pasado de 2 h y 54 min, en el año 2003, a 2 h y 13 min en la actualidad.**

**Pero ¿qué ocurre entre los jóvenes? Las siguientes tablas muestran los resultados de una encuesta realizada sobre este tema a un grupo de jóvenes.**

**¿Ayudas en las tareas de tu casa?**

| | Sí | No |
|---|---|---|
| Chicos | 12 | 6 |
| Chicas | 18 | 4 |

**¿Cuántas horas dedicas a estas actividades?**

| | Chicos | Chicas |
|---|---|---|
| [0, 1) | 14 | 4 |
| [1, 2) | 2 | 6 |
| [2, 3) | 1 | 5 |
| [3, 4) | 1 | 3 |

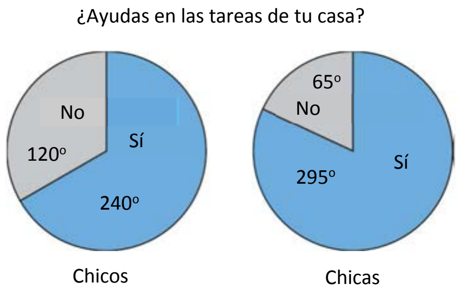
**¿Realizas las siguientes actividades?**

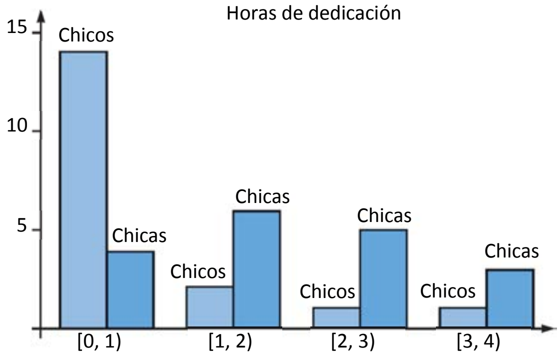
| | Chicos | Chicas |
|---|---|---|
| Sacar la basura | 12 | 6 |
| Hacer la compra | 10 | 10 |
| Lavar los platos | 4 | 16 |
| Hacer tu cama | 6 | 18 |

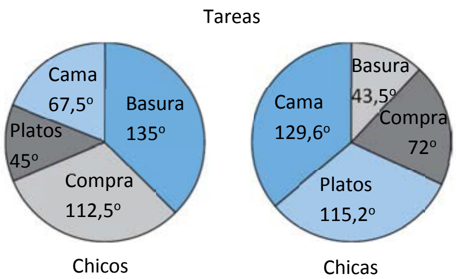
a) Realiza el gráfico adecuado a cada pregunta que refleje los resultados.

b) Calcula la media y el coeficiente de variación para: *¿Cuántas horas dedicas a estas actividades?* Primero hazlo para los chicos y las chicas por separado, y después, conjuntamente. Analiza los resultados obtenidos.

a)




b) Media chicos: 0,89

Coeficiente variación chicos: 0,93

Media chicas: 1,89

Coeficiente variación chicas: 0,53

Media total: 1,38

Coeficiente de variación total: 0,75

Las chicas dedican de media 1 hora más a las tareas. Además, sus datos están más agrupados en torno a la media, mientras que los de los chicos están más dispersos.

Al considerar todo el grupo, tanto la media como la dispersión se compensan entre los dos grupos. Mientras que la media aumenta el tiempo medio de los chicos, pero disminuye el de las chicas, el coeficiente de variación indica que los datos totales están algo más dispersos que los de las chicas, pero menos que los de los chicos.

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**88. Construye la tabla de valores de un conjunto de 20 datos cuya variable toma, únicamente, tres valores, sabiendo que: $h_2 = \frac{2}{5}$ y que el tercer valor de la variable aparece la mitad de las veces.**

| DATOS | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| A | 2 | 2 | 1/10 |
| B | 8 | 10 | **2/5** |
| C | **10** | **20** | **1/2** |

**89. Sabiendo que la media de un grupo de 20 datos es 8, calcula la media de esos datos si:**

a) Sumamos 10 a cada dato.

b) Restamos 4 a cada dato.

c) Triplicamos cada dato.

d) Reducimos a la mitad cada dato.

a) La media sería 18.

b) La media sería 4.

c) La media sería 24.

d) La media sería 4.

**90. Se exponen a continuación varios errores cometidos al calcular la media aritmética. Estudia cómo afectan al cálculo de la media y cómo subsanarlos sabiendo que $N = 25$.**

a) Al realizar la suma de todos los datos multiplicados por sus frecuencias, hay un error en los cálculos y la suma excede en 300.

b) El resultado de la suma de todos los datos multiplicados por sus frecuencias es inferior en 100.

c) Al realizar la división se toma como divisor 50.

d) Al realizar la división se toma como divisor 5.

a) Tendríamos que el valor bueno de la suma es *x*, y hemos obtenido la media de $\frac{x+300}{25}$, para tener la media buena hay que restar a la que tenemos $\frac{300}{25} = 12$.

b) Habría que sumarle a la media $\frac{100}{25} = 4$.

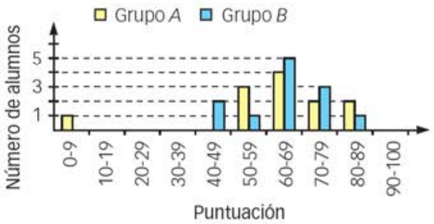
c) Habría que multiplicar la media por 2.

d) Habría que dividir la media entre 5.

## PRUEBAS PISA

**91.** **El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo *A* y Grupo *B*.**

**La puntuación media del Grupo *A* es 62,0 y la media del Grupo *B* es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.**




**Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo *B* fue mejor que el Grupo *A*.**

**Los alumnos del Grupo *A* no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo *B* no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen.**

**Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo *A*.**

*(Prueba PISA 2003)*

Pueden decir que si se usase la mediana como valor para ver quién ha obtenido mejor nota, serían los dos iguales con una mediana de 64,5.

O que los datos del grupo *A* están más dispersos, mientras que los del grupo *B* están más agrupados, lo que quiere decir que en el grupo *B* hay más alumnos con una nota en torno a la media, que en el grupo *A*, que hay alumnos con una nota muy buena o con una nota muy mala.

**92.** **Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha.**

| Tipo de basura | Tiempo de descomposición |
|---|---|
| Piel de plátano | 1 - 3 años |
| Piel de naranja | 1 - 3 años |
| Cajas de cartón | 0,5 años |
| Chicles | 20 - 25 años |
| Periódicos | Unos pocos días |
| Vasos de plástico | Más de 100 años |

**Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras.**
**Da una razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos.**

*(Prueba PISA 2006)*

Un diagrama de barras no resulta adecuado porque hay datos con unas frecuencias muy diversas, va desde 0,5 años a más de 100 años, con lo cual no se podría usar una escala en el eje vertical que nos permitiese leer bien todos los datos.

Además, no se conocen las longitudes exactas de las barras salvo para las cajas de cartón.

# Probabilidad

# 14

## CLAVES PARA EMPEZAR

**1. Halla la frecuencia relativa de todos los datos de la tabla anterior.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| $h_i$ | 0,15 | 0,15 | 0,2 | 0,3 | 0,2 |

**2. Completa en tu cuaderno con las frecuencias relativas la siguiente tabla.**

| $x_i$ | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 2 | 6 | 5 |

| $x_i$ | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 2 | 6 | 5 |
| $h_i$ | 0,35 | 0,1 | 0,3 | 0,25 |

**3. Compara estas fracciones.**

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{7}$

c) $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{5}$

a) $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}\quad \frac{3}{4}=\frac{15}{20} \rightarrow \frac{2}{5}<\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}\quad \frac{4}{7}=\frac{12}{21} \rightarrow \frac{2}{3}>\frac{4}{7}$

c) $\frac{3}{7}=\frac{15}{35}\quad \frac{2}{5}=\frac{14}{35} \rightarrow \frac{3}{7}>\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{8}=\frac{15}{40}\quad \frac{2}{5}=\frac{16}{40} \rightarrow \frac{3}{8}<\frac{2}{5}$

## VIDA COTIDIANA

**El oído humano no escucha todas las frecuencias de audio que reproduce un equipo musical. Los archivos mp3 eliminan esas pequeñas porciones apenas audibles por las personas y con ello reducen el tamaño de los archivos.**

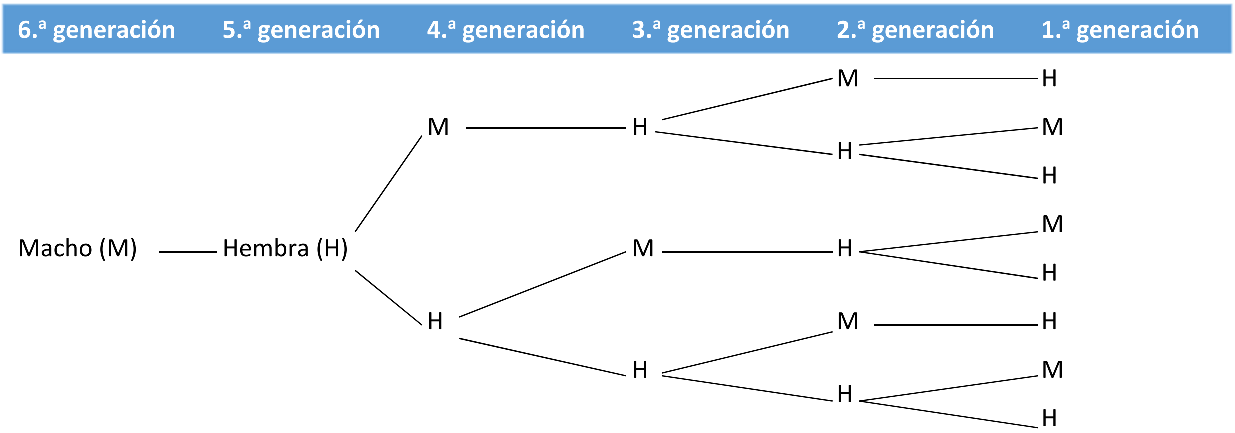
- **Mi mp3 tiene 120 canciones. Hay 20 que me gustan mucho. Si reproduce una canción al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de mis favoritas?**

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

## RESUELVE EL RETO

**Las abejas macho nacen de huevos sin fecundar, por tanto tienen madre pero no padre. Las abejas hembra nacen de huevos fecundados. ¿Cuántos antepasados tendrá una abeja macho en la sexta generación?**

Construimos el árbol genealógico hacia atrás (en la generación inmediatamente superior, cada macho tiene un solo antepasado; cada hembra, dos).




Tiene 19 antepasados.

**Mi vecino me ha dicho que tiene 2 hijos y me ha hablado de uno de ellos que es chico. ¿Cuál es la probabilidad de que sean los dos chicos?**

Las combinaciones posibles con dos hijos son: {AA, AO, OA, OO}. Si sabemos que uno es chico se reduce a {AO, OA, OO}. De modo que la probabilidad de que los dos sean chicos es 1/3.

**Una bolsa de caramelos tiene 10 caramelos y puede haber cualquier cantidad de caramelos de limón y de naranja. Incluso todos pueden ser de un mismo sabor. ¿Qué probabilidad hay de que al coger uno no sea de limón?**

Si son todos de limón, la probabilidad de que no sea de limón es cero. Si son todos de naranja, la probabilidad de coger uno que no sea de limón es 1. Y en los demás casos no se puede decir, dependerá del número de caramelos que haya de cada tipo.

## ACTIVIDADES

**1. Clasifica en determinista o aleatorio:**

a) Preguntar a tu amigo un número de dos cifras.

b) Anotar el color de una bola que sacamos de una urna que contiene 6 bolas azules.

c) Extraer una carta de la baraja española.

a) Es aleatorio, no sabemos qué va a decir nuestro amigo.

b) Es determinista, solo hay bolas azules, sabemos lo que va a salir.

c) Es aleatorio, no sabemos qué carta va a salir.

**2.** **Escribe el espacio muestral de los experimentos aleatorios de la actividad anterior.**

a) $E$ = {10, 11, 12, 13, …, 97, 98, 99}

c) $E$ = {As de oros, dos de oros, tres de oros, cuatro de oros, cinco de oros, seis de oros, siete de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros, as de bastos, …,rey de bastos, as de espadas, …, rey de espadas, as de copas, …, rey de copas}

**3.** **Dado el experimento que consiste en elegir una letra de la palabra *ALUMNO*, escribe todos sus sucesos elementales y uno compuesto.**

Sucesos elementales: {A}, {L}, {U}, {M}, {N}, {O}

Suceso compuesto, por ejemplo, sacar vocal = {A, U, O}

**4.** **Utiliza un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral del experimento que consiste en escoger una camiseta y un pantalón de un armario en el que hay dos camisetas, una verde y otra roja, y tres pantalones, uno azul, otro negro y otro marrón.**

Camiseta verde
- Pantalón azul → Verde–Azul
- Pantalón negro → Verde–Negro
- Pantalón marrón → Verde–Marrón

Camiseta roja
- Pantalón azul → Rojo–Azul
- Pantalón negro → Rojo–Negro
- Pantalón marrón → Rojo–Marrón

$E$ = {*VA, VN, VM, RA, RN, RM*}

**5.** **Se extraen dos cartas de la baraja española y se anota el palo al que pertenecen. Dibuja el diagrama de árbol para este experimento y, a partir de él, escribe el espacio muestral.**

Bastos
- Bastos
- Copas
- Espadas
- Oros

Copas
- Bastos
- Copas
- Espadas
- Oros

Espadas
- Bastos
- Copas
- Espadas
- Oros

Oros
- Bastos
- Copas
- Espadas
- Oros

Considerando que influye el orden, el espacio muestral es:
$E$ = {*BB, BC, BE, BO, CB, CC, CE, CO, EB, EC, EE, EO, OB, OC, OE, OO*}

Considerando que no influye el orden, el espacio muestral es:
$E$ = {*BB, BC, BE, BO, CC, CE, CO, EE, EO, OO*}

**6.** **Determina, utilizando un diagrama de árbol, todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar estos experimentos aleatorios.**

a) Lanzar dos dados.

b) Lanzar tres monedas.

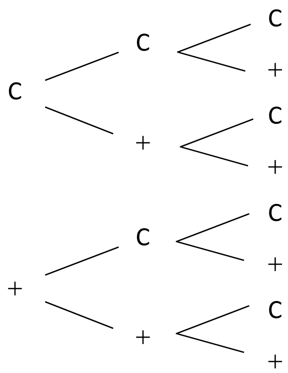
a) Si importa el orden, el espacio muestral es:

$E$ = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}

Si no importa el orden, el espacio muestral es:

$E$ = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55,56, 66}

b)




Si importa el orden, el espacio muestral es:

$E$ = {CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

Si no importa el orden, el espacio muestral es:

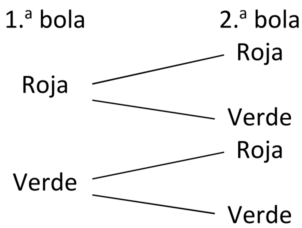
$E$ = {CCC, CC+, C++, +++}

**7.** **En una bolsa tenemos 4 bolas rojas y 7 bolas verdes. Dibuja el diagrama de árbol y describe los sucesos elementales del espacio muestral si:**

a) Se escogen dos bolas al azar y se anota su color.

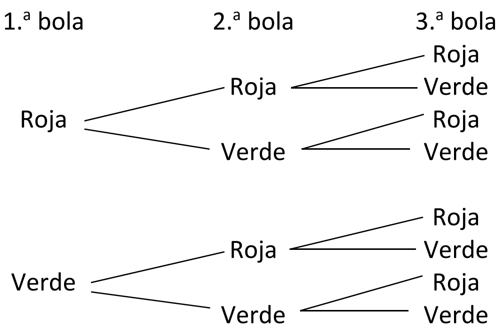
b) Se escogen tres bolas y se anota su color.

a)




Los sucesos elementales son RR, RV, VR, VV, que se reducen a RR, VR y VV si el orden no importa.

b)




Los sucesos elementales son RRR, RRV, RVR, RVV, VRR, VRV, VVR, VVV, que se reducen a RRR, RRV, RVV, VVV si el orden no importa.

**8.** **Realizamos el siguiente experimento aleatorio: primero lanzamos un dado y anotamos el número de su cara superior.**

- **Si el resultado es un número par, lanzamos una moneda y anotamos el resultado.**
- **Si es impar, volvemos a lanzar el dado y anotamos el número de su cara superior.**

a) Indica todos los resultados posibles que podemos obtener.

b) Determina el suceso «Que salga número par».

a) Par:

2 → 2C, 2+

4 → 4C, 4+

6 → 6C, 6+

Impar:

1 → 11, 12, 13, 14, 15, 16

3 → 31, 32, 33, 34, 35, 36

5 → 51, 52, 53, 54, 55, 56

b) «Que salga número par» = {2C, 2+, 4C, 4+, 6C, 6+}

**9.** **En una urna tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Utiliza un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral en cada uno de estos experimentos aleatorios.**


a) Si sacamos una bola, y sin echarla a la urna, sacamos otra bola.

b) Si sacamos una bola, la volvemos a echar a la urna, y sacamos una segunda bola.

c) Si sacamos tres bolas a la vez.

a)

1 → 2, 3, 4, 5

2 → 1, 3, 4, 5

3 → 1, 2, 4, 5

4 → 1, 2, 3, 5

5 → 1, 2, 3, 4

Consideramos que el orden influye:

$E$ = {12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54}

b) Como se puede repetir el número y el orden influye:

$E$ = {11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55}

c) Si sacamos tres bolas a la vez, no se puede repetir número. Además, como son tres bolas a la vez, no importa el orden, es lo mismo 123 que 213.

$E$ = {123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345}

**10.** **Considera el experimento de extraer una carta de una baraja española. Utiliza la unión y la intersección de sucesos para expresar:**

a) $A$ = «Que la carta sea un as o un rey»

b) $B$ = «Que la carta sea un rey o sea de copas»

c) $C$ = «Que la carta sea el caballo de bastos»

a) $R$ = «Que la carta sea un as» $S$ = «Que la carta sea un rey»

$A = R \cup S$

b) $R$ = «Que la carta sea un rey» $S$ = «Que la carta sea de copas»

$B = R \cup S$

c) $R$ = «Que la carta sea un caballo» $S$ = «Que la carta sea de bastos»

$C = R \cap S$

**11.** **Dados los sucesos $A$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, $B$ = {3, 6, 9, 12} y $C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, calcula:**

a) $A \cup B$ c) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

a) $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}

b) $A \cap C$ = {2, 4, 6}

c) $A \cup B \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12}

d) $A \cap B \cap C$ = {6}

**12.** **Dado el suceso $A$ = {2, 4, 6, 8}, ¿puedes calcular $\overline{A}$?**

No, porque no sabemos cuál es el espacio muestral.

**13.** **En un monedero tenemos monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos y sacamos una de ellas al azar. Llamamos:**

**$A$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea mayor o igual que 20 céntimos»**
**$B$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea múltiplo de 5»**
**$C$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea un número impar»**

**Calcula:**

a) $A \cup B \cup C$ c) $\overline{A} \cap C$ e) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cap B \cap C$ d) $\overline{A \cap C}$ f) $\overline{A \cup B}$

a) $A \cup B \cup C$ = {1, 5, 10, 20, 50}

b) $A \cap B \cap C = \varnothing$

c) $\overline{A} \cap C$ = {1, 5}

d) $\overline{A \cap C} = E$

e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ = {1, 2, 5, 10}

f) $\overline{A \cup B}$ = {1, 2}

**14. Lanzamos dos dados, uno de color rojo y otro azul, y anotamos el número que aparece en su cara superior. Considerando los siguientes sucesos:**

**$A$ = «Salir el mismo número en los dos dados»**
**$B$ = «La suma de los dos números es 9»**
**$C$ = «El producto de los dos números es mayor que 30»**

a) Calcula:

I. $A \cup \overline{B}$ — III. $\overline{A} \cap \overline{B}$ — V. $\overline{A} \cup \overline{B}$

II. $A \cap B \cap C$ — IV. $\overline{A \cap B}$ — VI. $\overline{A \cup C}$

b) ¿Qué ocurriría si los dados fuesen del mismo color?

a) I: {R1-A1, R1-A2, R1-A3, R1-A4, R1-A5, R1-A6, R2-A1, R2-A2, R2-A3, R2-A4, R2-A5, R2-A6, R3-A1, R3-A2, R3-A3, R3-A4, R3-A5, R4-A1, R4-A2, R4-A3, R4-A4, R4-A6, R5-A1, R5-A2, R5-A3, R5-A5, R5-A6, R6-A1, R6-A2, R6-A4, R6-A5, R6-A6}

II: $\emptyset$

III: {R1-A2, R1-A3, R1-A4, R1-A5, R1-A6, R2-A1, R2-A3, R2-A4, R2-A5, R2-A6, R3-A1, R3-A2, R3-A4, R3-A5, R4-A1, R4-A2, R4-A3, R4-A6, R5-A1, R5-A2, R5-A3, R5-A6, R6-A1, R6-A2, R6-A4, R6-A5}

IV: $E$

V: $E$

VI: {R1-A2, R1-A3, R1-A4, R1-A5, R1-A6, R2-A1, R2-A3, R2-A4, R2-A5, R2-A6, R3-A1, R3-A2, R3-A4, R3-A5, R3-A6, R4-A1, R4-A2, R4-A3, R4-A5, R4-A6, R5-A1, R5-A2, R5-A3, R5-A4, R5-A6, R6-A1, R6-A2, R6-A3, R6-A4, R6-A5}

b) Que habría sucesos elementales que no se distinguirían, por ejemplo, sería lo mismo R1-A2 que R2-A1, de modo que se verían simplificados los posibles resultados para cada suceso.

**15. Calcula la probabilidad de estos sucesos referidos al lanzamiento de un dado.**

a) Que salga un número mayor que 7.

b) Que salga un 4.

a) $P(A) = 0$ — b) $P(A) = \frac{1}{6}$

**16. En el experimento anterior, ¿se puede aplicar la regla de Laplace?**

Sí, porque todos los resultados tienen la misma probabilidad de salir.

**17. ¿Cómo sería un dado en el que sus sucesos elementales no fuesen equiprobables?**

Estaría trucado y no se podría aplicar la regla de Laplace para saber la probabilidad de cada una de sus caras.

**18. Al tirar un dado, determina la probabilidad de que su cara superior sea:**

a) El número 3.

b) El número 3 o el 6.

c) Un número menor que 3.

d) No sea el número 4.

e) No sea el número 2 ni el 4.

a) $A = \{3\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{6}$

b) $B = \{3, 6\}$ $\quad P(B) = \frac{1}{3}$

c) $C = \{1, 2\}$ $\quad P(C) = \frac{1}{3}$

d) $D = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ $\quad P(D) = \frac{5}{6}$

e) $E = \{1, 3, 5, 6\}$ $\quad P(E) = \frac{2}{3}$

**19. En un paquete de caramelos hay 10 con sabor a fresa y 5 de limón. ¿Qué probabilidad hay de que al coger un caramelo al azar sea de limón? ¿Y de que no sea de limón?**

$P(\text{limón}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{no limón}) = \frac{2}{3}$

**20. Se saca una bola de una bolsa en la que hay siete bolas blancas, diez negras y cuatro verdes. Calcula la probabilidad de sacar:**

a) Una bola negra.

b) Una bola que no sea blanca.

c) Una bola negra o verde.

a) $P(\text{bola negra}) = \frac{10}{21}$ $\quad$ b) $P(\text{bola no blanca}) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ $\quad$ c) $P(\text{bola negra o verde}) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

**21. Tiramos dos veces una moneda y observamos su cara superior. Calcula la probabilidad de que:**

a) Salga las dos veces cara.

b) Salga una vez cara, y la otra, cruz.

c) No salga ninguna vez cruz.

d) Salga, al menos una vez, cara.

$E = \{CC, C+, +C, ++\}$

a) $P(A) = \frac{1}{4}$ $\quad$ b) $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ c) $P(C) = \frac{1}{4}$ $\quad$ d) $P(D) = \frac{3}{4}$

**22. En una heladería se venden estos helados:**


**Una niña pequeña elige un sabor al azar. Calcula la probabilidad de que el helado que haya elegido:**

a) Sea de avellana.

b) No sea de chocolate.

c) Sea de pistacho o tiramisú.

d) No sea de pistacho ni de tiramisú.

a) $P(\text{ser de avellana}) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{no ser de chocolate}) = \frac{5}{6}$

c) $P(\text{ser de pistacho o de tiramisú}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) $P(\text{no ser de pistacho o de tiramisú}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**23. Se lanzan una moneda y un dado y se anotan los resultados. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Cara y un número par.

b) Cruz y un número múltiplo de 3.

$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$

a) $P(\text{cara y número par}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{cruz y múltiplo de 3}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

**24. Adela y Susana escriben, cada una en un papel, un número comprendido entre 1 y 4, ambos inclusive. Después, suman los dos números que han escrito.**

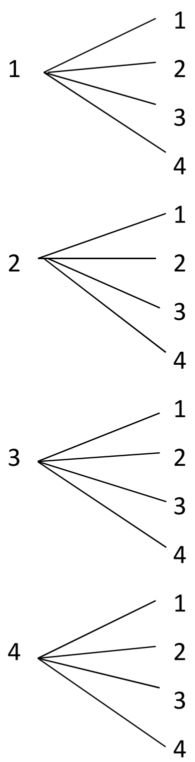
a) Dibuja el diagrama de árbol y escribe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los dos números sea 6.

c) Halla la probabilidad de que la suma sea mayor que 7.

d) Calcula la probabilidad de que la suma sea un número par.

a) Adela Susana



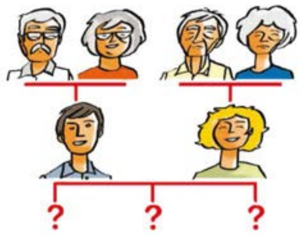

$E = \{1–1, 1–2, 1–3, 1–4, 2–1, 2–2, 2–3, 2–4, 3–1, 3–2, 3–3, 3–4, 4–1, 4–2, 4–3, 4–4\}$

b) $P(A) = \frac{3}{16}$

c) $P(B) = \frac{1}{16}$

d) $P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

**25.** **Una pareja planea tener tres hijos. En un diagrama de árbol indica todas las combinaciones posibles del sexo de sus hijos. Después, calcula la probabilidad de:**




a) Que sean dos niños y una niña.

b) Que los tres sean niñas.

c) Que al menos uno de ellos sea niño.

d) Que los tres tengan el mismo sexo.

1.er hijo — 2.º hijo — 3.er hijo

- Niña
  - Niña
    - Niña
    - Niño
  - Niño
    - Niña
    - Niño
- Niño
  - Niña
    - Niña
    - Niño
  - Niño
    - Niña
    - Niño

$E = \{AAA, AAO, AOA, AOO, OAA, OAO, OOA, OOO\}$

a) $P(A) = \frac{3}{8}$ b) $P(B) = \frac{1}{8}$ c) $P(C) = \frac{7}{8}$ d) $P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

**26.** **Escribimos las letras O, N, U en tres papelitos y los metemos en una bolsa. Calcula la probabilidad de que, sacando uno a uno los papelitos de la bolsa, se forme, en orden de salida, la palabra UNO.**

1.ª letra — 2.ª letra — 3.ª letra

- O
  - N — U
  - U — N
- N
  - O — U
  - U — O
- U
  - O — N
  - N — O

$E = \{ONU, OUN, NOU, NUO, UON, UNO\}$

$P(\text{UNO}) = \frac{1}{6}$

**27.** **Tenemos un dado trucado con el cual hemos obtenido estos resultados.**

| Lanzamientos | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Veces que sale 4 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |

**¿Qué probabilidad asignarías al suceso «Salir 4»?**

$\frac{3}{10}=0,3$ $\frac{7}{20}=0,35$ $\frac{10}{30}=0,33$ $\frac{13}{40}=0,325$ $\frac{16}{50}=0,32$ $\frac{19}{60}=0,32$

Por la ley de los grandes números podemos afirmar que $P(\text{salir } 4) = 0,32$.

**28.** **En el experimento de la actividad anterior, ¿podemos afirmar que el dado está trucado? ¿Por qué?**

Sí, podemos afirmarlo, porque si todos los sucesos fuesen equiprobables, como debería ser en un dado no trucado, la probabilidad de sacar 4 sería 0,167.

**29.** **Una máquina fabrica chinchetas. ¿Cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una chincheta al azar, sea defectuosa?**

Cogiendo diferentes grupos de chinchetas, cada vez mayores, y viendo cuántas chinchetas defectuosas hay en ese grupo. Así se vería hacia qué número tiende la frecuencia relativa, es decir, $\frac{\text{Chinchetas defectuosas}}{\text{Chinchetas totales}}$.

**30.** **Se extrae una carta de la baraja española y se consideran estos sucesos.**

***A*** **= «Salir as, rey, caballo o sota»**

***B*** **= «Salir una carta de bastos»**

***C*** **= «Salir un rey»**

a) Estudia la compatibilidad de estos sucesos dos a dos.

b) Encuentra un suceso incompatible con cada uno de ellos y otro incompatible con los tres a la vez.

a) *A* y *B* son compatibles, ya que pueden salir as, rey, caballo o sota de bastos.

*A* y *C* son compatibles, el rey es una opción que vale a ambos.

*B* y *C* son compatibles, ya que puede salir el rey de bastos.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Incompatible con *A* = «Salir 2»

Incompatible con *B* = «Salir una carta de copas»

Incompatible con *C* = «Salir 2»

Incompatible con los tres = «Salir 2 de copas»

**31.** **Tenemos un experimento cuyo espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y tomamos los sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ y $D = \{1, 5, 9\}$. Estudia la compatibilidad de estos sucesos dos a dos.**

*A* y *B* son compatibles.

*A* y *C* son compatibles.

*A* y *D* son compatibles.

*B* y *C* son incompatibles.

*B* y *D* son incompatibles.

*C* y *D* son incompatibles.

**32.** **Si un suceso *A* está contenido en otro *B*, razona si estas igualdades son verdaderas o falsas.**

a) $P(A) = P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c) $P(\overline{B}) = 1 - P(A)$

d) $P(A \cap B) = P(A)$

Si *A* está contenido en *B*, los sucesos son compatibles.

a) Falso. Por ejemplo, al lanzar un dado *B* = «salir par» y *A* = «salir 2», *A* está contenido en *B*, pero la probabilidad no es la misma.

b) Falso, como son compatibles, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección.

c) Falso. Por ejemplo, al lanzar un dado *B* = «salir par» y *A* = «salir 2», *B* está contenido en *A*, y tenemos que el complementario de *B* es salir impar, cuya probabilidad es 1/2, y sin embargo $1 - P(A) = 1 - 1/6 = 5/6$.

d) Verdadero, como *A* está contenido en *B*, su intersección es *A*, de modo que la probabilidad de la intersección es igual a la probabilidad de *A*.

**33.** **Tenemos una moneda de 5 céntimos, una de 10, una de 20, una de 50, una de 1 € y una de 2 €. Se elige una de ellas al azar y se consideran estos sucesos:**

***A*** **= «Sacar una moneda menor de 50 céntimos»**
***B*** **= «Sacar una moneda de 1 €»**
***C*** **= «Sacar una moneda menor de 2 €»**

**Calcula las siguientes probabilidades.**

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cup C)$

c) $P(\overline{A})$

d) $P(\overline{B})$

e) $P(\overline{A \cup B})$

f) $P(\overline{A \cup C})$

a) *A* y *B* son incompatibles, de modo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) *A* y *C* son compatibles, la intersección es *A*, ya que *A* está contenido en *C*, así tenemos que $P(A \cup C) = \frac{5}{6}$.

c) $\overline{A}$ = «sacar una moneda igual o mayor a 50 céntimos» $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$

d) $\overline{B}$ = «sacar una moneda que no sea de 1 euro» $P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$

e) $\overline{A \cup B}$ = «sacar una moneda de 50 céntimos o de 2 euros» $P(\overline{A \cup B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

f) $\overline{A \cup C}$ = «sacar una moneda de 2 euros» $P(\overline{A \cup C}) = \frac{1}{6}$

**34.** **En una bolsa tenemos 4 bolas rojas, 3 verdes, 2 amarillas y 1 negra. Se sacan dos bolas a la vez y se observa el color. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

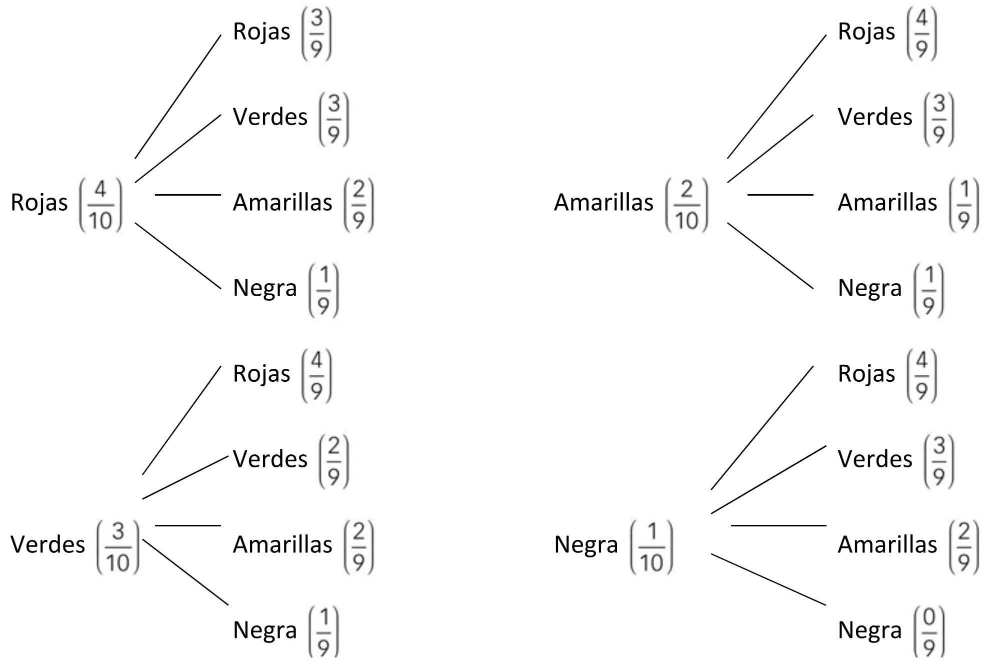
a) *A* = «Sacar 2 bolas rojas o 1 verde y 1 negra»

b) *B* = «No sacar 2 bolas rojas»

c) *C* = «No sacar 1 bola verde y 1 negra»

d) *D* = «Sacar al menos 1 bola roja»

e) *E* = «No sacar ninguna bola roja»




a) Sea $R$ = «sacar dos bolas rojas» y $S$ = «sacar una bola verde y una bola negra»

Son dos sucesos incompatibles.

$P(R) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ $\quad P(S) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{90} + \frac{3}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ $\quad P(A) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

b) $P(B) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$

c) $P(C) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

d) $P(D) = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

e) $P(E) = 1 - P(D) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

## ACTIVIDADES FINALES

**35. Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.**

a) Extraer una carta de la baraja española.

b) Medir la altura de un edificio.

c) Averiguar el número de goles de un partido de fútbol.

d) Medir un ángulo.

e) Anotar el color de ojos de la primera persona con la que te cruzas en la calle.

f) Elegir, con los ojos tapados, una ficha de un dominó.

g) Abrir un libro al azar y anotar el número de la página de la izquierda.

h) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Deterministas: b), d) y h).

Aleatorios: a), c), e), f) y g).

**36.** **Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.**

a) Extraer una carta de la baraja española y anotar el palo al que pertenece.

b) Lanzar dos monedas al aire y anotar el número de caras.

c) Anotar el color de una bola que extraemos de una bolsa en la que hay 10 bolas rojas, 5 azules y 3 verdes.

d) Lanzar un dado dos veces y sumar las puntuaciones obtenidas.

e) Sacar una tarjeta de una urna en la que hay tarjetas numeradas del 1 al 20.

f) Escribir los resultados al lanzar una moneda y un dado.

g) Anotar la última cifra de la matrícula de los coches que en un intervalo de tiempo pasan por un lugar.

h) Extraer una moneda de un monedero en el que hay monedas de 1, 2, 5, 10 y 20 céntimos.

a) $E$ = {bastos, copas, espadas, oros}

b) $E = \{0, 1, 2\}$

c) $E$ = {rojo, azul, verde}

d) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

e) $E = \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20\}$

f) $E$ = {1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1+, 2+, 3+, 4+, 5+, 6+}

g) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

h) $E = \{1, 2, 5, 10, 20\}$

**37.** **Utilizando un diagrama de árbol, escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.**

a) Se lanza una moneda. Si sale cara, se lanza un dado; si sale cruz, se saca una tarjeta de una urna con tarjetas numeradas del 10 al 20.

b) Se extrae una carta de la baraja española. Si sale una figura, se lanza una moneda; si la carta no es una figura, se lanza un dado.

c) Se lanza un dado. Si sale número par, se extrae una carta de una baraja española y se anota el palo; si el número es impar, se extrae una bola de una bolsa con bolas negras y blancas.

a) $E$ = {C1, C2, C3, C4, C5, C6, +10, +11, +12, +13, +14, +15, +16, +17, +18, +19, +20}

b) Figura = Sota, Caballo, Rey            No Figura = As, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$E$ = {Figura-Cara, Figura-Cruz, Nofigura-1, No figura-2, No figura-3, No figura-4, No figura-5, No figura-6}

c) $E$ = {Par-Bastos, Par-Copas, Par-Espadas, Par-Oros, Impar-Negra, Impar-Blanca}

**38.** **¿Hay alguna diferencia entre los espacios muestrales de los siguientes experimentos?**

a) «Sacar una bola de una bolsa en la que hay 9 bolas verdes, 8 rojas, 5 azules y 3 blancas» y «Sacar una bola de una bolsa en la que hay 6 bolas verdes, 2 rojas, 3 azules y 8 blancas».

b) «Lanzar dos veces un dado y anotar los números de su cara superior» y « Lanzar dos dados iguales a la vez y anotar los números de su cara superior».

a) El espacio muestral es el mismo, pues la bola puede ser verde, roja, azul o blanca, lo que pasa es que las probabilidades no son las mismas.

b) Los espacios muestrales son distintos, pues en el primer caso importa el orden, no es lo mismo 2–1 que 1–2 y en el segundo no hay orden 1–2 y 2–1 es lo mismo.

**39.** **Si lanzamos un dado y consideramos estos sucesos:**

**$A$ = «Salir par»**

**$B$ = «Salir múltiplo de tres»**

**$C$ = «Salir número menor que tres»**

**$D$ = «Salir impar»**

**Calcula:**

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $\overline{B}$ d) $\overline{C \cup D}$

a) $E = \{2, 3, 4, 6\}$ b) $E = \{1, 2, 4, 6\}$ c) $E = \{1, 2, 4, 5\}$ d) $E = \{4, 6\}$

**40.** **Considera el experimento que consiste en extraer una bola de un bombo con bolas numeradas del 1 al 20 y los sucesos:**

**$A$ = «Salir número múltiplo de 5»**

**$B$ = «Salir número mayor que 8»**

**$C$ = «Salir número comprendido entre 4 y 14»**

**Calcula:**

a) $\overline{A}$ c) $\overline{A \cup B}$ e) $A \cup B \cup C$

b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ d) $A \cap B$ f) $A \cup \overline{B} \cup C$

a) $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$

c) $\overline{A \cup B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

d) $A \cap B = \{10, 15, 20\}$

e) $A \cup B \cup C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

f) $A \cup \overline{B} \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20\}$

**41.** **Tomamos al azar una ficha de un dominó y consideramos estos sucesos:**

**$A$ = «Obtener una ficha con puntuaciones que suman 6»**

**$B$ = «Obtener una ficha que contenga, al menos, un 6»**

**$C$ = «Obtener una ficha con puntuaciones que, al multiplicarlas, den 6»**

**Calcula:**

a) $A \cup B$ c) $\overline{A \cap C}$ e) $\overline{A \cup B \cup C}$

b) $A \cup C$ d) $\overline{B} \cap \overline{C}$ f) $\overline{A \cup B} \cap C$

a) $A \cup B = \{$1-5, 1-6, 2-4, 2-6, 3-3, 3-6, 4-6, 5-6, 6-6$\}$

b) $A \cup C = \{$1-5, 1-6, 2-4, 2-3, 3-3$\}$

c) $\overline{A \cap C} = E$

d) $\overline{B} \cap \overline{C} = \{$1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-2, 2-4, 2-5, 3-3, 3-4, 3-5, 4-4, 4-5, 5-5$\}$

e) $\overline{A \cup B \cup C} = \{$1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-2, 2-5, 3-4, 3-5, 4-4, 4-5, 5-5$\}$

f) $\overline{A \cup B} \cap C = \{$2-3$\}$

**42. Considera el experimento que consiste en extraer una tarjeta de una urna que contiene tarjetas numeradas del 1 al 10. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

a) «Que salga una tarjeta con un número mayor que 8»

b) «Que salga una tarjeta con un número divisible entre 3»

c) «Que salga una tarjeta con el número 0»

d) «Que salga una tarjeta con un número menor que 11»

a) $P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$  b) $P(A)=\frac{3}{10}$  c) $P(A)=0$  d) $P(A)=1$

**43. Considera el experimento que consiste en extraer una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de los sucesos que se definen.**

a) «Extraer un as»

b) «Extraer una figura»

c) «Extraer un as o una figura»

d) «Extraer el as de copas»

e) «Extraer una carta de oros»

f) «Extraer una carta que no sea un caballo»

g) «Extraer una carta que no sea el caballo de oros»

a) $P(A)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$  c) $P(A)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$  e) $P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$  g) $P(A)=\frac{39}{40}$

b) $P(A)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$  d) $P(A)=\frac{1}{40}$  f) $P(A)=\frac{36}{40}=\frac{9}{10}$

**44. ¿Qué es más probable, obtener una carta de bastos al extraer una carta de una baraja española o sacar una bola roja de una bolsa con 5 bolas rojas y 10 bolas azules?**

$P(\text{«bastos»})=\frac{1}{4}$  $P(\text{«bola roja»})=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

Es más probable obtener una bola roja.

**45. La probabilidad de un suceso es 0,3. Calcula la probabilidad del suceso contrario.**

$P(\overline{A})=1-0{,}3=0{,}7$

**46. En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos 5000 veces una bola, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Estos han sido los resultados.**

| Bola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1200 | 800 | 700 | 1300 | 1000 |

**Calcula la probabilidad de obtener múltiplo de 2.**

**Si en la bolsa hay 100 bolas, ¿cuántas son de cada clase? Justifica tu respuesta.**

$P(«2») = \frac{800}{5\,000} = \frac{4}{25}$ y $P(«4») = \frac{1\,300}{5\,000} = \frac{13}{50} \longrightarrow P(«\text{múltiplo de } 2») = \frac{4}{25} + \frac{13}{50} = \frac{21}{50}$

$P(«1») = \frac{1\,200}{5\,000} = \frac{12}{50} = \frac{24}{100}$   $P(«2») = \frac{800}{5\,000} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100}$   $P(«3») = \frac{700}{5\,000} = \frac{7}{50} = \frac{14}{100}$

$P(«4») = \frac{1\,300}{5\,000} = \frac{13}{50} = \frac{26}{100}$   $P(«5») = \frac{1\,000}{5\,000} = \frac{20}{100}$

Hay 24 bolas con un 1, 16 bolas con un 2, 14 bolas con un 3, 26 bolas con un 4 y 20 bolas con un 5.

**47. En un bombo hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla. Los resultados son:**

| Bola | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 13 | 11 | 12 | 8 | 10 | 12 | 6 | 10 | 11 |

**Dados los sucesos $A$ = «Múltiplo de 3», $B$ = «Número impar» y $C$ = «Divisor de 6», calcula:**

a) La frecuencia relativa de $A$, $B$ y $C$.

b) La frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cup C$.

**¿Qué probabilidad le asignarías a cada suceso?**

a) Frecuencia relativa de $A = \frac{12+12+11}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

Frecuencia relativa de $B = \frac{13+12+10+6+11}{100} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$

Frecuencia relativa de $C = \frac{13+11+12+12}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$

b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \longrightarrow$ Fr. Relativa $= \frac{13+12+10+12+6+11}{100} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$

$A \cap B = \{3, 9\} \longrightarrow$ Fr. Relativa $= \frac{12+11}{100} = \frac{23}{100}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 6, 9\} \longrightarrow$ Fr. Relativa $= \frac{13+11+12+12+11}{100} = \frac{59}{100}$

A cada suceso le asignaría de probabilidad su frecuencia relativa.

**48. En una bolsa hay bolas negras, rojas y blancas. La probabilidad de sacar una bola negra es 0,25, y la de sacar una bola blanca, 0,4. Calcula la probabilidad de sacar:**

a) Una bola que no sea negra.

b) Una bola que no sea blanca.

a) $P(«\text{bola no negra}») = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$   b) $P(«\text{bola no blanca}») = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

**49.** **En un bote hay bolas de color rojo, amarillo, verde y azul, de tal manera que la probabilidad de obtener cada una de ellas es la siguiente:**

**$P$(Obtener bola roja) $=$ 0,3** **$P$(Obtener bola verde) $=$ 0,25**

**$P$(Obtener bola azul) $=$ 0,15** **$P$(Obtener bola amarilla) $=$ 0,3**

**Si en el bote se han contado 300 bolas.**

a) ¿Cuántas bolas hay de color rojo?

b) ¿Y de color azul o verde?

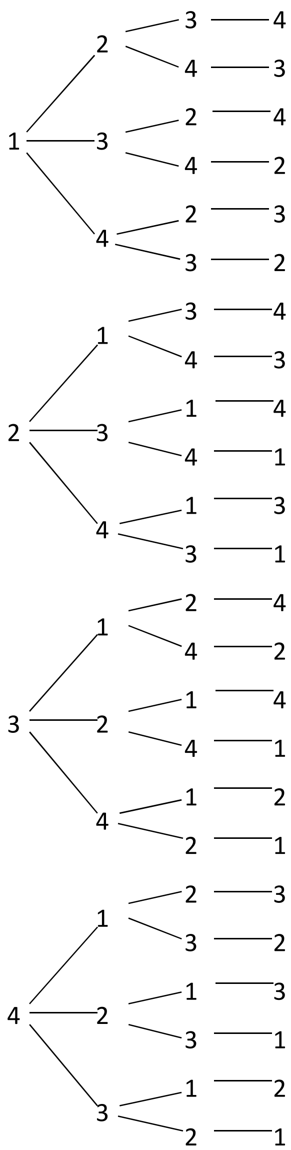
c) ¿De qué color hay más bolas?

a) $300 \cdot 0{,}3 = 90$ bolas rojas

b) $300 \cdot 0{,}15 + 300 \cdot 0{,}25 = 120$ bolas verdes o azules

c) $300 - 120 - 90 = 90$ bolas amarillas $300 \cdot 0{,}15 = 45$ bolas azules $300 \cdot 0{,}25 = 75$ bolas verdes
Hay más bolas de color amarillo y de color rojo.

**51.** **¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 sin repetir ningún dígito?**



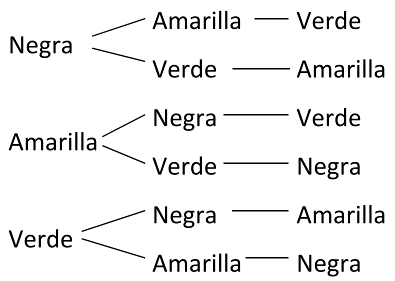
Se pueden formar 24 números diferentes.

**52. Tenemos tarjetas de tres colores diferentes: negra, amarilla y verde.**

a) ¿Cuántas secuencias diferentes de tres tarjetas podemos formar si no se repiten las tarjetas?

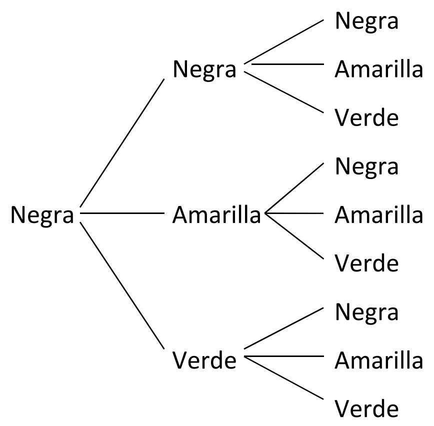
b) ¿Cuántas secuencias diferentes de tres tarjetas podemos formar si se pueden repetir tarjetas del mismo color?

a)




Se pueden hacer 6 secuencias.

b)



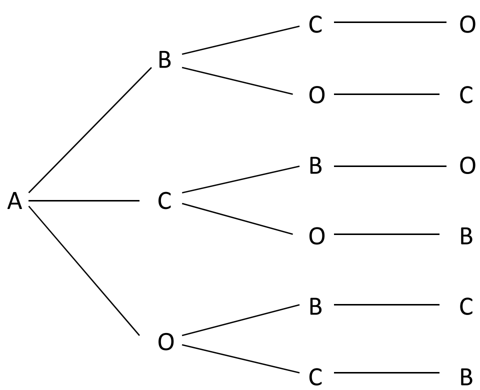

Repetimos esto dos veces más, empezando por amarilla y por verde. El total de secuencias es $9 \cdot 3 = 27$.

**53. En una bolsa tenemos cuatro tarjetas con las letras *A*, *B*, *C* y *O*, una en cada tarjeta. Sacamos las tarjetas una a una, sin volverlas a meter en la bolsa, y formamos una palabra con las letras de cada tarjeta en el orden en que las sacamos.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de formar la palabra BOCA?

b) ¿Y de formar la palabra CABO?

c) ¿Cuál es la probabilidad de conseguir una de las dos palabras?




Hay un total de $6 \cdot 4 = 24$ posibilidades.

a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

**54. En una urna tenemos tres bolas numeradas del 1 al 3. Si vamos extrayendo bolas hasta sacar la que tiene el 1:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el 1 en la primera extracción?

b) ¿Qué es más probable, sacar el 1 en la segunda extracción o en la tercera?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera no obtengamos un 1 y en la segunda no obtengamos un 2?

a) $\frac{1}{3}$

b) Se ha sacado una bola ya y no ha sido el 1, cada bola de las que queda tiene un 50 % de posibilidades de salir, de modo que tiene las mismas probabilidades de salir 1 en la segunda extracción, que de no salir y, por tanto, será 1 la tercera extracción.

c)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| | 2 | 1 |

Que no salga 1 en la primera extracción puede pasar dos veces de tres, es decir, la probabilidad es $\frac{2}{3}$. Y de esas veces, en un caso es seguro que no va a salir 2 y en el otro hay un 50 % de posibilidades.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

**55. Lanzamos una moneda al aire tres veces y anotamos el número de veces que hemos obtenido cara.**

a) Describe el espacio muestral con ayuda de un diagrama de árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras después de tres lanzamientos?

c) ¿Qué es más probable, que el número de caras sea mayor que el de cruces o que el número de cruces resulte mayor que el de caras?

a) Realizamos el diagrama de árbol y obtenemos: $E=${CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

b) $P(A)=\frac{3}{8}$

c) Son igual de probables.

**56. En un grupo de alumnos hay 12 chicas y 16 chicos. Alejandro y Teresa pertenecen a este grupo. Se elige un alumno al azar. Calcula la probabilidad de que ese alumno:**

a) Sea un chico.

b) Sea Teresa.

c) Sea una chica.

d) Sea Alejandro.

a) $P(\text{chico})=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$  b) $P(\text{Teresa})=\frac{1}{28}$  c) $P(\text{chica})=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$  d) $P(\text{Alejandro})=\frac{1}{28}$

**57. Clara y Sofía tienen que recoger la habitación que comparten. Clara pone en una bolsa 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul, y le propone a su hermana sacar una. Si es roja, recoge Sofía, y si es azul, recoge ella.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de cada bola?

b) ¿Es justo lo que propone Clara?

c) Sofía no acepta el trato y propone que si sale roja, recogerá ella, y si sale azul o verde, recogerá Clara. ¿Es justo este trato? ¿Por qué?

a) $P(\text{roja}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(\text{verde}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{azul}) = \frac{1}{6}$

b) No es justo, tiene más posibilidades de tener que recoger Sofía que Clara: $P(\text{azul}) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = P(\text{roja})$

c) Sí, así es justo, porque las dos tienen la misma probabilidad de recoger: $P(\text{azul o verde}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(\text{roja})$

**58. Se sacan dos monedas a la vez de una hucha en la que hay tres monedas de 2 €, una de 1 €, dos de 50 céntimos y cuatro de 20 céntimos. Calcula la probabilidad de obtener una cantidad de dinero:**

a) Menor que 20 céntimos.

b) Mayor que 50 céntimos.

c) Mayor o igual que 1,50 €.

d) Menor que 1 € o mayor que 2 €.

| | |
|---|---|
| **2** $P(2) = \frac{3}{10}$ | 2 |
| | 2 |
| | 1 |
| | 0,5 |
| | 0,5 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |

| | |
|---|---|
| **1** $P(1) = \frac{1}{10}$ | 2 |
| | 2 |
| | 2 |
| | 0,5 |
| | 0,5 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |

| | |
|---|---|
| **0,5** $P(0{,}5) = \frac{2}{10}$ | 2 |
| | 2 |
| | 2 |
| | 1 |
| | 0,5 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |

| | |
|---|---|
| **0,2** $P(0{,}2) = \frac{4}{10}$ | 2 |
| | 2 |
| | 2 |
| | 1 |
| | 0,5 |
| | 0,5 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |
| | 0,2 |

a) $P(A) = 0$

b) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{13}{15}$

c) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{26}{45}$

d) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{38}{45}$

**59. En un test, cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar la pregunta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de fallar?

a) $\frac{1}{4}$ $\qquad$ b) $\frac{3}{4}$

**60. En un juego de dados se lanzan dos dados y se suman las puntuaciones obtenidas. Antes de tirar, cada jugador elige entre 11 o 7. Si al tirar los dados y sumar las puntuaciones obtiene el número que ha elegido, gana la partida. ¿Qué número elegirías tú? ¿Por qué?**

Que sume 11 solo pasa si sale un 5 y un 6. Pero para obtener 7 hay más posibilidades: 1 y 6, 2 y 5, 3 y 4. De modo que elegiríamos el 7.

**61. Se ha trucado una moneda de forma que la probabilidad de que salga cara es el doble de la de que salga cruz. Calcula la probabilidad de que al lanzar esa moneda salga cruz.**

Por un lado, $P(\mathrm{C}) = 2 \cdot P(+)$, y por el otro, $P(\mathrm{C}) + P(+) = 1$. De modo que sustituyendo $3 \cdot P(+) = 1 \rightarrow P(+) = 1/3$

**62. En la bolsa hay 7 caramelos de fresa, 3 de menta, 9 de naranja y 2 de limón. Sacamos un caramelo al azar, calcula la probabilidad de que sea:**

a) Un caramelo de menta.

b) No sea un caramelo de menta.

c) Un caramelo de menta o de fresa.

d) Un caramelo ni de menta ni de fresa.

e) Un caramelo de naranja o de limón.

a) $P(A) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

b) $P(B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

c) $P(C) = \frac{3}{21} + \frac{7}{21} = \frac{10}{21}$

d) $P(D) = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$

e) $P(E) = \frac{9}{21} + \frac{2}{21} = \frac{11}{21}$

**63. En una caja tenemos cintas de tres colores, verde, naranja y morado. La proporción de cintas que hay es igual para cada color. En una segunda caja tenemos cuentas de los mismos colores, verde, naranja y morado, pero hay el doble de cuentas de color naranja que de verde o morado.**

a) Si extraemos al azar una cinta y una cuenta, ¿cuál es la probabilidad de que sean de color naranja?

b) Calcula la probabilidad de que la cinta y la cuenta extraídas sean del mismo color.

c) Halla la probabilidad de que la cinta sea verde y la cuenta morada.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la cinta sea morada y la cuenta verde?

e) ¿Qué es más probable tener, una cinta naranja y una cuenta morada o una cinta morada y una cuenta naranja?

a) La probabilidad de que la cinta sea naranja es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que la cuenta sea naranja es $\frac{1}{2}$.

b) Para que ambas sean naranjas: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, para que sean verde o morado: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ cada una.

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

e) Para cinta naranja y cuenta morada es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, pero para cinta morada y cuenta naranja es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Por tanto, es más probable tener una cinta morada y una cuenta naranja.

**64. En una clase de 3.º de ESO hay 15 chicos de los cuales 6 llevan gafas. De las 17 chicas que hay en esa misma clase, 8 también llevan gafas. Si tomamos la lista con todos los nombres de los alumnos y alumnas, y, con los ojos cerrados, elegimos al azar uno de ellos, calcula la probabilidad de que:**

a) Sea chico.

b) Sea chico y no lleve gafas.

c) Sea chica y lleve gafas.

d) Lleve gafas.

a) $P(\text{chico}) = \frac{15}{32}$

b) Hay $15 - 6 = 9$ chicos sin gafas $\quad P(\text{chico sin gafas}) = \frac{9}{32}$

c) $P(\text{chica con gafas}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

d) $P(\text{gafas}) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

**65. En un centro de trabajo se organizan 3 turnos. En el primero, trabajarán 12 personas. En el segundo, 8 personas, y en el tercero, 5 personas. Si se hace por sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que a un trabajador no le toque el tercer turno?**

Hay 25 personas que van a trabajar.

Las personas que van a trabajar en el primer o segundo turno son 20.

La probabilidad de que a un trabajador no le toque en el tercer turno es la de ser escogido entre esas 20 personas de las 25 personas que son; es decir, $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

**66. Diego, Sergio, Arturo, Ricardo, Jorge, Tomás, Pablo, Marcos y Julián tienen que desplazarse a otra ciudad para competir en un torneo escolar. En el hotel en el que van a dormir, las habitaciones son de dos personas, por lo que el entrenador les ha dicho que se realizará un sorteo para emparejarlos. Meterá un papelito con cada uno de sus nombres y los irá sacando de dos en dos.**


a) ¿Cuál es la probabilidad de que a Tomás le toque dormir con Diego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a Tomás le toque dormir con Diego o con Ricardo?

c) Ninguno de ellos quiere dormir con Marcos, ¿cuál es la probabilidad de que les toque dormir con él?

Se pueden formar 36 parejas.

a) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) Cada vez que se escoge uno, tiene 8 posibles parejas, que esa pareja sea Marcos es $\frac{1}{8}$.

**68. En una ciudad el 30 % de los habitantes compra el periódico *A*; el 20 %, el *B*, y el 7 %, los dos. Calcula la probabilidad de que, al encontrarnos por la calle con una persona de esa ciudad, esa persona:**

a) No lea el periódico *A*.

b) Lea un solo periódico, el *A* o el *B*.

c) Lea como mínimo uno de los dos periódicos.

d) No lea ninguno de los dos periódicos.

a) $A$ = «comprar el periódico $A$» $\rightarrow P(A) = 0{,}3$

$\overline{A}$ =«no comprar el periódico $A$» $\rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b) $B$ = «comprar el periódico $B$» $\rightarrow P(B) = 0{,}2$

$C$ = «leer los dos periódicos» $\rightarrow P(C) = 0{,}07$

$D$ = «comprar periódico $A$ o comprar periódico $B$» $\rightarrow P(D) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}07 = 0{,}43$

c) $E$ = «Los que leen un periódico más los que leen los dos» $\rightarrow P(E) = 0{,}43 + 0{,}07 = 0{,}50$

d) $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}50$

**69. A esta encuesta han contestado 50 personas:**

| Cuando escucha la radio: | | |
|---|---|---|
| • Escucha música | Sí | No |
| • Escucha programas informativos | Sí | No |
| • No suele escuchar la radio | Sí | No |

**Los resultados muestran que 25 personas escuchan música; 20, informativos, y otras 20 no suelen escuchar la radio. Calcula la probabilidad de que al elegir una persona al azar escuche música e informativos.**

$P(A) = P$(«escuche música») $= 0{,}5$ $\qquad$ $P(B) = P$(«escuche informativos») $= 0{,}4$

$P(C)$ = «no escucha la radio» $= 0{,}4$

$A \cap B$ = «escuche música e informativos» $\qquad$ $P(\overline{C}) = P(A \cup B) = 0{,}6 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

**70. Una puerta dispone de dos cerraduras magnéticas que hay que pulsar a la vez para poder abrirla.**

a) Si tenemos las dos tarjetas, ¿cuál es la probabilidad de que al introducir las tarjetas al azar la puerta se abra?

b) Si nos dan tres, las dos correctas y una que no abre ninguna cerradura, ¿cuál es la probabilidad de abrir la puerta al primer intento?

c) ¿Cuántas posibilidades hay cuando el juego de tarjetas es de tres, las dos correctas y una falsa?

$T_1$: tarjeta que abre la cerradura 1 $\qquad$ $T_2$: tarjeta que abre la cerradura 2

$N$: tarjeta que no abre ninguna cerradura

a) $P(\text{abrir a la primera}) = \frac{1}{2}$

b) $P(\text{abrir a la primera}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

c) $E = \{T_1T_2N,\ T_2T_1N,\ T_1NT_2,\ T_2NT_1,\ NT_1T_2,\ NT_2T_1\}$

**71.** **Nadal es mejor que Federer en tierra batida y la probabilidad que tiene de ganarle un set es 3/5. Si el cansancio afecta a ambos por igual, explica por qué Nadal prefiere jugar al mejor de 5 sets que al mejor de 3 sets.**

- Partido a 3 sets:

<table>
<tr><th>Ganador del 1<sup>er</sup> set</th><th>Ganador del 2º set</th><th>Ganador del 3<sup>er</sup> set</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Nadal</td><td>Nadal</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Federer</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Federer</td><td rowspan="2">Nadal</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td>Federer</td><td></td></tr>
</table>

$$P\text{ (Nadal pierda el partido a 3 sets)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{44}{125}$$

- Partido a 5 sets:

<table>
<tr><th>Ganador del 1<sup>er</sup> set</th><th>Ganador del 2º set</th><th>Ganador del 3<sup>er</sup> set</th><th>Ganador del 4º set</th><th>Ganador del 5º set</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Nadal</td><td rowspan="4">Nadal</td><td>Nadal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Federer</td><td>Nadal</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Federer</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Federer</td><td rowspan="3">Nadal</td><td>Nadal</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Federer</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Federer</td><td rowspan="2">Nadal</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td>Federer</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="10">Federer</td><td rowspan="6">Nadal</td><td rowspan="3">Nadal</td><td>Nadal</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Federer</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Federer</td><td rowspan="2">Nadal</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td>Federer</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Federer</td><td rowspan="3">Nadal</td><td rowspan="2">Nadal</td><td>Nadal</td></tr>
<tr><td>Federer</td></tr>
<tr><td>Federer</td><td></td></tr>
<tr><td>Federer</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$P$ (Nadal pierda el partido a 5 sets) =

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=6\cdot\frac{3^2\cdot 2^3}{5^5}+3\cdot\frac{3\cdot 2^3}{5^4}+\frac{2^3}{5^3}=\frac{992}{3\,125}$$

$$\frac{44}{125}=\frac{1100}{3\,125}>\frac{992}{3\,125}$$

Por tanto, la probabilidad de que Nadal pierda un partido a 3 sets es mayor que la de que lo pierda a 5 sets.

**72.** **A una comida familiar han asistido 28 hombres y 32 mujeres. De segundo plato había carne o pescado y cada persona ha elegido una de las dos opciones. Han tomado carne 16 hombres y pescado 12 mujeres. Se elige una persona al azar entre todos ellos. Calcula la probabilidad de que:**

a) Sea hombre.
b) Sea mujer.
c) Haya comido carne.
d) Haya comido pescado.
e) Sabiendo que es mujer, haya tomado pescado.
f) Sabiendo que ha tomado pescado, sea mujer.
g) Sabiendo que ha comido carne, sea hombre.
h) Sabiendo que es hombre, haya comido carne.

a) $P(\text{hombre}) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

b) $P(\text{mujer}) = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$

c) Toman carne $32 - 12 = 20$ mujeres.

$P(\text{carne}) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

d) Toman pescado $28 - 16 = 12$ hombres.

$P(\text{pescado}) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

e) $P(\text{Mujer que toma pescado}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

f) $P(\text{Persona que toma pescado que es mujer}) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

g) $P(\text{Persona que toma carne que es hombre}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

h) $P(\text{Hombre que toma carne}) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

**73.** **En el instituto han ofertado dos asignaturas optativas de carácter cultural, que son Teatro y Taller de escritura, 30 estudiantes han optado por Teatro y 20 por Taller de escritura. De las 28 alumnas que hay, 18 se han apuntado a Teatro.**

**Si solo se puede optar a cursar una de las dos asignaturas:**

a) Halla la probabilidad de que elegido un estudiante al azar sea un varón que haya optado por Teatro.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una alumna que haya elegido Taller de escritura?
c) Calcula la probabilidad de que sea varón.
d) Halla la probabilidad de que su elección fuera el Taller de escritura.

a) $P(\text{varón y teatro}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$

b) $P(\text{chica y taller de escritura}) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

c) $P(\text{varón}) = 1 - \frac{28}{50} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$

d) $P(\text{Taller de escritura}) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

**74. En una bolsa hay 2 bolas azules, 4 verdes y el resto son rojas. Sacamos una bola y anotamos su color. Razona, en cada caso, cuántas bolas hay y de qué color deben ser para que se cumpla:**

a) $P(\text{Bola roja}) = \dfrac{4}{7}$

b) $P(\text{Bola azul}) = 0{,}2$

c) $P(\text{Bola verde}) = \dfrac{4}{15}$

d) $P(\text{Bola roja}) = 0{,}5$

a) Hay un número de bolas múltiplo de 7. Si hubiese 7, habría una roja, ya que hay 6 bolas entre azules y verdes, pero eso no daría la probabilidad indicada, de modo que podrían ser 14 bolas en total, esto haría que hubiese 8 rojas y la probabilidad sería $\dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$.

b) Si hay 10 bolas, de las que serían 4 bolas rojas, existiría una probabilidad para las bolas azules de 0,2.

c) Si hay 15 bolas, de las que serían 9 bolas rojas, existiría una probabilidad para las bolas verdes de $\dfrac{4}{15}$.

d) Para que la probabilidad de bolas rojas sea la mitad, debe haber tantas bolas rojas como verdes y azules, de modo que tendría que haber 6 bolas rojas.

**75. En el Oeste, tres vaqueros tienen que realizar una acción arriesgada, por lo que cortan tres palitos de distinta longitud, los tapan de forma que muestren la misma altura y cada vaquero elige uno. El que coge el más corto, pierde. ¿Por qué nunca discuten sobre quién elige primero?**

Suponemos que hay un palito corto y dos largos. Denotamos por $C$ al suceso «sacar el palito más corto» y por $L$ al suceso «sacar palito largo». Entonces, el espacio muestral es $E = \{CLL, LCL, LLC\}$.

$P(CLL) = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad P(LCL) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad P(LLC) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$

No discuten sobre quién elige primero porque la probabilidad de obtener el palito más corto en la primera, segunda o tercera extracción es la misma.

**76. Tengo en el bolsillo dos monedas de 20 céntimos, dos de 10 céntimos y dos de 5 céntimos. Si saco dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cantidad superior o igual a 20 céntimos?**

$P(\text{Dos monedas de 20}) = \left(\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{30}\right)$

$P(\text{Una moneda de 20 y otra moneda de 10}) = \left(2 \cdot \left(\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{8}{30}\right)$

$P(\text{Una moneda de 20 y otra moneda de 5}) = \left(2 \cdot \left(\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{8}{30}\right)$

$P(\text{Dos monedas de 10}) = \left(\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{30}\right)$

Entonces, la probabilidad pedida es $\dfrac{2}{30} + \dfrac{8}{30} + \dfrac{8}{30} + \dfrac{2}{30} = \dfrac{2}{3}$.

**77. Después de revisar los cuadernos de sus alumnos, un profesor los devuelve dejándolos en los pupitres correspondientes. Pero le quedan tres que no tienen nombre. Calcula la probabilidad de que dejando los cuadernos al azar en los tres pupitres que quedan libres, acierte a darle a cada alumno el suyo.**

$P(\text{acertar}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

**78. En una clase de 23 alumnos, el tutor revisa las fichas de sus alumnos y comprueba que dos alumnos cumplen años el mismo día del mismo mes. Al comentárselo al profesor de Matemáticas, este le dice que eso es más habitual que lo contrario, es decir, que no haya ninguna coincidencia. Comprueba que el profesor de Matemáticas tiene razón.**

$A$ = {al menos dos alumnos cumplen años a la vez}

$\overline{A}$ = {no hay dos alumnos que cumplan años a la vez}

Estudiamos la probabilidad de $\overline{A}$ suponiendo que solo hay dos alumnos:

– Casos posibles: $365^2 = 133\,225$

– Casos favorables: $365 \cdot 364 = 132\,860$ (el primero puede haber nacido uno de los 365 días del año y el siguiente uno de los 364 días restantes).

$P(\overline{A}) = 132\,860/133\,225 = 0{,}9973$

Estudiamos la probabilidad de $\overline{A}$ suponiendo que solo hay tres alumnos:

– Casos posibles: $365^3 = 48\,627\,125$

– Casos favorables: $365 \cdot 364 \cdot 363 = 48\,228\,180$

Probabilidad: $48\,228\,180/48\,627\,125 = 0{,}9918$

Generalizando, tenemos que, para 23 alumnos, la probabilidad de $\overline{A}$ es 0,4927. De modo que la probabilidad de $A$ es $1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$. Es más probable que cumplan años el mismo día, que no los cumplan.

**79. Pedro trabaja vendiendo pisos. Tiene tres llaves, dos abren dos puertas de unos pisos que va a enseñar y la otra pertenece a otro piso en otra zona. Calcula la probabilidad de que acierte a la hora de abrir las puertas de los pisos que va a enseñar a la primera.**

Abrirá el primer piso a la primera con una probabilidad de $\frac{1}{3}$; y el segundo, con una probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Por tanto, $P(\text{Abrir las dos puertas a la primera}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

**80. Un examen de tipo test consta de 5 preguntas, cada una de las cuales tiene 3 posibles respuestas.**

a) Calcula la probabilidad de acertar 3 preguntas si contestas al azar.

b) Si para aprobar el examen hay que contestar al menos 3 preguntas correctamente, halla la probabilidad de aprobar y de suspender.

a) La probabilidad de acertar cada pregunta es $\frac{1}{3}$ y la de fallarla es $\frac{2}{3}$. Para acertar 3 y fallar 2, la probabilidad es:

$$10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$$

b) $P(\text{aprobar}) = P(\text{acertar al menos 3}) = P(\text{acertar 3 o acertar 4 o acertar 5}) = \frac{40}{243}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{43}{243}$

$P(\text{suspender}) = 1-\frac{43}{243}=\frac{200}{243}$

**81. Paula va 2 veces por semana a una tienda en la que Roberto trabaja 4 días a la semana. El viernes es el único día que no acude ninguno. ¿Cuál es la probabilidad de que coincidan dos días? (La tienda cierra los domingos).**

Ni viernes ni domingos están en la tienda, de modo que hay 5 días posibles para que coincidan en la tienda.

$A$ = «Paula está en la tienda» $B$ = «Roberto está en la tienda»

$P(A)=\frac{2}{5}$ $P(B)=\frac{4}{5}$ $P(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$

**82. Una caja fuerte dispone de dos cerraduras diferentes que hay que girar a la vez para poder abrir la caja.**

a) Si tenemos las dos llaves, ¿cuál es la probabilidad de que al introducir las llaves al azar la caja se abra?

b) Si nos dan cuatro llaves, las dos correctas y dos que no abren ninguna cerradura, ¿cuál es la probabilidad de abrir la caja al primer intento?

a) Un 50 % es la probabilidad de hacerlo bien, pues solo hay dos opciones, que asignemos cada llave a la cerradura correcta o que las intercambiemos.

b) La probabilidad de coger la llave buena para la cerradura 1 es de $\frac{1}{4}$ y luego la de coger la siguiente llave buena es de $\frac{1}{3}$. De modo que la probabilidad de abrir la caja en el primer intento es $\frac{1}{12}$.

## DEBES SABER HACER

**1. En una heladería se ofrecen 5 sabores de helado: naranja, limón, fresa, chocolate y turrón. Escribe el espacio muestral para una tarrina que lleva dos bolas de helado de distinto sabor.**

$E$ = {NL, NF, NCh, NT, LF, LCh, LT, FCh, FT, ChT}

**2. Una vaca da a luz un ternero o una ternera. Si han dado a luz tres vacas, escribe estos sucesos:**

***A* = «Que los tres sean terneros»**
***B* = «Que ninguno sea ternero»**
***C* = «Que dos sean terneros y una sea ternera»**

Vaca 1 ⟶ $V1$ = «Que sea ternero»

Vaca 2 ⟶ $V2$ = «Que sea ternero»

Vaca 3 ⟶ $V3$ = «Que sea ternero»

$A = V1 \cap V2 \cap V3$ $\qquad$ $B = \overline{V1} \cap \overline{V2} \cap \overline{V3}$

$C = \left(V1 \cap V2 \cap \overline{V3}\right) \cup \left(V1 \cap \overline{V2} \cap V3\right) \cup \left(\overline{V1} \cap V2 \cap V3\right)$

**3. En una urna tenemos 8 bolas blancas, 2 rojas y 10 azules.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una bola roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca o una roja?
c) ¿Y la probabilidad de no obtener una bola azul?

a) $P(\text{roja}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

b) $P(\text{blanca}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $P(\text{roja o blanca}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{azul}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(\text{no azul}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**4. Si en una sala hay 50 personas y 33 son hombres, ¿cuál es la probabilidad de que, elegida una persona al azar, sea mujer?**

50 – 33 = 17 mujeres

$P(\text{mujer}) = \frac{17}{50}$

## COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

**83.** **Desde 1948 hasta nuestros tiempos el almacenamiento de la música ha ido avanzando.**

**La posibilidad de tener muchas canciones almacenadas en un mismo dispositivo era limitada y su escucha era secuencial, es decir, después de la primera canción había que escuchar obligatoriamente la segunda y así sucesivamente.**

**Un dispositivo en el que se podía evitar esto fue el mp3. Todos los reproductores de mp3 tienen una función que elige aleatoriamente la siguiente canción ya sea de un mismo disco, cantante o de toda nuestra biblioteca musical.**

**Juan ha organizado las canciones de su mp3 de la siguiente forma:**

| | Rock | Pop | Electrónica | Clásica | Fiesta |
|---|---|---|---|---|---|
| N.º de canciones | 12 | 20 | 12 | 4 | 40 |
| N.º de canciones buenas | 6 | 15 | 2 | 1 | 38 |

**Si activa la selección aleatoria, calcula la probabilidad de que la canción que suene sea:**

a) Una canción catalogada como buena.

b) Una canción electrónica.

c) Una canción catalogada como buena y de fiesta.

d) Una canción no catalogada como buena y que sea pop.

Total de canciones: 88 Total canciones buenas: 62

a) $P(\text{buena}) = \frac{62}{88} = \frac{31}{44}$

b) $P(\text{electrónica}) = \frac{12}{88} = \frac{3}{22}$

c) $P(\text{buena y fiesta}) = \frac{38}{88} = \frac{19}{44}$

d) $P(\text{pop no buena}) = \frac{5}{88}$

## FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

**84.** **Al lanzar una chincheta, esta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Razona si estos sucesos son igual de probables realizando el experimento 100 veces.**

**Compara tus resultados con los que obtengan tus compañeros y analiza la probabilidad de cada suceso.**

Respuesta abierta.

**85. Lanza 100 veces una moneda anotando cuántas veces te sale cara y cuántas cruz. Comprueba que la frecuencia relativa de cada suceso se aproxima a su probabilidad.**

Respuesta abierta. Se esperan obtener aproximadamente los siguientes resultados:

$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\qquad$ $P(\text{cruz}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ .

**86. Una caja contiene bombones de frutos secos y bombones de pasas. El número de bombones de frutos secos es superior en dos unidades al número de bombones de pasas. Si tomamos al azar dos bombones de la caja, la probabilidad de que ambos sean de frutos secos es $\frac{2}{7}$.**

a) Determina el número total de bombones que hay en la caja.

b) Si cogemos al azar dos bombones, determina la probabilidad de que sean de sabor distinto.

a) $N$: número de bombones

Número bombones de frutos secos: $x$ $\qquad$ Número bombones de pasas: $x - 2$

$N = x + x - 2$

$\frac{x}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{2x-1} = \frac{2}{7} \rightarrow 7x(x-1) = 2 \cdot (2x-2)(2x-1) \rightarrow 7x^2 - 7x = 2(4x^2 - 2x - 4x + 2) \rightarrow$
$7x^2 - 7x = 8x^2 - 12x + 4 \rightarrow 0 = x^2 - 5x + 4 \rightarrow x = 1$ y $x = 4$.

No se puede aceptar como solución 1, porque tendríamos un número de bombones de pasas negativo. De modo que el número de bombones de frutos secos es 4, el de pasas es 2 y el total de bombones es 6.

b) $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

## PRUEBAS PISA

**87. En una pizzería se puede elegir una pizza básica con dos ingredientes: queso y tomate.**

**También puedes diseñar tu propia pizza con ingredientes adicionales.**

**Se puede seleccionar entre cuatro ingredientes adicionales diferentes:**

- **Aceitunas** • **Jamón** • **Champiñones** • **Salami**


**Jaime quiere encargar una pizza con dos ingredientes adicionales diferentes.**

**¿Cuántas combinaciones diferentes podría seleccionar Jaime?**

*(Prueba PISA 2000)*

$E = \{AJ, ACh, AS, JCh, JS, ChS\}$

Puede seleccionar 6 combinaciones diferentes.

**88.** **Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que estos ocurren.**
**El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo dijo: «En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres».**

**¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo? Justifica la respuesta.**

**A.** $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$**, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de Zed.**

**B.** $\frac{2}{3}$ **es más que** $\frac{1}{2}$**, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.**

**C. La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.**

**D. No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.**

*(Prueba PISA 2003)*

La opción que refleja mejor la afirmación del geólogo es la C.

La A no es cierta, porque la afirmación del geólogo no se puede relacionar con una fecha concreta futura. La probabilidad indica que podría ocurrir en los próximos 20 años.

La B no es cierta, porque, aunque la probabilidad que da el geólogo es alta, no es 1, por lo que no es seguro.

La D no es cierta, porque, aunque no se puede tener la seguridad sobre el terremoto, el geólogo sí que está dando una probabilidad sobre qué podría pasar.