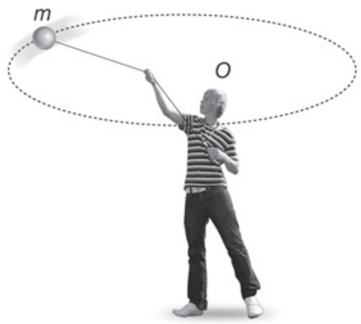
Actividades

1. La masa *m* de la figura siguiente describe una trayectoria circular situada en un plano horizontal. ¿Cuántas fuerzas actúan sobre *m*? ¿Alguna de estas fuerzas es central? ¿Por qué? Calcula el momento de torsión de las fuerzas indicadas respecto de la mano *O* de la persona.



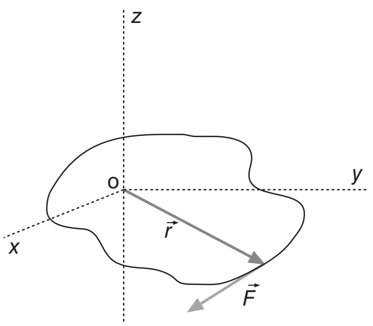
Sobre la masa *m* actúan dos fuerzas: su peso y la fuerza centrípeta que transmite la cuerda tensada. Esta última fuerza es central porque tiene la dirección de la cuerda que pasa por el punto *O*, cualquiera que sea la posición de la masa mientras gira.

El momento de torsión, respecto de *O*, de la fuerza centrípeta es nulo porque $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos.

El momento de torsión del peso respecto de *O* sería:

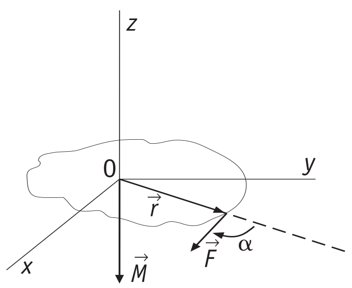
$$M = m\,g\,r$$

2. Dibuja el vector momento de la fuerza representada en la figura siguiente. ¿El giro que produce *F* es positivo o negativo?



Si hacemos girar el vector $\vec{r}$ para que coincida con el vector $\vec{F}$ siguiendo el camino indicado por el ángulo alfa, el vector momento tiene la dirección del eje *0z* con sentido negativo.

Se puede representar por $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -|\vec{M}|\ \vec{u}_z$



3. ¿Cuánto vale el momento de torsión de una fuerza si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos? ¿Cómo deben ser $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para que el momento de torsión sea máximo?

El momento de torsión de una fuerza respecto de un punto 0 viene definido por $|\vec{M}| = |\vec{F}| \times |\vec{R}|$ sen α siendo $\vec{r}$ el vector que une el punto 0 con el punto de aplicación de la fuerza y α es el ángulo que forman $\vec{F}$ y $\vec{r}$.

Si los vectores anteriores son paralelos sen $\alpha = 0$ y el momento de torsión también sería nulo.

El momento de torsión será máximo cuando los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ sean perpendiculares.

4. Una partícula se mueve en el eje *OX* por la acción de una fuerza constante que se aleja del origen de coordenadas. ¿Cómo varía con el tiempo el momento angular de la partícula con respecto a dicho punto?

El momento angular de la partícula viene definido por la expresión $L = x \cdot m \cdot v \cdot$ sen α.

L, x, v son los módulos de los vectores: momento angular, vector de posición y vector velocidad, respectivamente; *m* es la masa de la partícula y α representa el ángulo formado por *x* y *v*. En este caso $\alpha = 0$. Aunque *x* y *v* varían con el tiempo, sen α es constante y vale 0. Por tanto, el momento angular es cero mientras se mantenga el movimiento rectilíneo de la partícula.

En general, si una partícula se mueve en línea recta su momento angular es nulo respecto de todos los puntos de su trayectoria, porque $\vec{v}$ y $\vec{r}$ tienen la misma dirección.

5. Una partícula con velocidad constante tiene momento angular nulo respecto de un punto. ¿Qué se deduce de esto?

Se deduce que el movimiento es rectilíneo, y que el punto citado forma parte de la trayectoria.

6. Un automóvil de 1 500 kg se mueve en una pista circular de 50 m de radio con una velocidad de 145 km/h. Calcula el momento angular del automóvil respecto del centro de la pista.

En este caso $\alpha = 90°$

$L = m \cdot r \cdot v \cdot$ sen $\alpha = 1\,500$ kg $\cdot$ 40,28 m/s $\cdot$ 50 m $\cdot$ 1 =
$= 3{,}0 \cdot 10^6$ kg $\cdot$ m^2 $\cdot$ s^{-1}

Es un vector de dirección perpendicular a la pista.

7. Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

En primer lugar calculamos el radio de la órbita:

$R_o = R_T + h = 6{,}37 \cdot 10^6$ m $+ 0{,}655 \cdot 10^6$ m $= 7{,}025 \cdot 10^6$ m

Para calcular la velocidad del satélite tenemos en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre este es originada por la atracción gravitatoria que sobre él ejerce la Tierra. Es decir, se cumple:

$$\frac{GMm}{R_0^2} = m\,\frac{v^2}{R_0} \text{ de donde } v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}025 \cdot 10^{6}}} = 7{,}53 \cdot 10^{3} \text{ m/s}$$

En la órbita circular la velocidad y el radio son perpendiculares. Por tanto, sen $\alpha = 1$

El módulo del momento angular del satélite será;

$L = R_o \cdot m \cdot v \cdot \text{sen } \alpha = 7{,}025 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 100 \text{ kg} \cdot 7{,}53 \cdot$
$\cdot\ 10^3 \text{ m/s} = 5{,}3 \cdot 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

8. La masa de la Luna es 7,35 · 10²² kg y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna 3,84 · 10⁸ m. Calcula el momento angular de la Luna respecto a la Tierra. Dato: la Luna tarda 27,32 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

Momento angular de la Luna respecto de la Tierra:

$$L = m r \omega = m r \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \frac{m r^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16} \text{ m}^2}{27{,}32 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/día}} = 2{,}88 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Observación: se ha despreciado el momento angular de rotación de la Luna sobre sí misma.

9. Define los conceptos de momento lineal y momento angular referidos a un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad *v*. ¿Qué relación matemática les une? Razona cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

***a)* El momento angular es nulo si el momento lineal también lo es.**

***b)* El momento lineal es nulo siempre que lo sea el momento angular.**

Momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$; Momento angular $\vec{l} = \vec{r} x \vec{p} = \vec{r} x m \vec{v}$; $|l| = r \cdot mv \cdot \text{sen}\alpha$

a) Verdadero. El momento angular depende de tres factores: el vector de posición, el momento lineal del cuerpo y el ángulo que forma el vector de posición con el vector velocidad. El momento angular será nulo si uno de esos factores es nulo.

b) Falso. De la expresión $l = r \cdot p \cdot \text{sen } \alpha$ se deduce que el momento angular puede ser nulo sin que lo sea (necesariamente) el momento lineal.

10. Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella, cuando pasa por el periastro *P*, punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro *A*, punto más alejado, explica y justifica las siguientes afirmaciones:

***a)* Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente.**

***b)* Su energía mecánica es igual en ambos puntos.**

a) Tanto en el periastro como en el apoastro el momento angular es $L = m v r$, donde m es la masa del planeta, v su velocidad y r la distancia al punto respecto del que se calcula el momento angular.

Se cumple el Principio de Conservación del Momento Angular en el sistema planeta-estrella, así que la consecuencia es que en el periastro la velocidad angular es mayor que en el apoastro.

b) Al tratarse la atracción gravitatoria de una fuerza conservativa, la energía mecánica del sistema se mantiene constante en toda la trayectoria.

11. Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En perihelio dista del Sol 4,4 · 10¹² m y en afelio se encuentra a 7,4 · 10¹² m. Calcula la excentricidad de la órbita.

Semieje mayor: $a = \dfrac{4{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m} + 7{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2} = 5{,}9 \cdot 10^{12} \text{ m}$

Distancia focal: $c = 5{,}9 \cdot 10^{12} \text{ m} - 4{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{12} \text{ m}$

Excentricidad de la órbita: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{12} \text{ m}}{5{,}9 \cdot 10^{12} \text{ m}} = 0{,}25$

12. ¿Cómo puedes demostrar que un planeta en una órbita circular se desplaza con un movimiento circular uniforme?

Comprobando que la velocidad orbital es constante. Si la órbita es circular se cumple que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m \frac{v^2}{R_o} = \frac{GM}{R_o^2} \text{ de donde } v = \sqrt{\frac{G M_s}{R_o}} = cte$$

La velocidad depende de tres magnitudes constantes: La constante de gravitación, la masa del Sol y el radio de la órbita.

También se puede demostrar aplicando la 2.ª ley de Kepler.

13. ¿Hay algún instante en que un planeta con órbita elíptica esté exento de aceleración?

Cuando se encuentra en perihelio y en afelio.

14. Supón que repentinamente se duplica la atracción del Sol sobre la Tierra. ¿Qué puedes decir en este caso sobre la velocidad orbital de la Tierra y de la órbita que describe? ¿Se modificará el momento angular de la Tierra? ¿Cambiará el plano de su órbita? Razona tus respuestas.

Para que la Tierra describa la órbita se debe cumplir que:

$$E_c = F_g \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = G \frac{M m}{R^2}$$

y la velocidad será: $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

Si se duplica la fuerza gravitatoria, se seguirá cumpliendo la condición de equilibrio (manteniendo la misma órbita):

$$m \frac{v^2}{R} = 2G \frac{M m}{R^2}$$

en este caso la velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Por tanto, la velocidad orbital aumentará. Si admitimos que ese aumento de atracción es debido a que los dos astros están más próximos, el radio de la órbita es más pequeño. El momento angular de la Tierra no se modificaría, porque aunque la fuerza gravitatoria se duplicara, seguiría siendo una fuerza central y su momento de torsión seguiría siendo nulo. Si el momento angular permanece constante, también permanecerá constante el plano de la órbita, puesto que el vector que define el momento angular debe seguir siendo perpendicular a dicho plano.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. El origen y evolución de las estrellas se basa en el principio de conservación:

a) de la energía; b) del momento angular; c) del momento lineal.

b) Se basa en el principio de conservación del momento angular.

2. Una gigante roja de radio R = 10^6 km y de velocidad angular w evoluciona durante millones de años hasta convertirse en una enana blanca de R = 5 · 10^3 km . Señala la/s respuesta/s correcta/s:

a) Su densidad ha aumentado en 8 000 veces; b) Su velocidad angular se ha multiplicado por 40 000 ; c) El momento angular se ha dividido entre 19.

a) Su densidad ha aumentado en 8 000 veces.

3. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol: a) se conserva el momento angular y el momento lineal; b) se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza; c) varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

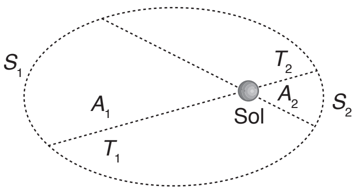
c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

4. Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica, ¿cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?: a) el momento angular; b) el momento lineal; c) la energía potencial.

a) El momento angular.

Problemas propuestos

1. Razona a partir de la segunda ley de Kepler cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.



De acuerdo con la ley de las áreas se cumple

$$A_1 = A_2 \quad \text{si} \quad t_1 = t_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} s_1 \cdot r_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 r_1 , \qquad A_2 = \frac{1}{2} s_2 \cdot r_2 = \frac{1}{2} v_2 t_2 r_2$$

Si $A_1 = A_2$ se cumple:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2 \Rightarrow v \cdot \mathrm{r} = \mathrm{cte}$$

La velocidad orbital es inversamente proporcional a la distancia entre el planeta y el Sol.

2. Una de las lunas de Júpiter, Ío, describe una órbita de radio medio 4,22 · 10^8 m y un periodo de 1,53 · 10^5 s.

a) Calcula el radio medio de otra de las lunas de Júpiter, Calixto, cuyo periodo es de 1,44 · 10^6 s.

b) Obtener la masa de Júpiter sabiendo que la constante de gravitación es: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) De la 3.ª ley de Kepler se deduce:

$$\frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 4{,}22 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1{,}44 \cdot 10^6 \text{ s}}{1{,}53 \cdot 10^5 \text{ s}}\right)^2} =$$

$$= 1{,}88 \cdot 10^9 \text{ m}$$

b) Para que la luna I$_o$ describa una órbita circular se debe cumplir $F_g = F_c$

$$\frac{GM_J}{R_o} = v^2 \Rightarrow M_J = \frac{v^2 R_o}{G} = \frac{4\pi^2 R_o^3}{T^2 G} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (4{,}22 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(1{,}53 \cdot 10^5 \text{ s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}}$$

$$= 1{,}89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

3. ¿Cuánto vale en m^2/s la velocidad areolar de la Tierra? Datos: radio medio de la órbita terrestre, 1,5 · 10^{11} m.

La velocidad areolar de la Tierra en su órbita circular viene dada por:

$$v_a = \frac{S}{T} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2}{365 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/días}} = 2{,}2 \cdot 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

4. Calcula el momento angular orbital de la Tierra si describe una órbita circular alrededor del Sol de radio 1,5 · 10^{11} m.

Datos: M_T = 6,0 · 10^{24} kg.

El momento angular de la Tierra alrededor del Sol viene dado por:

$$L = m v r = m \omega r^2 =$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{365 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/día}} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

5. Indica sobre la trayectoria de un planeta con órbita elíptica alrededor del Sol, que ocupa uno de los focos, los puntos de máxima y mínima velocidad y los puntos de máxima y mínima energía potencial. Razona la respuesta.

De acuerdo con la 2.ª ley de kepler, el perihelio es el punto de máxima velocidad, y en el afelio la velocidad es mínima. La energía mecánica es constante. Por tanto, la energía potencial es máxima cuando la energía cinética es mínima (en afelio). Y será mínima en el perihelio.

6. Plutón recorre una órbita elíptica en torno al Sol situándose a una distancia r_p = 4,4 · 10^{12} m en perihelio y r_a = 7,4 · 10^{12} m en afelio. ¿En cuál de esos dos puntos será mayor la velocidad de Plutón? Razona la respuesta.

De acuerdo con la ley de las áreas se cumple:

$$v_p r_p = v_a r_a \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{7{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m}}{4{,}43 \cdot 10^{12} \text{ m}} = 1{,}68$$

Por tanto, $v_p = 1{,}68\, v_a$

7. Dos satélites absolutamente idénticos recorren órbitas alrededor de la Tierra. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor

velocidad, el de mayor o el de menor radio de órbita? Razona tu respuesta.

De acuerdo con la 2.ª ley de Kepler, $v \cdot r$ = cte. La velocidad será mayor para el satélite que tenga menor radio de órbita.

8. Explica por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen más velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.

Si se mueven bajo una fuerza central (es el caso de la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol) la velocidad es inversamente proporcional a la distancia al Sol (segunda ley de Kepler).

9. En su afelio, el planeta Mercurio está a $6{,}99 \cdot 10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio queda a $4{,}63 \cdot 10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3{,}88 \cdot 10^{4}$ m/s en el afelio. ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio? ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?

Aplicamos el Principio de Conservación del Momento Angular.

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p} = \frac{3{,}88 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 6{,}99 \cdot 10^{10} \text{ km}}{4{,}63 \cdot 10^{10} \text{ km}} = 5{,}86 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Semieje mayor de la elipse:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{(4{,}63 + 6{,}99) \cdot 10^{10} \text{ km}}{2} = 5{,}81 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

Distancia de un foco al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = (5{,}81 - 4{,}63) \cdot 10^{10} \text{ km}$$

por tanto, la excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1{,}18 \cdot 10^{10} \text{ km}}{5{,}81 \cdot 10^{10} \text{ km}} = 0{,}203$$

10. Considera una órbita elíptica alrededor de una estrella. La distancia desde la estrella hasta el punto más alejado de la órbita, llamado apoastro, es 1,2 veces la distancia al punto más cercano de la órbita, llamado periastro. Si la velocidad de un cuerpo en esta órbita es 25 km/s en el periastro, ¿cuál es su velocidad en el apoastro? Razona la respuesta.

Aplicamos la segunda ley de Kepler:

$$v_p r_p = v_a r_a \Rightarrow v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{25 \text{ km/s} \cdot r_p}{1{,}2 \cdot r_p} = 20{,}8 \text{ km/s}$$

11. Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explica en qué punto de su órbita, afelio o perihelio, tiene mayor valor: *a)* la velocidad; *b)* la energía mecánica; *c)* el momento angular.

De la 2.ª ley de Kepler se deduce que la velocidad orbital es inversamente proporcional a la distancia del cometa al Sol.

a) La velocidad es mayor en perihelio porque en ese punto la distancia es la menor posible.

b) La energía mecánica es constante porque el cometa se mueve bajo una fuerza conservativa. La energía mecánica, pues, es la misma en perihelio que en afelio.

c) El momento angular viene dado por $L = m \cdot r \cdot v \operatorname{sen} \alpha$. En perihelio y en afelio sen $\alpha = 1$, y en todos los puntos de la trayectoria se cumple $v \cdot r$ = cte.

(2.ª ley de Kepler). Por tanto el momento angular vale lo mismo en perihelio que en afelio.

12. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios situados sobre el ecuador terrestre, y con periodo orbital de un día.

***a)* Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determina el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.**

***b)* Determina la energía mecánica de los satélites.**

Datos: radio terrestre = $6{,}37 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; constante de gravitación universal = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

De la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria se deduce:

$$v^2 = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R_o^3}{T^2} = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow$$

$$R_o = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Altura a que se encuentran los satélites:

$$h = R_o - R_T = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m} - 6{,}7 \cdot 10^6 \text{ m} = 3{,}55 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{4{,}22 \cdot 10^7}} = 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

a) Módulo del momento angular:

$$|L| = m \cdot v \cdot R_o \cdot \operatorname{sen} \alpha =$$
$$= 500 \text{ kg} \cdot 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 4{,}22 \,.\, 10^7 \text{ m} = 6{,}48 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

sen $\alpha = 1$ por ser órbita circular.

b) $$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R_o}\right) = -\frac{GMm}{2R_o} =$$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7} = -2{,}36 \cdot 10^9 \text{ J}$$

13. Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

***a)* El módulo del momento angular, respecto de la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el momento lineal.**

***b)* La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.**

a) Falso. El momento angular es constante en módulo, dirección y sentido, ya que la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central. El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio, ya que en estos puntos, al ser el vector de posición r y el momento lineal p perpendiculares, se cumple:

$r_a m v_a = r_p m v_p$ y dado que $r_a > r_p$ se debe cumplir que $v_p > v_a$.

b) Falso. La energía mecánica se conserva en toda la órbita, ya que solamente actúa la fuerza gravitatoria del Sol, que es conservativa. La energía potencial sí es mayor en el afelio que en el perihelio, ya que la distancia es mayor de acuerdo con la expresión $E_p = -\dfrac{GMm}{R}$, a valores mayores de R tendremos un valor negativo más pequeño, que implicará un valor mayor.

14. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa *M*. La masa del planeta es *m* = 10^{24} kg y su órbita es circular, de radio *r* = 10^8 km y periodo *T* = 3 años terrestres. Determina:

a) La masa de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2r alrededor de la estrella.

Datos: constante de gravitación universal *G* = 6, 67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}. Considera 1 año terrestre = 365 días.

a) Aplicaremos la 3.ª ley de Kepler para los datos del planeta, teniendo en cuenta, además, que la masa que aparece en la fórmula es la de la estrella respecto a la que se orbita. Por ser circular la órbita, se cumple $Fc = Fg$.

$$\frac{T^2}{R_3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (10^8 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 6{,}61 \cdot 10^{28} \text{ kg}$$

b) $E_m = \dfrac{1}{2} mv^2 - \dfrac{GMm}{R} = -\dfrac{GMm}{2R} =$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28} \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^3} = -2{,}2 \cdot 10^{31}\ J$$

c) Modulo del momento angular: $|L| = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\ \alpha$

Al calcular el momento angular respecto del centro de la estrella para una órbita circular los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ son siempre perpendiculares. Por tanto, el módulo del momento angular será:

$$|L| = r \cdot m \cdot v = 10^{11} \cdot 10^{24} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28}}{10^{11}}} =$$

$$= 6{,}64 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

d) La velocidad angular en función de la velocidad orbital viene dada por:

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{\sqrt{\dfrac{GM}{r_2}}}{r_2} = \sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}61 \cdot 10^{28}}{(2 \cdot 10^{11})^3}} =$$

$$= 2{,}35 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

15. Un satélite artificial de 500 kg gira en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcula:

a) Su velocidad.

b) Su energía total.

c) La energía necesaria para que, partiendo de esa órbita, se coloque en otra órbita circular a una altura de 10 000 km.

d) En el proceso, ¿cómo cambia su momento angular?

Datos: radio terrestre = 6,37 · 10^6 m; masa de la Tierra: 5,98 · 10^{24} kg; constante *G* = 6, 67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) De la equivalencia entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria tenemos:

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}87 \cdot 10^6}} = 7\,620 \text{ m/s}$$

b) $E_m = \dfrac{1}{2} mv^2 - \dfrac{GMm}{R+h} = -\dfrac{GMm}{2(R+h)} =$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 6{,}87 \cdot 10^6} = -1{,}45 \cdot 10^{-10}\ J$$

c) La energía necesaria será la diferencia entre energía mecánica final y la energía mecánica correspondiente a la órbita de partida.

$$\Delta E = E_{mf} - E_{mo} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{R+h_f} + \frac{1}{R+h_o}\right) \cdot GMm =$$

$$= \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R+h_o} - \frac{1}{R+h_f}\right) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 10^6} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6{,}87} + \frac{1}{16{,}37}\right) = 8{,}41 \cdot 10^9\ J$$

d) Hallamos la velocidad en la nueva órbita:

$$v_f = \sqrt{\frac{GM}{R+h_f}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{39{,}88 \cdot 10^{13}}{16{,}37 \cdot 10^6}} = 4\,936 \text{ m/s}$$

Variación del momento angular

$$\Delta L = m(r_f \cdot v_f - r_o \cdot v_o) = 500(16{,}37 \cdot 4{,}936 - 6{,}87 \cdot 7{,}62) \cdot$$
$$\cdot\ 10^9 = 1{,}43 \cdot 10^{13} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

16. Un satélite de 1 000 kg de masa describe una órbita circular de 1,2 · 10^4 km de radio alrededor de la Tierra. Calcula:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita? Explica por qué.

b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita. Datos: masa de la Tierra *M* = 5,98 · 10^{24} kg; constante de gravitación *G* = 6, 67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) Módulo del momento lineal y módulo del momento angular:

$$p = mv = m\sqrt{\frac{GM}{R_o}} = 1000 \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}2 \cdot 10^7}} =$$

$$= 5{,}76 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$L = mvR_o = 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot 1{,}2 \cdot 10^7 = 6{,}92 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$$

b) Período y energía mecánica:

$$T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}2 \cdot 10^7}{5{,}76 \cdot 10^3} = 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ s} = 3{,}63\ h$$

$$E_m = \frac{-GMm}{2R_o} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1\,000}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^7} =$$

$$= -1{,}66 \cdot 10^{10}\ J$$

17. Calcula el momento angular de Júpiter suponiendo que tiene una masa 315 veces la de la Tierra, que su radio de órbita es 5,2 veces mayor que el radio de la órbita terrestre y el periodo es 3,74 · 10⁸ s.

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,400$ km.

En el supuesto de que la órbita sea circular, el momento angular es máximo y viene determinado por:

$$L = (315\,M_T)\ r\ \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\ (315\,M_T)\ r^2}{T} =$$

$$= 2\pi\ (315\,M_T)\ \frac{(5{,}2\ r_T)^2}{T} = 6{,}28 \cdot (315 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}) \cdot$$

$$\cdot \frac{27 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}{3{,}74 \cdot 10^8\ \text{s}} = 1{,}9 \cdot 10^{43}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

18. Supongamos que por alguna razón la Tierra se contrae de modo que su radio se transforma en la mitad del que ahora tiene. ¿Cambiaría su velocidad de traslación alrededor del Sol?

Suponemos que la masa de la Tierra y el radio de la órbita que describe no han cambiado. Por tanto, su momento angular seguirá siendo el mismo: $L = m\,r\,v$ = cte.

De donde se deduce que la velocidad no debe cambiar.

También se puede llegar al mismo resultado aplicando la Ley de Gravitación. Si la Tierra se mantiene en su órbita, se cumple:

$$m\ \frac{v^2}{r} = G\ \frac{Mm}{r^2}$$

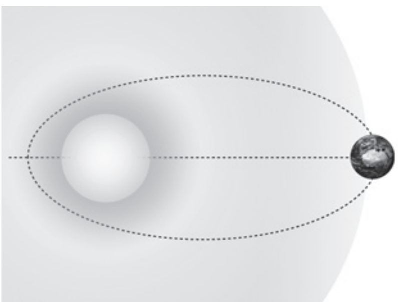
de donde se deduce que la velocidad orbital es $v = \sqrt{\dfrac{Gm}{T}}$, que es constante si el radio de la órbita no varía.

19. La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1{,}521 \cdot 10^{11}$ m y su máxima aproximación es $1{,}471 \cdot 10^{11}$ m. La velocidad orbital de la Tierra en perihelio es $3{,}027 \cdot 10^4$ m/s (figura siguiente).

Calcula:

***a)* La velocidad orbital en el afelio.**

***b)* La excentricidad de la órbita de la Tierra.**



a) El momento angular de la Tierra permanece constante. Por tanto, se cumple $L_a = L_p$; $m v_a r_a = m v_p r_p$, porque en ambos puntos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Por tanto,

$$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{3{,}027 \cdot 10^4\ \text{m/s} \cdot 1{,}471 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}521 \cdot 10^{11}\ \text{m}} =$$

$$= 2{,}927 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

b) Por definición, la excentricidad de la órbita viene dada por $e = \dfrac{c}{a}$, siendo a el semieje mayor de la elipse.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m},$$

y c es la distancia de uno de los focos al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} - 1{,}471 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 0{,}025 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

De acuerdo con estos valores, la excentricidad de la órbita será:

$$e = \frac{a}{c} = \frac{0{,}025 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}} = 0{,}017$$

20. ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

No es constante, porque el movimiento de los planetas se rige por el Principio de Conservación del Momento Angular:

$$m\,r\,v = \text{cte.}$$

Si la órbita es elíptica, r no es constante. Por tanto, para que se cumpla dicho principio la velocidad debe variar. Sería constante en el caso de que la órbita fuera circular.

21. Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 3 200 km y 400 km, respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es 5 250 m/s, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento.

Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

Durante su recorrido el satélite mantiene constante el momento angular. Es decir, se cumple $r_1 v_1 = r_2 v_2$.

La velocidad máxima $v_1 = 5\,250$ m/s corresponde al punto de máximo acercamiento. La velocidad correspondiente a la posición más alejada será:

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} = \frac{5\,250\ \text{m/s} \cdot (6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}4 \cdot 10^6\ \text{m})}{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} + 3{,}2 \cdot 10^6\ \text{m}} = 3\,719\ \text{m/s}$$

22. Dibuja la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol y las fuerzas que intervienen en el movimiento de aquel, así como la velocidad del planeta en diversos puntos de su órbita.

Este ejercicio es de respuesta abierta.

23. Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio $1{,}00 \cdot 10^{11}$ m y periodo 2 años exactos. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1{,}8 \cdot 10^{11}$ m.

***a)* ¿Cuál es la masa de la estrella?**

***b)* Calcula el periodo de la órbita del planeta 2.**

c) **Utilizando los Principios de Conservación del Momento Angular y de la Energía Mecánica, halla la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.**

a) El planeta 1, al describir una órbita circular, está animado de una aceleración centrípeta constante que viene determinada por:

$$m\,\frac{v^2}{r} = G\,\frac{M m}{r^2}$$

De donde se obtiene el valor de la velocidad $v^2 = \frac{GM}{r}$; además, el periodo del planeta viene dado por $T = \frac{2\pi r}{v}$. De ambas ecuaciones se deduce la masa del planeta:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = \frac{4 \cdot 9{,}89 \cdot 10^{33}\ \text{m}^3}{3{,}978 \cdot 10^{15}\ \text{s}^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}} =$$

$$= 1{,}49 \cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) Para obtener el periodo del planeta 2 aplicamos la Segunda Ley de Kepler.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

siendo r_2 el semieje mayor de la elipse:

$$r_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m} + 10^{11}\ \text{m}}{2} = 1{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

El periodo del segundo planeta será:

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 T_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1{,}4 \cdot 10^{11}}{10^{11}}\right)^3 T_1^2} = 3{,}4\ \text{años}$$

c) La energía mecánica del planeta permanece constante porque se mueve en un campo conservativo.

$$E = \frac{1}{2}\,m v_1^2 + \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\,m v_2^2 + \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

De acuerdo con la conservación del momento angular se cumple:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2; \qquad v_1 = \frac{r_2}{r_1} v_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{10^{11}\ \text{m}} \cdot v_2$$

$$v_1 = 1{,}8\,v_2; \qquad v_1^2 - \frac{v_1^2}{1{,}8^2} = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{1}{1{,}8^2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2 \cdot \frac{2{,}24}{3{,}24}\ 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}49 \cdot$$

$$\cdot\, 10^{29}\ \text{kg} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}8 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}$$

$$v_1^2 = 1{,}27 \cdot 10^8\ \text{m}^2/\text{s}^2; \qquad v_1 = 1{,}16 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

24. Se ha lanzado un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de 66 700 km (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad tiene el satélite en esa posición?

Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

Una vez situado en la órbita, mantendrá constante su momento angular. Por tanto, se cumple:

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot (R_T + 500\ \text{km})}{66\,700\ \text{km}} =$$

$$= \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot 6\,900\ \text{km}}{66\,700\ \text{km}} = 3\,817\ \text{km/h}$$

25. ¿Qué puntos de la superficie terrestre tienen momento angular cero respecto del centro de la Tierra en el movimiento de rotación de esta?

El momento angular de la Tierra, tomada como un sólido rígido, referido a su movimiento de rotación, viene dado por $L = I\omega = \frac{2}{5}\,MR^2\,\omega$; siendo $I = \frac{2}{5}\,MR^2$ el momento de inercia de la Tierra respecto del eje de rotación. De la expresión anterior se deduce que el momento angular de la Tierra depende de su velocidad angular. Todos aquellos puntos que tengan velocidad angular cero tendrán momento angular nulo. Estos puntos son los del eje de rotación. De todos ellos, los polos N y S geográficos se encuentran sobre la superficie de la Tierra.

26. Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de 3,84 · 10^5 km con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto del centro de la Tierra. Datos: $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

Momento angular de la Luna:

$$L = mrv = mr\,\frac{2\pi r}{T} = 2\pi\,\frac{mr^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot (0{,}012\,M_T) \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2}{27{,}3\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/día}} = 2{,}8 \cdot 10^{34}\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

27. Durante el vuelo Apolo XI, el astronauta M. Collins giró en torno a la Luna, en un módulo de mando, sobre una órbita aproximadamente circular. Suponiendo que el periodo de este movimiento fuera de 90 minutos exactos y que su órbita estuviera a 100 km por encima de la superficie lunar, calcula:

a) **La velocidad con que recorría la órbita.**

b) **Su momento angular respecto del centro del satélite, suponiendo que la masa del astronauta fuera de 80,0 kg.**

Datos: $R_L = 1{,}738 \cdot 10^6$ m.

a) La velocidad sobre la órbita es:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{6{,}28 \cdot (1{,}738 \cdot 10^6 + 0{,}1 \cdot 10^6\ \text{m})}{5\,400\ \text{s}} =$$

$$= 2{,}139 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

b) Momento angular del astronauta:

$$L = mvr = 80{,}0\ \text{kg} \cdot 2{,}137 \cdot 10^3\ \text{m/s} \cdot 1{,}838 \cdot 10^6\ \text{m} =$$

$$= 3{,}13 \cdot 10^{11}\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

28. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica cuya excentricidad es 0,2. Si en el perigeo dista del centro de la Tierra $7{,}2 \cdot 10^6$ m, ¿a qué distancia estará en el apogeo?

De acuerdo con la expresión de la excentricidad, tenemos:

$$e = \frac{c}{a} = 0{,}2$$

Además, se cumple que: $a = c + r_p = c + 7{,}2 \cdot 10^6$ m

Del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c = 0{,}2\,a \\ a = c + 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} \end{array}\right\} \text{ se deduce que } a = 9{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La distancia en el apogeo se obtiene de:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$r_a = 2\,a - r_p = 18 \cdot 10^6 \text{ m} - 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} = 1{,}08 \cdot 10^7 \text{ m}$$