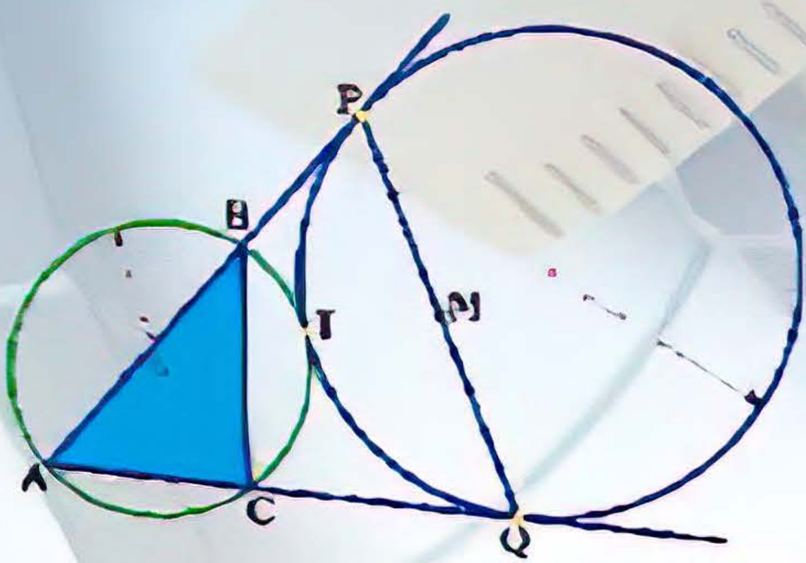
GEOMETRÍA

7 PUNTOS NOTABLES

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia y MP=MQ. ¿Qué punto notable es M del triángulo ABC?

Editorial
CUZCANO

GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

220 Problemas Resueltos
220 Problemas Propuestos

Incluye Problemas de Olimpiadas

JULIO ORIHUELA BASTIDAS

Editorial CUZCANO

Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES

Autor : Julio César Orihuela Bastidas

© **Titular de la obra:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

Diseño y diagramación: Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

© **Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Página web: www.editorialcuzcano.com.pe

Primera edición : setiembre 2018

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2018-14510

Distribución y ventas al por mayor y menor

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L. en el mes de octubre de 2018

Jr. Coricancha N°675 Urb. Zárate S.J.L.
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña Lima - Perú

Teléfono 423-8154

Introducción

El presente trabajo sobre Puntos Notables es producto de mucho tiempo de dedicación, así como una constante búsqueda de material bibliográfico, del mismo modo consulta a profesores y estudiantes, a los cuales va mi reconocimiento.

El contenido va dirigido principalmente a un público preuniversitario, pero dados los temas abarcados, puede también ser útil como preparación preolímpica o material de consulta de algunos profesores.

Se da inicio a la obra con una lista de los términos mas empleados en Geometría; se pasa luego a la definición de cada punto notable, se describe cada uno de ellos y se pasa enseguida a las demostraciones de las concurrencias y teoremas. Se da en algunos casos más de una demostración, los cuales pueden ser considerados, como guías, mas no son las únicas, ni las mejores, el lector debe intentarlo previamente y encontrará también nuevas formas.

En una segunda parte, estudiamos con todas sus demostraciones, otros puntos notables y los temas denominados como selectos, el cual va dirigido a un público con mayor experiencia, es cierto que algunos temas aquí desarrollados no son motivo de preguntas de examen de admisión, se creyó conveniente incluirlo, por la constante búsqueda de dar respuesta a muchas interrogantes. En esa búsqueda se incluyó en algunos casos la inclusión de otros temas como: semejanza, relaciones métricas y áreas; algunos temas nuevos como homotecia, inducción en la geometría e inversión, los cuales se explican brevemente.

La demostración dada al final, sobre el teorema de Morley, se desarrolla sólo con herramientas de geometría Euclídeana.

En cuanto al desarrollo de los problemas, se resalta la clasificación de problemas: tipo anual, semestral, semestral intensivo y repaso, así como también se han incluido problemas del Cepre Uni, se presenta de esta forma con el objetivo de que el estudiante pueda ubicarse según el ciclo que se encuentre y a su vez que vaya avanzando.

Se ha incluído también un grupo de problemas tomados de diferentes Olimpiadas Internacionales, con la finalidad de que el estudiante avance a mayores niveles cada vez.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A los profesores: Renzo Pardo, Jesús Silva, Luis Saavedra.
  Moisés Rayme, Richard Huamani y César Trucios.
- A todos mis alumnos de las distintas instituciones educativas.

Dedicatoria

A mis padres Moisés y Margarita

Índice

PUNTOS NOTABLES

Pág.

INTRODUCCIÓN

Índice

PUNTOS NOTABLES

GEOMETRÍA

Objetivos :

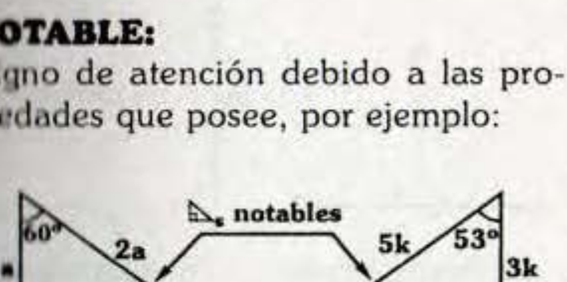
- *Conocer la definición de cada punto notable, así como su ubicación según el tipo de triángulo.*
- *Estudiar los teoremas y características relacionadas a los puntos notables y analizar los teoremas recíprocos.*
- *Identificar diferentes formas de concurrencia en diversas figuras.*
- *Impulsar en el estudiante la investigación y el deseo de profundizar cada tema, así como su relación con otros temas.*

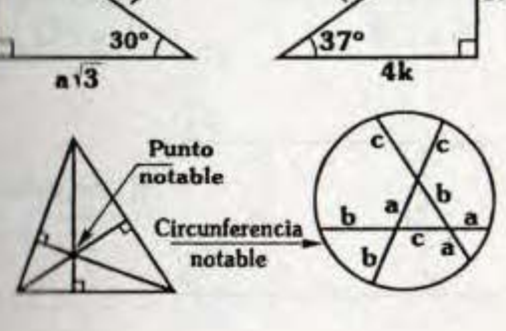
1. TERMINOLOGÍA

Con el afán de hacer más comprensible la presente obra, se va a utilizar la siguiente terminología :

NOTABLE:

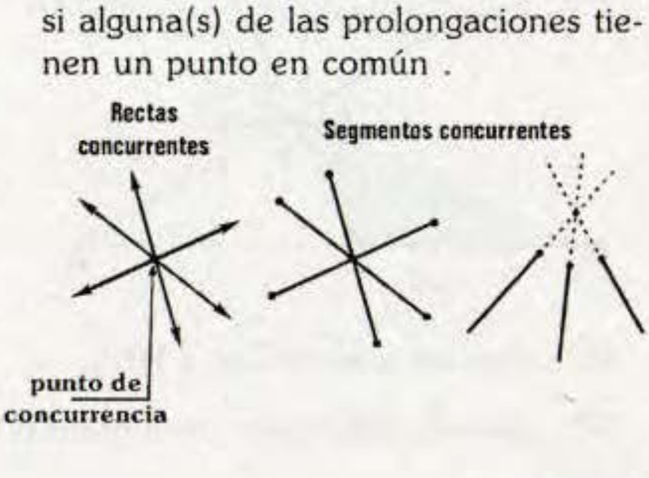
Digno de atención debido a las propiedades que posee, por ejemplo:





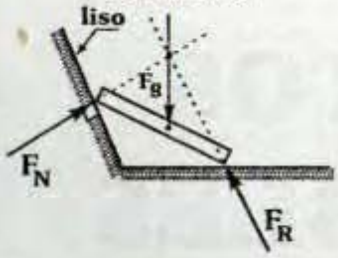
CONCURRENCIA:

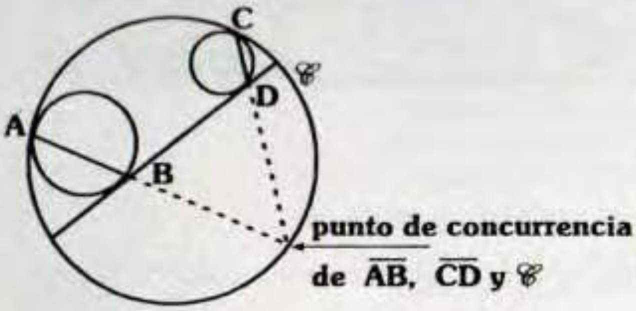
Tres o más líneas son concurrentes cuando pasan por un mismo punto o si alguna(s) de las prolongaciones tienen un punto en común .



Curvas concurrentes

Fuerzas concurrentes

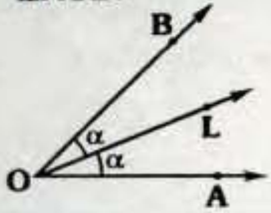




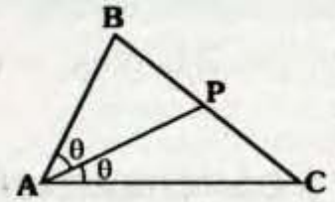
BISECTRIZ:

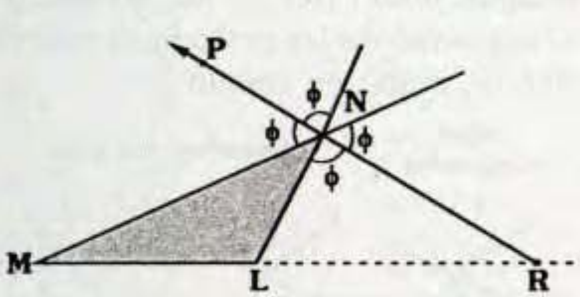
Consideremos los siguientes casos :

El rayo OL, es bisectriz del $\measuredangle AOB$.



$\overline{AP}$ es bisectriz interior del ΔABC.

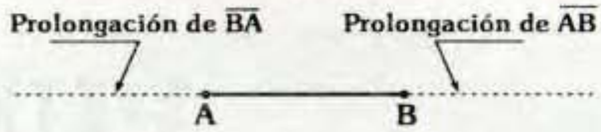




$\overline{NR}$: Bisectriz exterior del Δ MNL.

$\overrightarrow{NP}$: Bisectriz del ángulo exterior en N.

PROLONGACIÓN DE UN SEGMENTO:



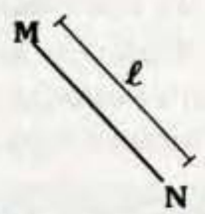
BISECAR UN SEGMENTO:

Es cortar a un segmento en su punto medio, por ejemplo la mediatriz de un segmento lo biseca, las diagonales de un paralelogramo se bisecan, etc.

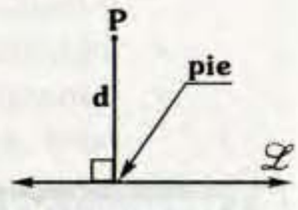
NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO:

Generalmente se considera como la clasificación por las medidas angulares (triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo).

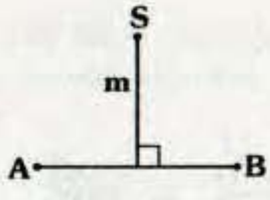
DISTANCIA:



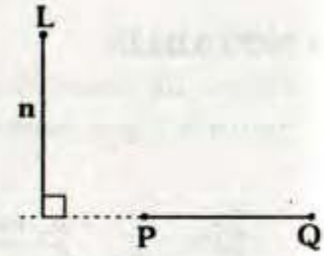
ℓ : Distancia entre M y N.



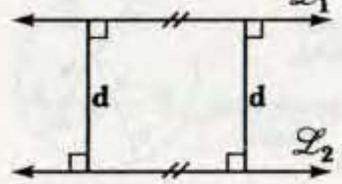
d: distancia entre P y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$



m: distancia entre S y $\overline{AB}$



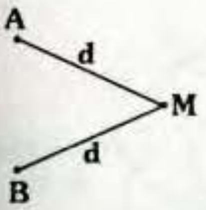
n: distancia entre L y $\overline{PQ}$



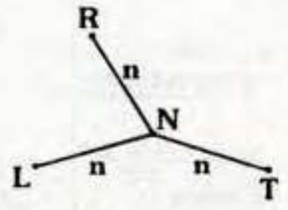
d : distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

EQUIDISTAR:

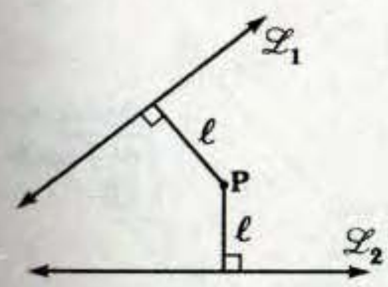
"M" equidista de A y B.



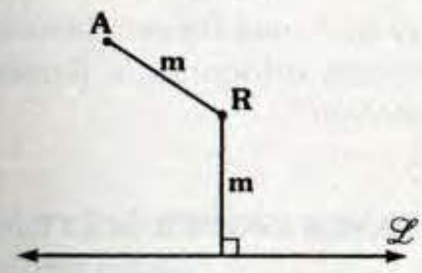
"N" equidista de R, L y T.



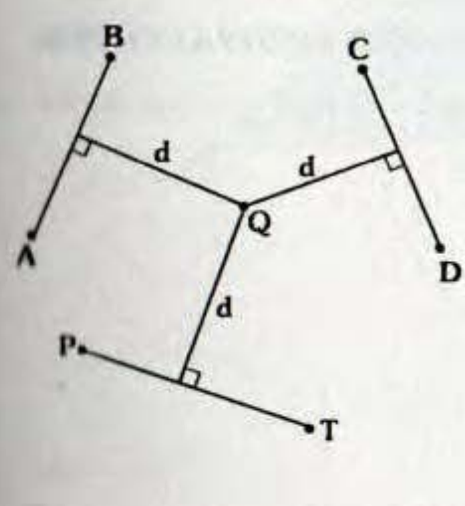
"P" equidista de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



"R" equidista de A y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$



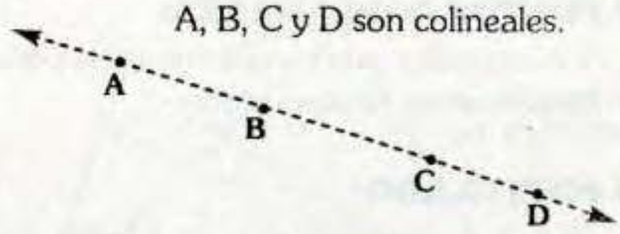
"Q" equidista de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PT}$.



PUNTOS COLINEALES:

Tres o más puntos son colineales cuando pueden pertenecer a una misma recta.

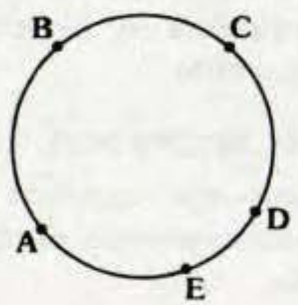
A, B, C y D son colineales.



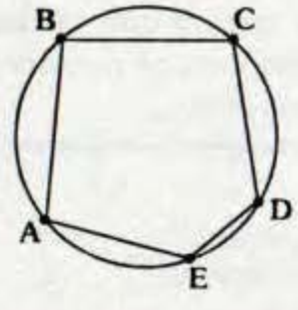
PUNTOS CÍCLICOS:

También llamados aferentes. Tres o más puntos son cíclicos cuando pertenecen a una misma circunferencia. Al polígono que resulta de unir consecutivamente dichos puntos se le denomina polígono inscrito o cíclico.

A, B, C, D y E son puntos cíclicos.



ABCDE: es un pentágono inscrito.



PUNTOS CONCÍCLICOS:

Tres o más puntos son concíclicos cuando pueden pertenecer a una misma circunferencia.

PUNTOS COPLANARES:

Son aquellos puntos que pueden pertenecer a un mismo plano.

POSTULADO:

Es una proposición que se admite sin demostración

TEOREMA RECÍPROCO:

Un teorema es recíproco cuando tiene por hipótesis la conclusión y por conclusión la hipótesis de un teorema dado.

Ejemplo:

TEOREMA:

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

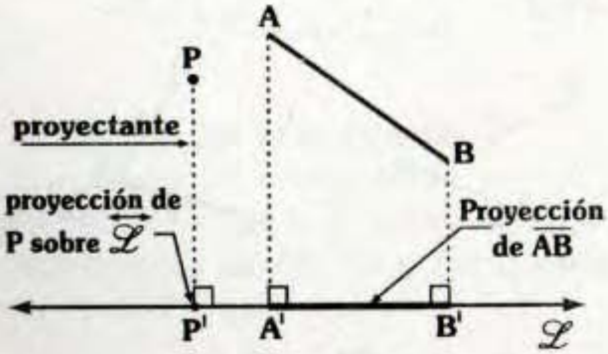
TEOREMA RECÍPROCO:

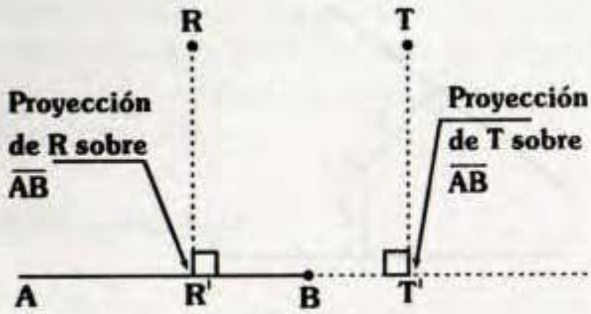
Todo punto que equidista de los extremos del segmento pertenece a la mediatriz.

Observación

Tener en cuenta que el recíproco de todo teorema no necesariamente es verdadero.

PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA:





Para el tema que desarrollaremos a la proyección ortogonal la llamaremos "proyección".

REGIONES ISOPERIMÉTRICAS

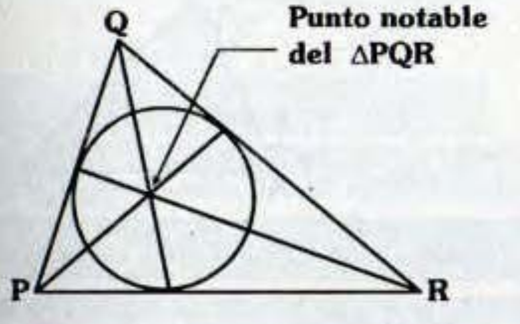
Son aquellas regiones que tienen igual perímetro.

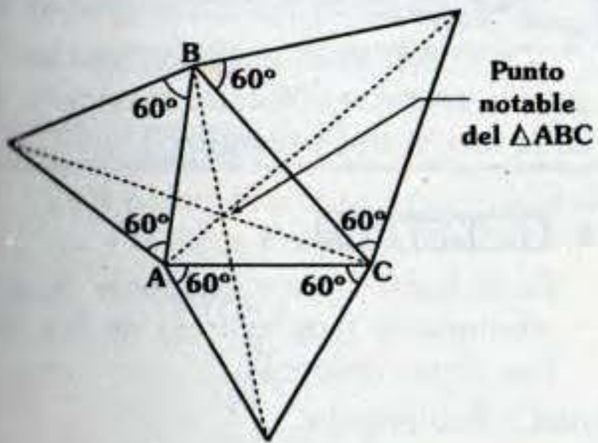
REGIONES EQUIVALENTES:

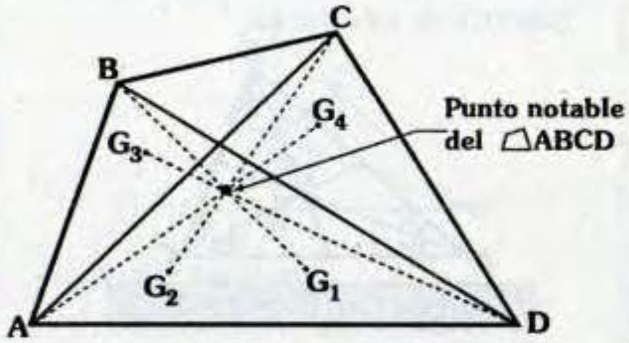
Son aquellas regiones que tienen igual área.

2. DEFINICIÓN

Es el punto o puntos de concurrencia de líneas (segmentos, rectas o curvas) sometidas a la misma definición.





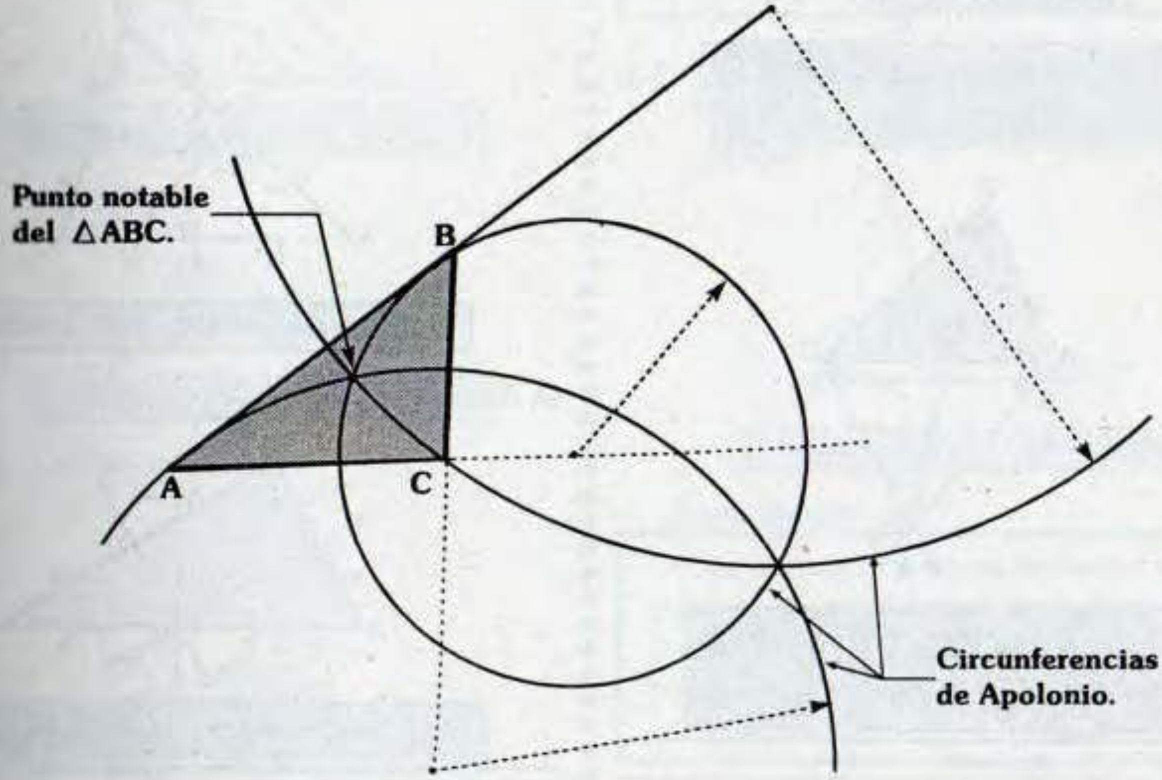


G_1 : Baricentro del ΔACD.

G_2 : Baricentro del ΔABD.

G_3 : Baricentro del ΔABC.

G_4 : Baricentro del ΔBCD.

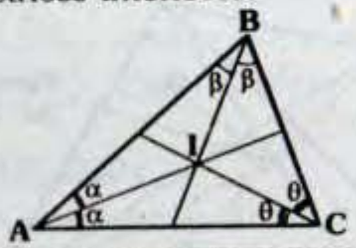


3. PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

En esta primera parte estudiaremos los puntos notables más comunes.

3.1. INCENTRO[1]

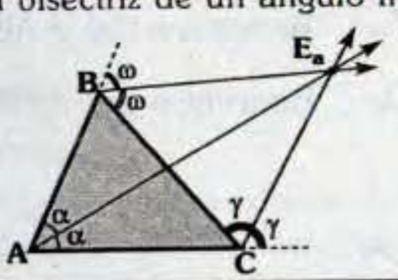
Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.



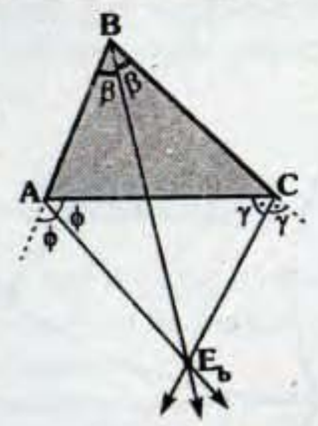
I: Incentro del $\triangle ABC$.

3.2. EXCENTRO[2]

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior.



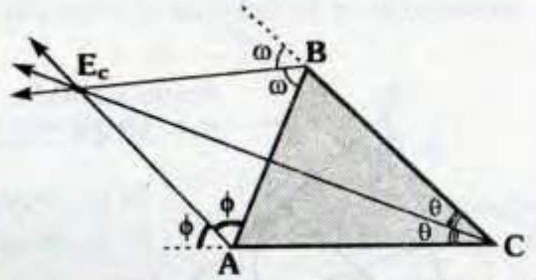
E_a : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{BC}$.



E_b : Excentro del $\triangle ABC$, relativo $\overline{AC}$.

(1) Del latín, In: dentro de

(2) Del latín, Ex: fuera de



E_c : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{AB}$

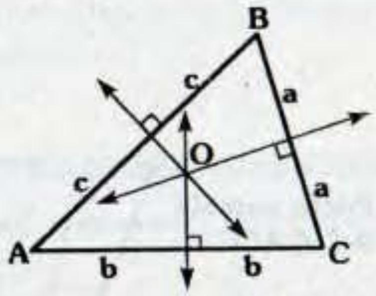
Nota

De lo expuesto anteriormente se puede asegurar: "A todo triángulo se le asocia tres excentros".

3.3. CIRCUNCENTRO[1]

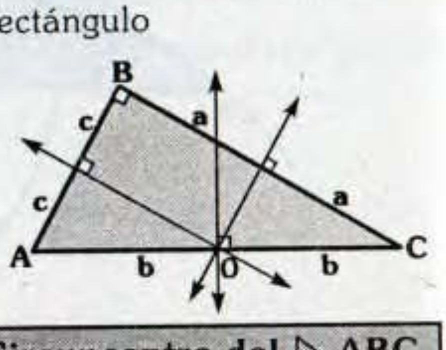
Es el punto de concurrencia de las mediatrices (coplanares) de los lados de un triángulo.

$\triangle ABC$: Acutángulo



O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

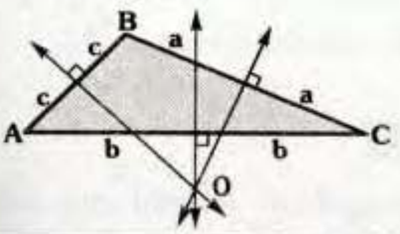
$\triangle ABC$: Rectángulo



O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

(1) Del latín, Circun: alrededor de

ΔABC: Obtusángulo



O: Circuncentro del ΔABC.

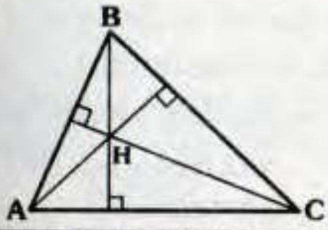
Nota

De lo anterior nos podemos dar cuenta que la ubicación del circuncentro (dentro, en o fuera del triángulo) depende de la naturaleza del triángulo.

3.4. ORTOCENTRO(2)

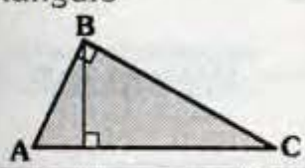
Es el punto de concurrencia de las alturas (o de sus prolongaciones).

ΔABC: Acutángulo



H: Ortocentro del ΔABC.

ΔABC: Rectángulo



B: Ortocentro del ⊿ABC.

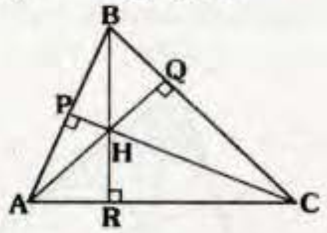
ΔABC: Obtusángulo

H: Ortocentro del ΔABC.

(2) Del latín, Orto: recto, vertical

Nota

- *Así como el circuncentro la ubicación del ortocentro depende de la naturaleza del triángulo.*
- *Del siguiente gráfico:*

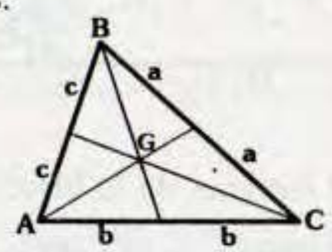


Se puede asegurar:

- *H: Ortocentro del ΔABC.*
- *A: Ortocentro del ΔBHC.*
- *B: Ortocentro del ΔAHC.*
- *C: Ortocentro del ΔAHB.*
- *P: Ortocentro de los triángulos* APH, APC, BPH *y* BPC.
- *Q: Ortocentro de los triángulos* BQH, *BQA*, HQC *y* AQC.
- *R: Ortocentro de los triángulos* ARH, ARB, HRC *y* BRC.

3.5. BARICENTRO(1)

Es el punto de concurrencia de las medianas.



G: Baricentro del ΔABC

Importante:

*De los puntos mencionados hemos visto que son **siempre interiores** el incentro y baricentro, son **exteriores** los excentros; y dependiendo de la naturaleza del triángulo el circuncentro y ortocentro.*

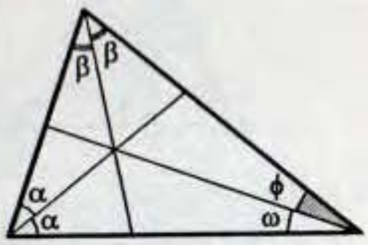
(1) Del latín, Bari: pesado, peso

4. DEMOSTRACIONES DE LAS CONCURRENCIAS

A continuación demostraremos las concurrencias mencionadas.

4.1. CON RESPECTO AL INCENTRO

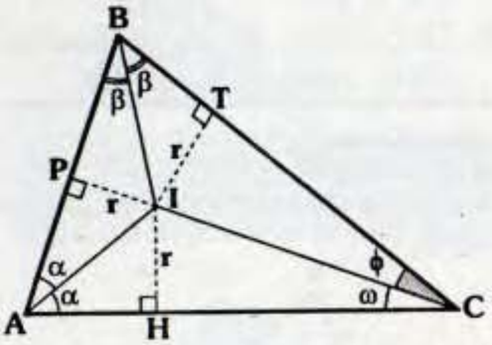
En el gráfico vamos a demostrar:



$$\boxed{\omega = \phi}$$

Método 1

- Se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ e $\overline{IT} \perp \overline{BC}$.



- Por el teorema de la bisectriz:

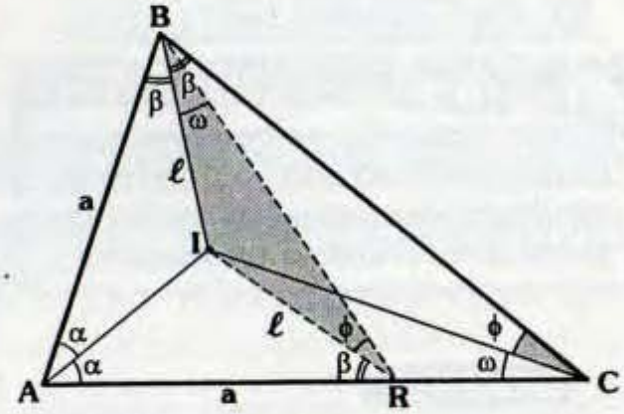
$$IH = IP = r \quad e \quad IP = IT = r$$
$$\Rightarrow \quad IH = IT = r$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que $\overline{CI}$ es bisectriz.

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

Método 2

- Se ubica R en $\overline{AC}$ tal que $AR = a$



- $\Delta ABI \cong \Delta AIR$ (LAL)

$$\Rightarrow BI = IR = \ell \;\; y \;\; m\measuredangle IRA = \beta$$

- Puesto que $m \measuredangle IBC = m \measuredangle IRA = \beta$ el $\triangle$BIRC es inscriptible.

$$\Rightarrow m\measuredangle IBR = m\measuredangle ICR = \omega$$
$$m\measuredangle BCI = m\measuredangle BRI = \phi$$

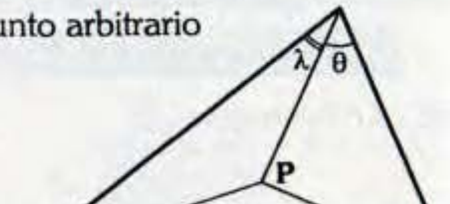
- ΔBIR: Isósceles

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

Método 3

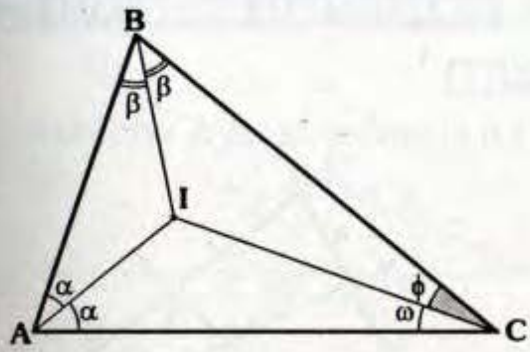
Observación

P: Punto arbitrario



Se cumple:

$$\text{sen}\alpha \; \text{sen}\theta \; \text{sen}\delta = \text{sen}\lambda \; \text{sen}\gamma \; \text{sen}\beta$$



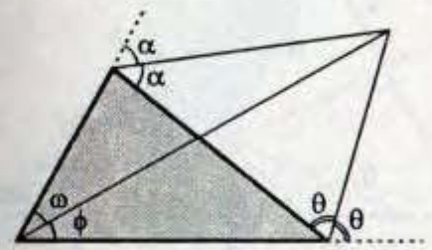
- De la observación:

$$\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}w\ \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\beta$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}w = \operatorname{sen}\phi$$
$$\therefore \quad w = \phi$$

4.2. CON RESPECTO AL EXCENTRO

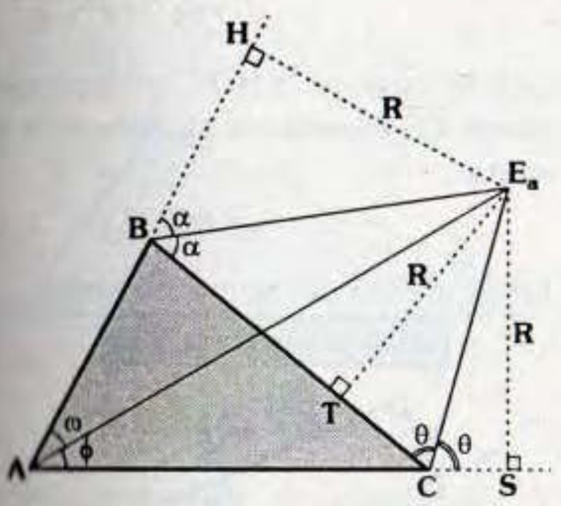
Caso 1

En el gráfico vamos a demostrar:



$\boxed{\omega = \phi}$

Método 1



- Se traza $\overline{E_aT} \perp \overline{BC}$, $\overline{E_aH} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{E_aS} \perp \overline{AC}$.

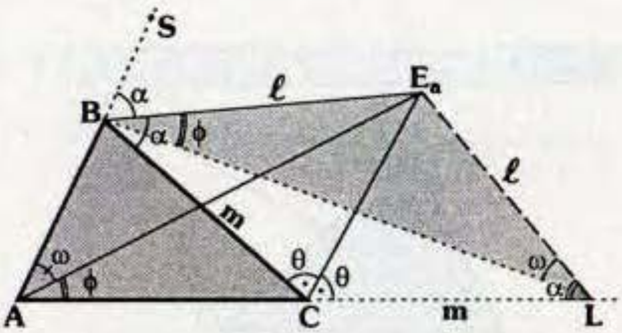
- Por el teorema de la bisectriz:

$$E_aH = E_aT = R \quad y \quad E_aT = E_aS = R$$
$$\Rightarrow \quad E_aH = E_aS = R$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que $\overrightarrow{AE_a}$ es bisectriz.

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

Método 2



- Se ubica L en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que $CL = BC = m$

- $\Delta BE_aC \cong \Delta\ CE_aL$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad BE_a = LE_a = \ell$$
$$m\measuredangle CBE_a = m\measuredangle E_aLC = \alpha$$

- Debido a que:

$$m\measuredangle SBE_a = m\measuredangle E_aLA = \alpha$$

el $\triangle ABE_aL$ es inscriptible

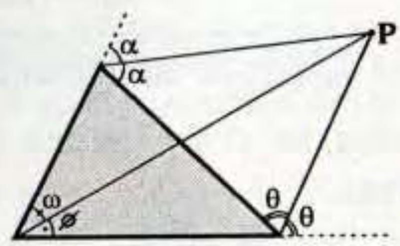
$$\Rightarrow m\measuredangle E_aBL = m\measuredangle E_aAL = \phi\ ;\ y$$
$$m\measuredangle BAE_a = m\measuredangle BLE_a = \omega$$

- ΔBE_aL : Isósceles

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

Método 3

- Usando la observación de 4.1, cuando P es exterior.

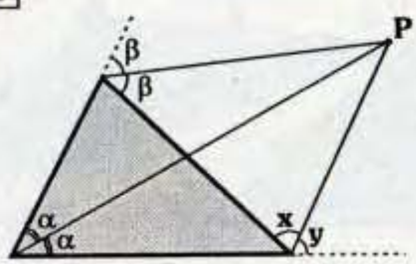


$$\operatorname{sen}w\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}w = \operatorname{sen}\phi$$

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

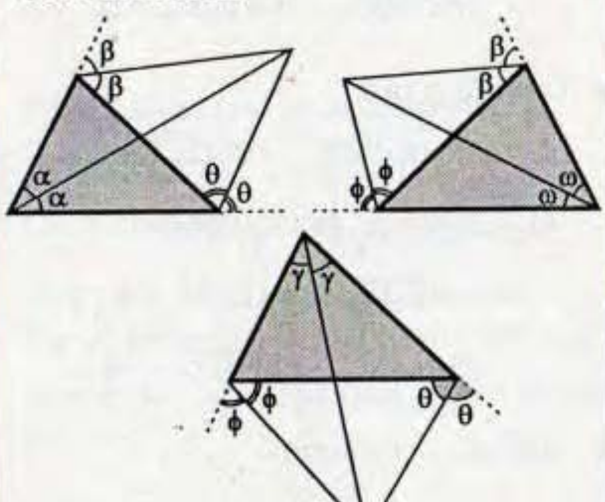
Caso 2



En el gráfico se demuestra que x=y, para ello debemos proceder análogamente al caso anterior.

Nota

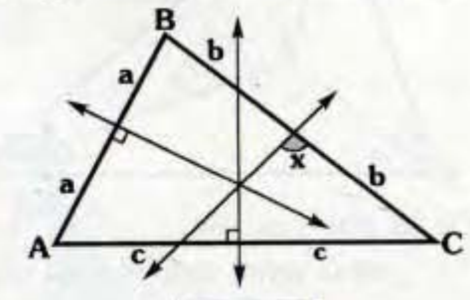
Se verifica entonces que relativo a cada lado encontraremos la concurrencia.



4.3. CON RESPECTO AL CIRCUNCENTRO

Caso 1

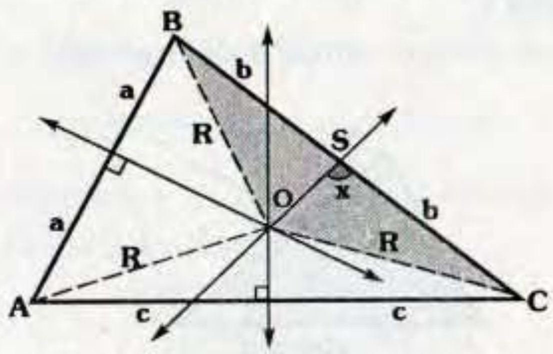
A) En el gráfico se va a demostrar:



$$\Rightarrow \boxed{x = 90°}$$

Demostración:

- Trazamos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$



- Por el teorema de la mediatriz:

$$OC = OA = R \quad y \quad OA = OB = R$$

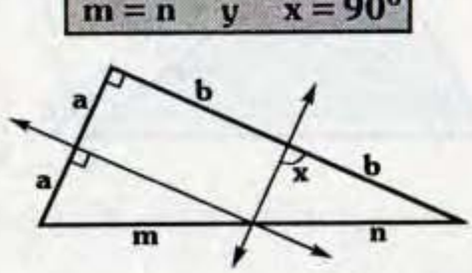
$$\Rightarrow \quad OB = OC = R$$

- Con lo cual el ΔBOC es isósceles, como $\overline{OS}$ es mediana también debe ser altura.

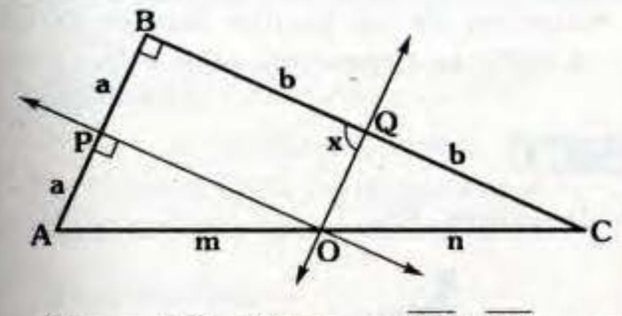
$$\therefore \quad x = 90°$$

B) En el gráfico se va a demostrar:

$$\boxed{m = n \quad y \quad x = 90°}$$



Demostración:



- Como $AP = PB = a$ y $\overline{PO} // \overline{BC}$, por el teorema de los puntos medios:

$$m = n$$

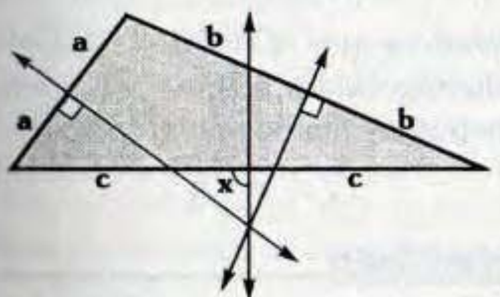
- Puesto que $BQ = QC = b$ y $AO = OC = m$

$\Rightarrow$ $\overline{OQ}$ es base media ΔABC.

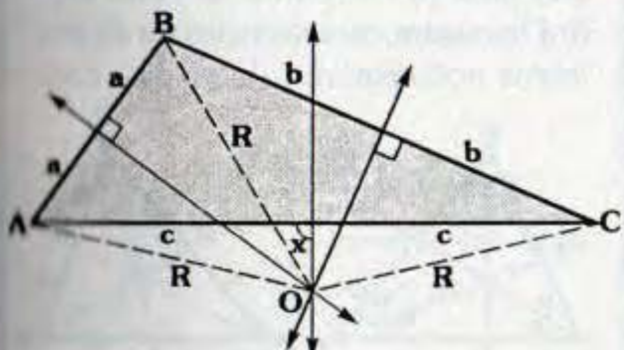
$$\therefore \quad x = 90^\circ$$

C) En el gráfico vamos a demostrar:

$$\boxed{x = 90^\circ}$$



- Se traza $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.



- Por el teorema de la mediatriz:

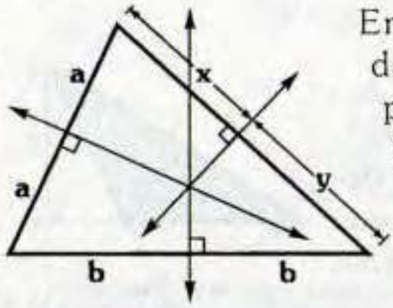
$$AO = BO = R \quad y \quad BO = OC = R$$

$$\Rightarrow \quad AO = OC = R$$

- Puesto que el ΔAOC es isósceles, por teorema, tenemos:

$$\therefore \quad x = 90^\circ$$

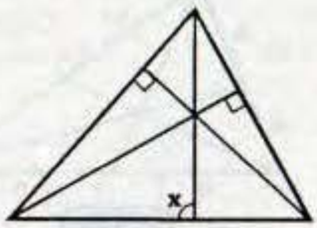
Caso 2



En el gráfico se demuestra $x = y$, para lo cual debemos proceder análogamente al caso 1.

4.4. CON RESPECTO AL ORTOCENTRO

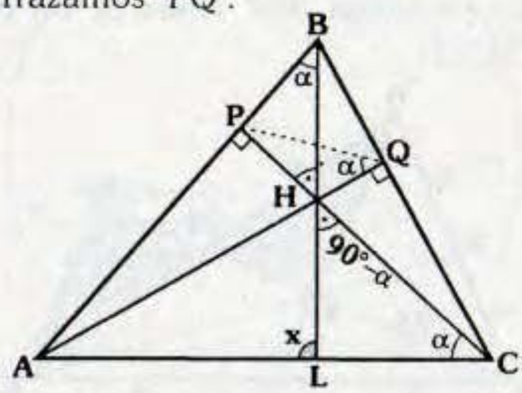
En el gráfico tenemos que demostrar:



$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 90^\circ}$$

Demostración:

- Trazamos $\overline{PQ}$.



- Debido a que:

$$m\measuredangle APC = m\measuredangle AQC = 90^\circ$$

el $\triangle$APQC es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle PQA = m\measuredangle PCA = \alpha$$

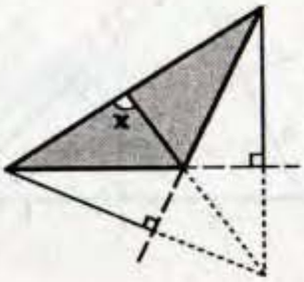
- Puesto que $m\measuredangle BPH = m\measuredangle BQH = 90^o$ el $\square PBQH$ es inscriptible:

$$\Rightarrow \ m\measuredangle HBP = m\measuredangle HQP = \alpha$$

- En $\triangle HLC$ por ángulo exterior :

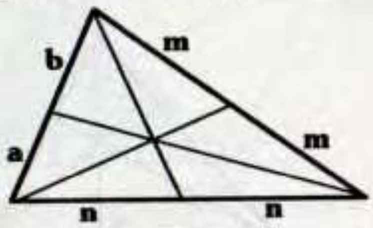
$$\therefore \ x = 90^o$$

En el gráfico demuestra $x=90^o$, para lo cual nos debemos percatar que se trata del mismo caso anterior.



5.5. CON RESPECTO AL BARICENTRO

En el gráfico demostramos:

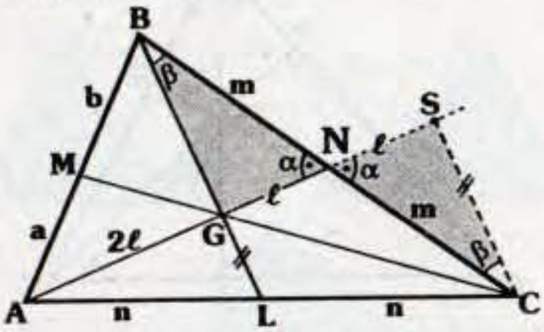


$$\Rightarrow \ \boxed{a=b}$$

Demostración:

Paso 1

- Se prolonga $\overline{AN}$ hasta S, tal que $\overline{CS} // \overline{LG}$.



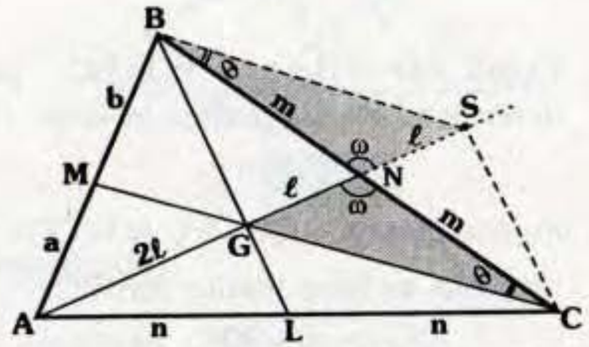
- Ya que $m\measuredangle GBN = m\measuredangle NCS = \beta$ (ángulos alternos internos), $BN = NC = m$ y $m\measuredangle BNG = m\measuredangle SNC = \alpha$:

$$\Delta BGN \cong \Delta NSC \ (ALA) \Rightarrow GN = NS = \ell$$

- Como $AL = LC = n$ y $\overline{LG} // \overline{SC}$ por el teorema de los puntos medios en el ΔASC, se tiene: $AG = GS = 2\ell$.

Paso 2

- Trazamos $\overline{BS}$.



- Como $BN = NC = m$, $m\measuredangle BNS = m\measuredangle GNC$ y $GN = NS = \ell$: $\Delta GNC \cong \Delta BNS \, (LAL)$

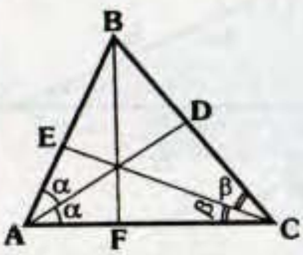
$$\Rightarrow \ m\measuredangle SBN = m\measuredangle NCG = \theta$$

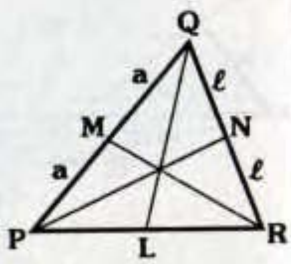
- Debido a que $AG = GS = 2\ell$ y $\overline{GM} // \overline{BS}$ (alternos internos), por el teorema de los puntos medios en el ΔABS .

$$\therefore \ a = b$$

Importante:

Tener en cuenta que al trazar dos líneas notables similares la ceviana que pase por el punto de corte tendrá la misma característica de dichas líneas notables.





$\overline{AD}$ y $\overline{CE}$: Bisectrices interiores

$\Rightarrow \overline{BF}$ es bisectriz interior

$\overline{RM}$ y $\overline{PN}$: Medianas

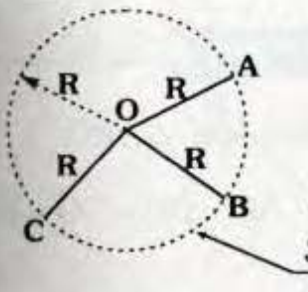
$\Rightarrow \overline{QL}$ es mediana

5. CIRCUNFERENCIAS INSCRITA, EXINSCRITA Y CIRCUNSCRITA AL TRIÁNGULO

Recordar: *(Postulado de Euclides)*

Por un punto arbitrario como centro y un radio cualquiera se puede trazar una circunferencia.

Gráficamente:



Si: $AO = R$

$BO = R$ y

$CO = R$

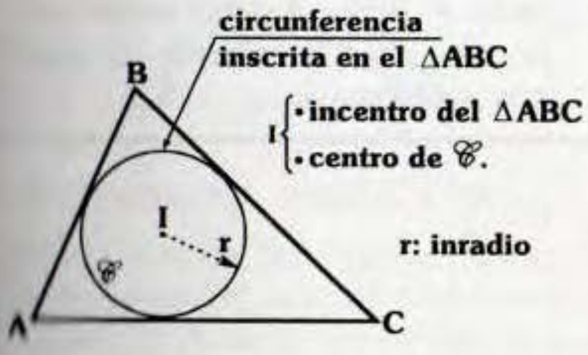
Entonces:

Se puede trazar una circunferencia

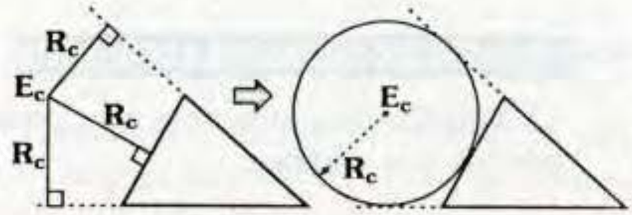
* Por lo estudiado en el incentro, sabemos que dicho punto equidista de los lados del triángulo (IP=IT=IH=r, ver demostración 4.1), por lo tanto (por el postulado de Euclides) el incentro es el centro de una circunferencia de radio r, la cual es tangente a cada lado del triángulo, como se muestra a continuación.

5.1. CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

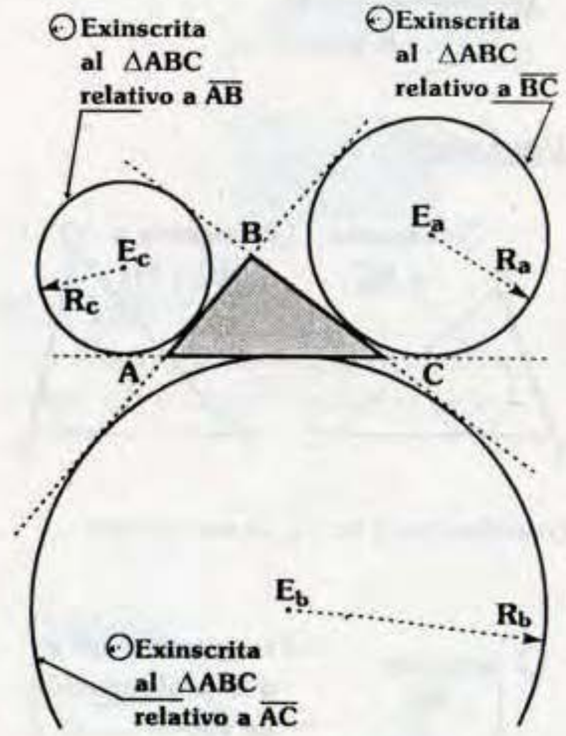


* De forma similar a los estudiado en el incentro podemos concluir:



5.2. CIRCUNFERENCIA EXINSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.



– E_a: Excentro del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$

– E_b: Excentro del ΔABC, relativo a $\overline{AC}$

– E_c: Excentro del ΔABC, relativo a $\overline{BA}$

– R_a: Exradio del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$

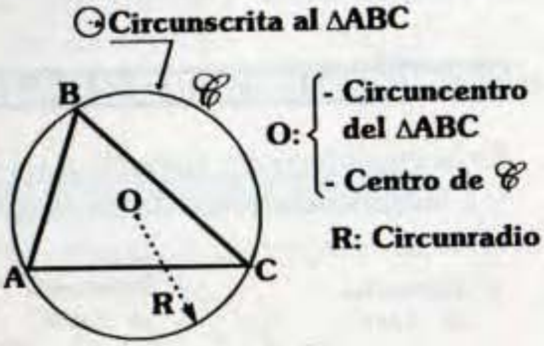
– R_b: Excradio del ΔABC, relativo a $\overline{AC}$

– R_c: Exradio del ΔABC, relativo a $\overline{BA}$

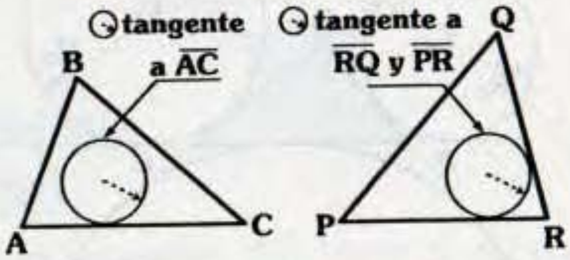
* Lo mismo ocurre con el circuncentro.

5.3. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

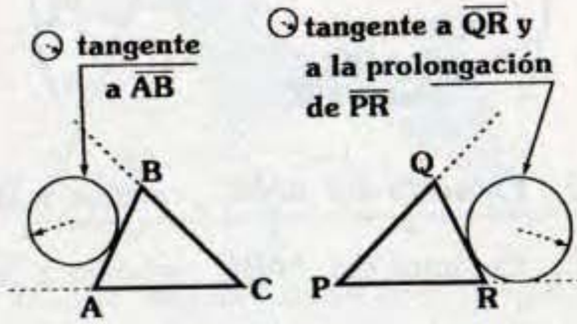
Es aquella circunferencia que pasa por los tres vértices.



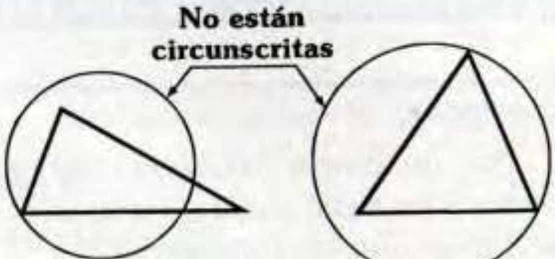
Cuidado:



En ambos casos las $\bigcirc_s$ no son inscritas.

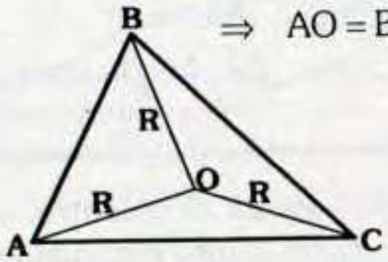


Las $\bigcirc_s$ no son exinscritas.



Observación

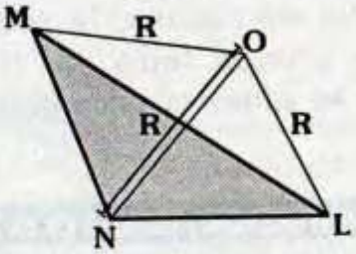
Si O: Circuncentro del ΔABC:



$\Rightarrow AO = BO = CO = R$

Si O: Circuncentro del ΔMNL:

$\Rightarrow MO = NO = LO = R$



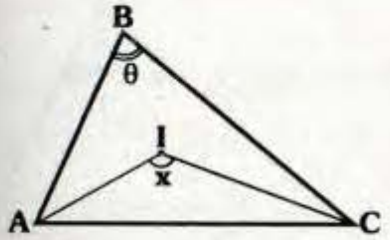
En ambos casos se podrá trazar una circunferencia de centro O y radio R (lo cual daría mayor panorama para la solución de algunos problemas).

6. TEOREMAS FUNDAMENTALES

6.1. TEOREMA

La medida de un ángulo cuyo vértice es el incentro y sus lados pasan por dos vértices de un triángulo es 90° más la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si I: Incentro del $\triangle ABC$.



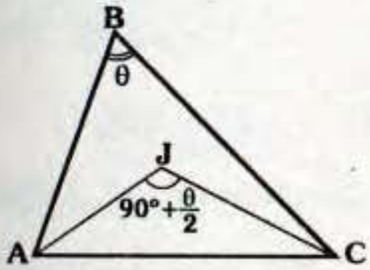
$$\Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}}$$

Demostración:

- Dado que I es incentro, sabemos que $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ son bisectrices. Por teorema de ángulos entre bisectrices:

$$x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Cuidado:



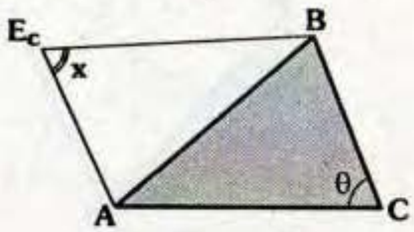
Se observa que: $m\measuredangle AJC = 90^\circ + \dfrac{\theta}{2}$

con lo cual **no** podemos afirmar que J es **incentro**, nos faltarían condiciones las cuales analizaremos en las páginas siguientes.

6.2. TEOREMA

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado y cuyos lados pasan por los vértices de dicho lado es igual a 90° menos la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si E_c: Excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{AB}$.



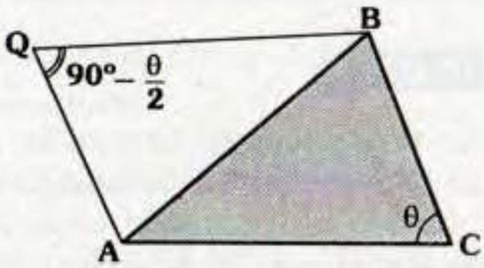
$$\Rightarrow \boxed{x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}}$$

Demostración:

- Así como en el teorema anterior, del tema de triángulo se concluye:

$$\therefore\ x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Cuidado:

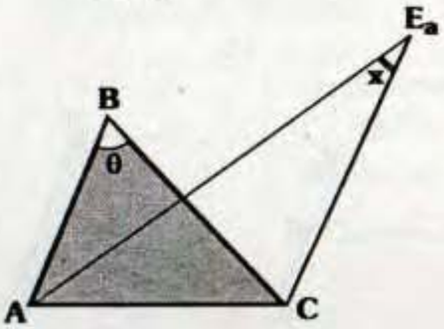


"Q" no necesariamente es un excentro del $\triangle ABC$.

6.3. TEOREMA

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado del triángulo y cuyos lados pasan por un extremo de dicho lado y el tercer vértice del triángulo es igual a la mitad de la medida del ángulo interior en el otro extremo.

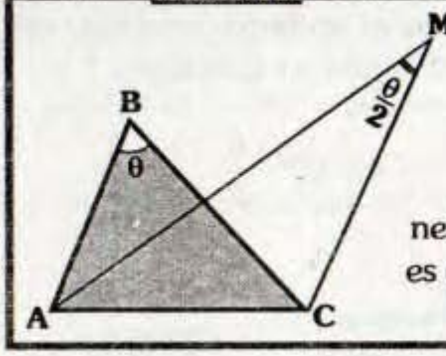
Si E_a : Excentro del ABC, relativo a $\overline{BC}$.



$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\theta}{2}}$$

La demostración es análoga a las anteriores.

Cuidado:



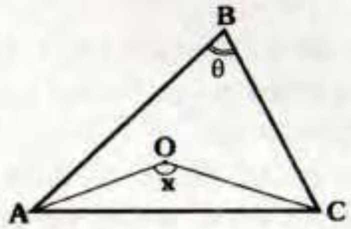
M **no** necesariamente es **excentro** del ΔABC

6.4 TEOREMA

En todo triángulo la medida de un ángulo interior agudo es la mitad de la medida del ángulo cuyo vértice es el circuncentro de dicho triángulo y los lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo mencionado.

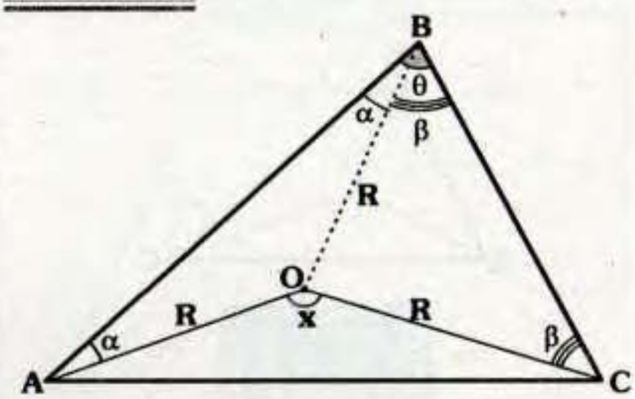
Caso 1

Si O: Circuncentro del ABC.



$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{x}{2}}$$

Demostración:



- Trazamos $\overline{OB}$.
- Como O es circuncentro.

  $\Rightarrow$ AO=BO=CO

  $\Rightarrow$ ΔAOB y ΔBOC son isósceles

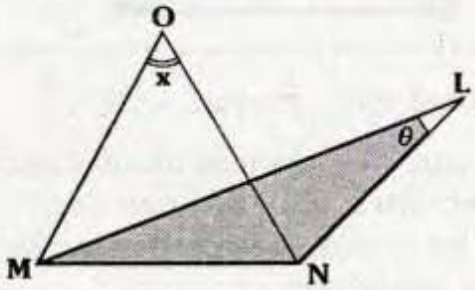
- Por propiedad $\measuredangle$: $\quad x = \alpha + \beta + \theta$ (+)
- En "B": $\quad \alpha + \beta = \theta$

  $\Rightarrow \quad x = 2\theta$

$$\therefore \quad x = 2\theta$$

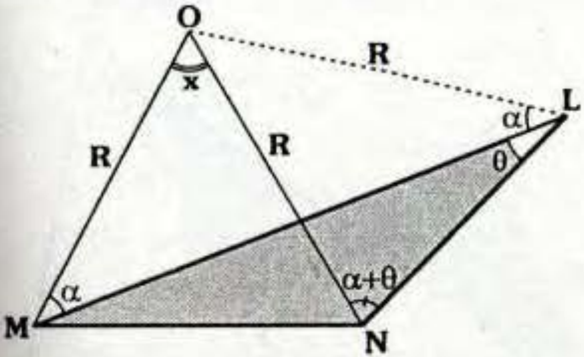
Caso 2

Si O: Circuncentro del ΔMNL .



$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{x}{2}}$$

Demostración:



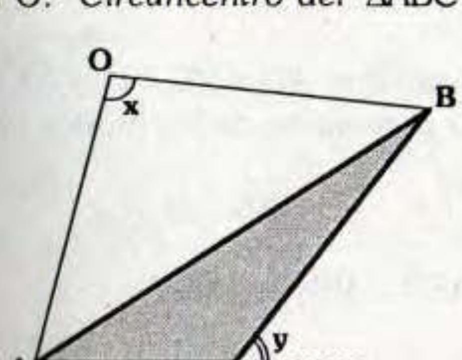
- Trazamos $\overline{OL}$.
- ΔMLO, ΔMNO y ΔLNO son isósceles.

  $\Rightarrow m\measuredangle ONL = m\measuredangle ONL = \alpha + \theta$
- En $\bowtie$: $x + \alpha = \alpha + 2\theta$

$$\therefore\ \theta = \frac{x}{2}$$

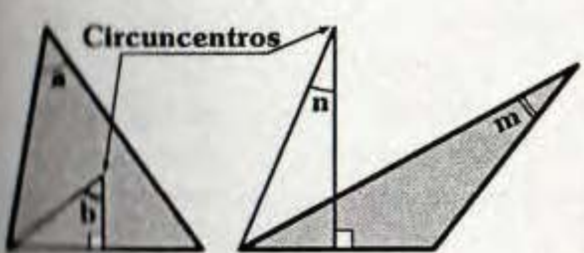
Observación

- *Si O: Circuncentro del ΔABC.*



$$\Rightarrow \boxed{x = 2y}$$

- *También se deduce :*



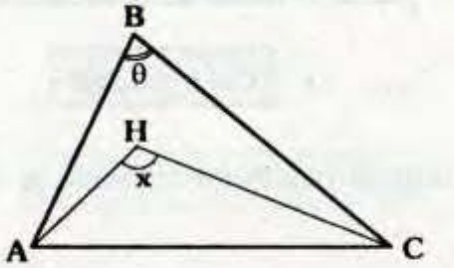
$a = b$ $\qquad$ $m = n$

6.5. TEOREMA

En todo triángulo un ángulo interior y el ángulo cuyo vértice es el ortocentro de dicho triángulo y sus lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo interior mencionado son suplementarios.

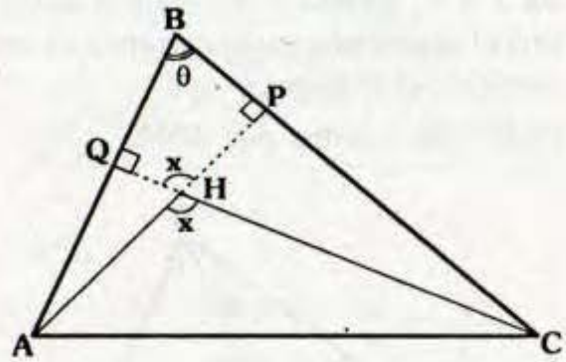
Caso 1

Si H: Ortocentro del ABC :



$$\Rightarrow \boxed{x + \theta = 180°}$$

Demostración:



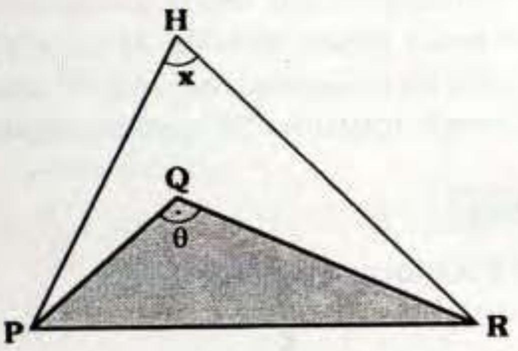
- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ son alturas.
- En $\square$QBPH:

$$x + \theta + 180° = 360°$$

$$\therefore\ x + \theta = 180°$$

Caso 2

Si, H : Ortocentro del ΔPQR



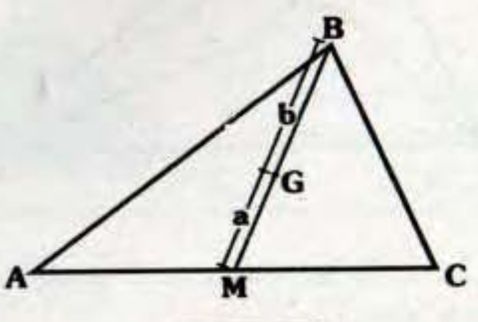
$$\Rightarrow \boxed{x+\theta=180^\circ}$$

La demostración es análoga a la anterior.

6.6. TEOREMA

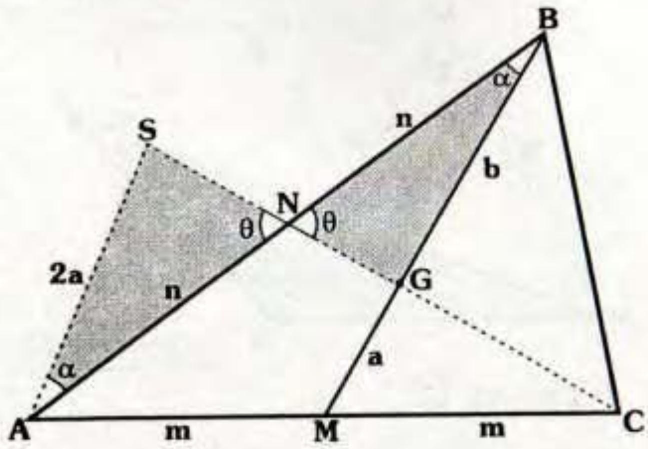
En todo triángulo el baricentro divide a la mediana en dos segmentos cuyas longitudes están en la razón de 1 a 2, siendo el de mayor longitud el segmento cuyo extremo es un vértice del triángulo.

Si G: Baricentro del ΔABC



$$\Rightarrow \boxed{b=2a}$$

Demostración



- Trazamos las medianas $\overline{CN}$ y $\overline{BM}$, las cuales pasan por el baricentro G.

$$\Rightarrow AN=NB=n \quad \text{y}$$

$$AM=MC=m$$

- Luego prolongamos $\overline{CN}$ hasta S, tal que $\overline{AS}/\!/\overline{MG}$.

- Puesto que $AM=MC=m$ y $\overline{MG}/\!/\overline{AS}$, por el teorema de los puntos medios:

$$AS=2a$$

- $\Delta ASN \cong \Delta BNG$ A.L.A.

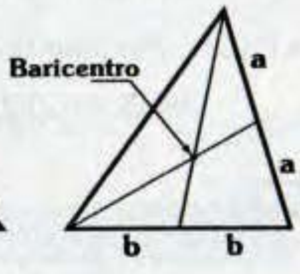
$$\therefore \; b=2a$$

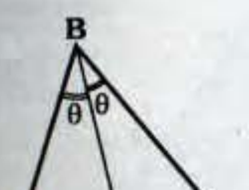
7. CRITERIOS PARA INDENTIFICAR LOS PUNTOS NOTABLES

7.1 CRITERIO PRINCIPAL

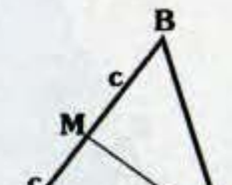
Cuando se quiere ubicar o reconocer un punto notable por lo general bastara trazar dos líneas de la misma característica (ya sean por ejemplo dos bisectrices, dos medianas, dos alturas, etc.) o trazar solo una de ellas y el punto al que hacemos referencia se encontrará sobre dicha línea.

En adelante al trazar dos líneas de la misma especie el punto de intersección será un punto notable (por ejemplo la intersección de dos bisectrices interiores es el incentro).



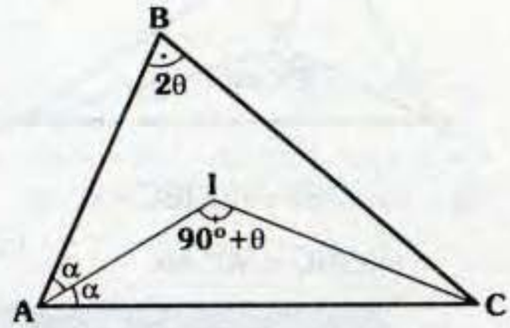


En $\overline{BD}$ se encuentra el incentro



En $\overline{CM}$ se encuentra el baricentro

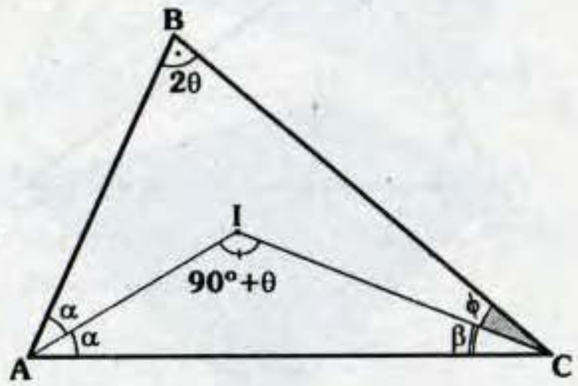
7.2



$$\text{Si}: m\measuredangle AIC = 90° + \frac{m\measuredangle ABC}{2} = 90° + \theta$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{I: Incentro del } \triangle ABC}$

Demostración:



- $\triangle AIC$:

$$\alpha + 90° + \theta + \beta = 180°$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \theta + \beta = 90° \qquad \ldots(\text{I})$$

- ABCI:

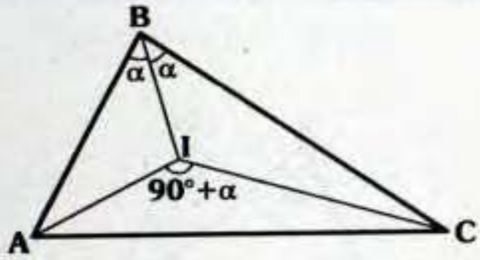
$$90° + \theta = \alpha + 2\theta + \phi$$

$$\Rightarrow \quad 90° = \alpha + \theta + \phi \qquad \ldots(\text{II})$$

- De (I) y (II):

$\beta = \phi$, con lo cual $\overrightarrow{CI}$ es bisectriz, por lo tanto del criterio principal, se deduce que I es incentro del ABC.

7.3



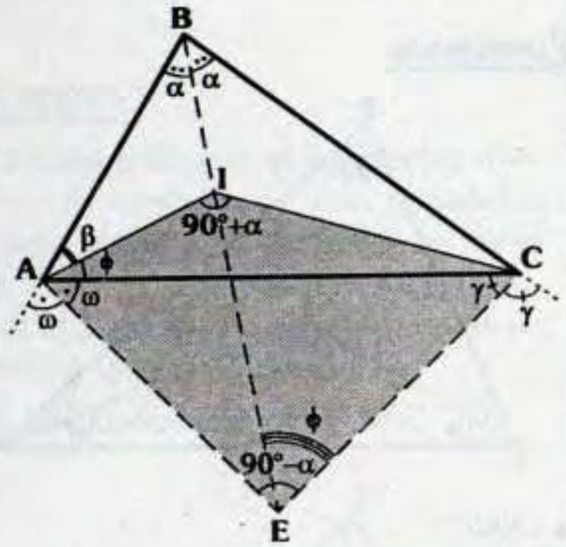
Si : $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \alpha$ y

$m\measuredangle AIC = 90° + \alpha$

$\Rightarrow$ **I: Incentro del ΔABC**

Demostración:

Método 1



- Se prolonga $\overline{BI}$ hasta el excentro E del ΔABC.
- Luego trazamos $\overline{EA}$ y $\overline{EC}$.
- Por el teorema 6.2, en ΔABC :

$$m\measuredangle AEC = 90° - \alpha$$

- Debido a que:

$$m\measuredangle AIC + m\measuredangle AEC = 180°$$

El $\triangle AICE$ es inscriptible:

$\Rightarrow$ $m\measuredangle IEC = m\measuredangle IAC = \phi$

- ΔABC : Por el teorema 6.3

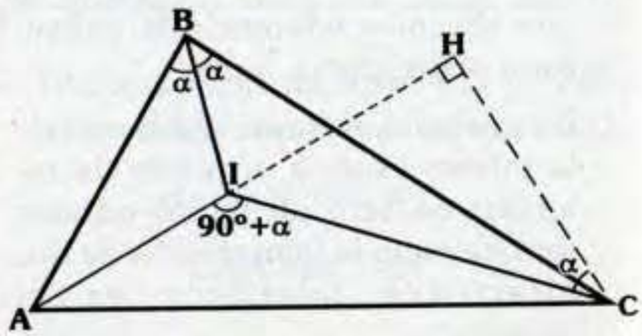
$$\Rightarrow \frac{\beta + \phi}{2} = \phi \Rightarrow \beta = \phi$$

- $\overrightarrow{AI}$: Bisectriz interior ΔABC

$\therefore$ I es incentro del ΔABC

Método 2

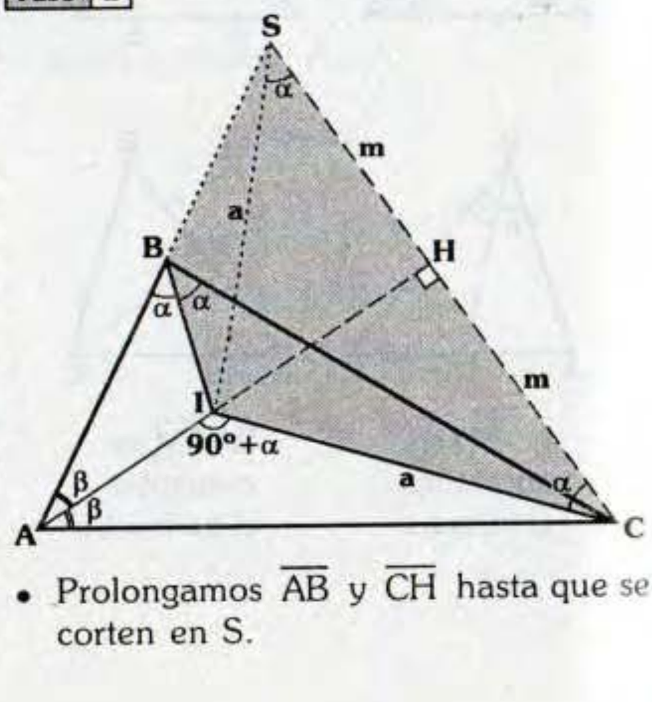
Paso 1



- Prolongamos $\overline{AI}$ hasta H, tal que $m\measuredangle IHC = 90°$.
- $\triangle IHC$: Por ángulo exterior

$\Rightarrow$ $m\measuredangle HCI = \alpha$

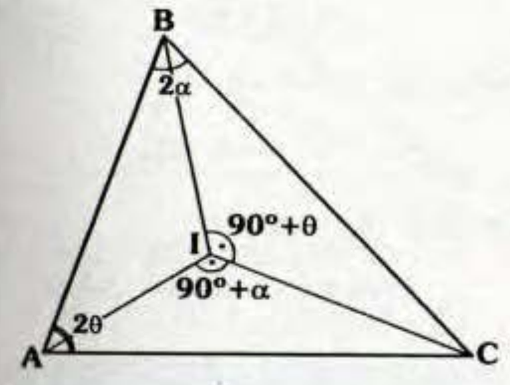
Paso 2



- Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CH}$ hasta que se corten en S.

- Dado que: $m\measuredangle ABI = m\measuredangle ICS = \alpha$
  el ⌂BSCI es inscriptible
  $\Rightarrow \; m\measuredangle IBC = m\measuredangle ISC = \alpha$
- Como $m\measuredangle ISC = m\measuredangle ICS = \alpha$ el ΔISC es isósceles $\Rightarrow \; SH = HC = m$
- Con lo cual el ΔASC es isósceles
  $\Rightarrow \; m\measuredangle SAH = m\measuredangle CAH = \beta$
  $\therefore$ I es incentro del ΔABC

7.4



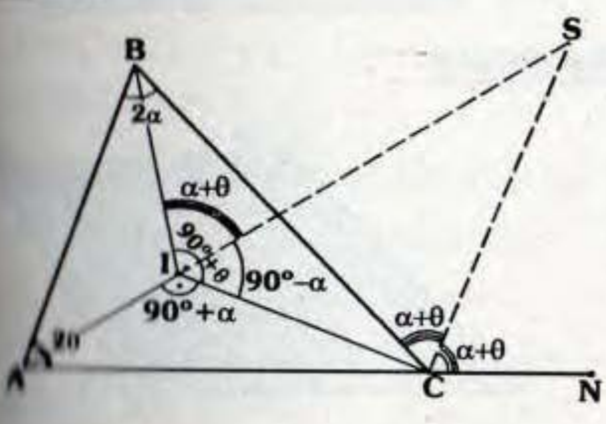
Si : $m\measuredangle AIC = 90° + \dfrac{m\measuredangle ABC}{2} = 90° + \alpha$

y $m\measuredangle BIC = 90° + \dfrac{m\measuredangle BAC}{2} = 90° + \theta$

$\Rightarrow$ **I: Incentro del ΔABC**

Demostración:

Paso 1



- Prolongamos $\overline{AI}$ y trazamos la bisectriz exterior $\overline{CS}$:

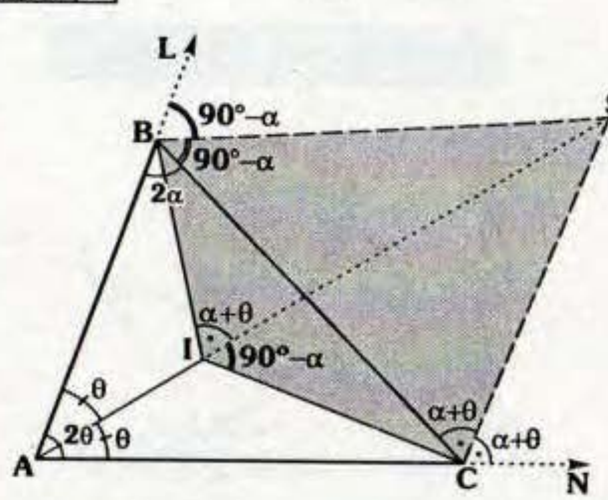
$$m\measuredangle BCS = m\measuredangle SCN = \alpha + \theta$$

- En "I":

$$m\measuredangle SIC = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$$

$$m\measuredangle BIS = 90° + \theta - (90° - \alpha) = \alpha + \theta$$

Paso 2



- Trazamos $\overline{BS}$, debido a que:
  $m\measuredangle BIS = m\measuredangle BCS = \alpha + \theta \;\Rightarrow$ ⌂BICS es inscriptible.

$$\Rightarrow \; m\measuredangle SIC = m\measuredangle SBC = 90° - \alpha$$

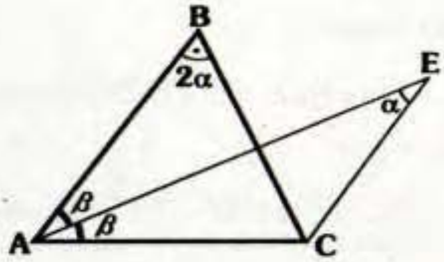
- En "B": $m\measuredangle LBS = 90° - \alpha$
- Luego podemos notar que $\overline{BS}$ y $\overline{CS}$ son bisectrices exteriores para el ΔABC, por el criterio principal $\overline{AS}$ es bisectriz, es decir:

$$m\measuredangle BAS = m\measuredangle SAC = \theta$$

- En ΔAIB, por ángulo exterior : $m\measuredangle ABI = \alpha$, luego $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC$, es decir $\overrightarrow{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$.

$\therefore$ I: Incentro ΔABC

7.5

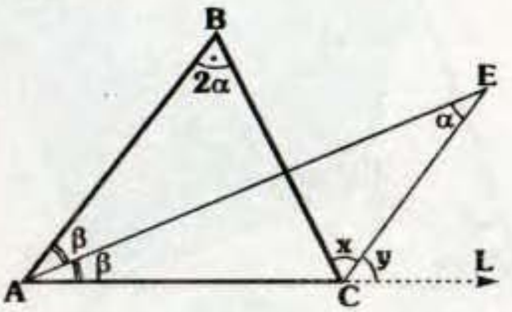


Si : $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AEC) = 2\alpha$ y

$m\measuredangle BAE = m\measuredangle CAE = \beta$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:



- ΔACE : Por ángulo exterior :

  $\Rightarrow \quad y = \alpha + \beta \qquad ...(I)$

- $\beta + 2\alpha = x + \alpha$:

  $\Rightarrow \quad x = \alpha + \beta \qquad ...(II)$

- De (I) y (II): $x = y$ es decir $\overrightarrow{CE}$ bisectriz, por el criterio principal :

  E es excentro ΔABC.

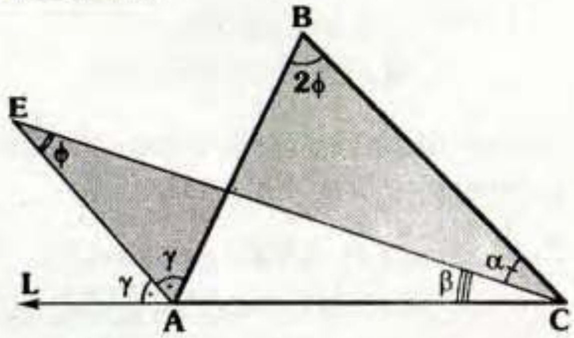
7.6

Si : $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AEC) = 2\phi$ y

$m\measuredangle BAE = m\measuredangle EAL = \gamma$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:



- ΔCAE : Por ángulo exterior:

  $\Rightarrow \quad \beta + \phi = \gamma \qquad ...(I)$

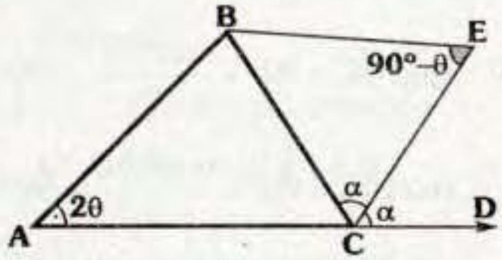
- : $\alpha + 2\phi = \gamma + \phi$

  $\Rightarrow \quad \alpha + \phi = \gamma \qquad ...(II)$

- De (I) y (II): $\alpha = \beta$

  $\therefore$ E es excentro del ΔABC.

7.7

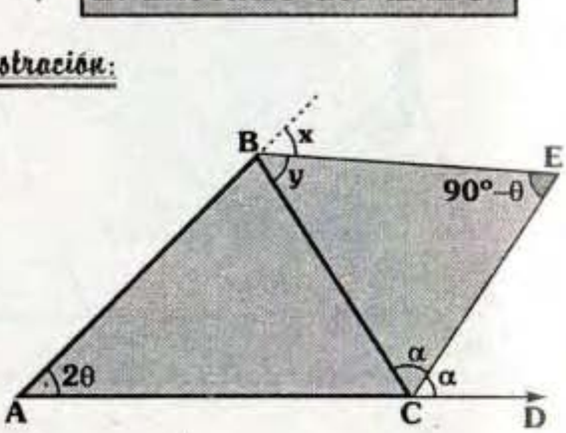


Si : $m\measuredangle BEC = 90° - \dfrac{m\measuredangle BAC}{2} = 90° - \theta$

y $m\measuredangle BCE = m\measuredangle ECD = \alpha$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:



- $\Delta BEC: \quad y + \alpha + 90° - \theta = 180°$

  $\Rightarrow \; y = 90° + \theta - \alpha \qquad ...(I)$

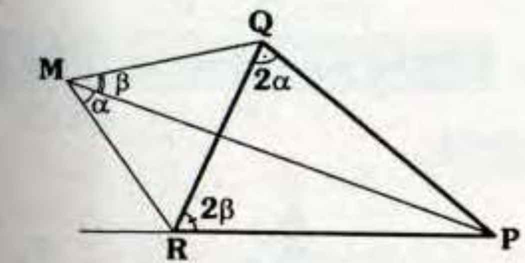
- ⏢: $\; x + \alpha = 2\theta + 90° - \theta$

  $\Rightarrow \; x = 90° + \theta - \alpha \qquad ...(II)$

- De (I) y (II): $x = y$

  $\therefore$ E es excentro del ΔABC.

7.8



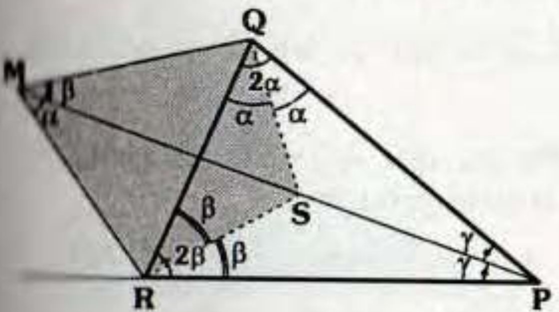
Si : $m\measuredangle PQR = 2(m\measuredangle PMR) = 2\alpha$

$m\measuredangle PRQ = 2(m\measuredangle PMQ) = 2\beta$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{M: Excentro del } \Delta PQR}$

Demostración:

Paso 1

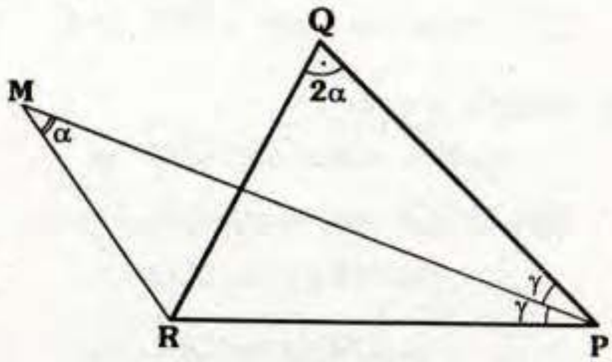


- Ubicamos S en $\overline{PM}$ tal que : $m\measuredangle RQS = \alpha$.
- Como $m\measuredangle RMP = m\measuredangle RQS = \alpha$, al trazar $\overline{RS}$ el ⌂MQSR es inscriptible.

  $\Rightarrow \; m\measuredangle QRS = m\measuredangle QMS = \beta$

- Por el criterio principal $\overline{PS}$ es bisectriz interior del ΔPQR.

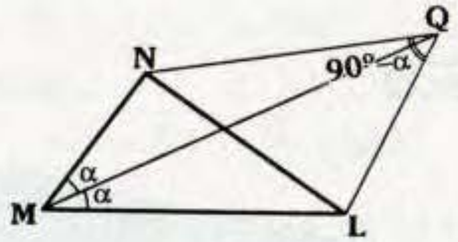
Paso 2



- Dado que: $m\measuredangle QPM = m\measuredangle MPR = \gamma$, por el criterio 7.5

  $\therefore$ M es excentro del ΔPQR.

7.9



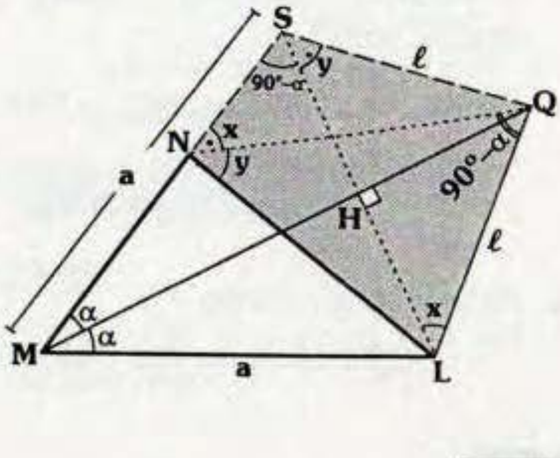
Si $\; m\measuredangle NQL = 90° - \dfrac{m\measuredangle NML}{2} = 90° - \alpha$

y $\; m\measuredangle NMQ = m\measuredangle QML = \alpha$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{Q : Excentro del } \Delta MNL}$

Demostración:

Método 1



- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{MQ}$ y prolongamos $\overline{LH}$ hasta que corte a $\overline{MN}$ en S.

- Debido a que:

  $m\measuredangle NSL = m\measuredangle NQL = 90° - \alpha$

  El $\triangle$NSQL es inscriptible:

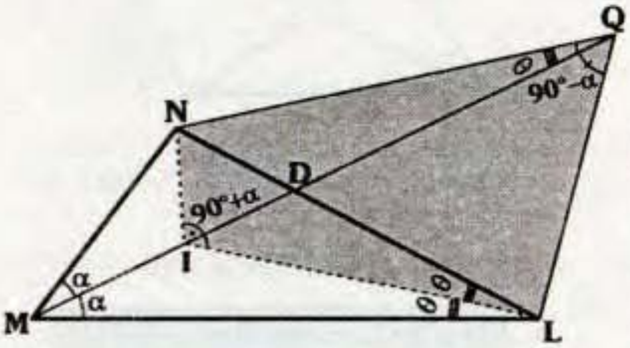
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle SNQ = m\measuredangle SLQ = x$

  $m\measuredangle LSQ = m\measuredangle QNL = y$

- En ΔMSL: $\overline{MH}$ es altura y bisectriz $\overline{MH}$ es mediana, con lo cual el ΔSQL es isósceles $\Rightarrow x = y$

  $\therefore$ Q es excentro del ΔMNL.

Método 2



- Por el criterio principal sabemos que el incentro I del ΔMNL se encuentra en $\overline{MD}$.

- En ΔMNL: $m\measuredangle MLI = m\measuredangle ILN = \theta$ y $m\measuredangle NIL = 90° + \alpha$

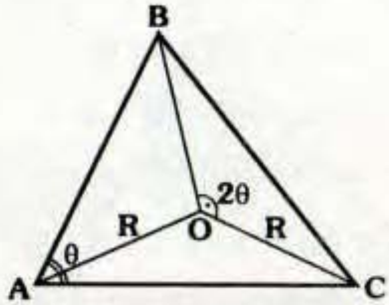
- Como $m\measuredangle NIL + m\measuredangle NQL = 180°$ el $\triangle$NILQ es inscriptible.

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle ILN = m\measuredangle IQN = \theta$

- Aplicando el criterio 7.5.

  $\therefore$ Q es excentro del ΔMNL.

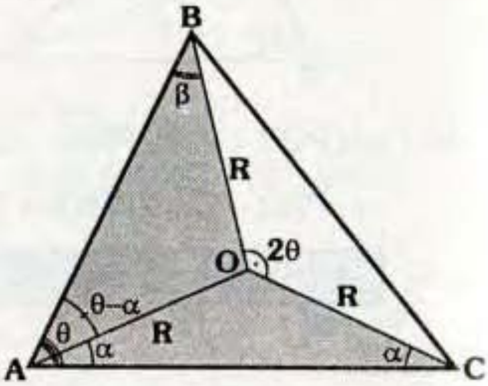
7.10



Si : $m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAC) = 2\theta$ y $AO = OC = R$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del ΔABC**

Demostración:



- $\triangle \; \alpha + \beta + \theta = 2\theta \;\Rightarrow\; \beta = \theta - \alpha$

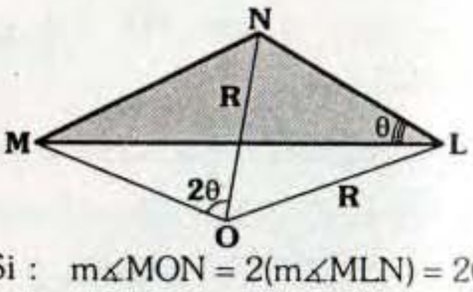
- Con lo cual el ΔAOB es isósceles

  $\Rightarrow \; BO = R$

- Puesto que $AO = BO = CO = R$, por el criterio principal.

  $\therefore$ O es circuncentro del ΔABC.

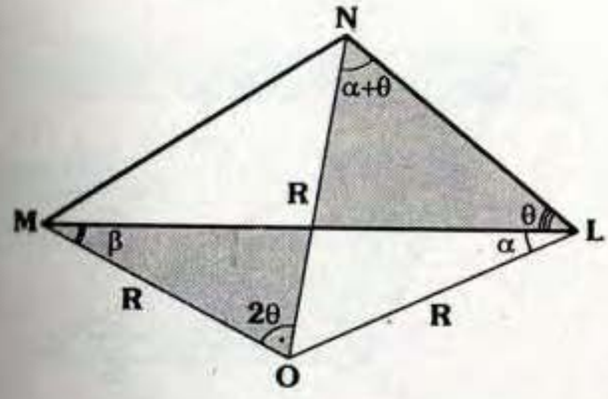
7.11



Si : $m\measuredangle MON = 2(m\measuredangle MLN) = 2\theta$ y $ON = OL = R$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del ΔMNL**

Demostración:



- ΔNOL : Isósceles

$$\Rightarrow\ m\measuredangle ONL = m\measuredangle OLN = \alpha+\theta$$

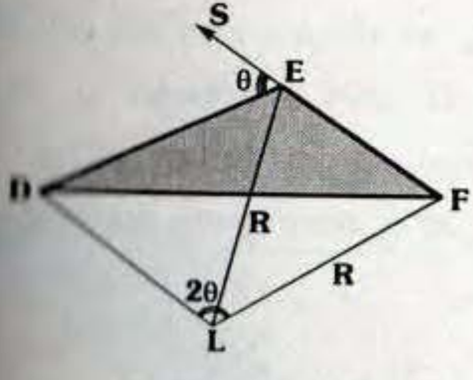
- : $\beta + 2\theta = \alpha + \theta + \theta \Rightarrow \beta = \alpha$
- Con lo cual el ΔMOL es isósceles.

$$\Rightarrow\ MO = R$$

- Ya que MO = NO = LO = R, podemos asegurar.

$\therefore$ O es circuncentro del ΔMNL .

7.12

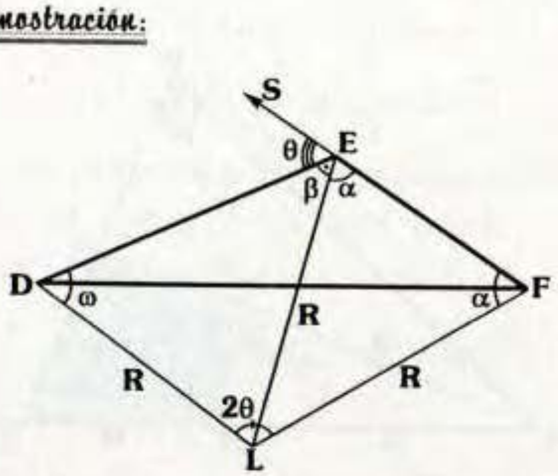


Si : $m\measuredangle DLF = 2(m\measuredangle DES) = 2\theta$ y

LE = LF = R

$\Rightarrow$ **L: Circuncentro del ΔDEF**

Demostración:



- Debido a que EL = LF = R el Δ LFE es isósceles.

$$\Rightarrow\ m\measuredangle LEF = m\measuredangle LFE = \alpha$$

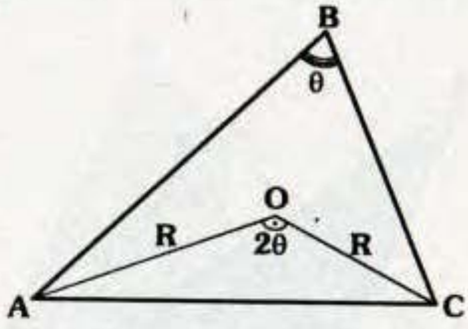
- En "S": $\alpha+\beta+\theta = 180°$ ...(I)
- ⏢DEFL:

$$\omega+\alpha+\beta+\alpha+2\theta = 360° \quad ...(II)$$

- De (I) y (II): $\beta = \omega$, con lo cual DL = R.

$\therefore$ L es circuncentro del ΔDEF.

7.13



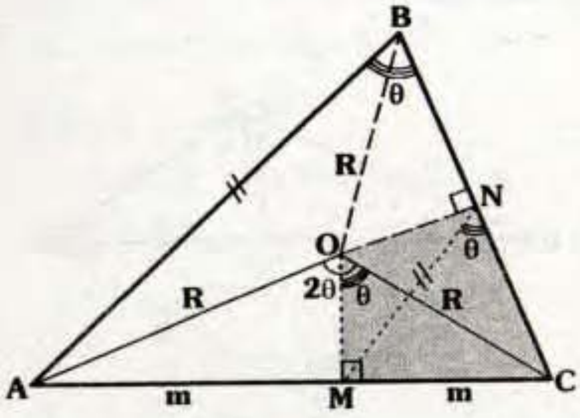
Si : $m\measuredangle AOC = 2(m\measuredangle ABC) = 2\theta$ y

AO = OC = R

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del ΔABC**

Demostración

- Trazamos $\overline{OB}$ y la altura $\overline{OM}$ del Δ isósceles AOC.



$\Rightarrow AM = MC = m$ y $m\measuredangle MOC = \theta$

- Luego al trazar la altura ON del ΔBOC, nos damos cuenta que el ⏢OMCN es inscriptible.

  $\Rightarrow \; m\measuredangle MOC = m\measuredangle MNC = \theta$

- Como: $AM = MC = m$ y

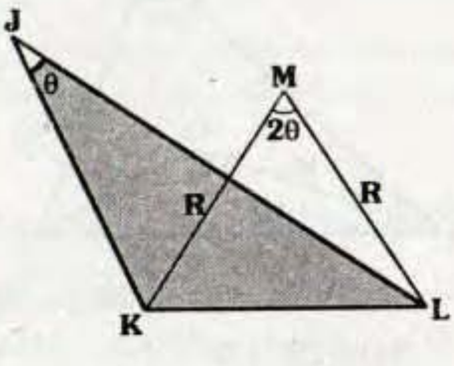
  $\overline{MN} // \overline{AB} \; \Rightarrow \; BN = NC$

- Por lo cual el ΔBOC es isósceles:

  $\Rightarrow \; OB = R$

  $\therefore$ O es circuncentro del ΔABC.

7.14

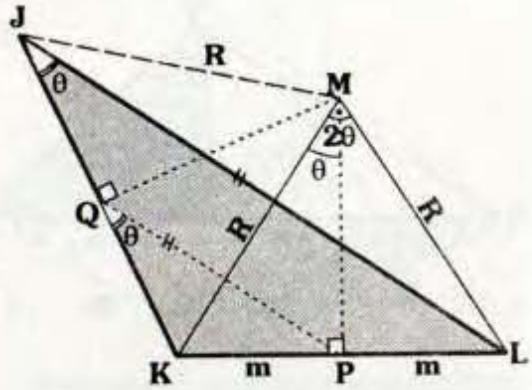


Si : $m\measuredangle KML = 2(m\measuredangle KJL) = 2\theta$ y

$KM = ML = R$

$\Rightarrow$ **M: Circuncentro del ΔJKL**

Demostración:



- Trazamos $\overline{MJ}$ y la altura MP del Δ isósceles KML.

- Con lo cual:

  $m\measuredangle KMP = \theta$ y $KP = PL = m$

- Luego al trazar la altura MQ del ΔJKM, con lo cual el ⏢KQMP es inscriptible.

  $\Rightarrow \; m\measuredangle KQP = m\measuredangle KMP = \theta$

- Dado que $KP = PL = m$ y $\overline{QP} // \overline{JL}$

  $\Rightarrow \; JQ = QK$ (por el teorema de los puntos medios).

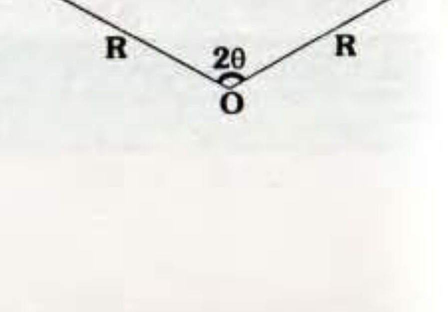
- $\overline{MQ}$ es altura y mediana del ΔJKM

  $\Rightarrow$ el ΔJKM es isósceles $\Rightarrow \; JM = R$.

- Puesto que: $JM = KM = LM = R$

  $\therefore$ M es circuncentro del ΔJKL.

7.15



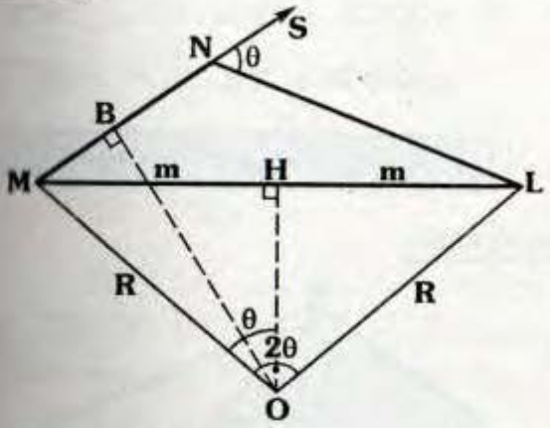
Si: $m\measuredangle MOL = 2(m\measuredangle SNL) = 2\theta$ y

$MO = OL = R$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{O: Circuncentro del } \Delta MNL}$

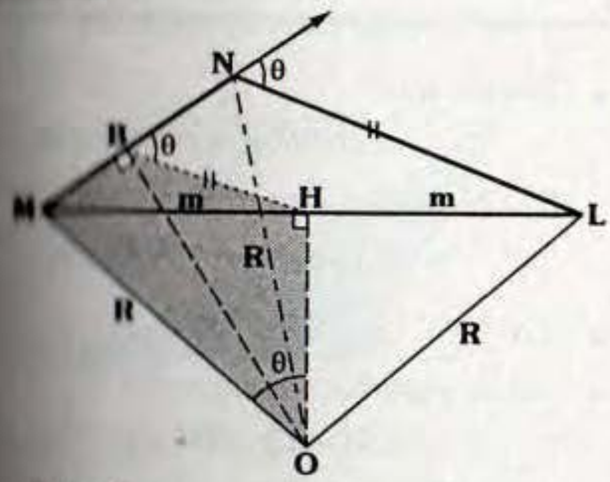
Demostración:

Paso 1



- Se traza la altura OH del Δ isósceles MOL.
- Por teorema: $MH = HL = m$ y $m\measuredangle MOH = \theta$
- Luego ubicamos el punto B en $\overline{MN}$, tal que $m\measuredangle MBO = 90°$.

Paso 2



- Debido a que:

$m\measuredangle MBO = m\measuredangle MHO = 90°$

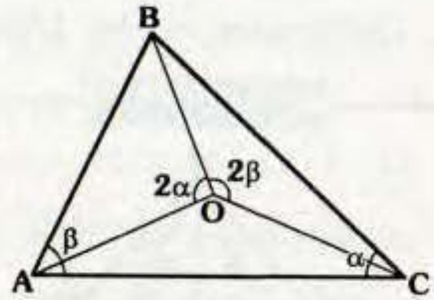
El ⌂MBHO es inscriptible.

$\Rightarrow \; m\measuredangle NBH = m\measuredangle MOH = \theta$

- Por el teorema de los puntos medios en el $\Delta MNL \Rightarrow MB = BN$, con lo cual el ΔMNO es isósceles, es decir $ON = R$.

$\therefore$ O: Circuncentro del ΔMNL .

7.16

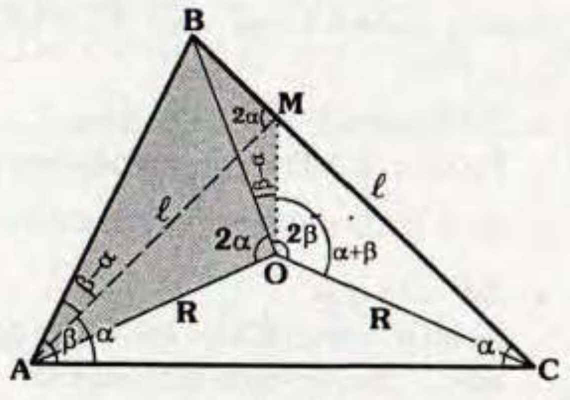


Si $m\measuredangle BOA = 2(m\measuredangle ACB) = 2\alpha$ y

$m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAC) = 2\beta$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{O: Circuncentro del } \Delta ABC}$

Demostración:



- Se ubica M en $\overline{BC}$ tal que

$AM = MC = \ell$,

con ello $m\measuredangle MAC = \alpha$ y por ángulo exterior $m\measuredangle AMB = 2\alpha$.

- Dado que:

  $m\measuredangle BMA = m\measuredangle BOA = 2\alpha$

  El $\triangle$ABMO es inscriptible.

  $\Rightarrow\ m\measuredangle BOM = m\measuredangle BAM = \beta - \alpha$

- En "O": $m\measuredangle AOM = m\measuredangle MOC = \alpha + \beta$

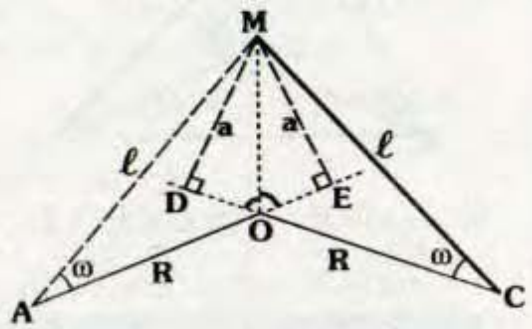
- De la observación posterior:

  $AO = OC = R$

- Como $AO = OB = OC$

  $\therefore$ O: Circuncentro del ΔABC.

Observación



Si:

$m\measuredangle AOM = m\measuredangle MOC = \alpha + \beta$ y

$AM = MC = \ell$,

vamos a demostrar que $AO = OC$, *para ello:*

- *Prolongamos* $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ *hasta* E y D, *tal que* $\overline{MD}$ y $\overline{ME}$ *perpendiculares a* $\overrightarrow{CO}$ y $\overrightarrow{AO}$ *respectivamente.*

- *Se nota que :*

  $m\measuredangle MOE = m\measuredangle MOD = 180° - (\alpha + \beta)$

  por el teorema de la bisectriz.

  $\Rightarrow\ MD = ME = a$

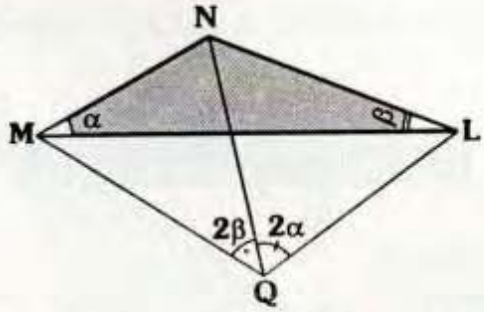
- $\Delta MDC \cong \Delta MAE$

  $\Rightarrow\ m\measuredangle MAE = m\measuredangle MCD = \omega$

- $\Delta AMO \cong \Delta MOC$ (LAL)

  $\therefore\ AO = OC = R$

7.17

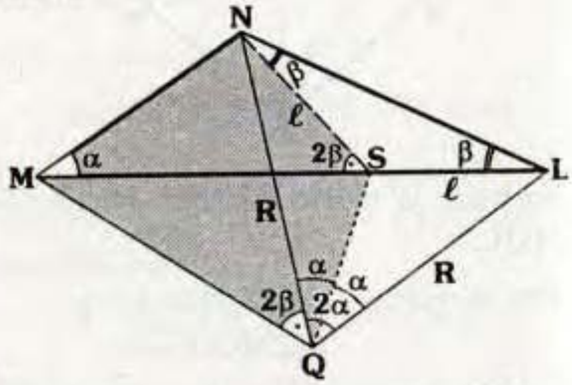


Si: $m\measuredangle NQL = 2(m\measuredangle NML) = 2\alpha$ y

$m\measuredangle MON = 2(m\measuredangle NLM) = 2\beta$

$\Rightarrow$ **Q: Circuncentro del ΔMNL**

Demostración:



- Se ubica el punto S en $\overline{ML}$, tal que $NS = SL = \ell$

  $\Rightarrow\ m\measuredangle SNL = m\measuredangle SLN = \beta$

  y por ángulo exterior $m\measuredangle NSM = 2\beta$.

- Puesto que:

  $m\measuredangle NSM = m\measuredangle NQM = 2\beta$

  El $\triangle$MNSQ es inscriptible.

  $\Rightarrow\ m\measuredangle NQS = m\measuredangle NMS = \alpha$

- En "Q": $m\measuredangle SQL = \alpha$

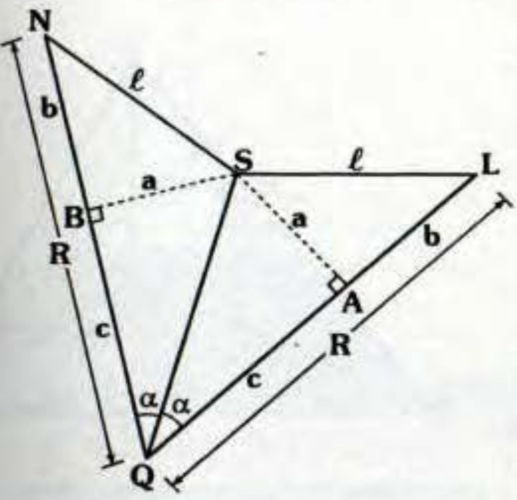
- De la observación siguiente :

  $NQ = QL = R$

- Por el criterio 7.14 se concluye.

  $\therefore$ Q: Circuncentro del ΔMNL

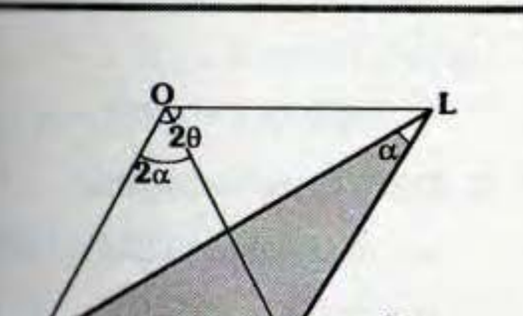
Observación



Se sabe que $m\measuredangle NQS = m\measuredangle SQL = \alpha$ *y* $NS = SL = \ell$, *con lo cual demostraremos que* $NQ = QL$, *para ello.*

- *Trazamos* $\overline{SB}$ *y* $\overline{SA}$ *perpendiculares a* $\overline{NQ}$ *y* $\overline{QL}$.
- *Por el teorema de la bisectriz* $\Rightarrow BS = SA = a$ y $BQ = QA = c$.
- $\Delta NBS \cong \Delta SAL$
  $\Rightarrow NB = AL = b$
- *Con lo cual se nota:* $NQ = QL = R$

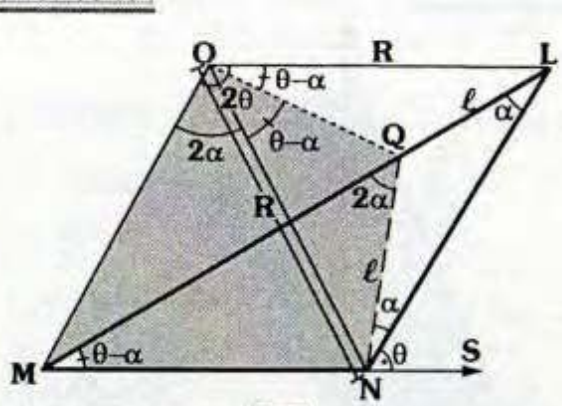
7.18



Si $m\measuredangle MON = 2(\measuredangle MLN) = 2\alpha$ y
$m\measuredangle MOL = 2(m\measuredangle LNS) = 2\theta$

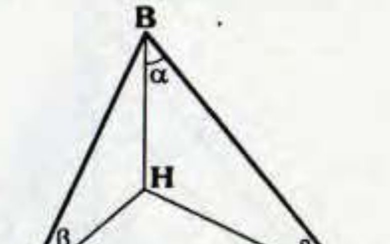
$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del ΔMNL**

Demostración:



- Se ubica Q en $\overline{ML}$, tal que:
  $NQ = QL = \ell \Rightarrow m\measuredangle QNL = \alpha$
  y $m\measuredangle NQM = 2\alpha$
- Como $m\measuredangle MON = m\measuredangle MQN = 2\alpha$
  $\Rightarrow$ ⏢MOQN es inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle QON = m\measuredangle QMN = \theta - \alpha$
- En "O": $m\measuredangle QOL = \theta - \alpha$
- Dado que:
  $m\measuredangle NOQ = m\measuredangle QOL = \theta - \alpha$
  y $NQ = QL = \ell$
  de la observación del criterio 7.16 tenemos que $ON = OL = R$.
- Del criterio 7.11 se concluye:
  $\therefore$ O: circuncentro de ΔMNL.

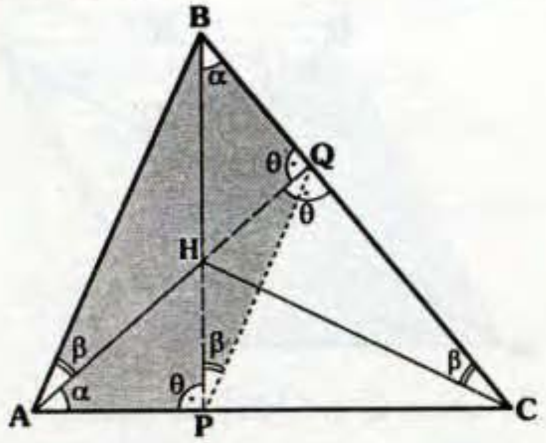
7.19



Si : $m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \beta$ y
$m\measuredangle HBC = m\measuredangle HAC = \alpha$

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del ΔABC**

Demostración:



- Prolongamos $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$ hasta que corten a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en Q y P.
- Debido a que:

  $m\measuredangle QAP = m\measuredangle QBP = \alpha$

  El ⌂ABQP es inscriptible:

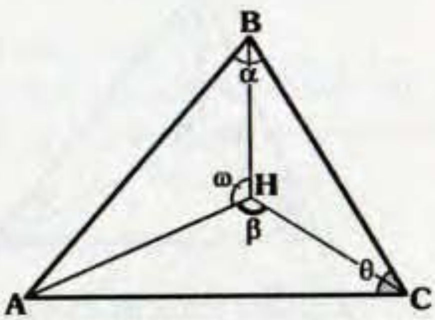
  $\Rightarrow\ m\measuredangle BAQ = m\measuredangle BPQ = \beta$ y

  $m\measuredangle APB = m\measuredangle AQB = \theta$
- Como $m\measuredangle HPQ = m\measuredangle HCQ = \beta \Rightarrow$ el ⌂PHQC es inscriptible

  $\Rightarrow\ m\measuredangle HPA = m\measuredangle HQC = \theta$
- En "Q": $\theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$, con lo cual $\overline{AQ}$ y $\overline{BP}$ son alturas del ΔABC, entonces se concluye.

  $\therefore$ H: Ortocentro del ΔABC.

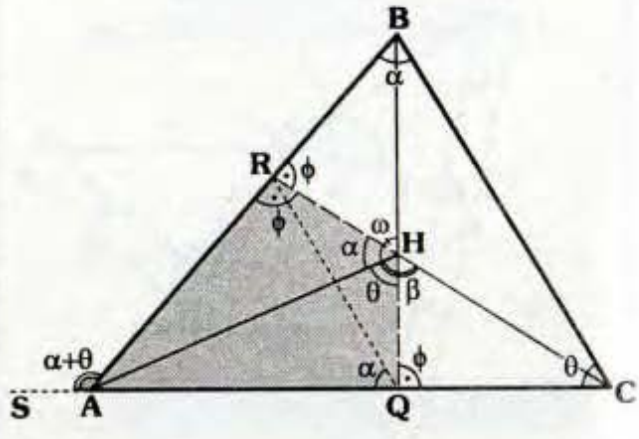
7.20



Si : $\alpha + \beta = \theta + \omega = 180^\circ$

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del ΔABC**

Demostración



- Prolongamos $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ hasta que corten a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en Q y R.
- En "H", de las condiciones :

  $m\measuredangle RHA = \alpha$ y $m\measuredangle AHQ = \theta$.
- Puesto que:

  $m\measuredangle RAS = m\measuredangle RHQ = \alpha + \theta$

  El ⌂ARHQ es inscriptible:

  $\Rightarrow\ m\measuredangle ARH = m\measuredangle HQC = \phi$ y

  $m\measuredangle RQA = m\measuredangle RHA = \alpha$
- Luego ya que:

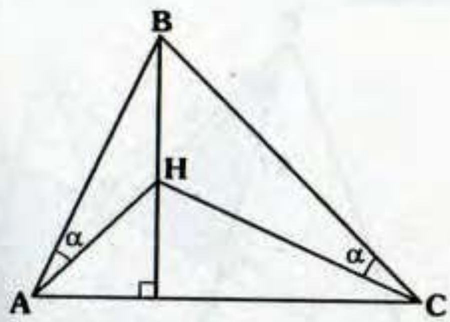
  $m\measuredangle RQA = m\measuredangle RBC = \alpha$,

  El ⌂RBCQ es inscriptible:

  $\Rightarrow\ m\measuredangle BRC = m\measuredangle BQC = \phi$
- En "R": $\phi + \phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ$, con lo cual $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ son alturas del ΔABC.

  $\therefore$ H: Ortocentro del ΔABC.

7.21



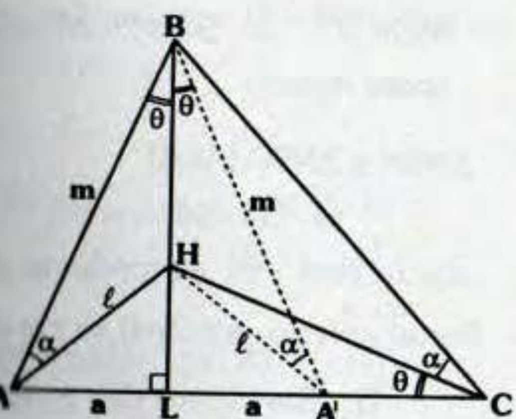
Si ΔABC:

Escaleno, $\overline{BL}$ es altura del ΔABC

y $m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \alpha$.

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del ΔABC**

Demostración



- Se ubica A' en $\overline{LC}$, tal que:

  $AL = A'L = a$

- Con lo cual: $AH = HA' = \ell$

  y $AB = A'B = m$.

- $\Delta ABH \cong \Delta A'BH$ (LLL)

  $\Rightarrow m\measuredangle BA'H = m\measuredangle BAH = \alpha$ y

  $m\measuredangle ABH = m\measuredangle A'BH = \theta$

- Ya que: $m\measuredangle HA'B = m\measuredangle HCB = \alpha$

  El ⌂BCA'H es inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle HBA' = m\measuredangle HCA' = \theta$

- Luego por el criterio 7.19.

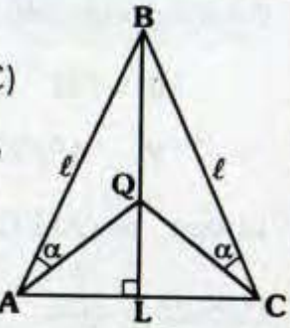
  $\therefore$ H: Ortocentro del ΔABC.

Cuidado:

Si ΔABC:

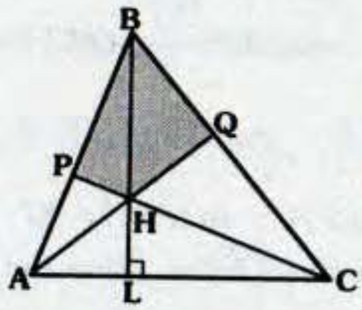
Isósceles $(AB = BC)$

Para todo punto de la altura BL *del* ΔABC, *se cumple que:*



$m\measuredangle BAQ = m\measuredangle BCQ = \alpha$, *por lo tanto* ***Q no*** *es* ***ortocentro***.

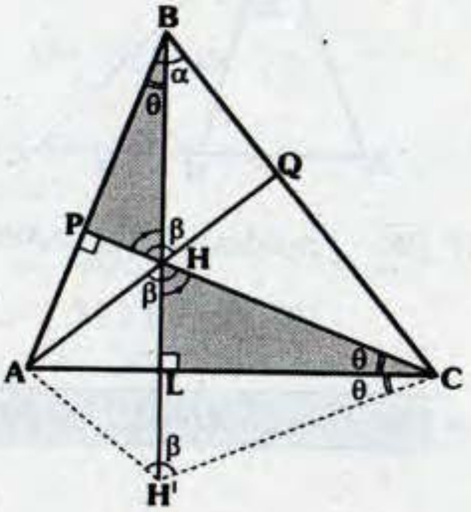
7.22



Si $\overline{BL}$ es altura del ΔABC y el ⌂PBQH es inscriptible.

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del ΔABC**

Demostración:



- Como el $\triangle$PBQH es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=180^{\circ}$$

- Prolongamos $\overline{BL}$ hasta H' tal que:

$$HL=LH' \;\Rightarrow\; m\measuredangle LCH'=\theta$$

$$y \quad \Delta AHC \cong \Delta AH'C$$

Luego: $m\measuredangle AH'C=\beta$

- Debido a que:

$$m\measuredangle ABC+m\measuredangle AH'C=180^{\circ}$$

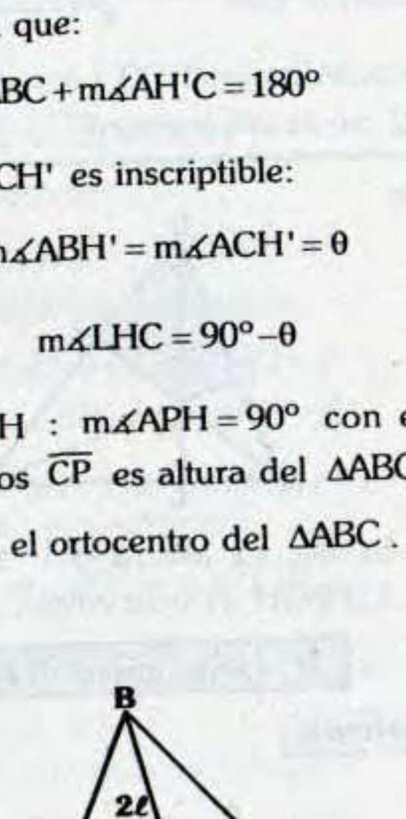
El $\triangle$ABCH' es inscriptible:

$$\Rightarrow \; m\measuredangle ABH'=m\measuredangle ACH'=\theta$$

- $\triangle$HLC: $m\measuredangle LHC=90^{\circ}-\theta$
- En ΔBPH : $m\measuredangle APH=90^{\circ}$ con ello tendremos $\overline{CP}$ es altura del ΔABC.

$\therefore$ H es el ortocentro del ΔABC.

7.23

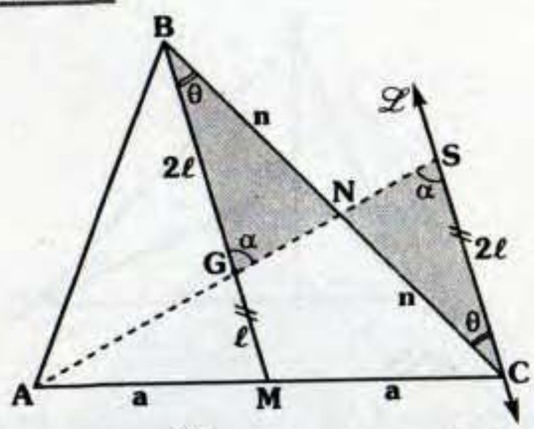


Si $\overline{BM}$: mediana del ΔABC y

$$BG=2(GL)=2\ell$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{G: Baricentro del } \Delta ABC}$

Demostración



- Trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{MG}$.
- Luego la prolongación de $\overline{AG}$ corta a $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en N y S.
- Dado que: $AM=MC=a$ y $\overline{MG}//\overline{SC} \;\Rightarrow\; SC=2(GM)=2\ell$ (*base media*).
- $\Delta BGN \cong \Delta NSC$ (ALA)

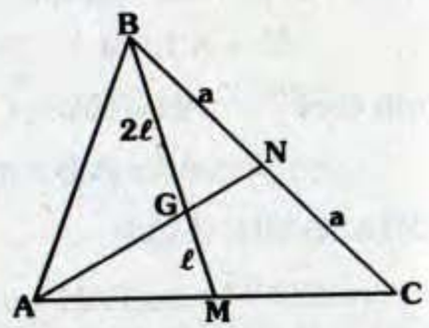
$$\Rightarrow \; BN=NC=n \;,$$

con lo cual $\overline{AN}$ es mediana.

- Por el criterio principal se concluye.

$\therefore$ G: Baricentro del ΔABC.

7.24

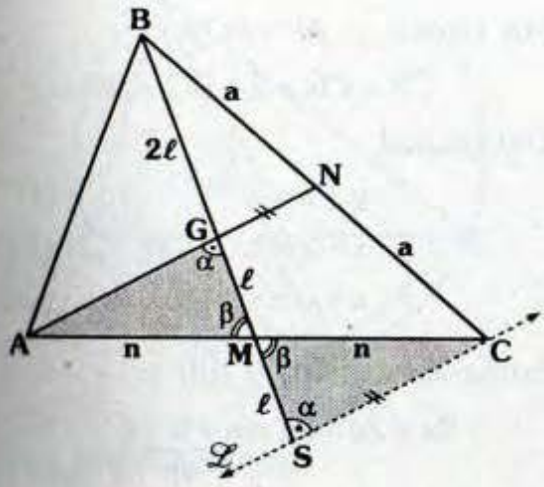


Si : $BG=2(GM)=2\ell$ y

$$BN=NC=a$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{G: Baricentro del } \Delta ABC}$

Demostración:



- Por C trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AN}$.
- Luego prolongamos $\overline{BM}$ hasta que corte a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en S.
- Puesto que:

  $BN = NC = a$ y $\overline{SC} \parallel \overline{GN}$

  $\Rightarrow BG = GS = 2\ell$.

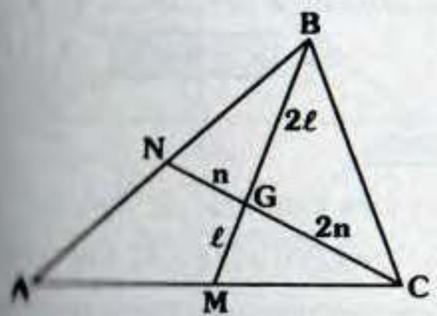
- $\Delta AGM \cong \Delta MSC$ (ALA)

  $\Rightarrow AM = MC = n$

por lo cual $\overline{BM}$ es mediana.

$\therefore$ G: Baricentro del ΔABC

[illegible]

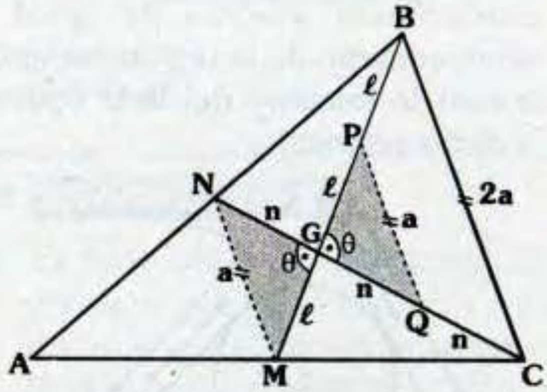


Si: $BG = 2(GM) = 2\ell$ y

$CG = 2(GN) = 2n$

$\Rightarrow$ **G: Baricentro del ΔABC**

Demostración:



- Se traza la base media $\overline{PQ}$ del ΔBGC:

  $\Rightarrow BC = 2(PQ) = 2a$

  y $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$

- $\Delta MGN \cong \Delta GPQ$ (LAL)

  $\Rightarrow MN = a$ y $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

- Como:

  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = \dfrac{BC}{2} = a$

  entonces $\overline{MN}$ es base media del ΔABC:

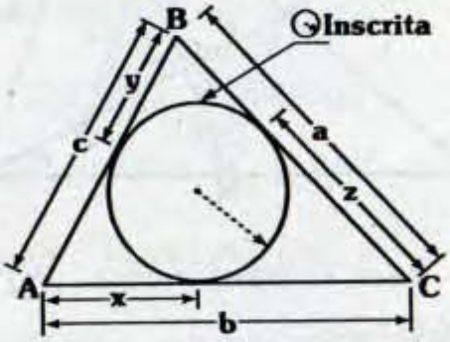
  $\Rightarrow AN = NB$ y $AM = MC$

  $\therefore$ G: Baricentro del ΔABC.

8. TEOREMAS

8.1. ASOCIADOS AL INCENTRO

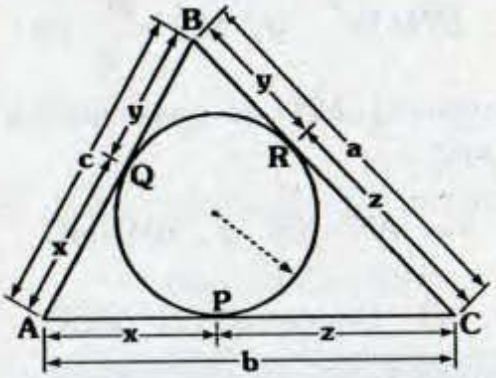
(A) En todo triángulo la longitud del segmento contenido en un lado cuyos extremos son un vértice y un punto de tangencia determinado por la circunferencia inscrita es igual al semiperimetro de la región triangular menos la longitud del lado opuesto a dicho segmento.



Se cumple: $\boxed{\begin{array}{l} x=p-a \\ y=p-b \\ z=p-c \end{array}}$

Donde : $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Demostración:



- Sean P,Q y R los puntos de tangencia.
- Por teorema: $AP=AQ=x$;

$$CP=CR=z\ ;\ BQ=BR=y$$

- Del gráfico :

$$y+z=a \quad \text{... (I)}$$
$$x+z=b \quad \text{... (II)}$$
$$x+y=c \quad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III) :

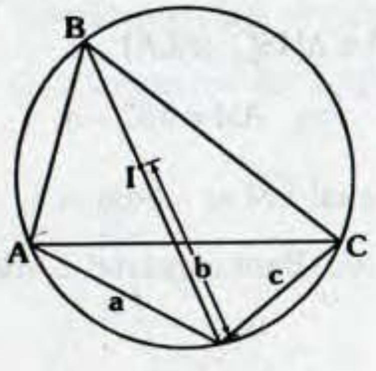
$$2x+2y+2z=\underbrace{a+b+c}_{2p}$$

$$\Rightarrow\ x+y+z=p$$

- De (I), (II) y (III) :

$$x=p-a\ ;\ y=p-b \text{ y } z=p-c$$

(B) En todo triángulo el punto de intersección entre la bisectriz de un ángulo interior y la circunferencia circunscrita equidista de los otros vértices y del incentro de dicho triángulo.



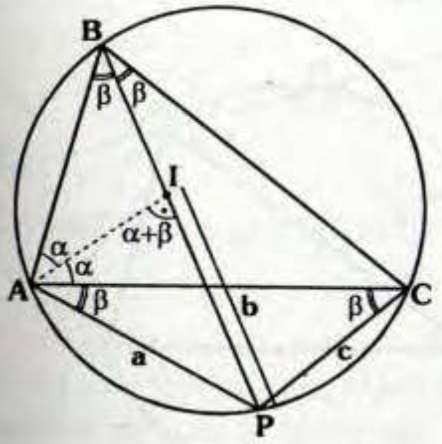
Si I: Incentro del ΔABC

$$\Rightarrow\ \boxed{a=b=c}$$

Demostración:

- Como I es incentro.

$$\Rightarrow\ m\measuredangle BAI=m\measuredangle CAI=\alpha \quad \text{y}$$
$$m\measuredangle ABI=m\measuredangle IBC=\beta$$



- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CAP = m\measuredangle ACP = \beta$$

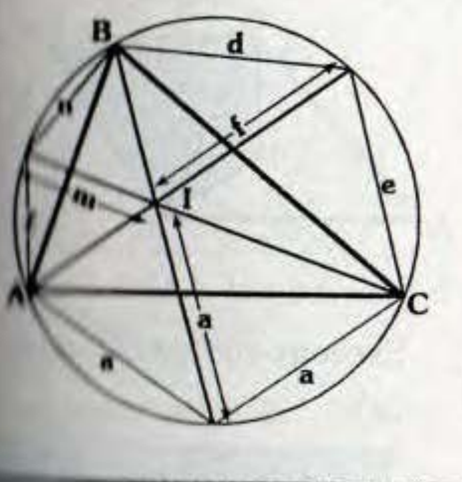
$$\Rightarrow \ \Delta APC \text{ isósceles} \Rightarrow a = c$$

- ΔABI: Por ángulo exterior $m\measuredangle AIP = \alpha + \beta$, entonces el ΔAIP es isósceles $\Rightarrow \ a = b$

$$\therefore \ a = b = c$$

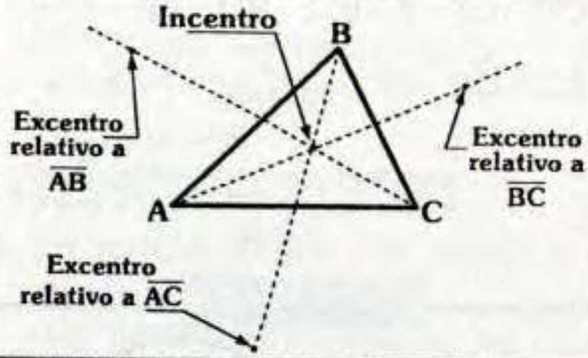
Observación

También se cumple: $m = n = \ell$ y $d = e = f$



Importante:

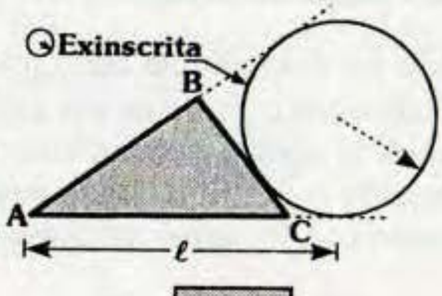
En todo triángulo un vértice, el incentro y un excentro son colineales.



8.2 ASOCIADOS AL EXCENTRO

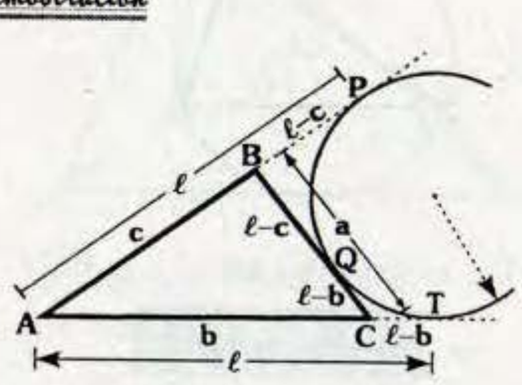
Ⓐ En todo triángulo la distancia de un vértice al punto de contacto entre la circunferencia exinscrita, relativa al lado opuesto al vértice mencionado, y la prolongación de un lado es igual al semiperímetro de la región triangular en mención.

p: semiperímetro de la región ABC.



$$\Rightarrow \ \boxed{\ell = p}$$

Demostración



- Sean los puntos de tangencia P, Q y T.
- Por teorema: $AP = AT = \ell$

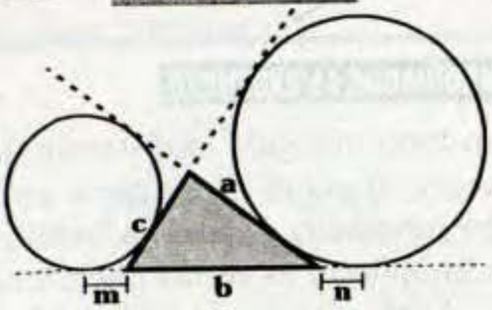
$CQ = CT = \ell - b \quad ; \quad BQ = BP = \ell - c$

- $BQ + QC = BC \Rightarrow \ell - c + \ell - b = a$

$$2\ell = \underbrace{a + b + c}_{2p}$$

$$\therefore \ \ell = p$$

Observación

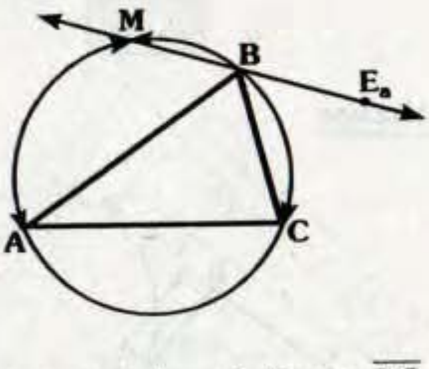


Esto ocurre por que: $b + n = p$

$b + m = p$

$\therefore \ \boxed{m = n}$

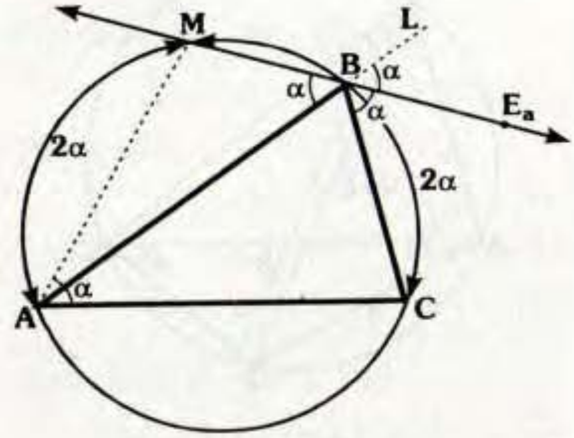
B Dado un triángulo, la recta que pasa por un vértice y uno de sus excentros biseca al arco de circunferencia circunscrita a dicho triángulo cuyos extremos son los otros vértices.



Si E_a es excentro relativo a $\overline{BC}$.

$$\Rightarrow \boxed{m\widehat{AM} = m\widehat{MBC}}$$

Demostración:



- $\overrightarrow{BE_a}$: Bisectriz del $\measuredangle LBC$

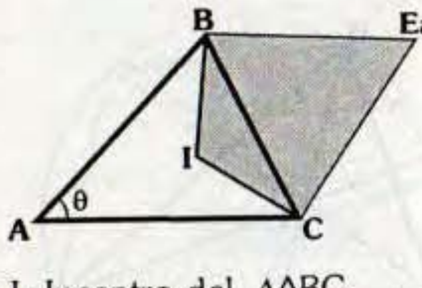
$m\measuredangle LBEa = m\measuredangle CBEa = \alpha$

- ⏢AMBC: Inscrito $\Rightarrow m\measuredangle MAC = \alpha$
- Por ángulo inscrito:

$$\therefore \ m\widehat{AM} = m\widehat{MBC} = 2\alpha$$

8.3 ASOCIADOS AL INCENTRO Y EXCENTRO

A En todo triángulo, el cuadrilátero cuyos vértices son el incentro, excentro y los extremos del lado al cual es relativo el excentro, es inscriptible.



Si I: Incentro del ΔABC

E_a : Excentro del ΔABC relativo a $\overline{BC}$.

$$\Rightarrow \boxed{⏢BICE_a : \text{ Inscriptible}}$$

Demostración

- Por teoremas básicos:

$$m\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\theta}{2};\ m\measuredangle BE_aC = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

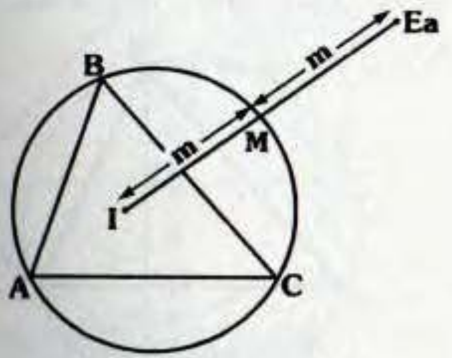
- Puesto que:

$$m\measuredangle BIC + m\measuredangle BE_aC = 180^\circ$$

$$\therefore\ \square BICE_a : \text{Inscriptible.}$$

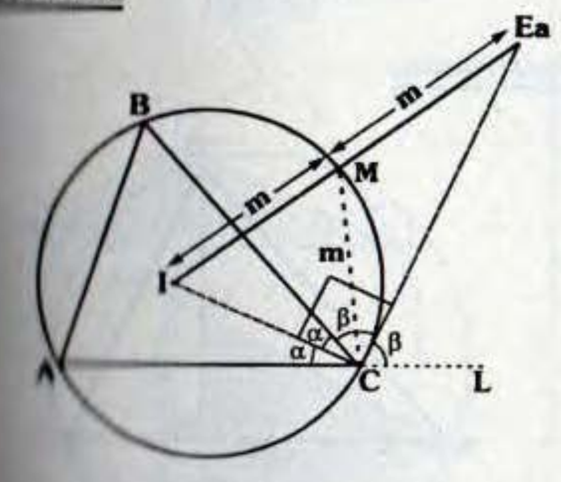
D La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento cuyos extremos son el incentro y excentro de dicho triángulo.

Si I: incentro y E_a : excentro



$$\Rightarrow \boxed{IM = ME = m}$$

Demostración:



- Por el teorema 8.1-B: $IM = MC = m$
- Como $\overline{CI}$ y $\overline{CE_a}$ son bisectrices:

$$m\measuredangle BCE_a = m\measuredangle E_aCL = \beta$$

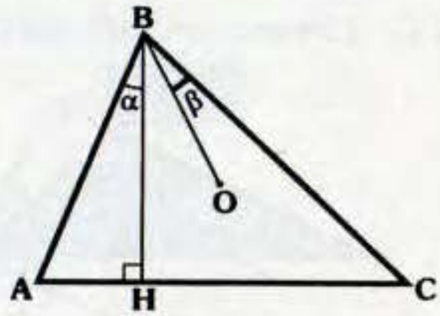
$$m\measuredangle ACI = m\measuredangle BCI = \alpha$$

- En "C": $m\measuredangle ICE_a = 90^\circ$.
- ΔICE_a : por teorema en el $\triangle$

$$\therefore\ IM = ME = m$$

8.4 ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO

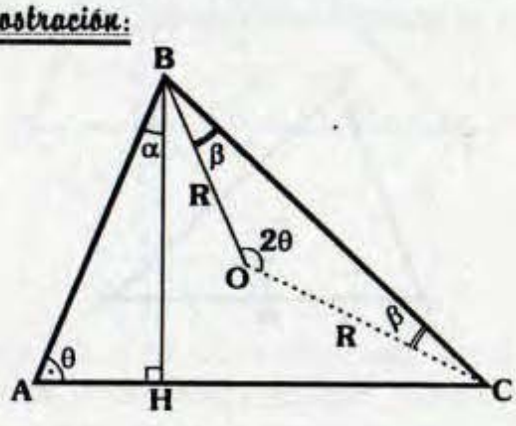
A En todo triángulo, la altura y el circunradio trazadas del mismo vértice determinan ángulos de igual medida con los lados adyacentes de dicho triángulo.



Si $\overline{BH}$ es altura del ΔABC del circuncentro O.

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

Demostración:



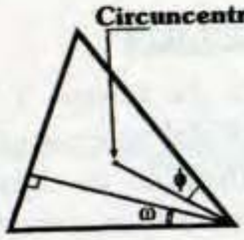
- Se sabe: $OB = OC = R$
- Por teorema:

$$m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAH) = 2\theta$$

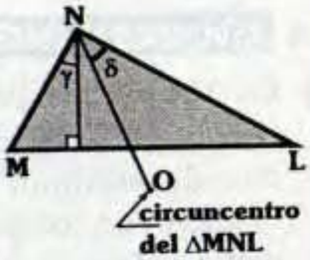
- ΔABH: $\alpha+\theta=90°$
- ΔBOC: $\beta+\beta+2\theta=180° \Rightarrow \beta+\theta=90°$

$$\therefore \quad \alpha=\beta$$

Observación

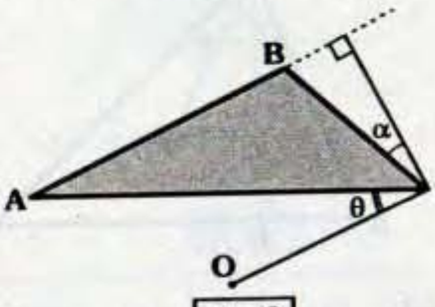


$\boxed{\omega=\phi}$



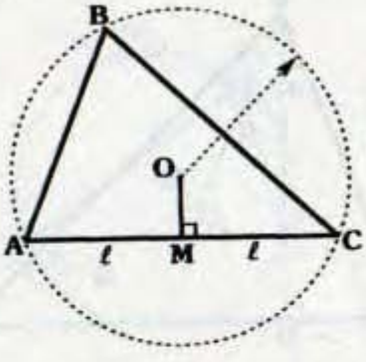
$\boxed{\gamma=\delta}$

Si O: Circuncentro del ΔABC.



$\boxed{\alpha=\theta}$

(B) La proyección ortogonal del circuncentro de un triángulo hacia un lado es el punto medio de dicho lado.



Si O: Circuncentro del ΔABC y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$.

$$\Rightarrow \boxed{AM=MX=\ell}$$

Demostración

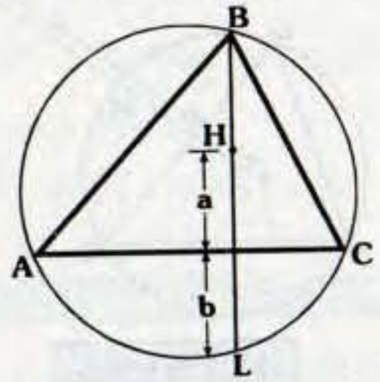
- Como $\overline{AC}$ es cuerda y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$, por teorema de circunferencia.

$$\therefore \quad AM=MC=\ell$$

8.5 ASOCIADOS AL ORTOCENTRO

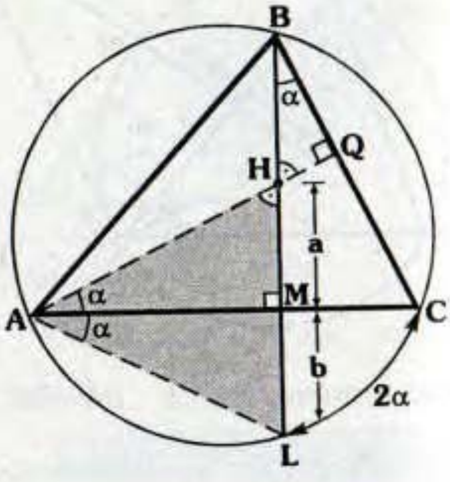
(A) El segmento cuyos extremos son el ortocentro y el punto de corte entre la altura o su prolongación con la circunferencia circunscrita, es bisecado por el lado al cual es relativa dicha altura.

Si H: Ortocentro del ΔABC.



$$\Rightarrow \boxed{a=b}$$

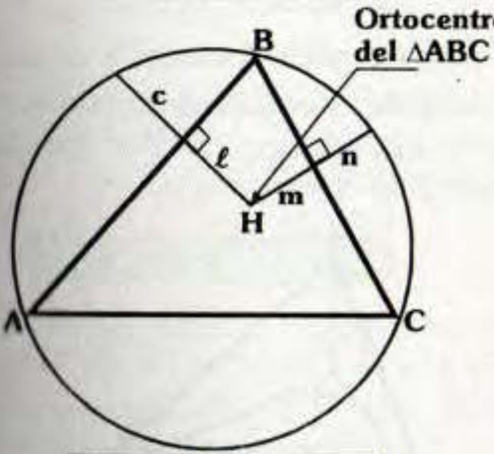
Demostración:



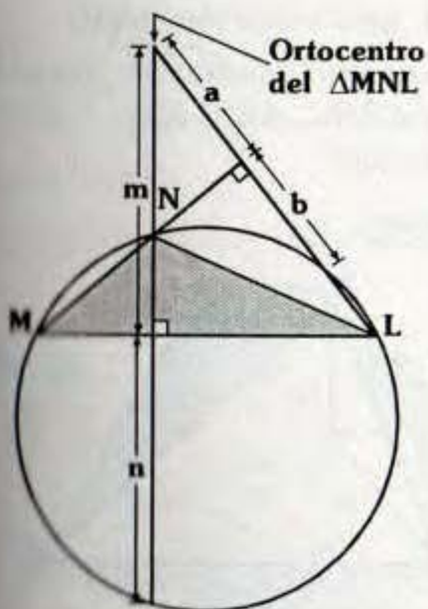
- Como H es ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AQ}$ y $\overline{BM}$ son alturas.
- Se observa: $m\measuredangle HBQ = m\measuredangle HAM = \alpha$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle LAC = \alpha$
- Puesto que $\overline{AM}$ es altura y bisectriz del ΔAHL, podemos afirmar que $\overline{AM}$ es mediana.

$$\therefore\ a = b$$

Observación



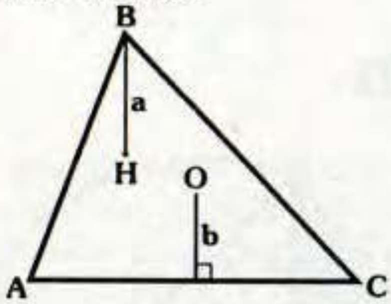
$\Rightarrow \boxed{a = \ell \quad y \quad m = n}$



$\Rightarrow \boxed{a = b \quad y \quad m = n}$

8.6. ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO Y ORTOCENTRO

(A) La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro hacia el lado opuesto a dicho vértice.



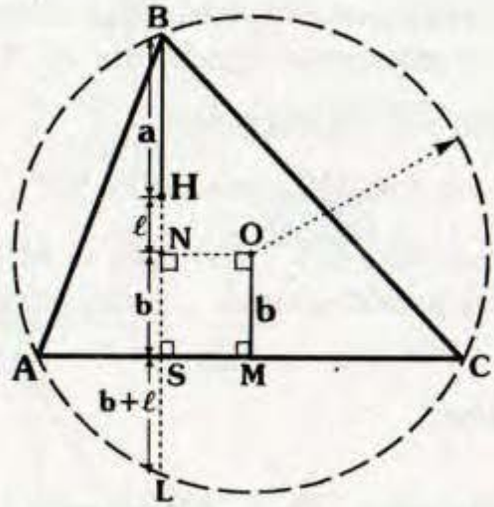
Si H: Ortocentro y

O: Circuncentro

$$\Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

Demostración:

Método 1



- Se traza la circunferencia circunscrita y se prolonga $\overline{BH}$ hasta que la corte el L, luego trazamos $\overline{ON}$ perpendicular a $\overline{BL}$.
- MONS: Rectángulo $\Rightarrow$ $NS = b$

- Por el teorema 8.5.

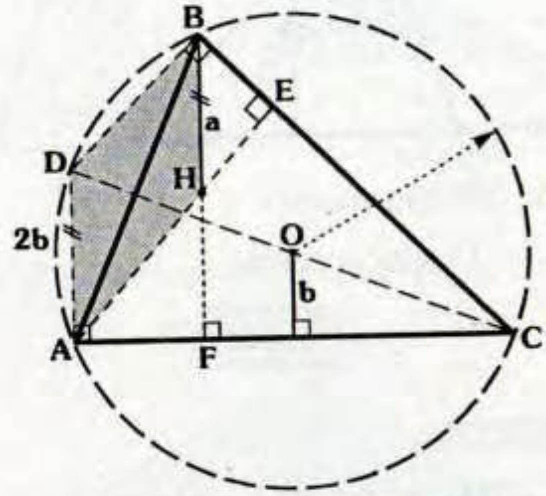
$$\Rightarrow \ HS = SL = b + \ell$$

- Por el teorema 8.4. (B)

$$\Rightarrow \ a + \ell = b + b + \ell$$

$$\therefore \ a = 2b$$

Método 2



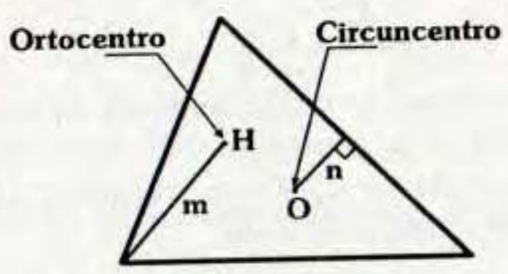
- Trazamos las alturas AE y BF, luego prolongamos $\overline{CO}$ hasta que corte a la circunferencia circunscrita en D.
- Como $\overline{CD}$ es diámetro:

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle DBC = 90°$$

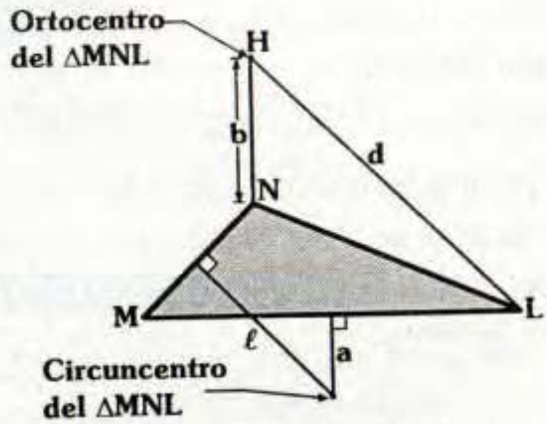
- Como $\overline{AD} \parallel \overline{BH}$ y $\overline{BD} \parallel \overline{AH} \Rightarrow$ ADBH es un paralelogramo.

$$\therefore \ a = 2b$$

También:

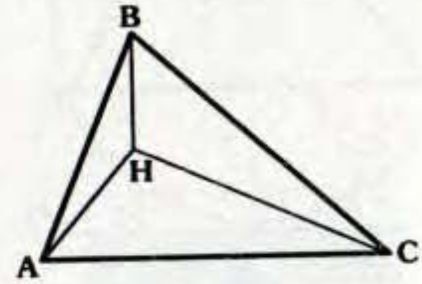


$$\Rightarrow \ \boxed{m = 2n}$$



$$\Rightarrow \ \boxed{b = 2a \ \text{ y } \ d = 2\ell}$$

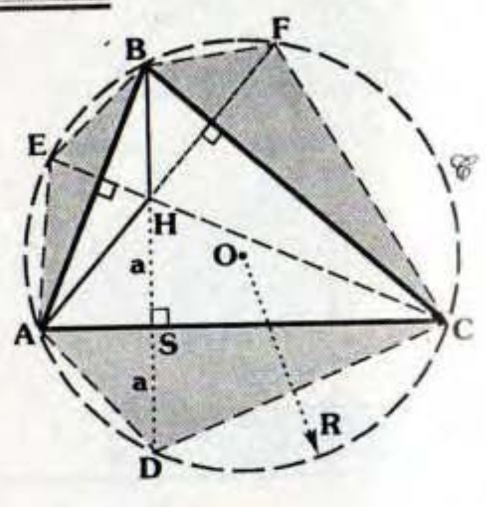
(B) Los triángulos formados al unir el ortocentro con los vértices del triángulo tienen circunradios iguales al triángulo mencionado.



Si H: ortocentro del ΔABC.

$\Rightarrow$ Los circunradios de los triángulos ABC, ABH, BHC y AHC son iguales.

Demostración:

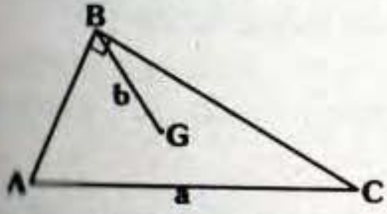


- Trazamos la circunferencia circunscrita y ubicamos el circuncentro O.
- Luego prolongamos $\overline{BH}$ hasta D ($D \in \mathscr{C}$), entonces $HS = SD = a$.
- Se observa que los triángulos ABC y ADC tienen el mismo circunradio R.
- $\Delta AHC \cong \Delta ADC$ (LLL) $\Rightarrow$ por circunradios homólogos; R es el circunradio del ΔAHC.
- Análogamente para ΔAEB y ΔBFC.

R : Circunradio del ΔABC.
Circunradio del ΔAHC.
Circunradio del ΔAEB.
Circunradio del ΔBFC.

V. ASOCIADOS AL BARICENTRO

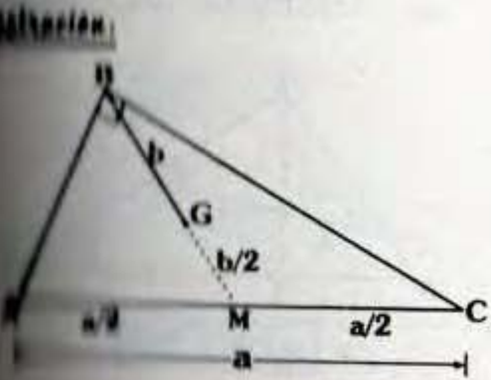
A En todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es el triple de la distancia del baricentro hacia el vértice del ángulo recto.



Si: $m\measuredangle ABC = 90°$ y
G: Baricentro del ΔABC

$\Rightarrow \boxed{a = 3b}$

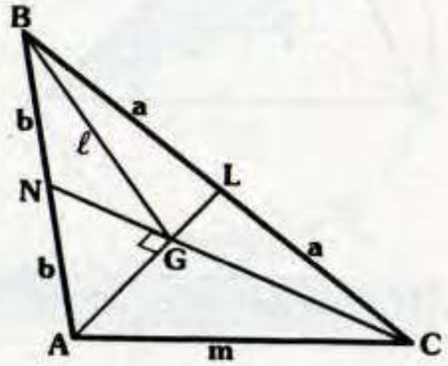
Demostración:



- Por definición: $AM = MC = a/2$
- Por el teorema $\Rightarrow BM = a/2$
- Por teorema básico: $GM = b/2$
- $BM = BG + GM \Rightarrow \dfrac{a}{2} = b + \dfrac{b}{2}$

$$\therefore\ a = 3b$$

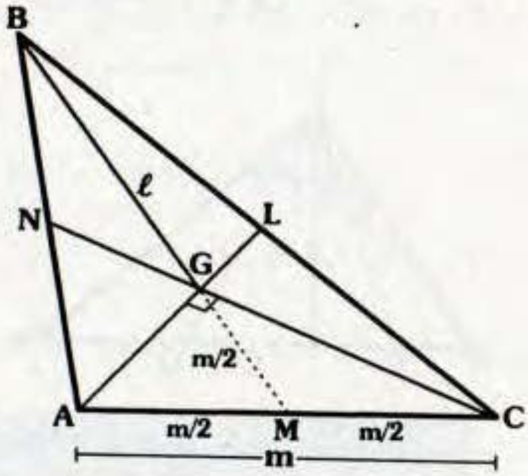
B Si dos medianas son perpendiculares, la distancia del baricentro al vértice desde el cual no se ha trazado la mediana, es igual a la longitud del lado opuesto al vértice mencionado.



Si: $\overline{AL}$ y $\overline{CN}$ son medianas perpendiculares.

$\Rightarrow \boxed{m = \ell}$

Demostración:

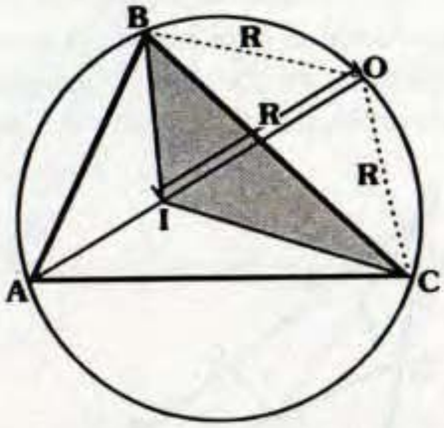


- Sabemos: $AM = MC = m/2$
- Por el teorema ⊿: $GM = m/2$
- Por teorema básico: $\ell = 2(m/2)$

$$\therefore \ \ell = m$$

8.8 TEOREMAS ADICIONALES

(A) Si I: incentro del ΔABC



$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del Δ BIC**

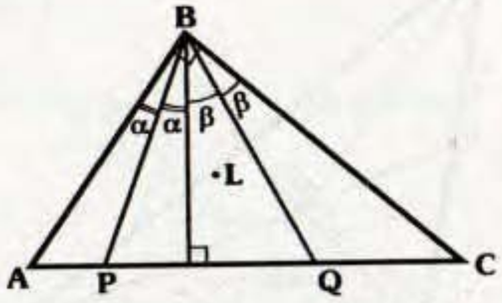
Demostración:

- Por el teorema 8.1.

$$BO = IO = CO = R$$

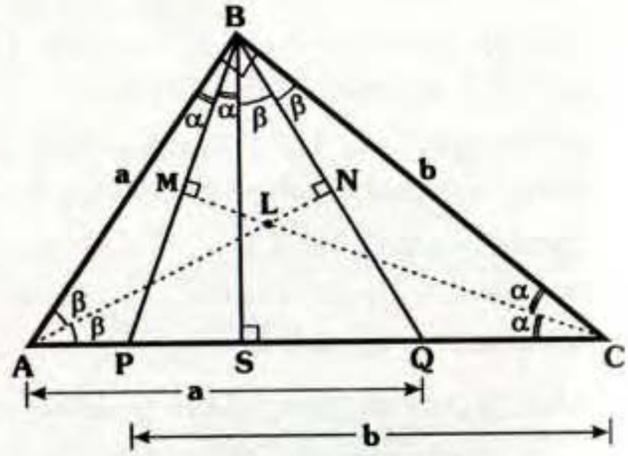
$\therefore$ O: Circuncentro del Δ BIC.

(B) Si L: Incentro del ⊿ABC.



$\Rightarrow$ **L: Circuncentro del ΔPBQ**

Demostración:



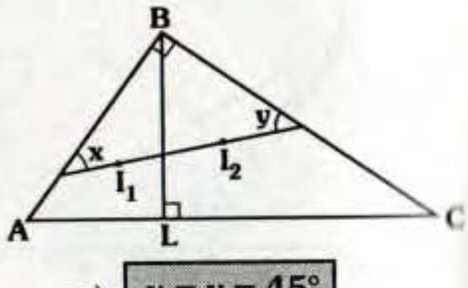
- En B: $m\measuredangle PBC = 90° - \alpha$.
- ΔPBS: $m\measuredangle BPS = 90° - \alpha$.
- Con lo cual el ΔPBC es isósceles.

$$\Rightarrow \ BC = PC = b$$

- Análogamente: $AB = AQ = a$
- $\overline{CL}$ es bisectriz pues L es incentro del ΔABC. Como el ΔPBC es isósceles, $\overline{CM}$ es altura y mediana, con lo cual $\overleftrightarrow{CM}$ es mediatriz de $\overline{PB}$.
- Del mismo modo: $\overleftrightarrow{AN}$ es mediatriz de $\overline{BQ}$.

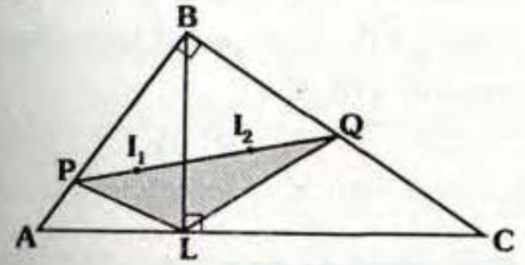
$\therefore$ L es circuncentro del ΔPBQ.

(C) Si I_1: Incentro del ΔABL e
I_2: Incentro del ΔBLC.



$\Rightarrow$ $\boxed{x = y = 45°}$

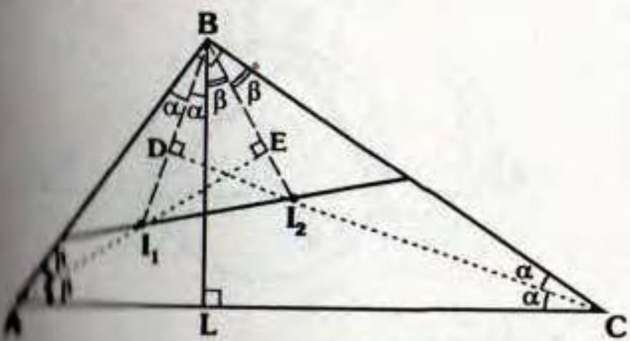
Además:



$\Rightarrow$ **B: Circuncentro del ΔPLQ**

Demostración:

Paso 1



- Como I_1 e I_2 son incentros:

  $m\measuredangle ABI_1 = m\measuredangle I_1BL = \alpha$

  $m\measuredangle BAI_1 = m\measuredangle I_1AL = \beta$

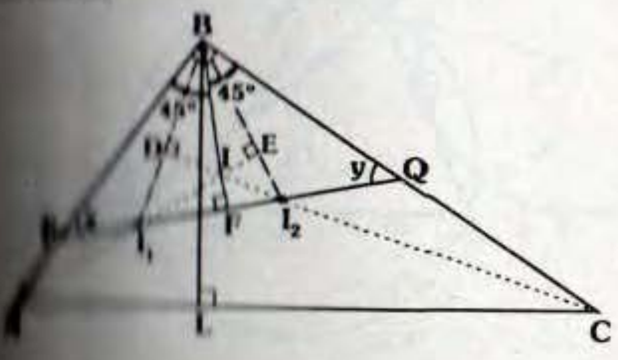
  $m\measuredangle BCI_2 = m\measuredangle I_2CL = \alpha$

  $m\measuredangle LBI_2 = m\measuredangle I_2BC = \beta$

- De la demostración anterior:

  $m\measuredangle BDC = m\measuredangle BEA = 90°$

Paso 2



- Se observa que:

  I: Incentro del ΔABC

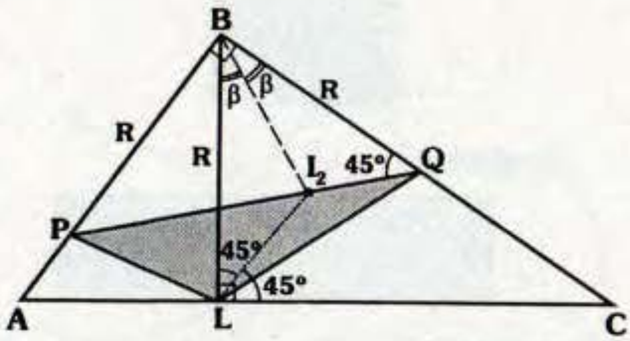
  I: Ortocentro del ΔBI_1I_2

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 45°$ y $\overline{BF}$ es altura del ΔBI_1I_2

- Luego en el ΔPFB:

$$x = y = 45°$$

Paso 3



- Como $m\measuredangle BQP = 45°$

$$\Rightarrow \ PB = BQ = R$$

- En $\triangle BLC$: I_2 es incentro

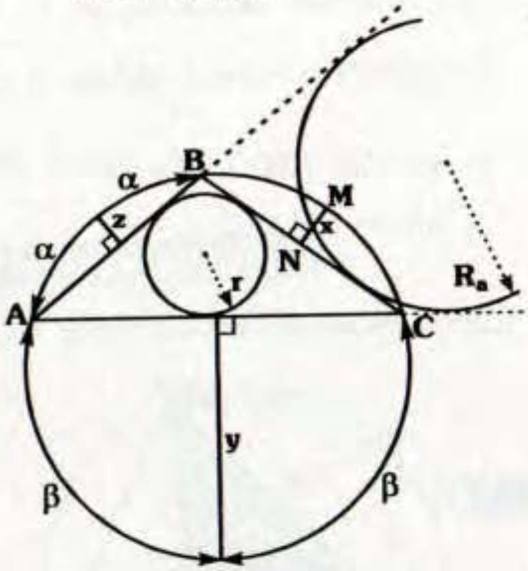
$$\Rightarrow \ m\measuredangle BLI_2 = m\measuredangle I_2LC = 45°$$

- $\Delta BLI_2 \cong \Delta BQI_2$ (ALA)

$$\Rightarrow \ BL = BQ = R$$

$\therefore$ B es el circuncentro del ΔPLQ.

Ⓓ Si r: Inradio, R_a: Exradio y $\overline{MN}$: Sagita

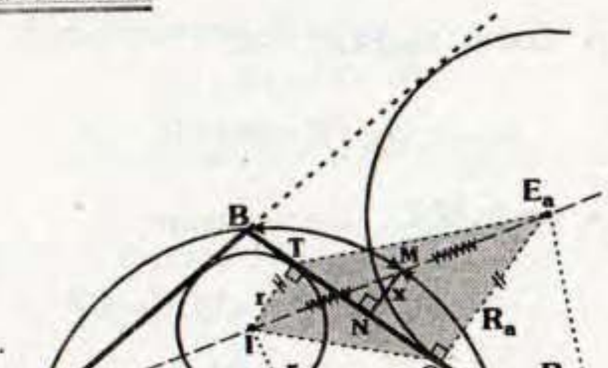


$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{R_a - r}{2}}$$

También:

$$\boxed{y = \frac{R_b - r}{2} \qquad z = \frac{R_c - r}{2}}$$

Demostración:



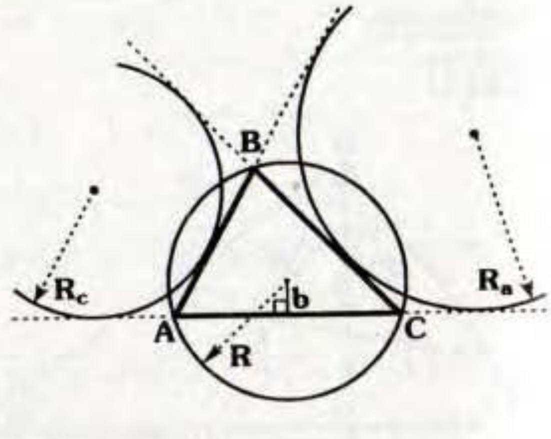
- Debido a que $\overline{MN}$ es sagita $\Rightarrow m\widehat{BM} = m\widehat{MC}$ con lo cual A, I, M y E_a son colineales.
- Por el teorema 8.3 (B):

$$IM = ME_a$$

- Puesto que $\overline{IT} // \overline{E_aQ} // \overline{MN}$ y M es punto medio de $\overline{IE_a}$, por el teorema en el trapecio ITE_aQ:

$$\therefore \quad x = \frac{R_a - r}{2}$$

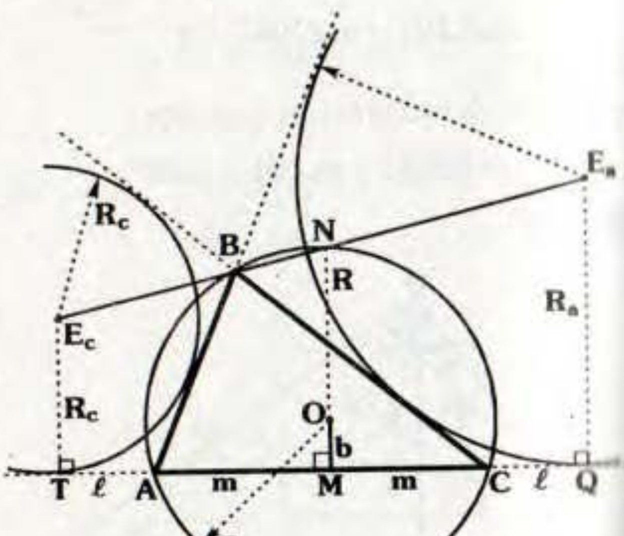
Ⓔ $$\boxed{R + b = \frac{R_a + R_c}{2}}$$



Análogamente:

$$\boxed{R + a = \frac{R_a + R_c}{2} \qquad R + c = \frac{R_a + R_b}{2}}$$

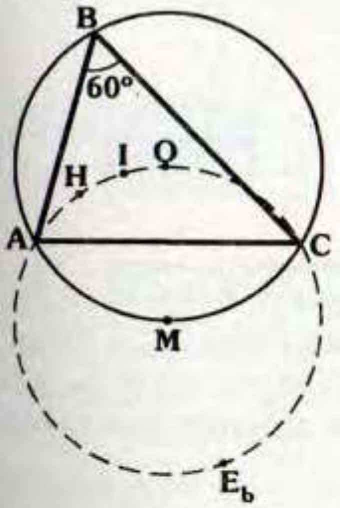
Demostración:



- Por el teorema 8.2(B): $m\widehat{AN} = m\widehat{NC}$
- Por el teorema 8.2(A): $AT = CQ = \ell$
- Como $\overline{OM} \perp \overline{AC} \Rightarrow AM = MC = m$
- Con lo cual N,O y M son colineales
- $\overline{MN}$, base media del trapecio TE_cE_aQ.

$$\therefore \ R + b = \frac{R_a + R_c}{2}$$

F) Si $m\measuredangle ABC = 60°$



En el gráfico, A, C, el ortocentro (H), el incentro (I), el circuncentro (O) y el excentro (E_b) pueden ubicar en una circunferencia, cuyo centro será punto medio M del arco AC.

Demostración:

- Por teoremas básicos:

$$m\measuredangle AHC = 180° - 60° = 120°$$

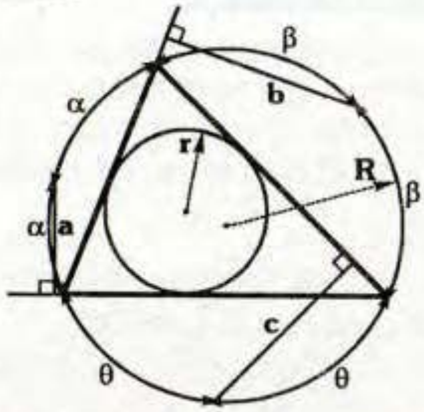
$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{60°}{2} = 120° ;$$

$$m\measuredangle AOC = 2(60°) = 120° \quad y$$

$$m\measuredangle AE_bC = 90° - \frac{60°}{2} = 60°$$

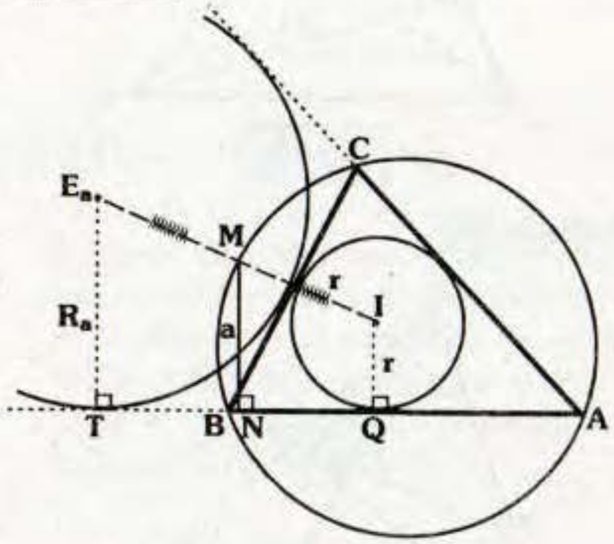
∴ A, H, I, O, C y E_b son concíclicos.

Aplicación:



Se cumple: $\boxed{a + b + c = 2(R + r)}$

Demostración:



- Se ubica el excentro (E_a).
- Por teorema 8.3(B) $E_aM = MI$
- $\overline{MN}$: Base media del trapecio E_aTQI

$$a = \frac{R_a + r}{2}$$

- De igual modo:

$$b = \frac{R_b + r}{2} \quad y \quad c = \frac{R_c + r}{2}$$

$$\Rightarrow \ a + b + c = \frac{R_a + R_b + R_c + 3r}{2}$$

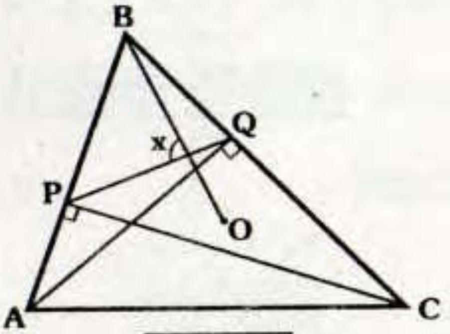
- Pero: $R_a + R_b + R_c = 4R + r$ (Ver 8.10)

$$\therefore \ a + b + c = 2(R + r)$$

8.9 TEOREMA DE NAGEL

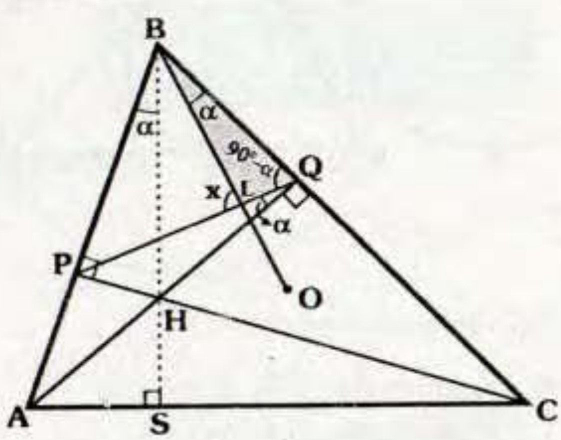
El segmento que une los pies de dos alturas es perpendicular al circunradio correspondiente al vértice desde el cual no se ha trazado la altura.

Si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas y O es el circuncentro del ΔABC.



$\Rightarrow \boxed{x = 90°}$

Demostración:



- Por el teorema 8.4.:

  $m\measuredangle ABS = m\measuredangle OBC = \alpha$
- ⏢PBQH: Inscriptible

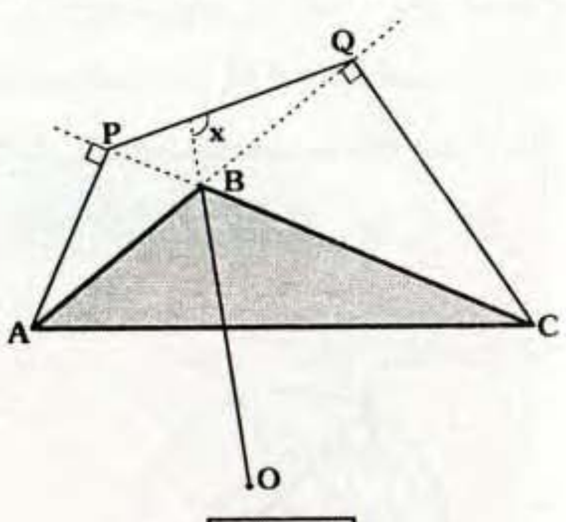
  $\Rightarrow m\measuredangle PQH = \alpha$
- En "Q": $m\measuredangle BQL = 90° - \alpha$
- Luego en el ΔBLQ:

  $x = \alpha + 90° - \alpha$

  $\therefore x = 90°$

También:

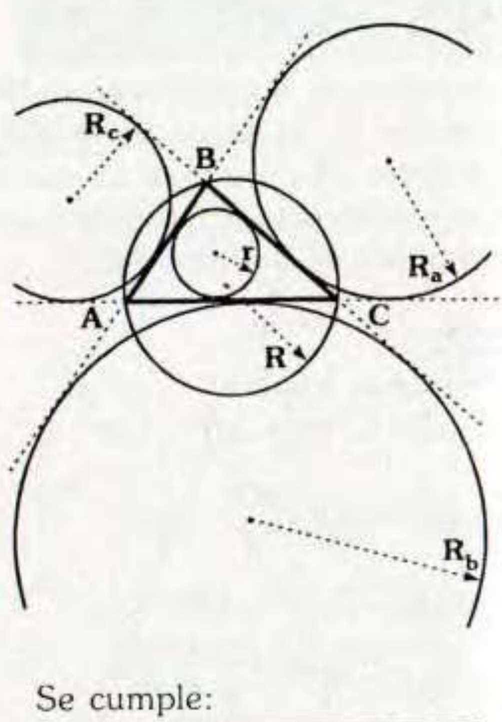
Si $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ son alturas y O es circuncentro del triángulo obtusángulo ABC.



$\Rightarrow \boxed{x = 90°}$

8.10 TEOREMA DE STEINER

En todo triángulo, la suma de los tres exradios es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.



Se cumple:

$$\boxed{R_a + R_b + R_c = 4R + r}$$

Demostración:

- Si "b" es la distancia del circuncentro hacia $\overline{AC}$.
- Por el teorema 8.8 (D):

$$R-b=\frac{R_b-r}{2}$$

- Por el teorema 8.8 (E): (+)

$$R+b=\frac{R_a+R_c}{2}$$

$$\therefore\ R_a+R_b+R_c=4R+r$$

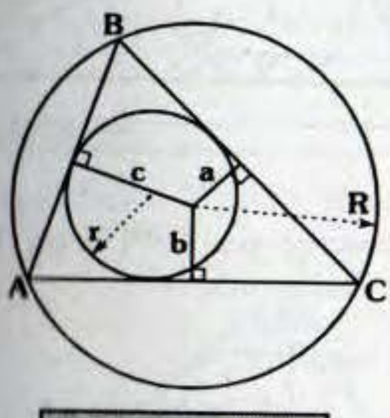
8.11 TEOREMAS DE CARNOT

CARNOT 1

Caso 1

En todo triángulo acutángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados es igual a la suma del inradio y circunradio.

Si $\triangle ABC$: Acutángulo



$$\Rightarrow\ \boxed{a+b+c=R+r}$$

Demostración:

- Se observa que: $R-a$, $R-b$ y $R-c$ son las longitudes de las sagitas $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.
- Por el teorema 8.8 (D):

$$R-a=\frac{R_a-r}{2};\quad R-b=\frac{R_b-r}{2};$$

$$R-c=\frac{R_c-r}{2}$$

- Sumando las expresiones:

$$R-a+R-b+R-c=\frac{R_a-r}{2}+\frac{R_b-r}{2}+\frac{R_c-r}{2}$$

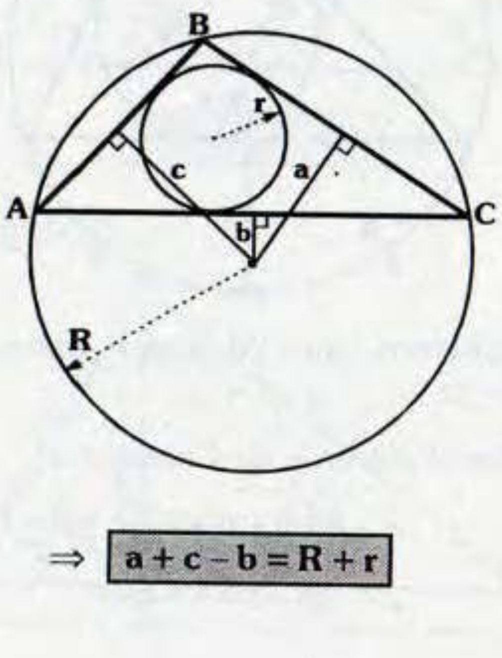
$$\Rightarrow 6R+3r=\underbrace{R_a+R_b+R_c}_{4R+r}+2(a+b+c)\quad \text{(T. Steiner)}$$

$$\therefore\ R+r=a+b+c$$

Caso 2

En todo triángulo obtusángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados que determinan el ángulo obtuso menos la distancia hacia el otro lado es igual a la suma entre el circunradio con el inradio.

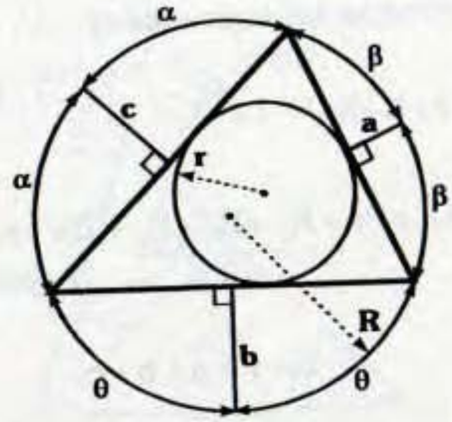
Si $\triangle ABC$: Obtusángulo



$$\Rightarrow\ \boxed{a+c-b=R+r}$$

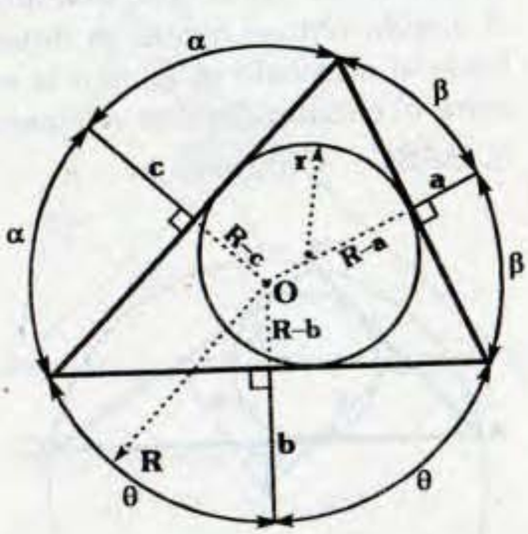
CARNOT 2

La suma de las longitudes de las sagitas correspondientes a los lados de un triángulo, tal que se encuentren en la región exterior, es igual al doble del circunradio menos el inradio.



$$\boxed{a+b+c=2R-r}$$

Demostración:



- Sabemos que las sagitas concurren en O.
- Por el teorema de Carnot 1:

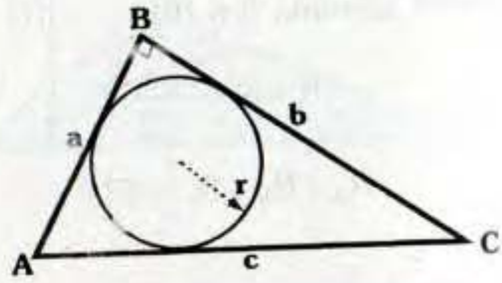
$$R-a+R-b+R-c=R+r$$

$$\therefore\ 2R-r=a+b+c$$

8.12 TEOREMA DE PONCELET

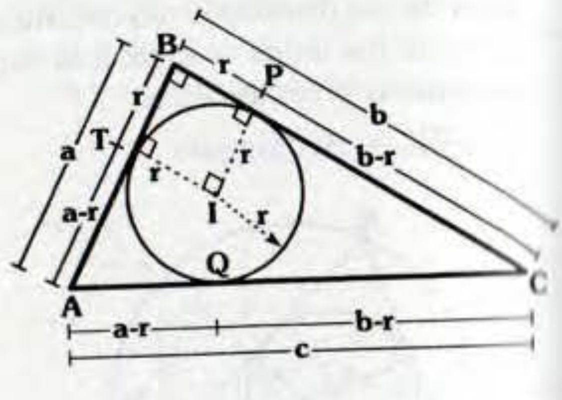
En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y el doble del inradio.

Si: $m\measuredangle ABC=90^\circ$ e I: inradio



$$\Rightarrow\quad \boxed{a+b=c+2r}$$

Demostración:



- Se observa que TBPI es un cuadrado cuyo lado mide "r".
- Por teorema:

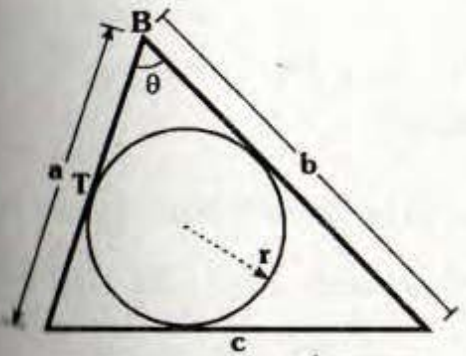
$$AT=AQ=a-r$$

$$CP=CQ=b-r$$

- $AC=AQ+QC\ \Rightarrow\ c=a-r+b-r$

$$\therefore\ c+2r=a+b$$

Generalizando:



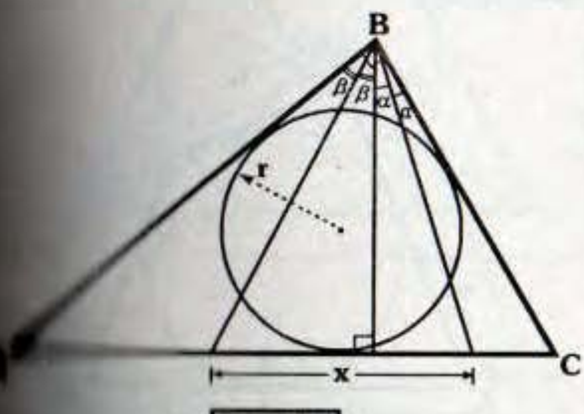
$$\boxed{a + b = c + 2r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Para su demostración debemos aprovechar que $BT = r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$, luego debemos proceder del mismo modo en el teorema anterior.

> **Nota**
>
> *(Recíproco) Si en un triángulo la suma de las longitudes de dos lados es igual a la longitud del tercer lado y el doble del inradio, entonces se trata de un triángulo rectángulo.*

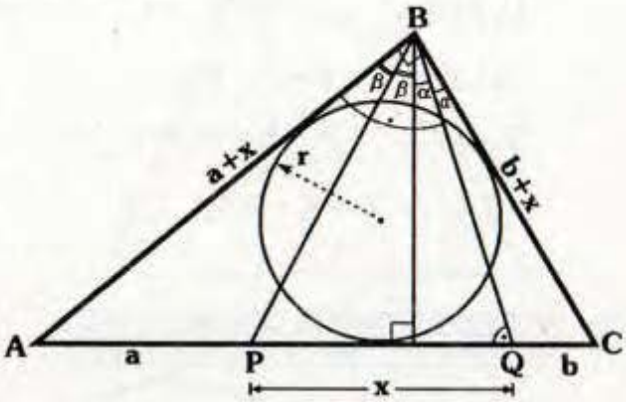
Aplicaciones:

- Si: $m\measuredangle ABC = 90°$ y r: inradio



$\Rightarrow \boxed{x = 2r}$

Demostración:

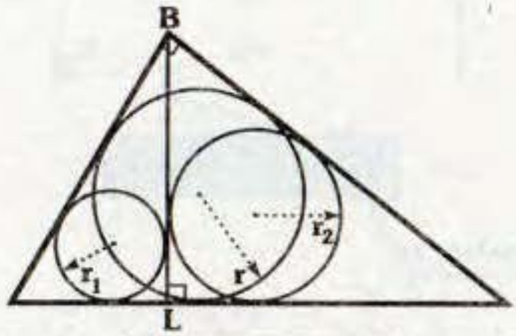


- ΔABQ : Isósceles $\Rightarrow$ $AB = a + x$
- ΔPBC : Isósceles $\Rightarrow$ $BC = b + x$
- Por el teorema de Poncelet:

$$\Rightarrow \; a + x + b + x = a + x + b + 2r$$

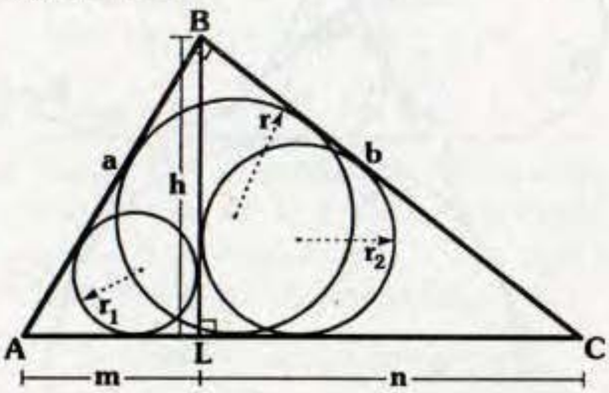
$$\therefore \; x = 2r$$

Ⓑ



$$\boxed{BL = r + r_1 + r_2}$$

Demostración:



- Por Teorema de Poncelet:

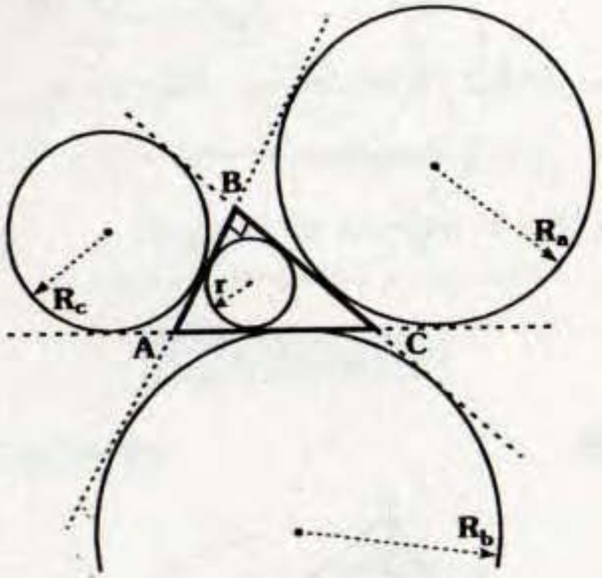
  ◺ABL: $m+h=a+2r_1$

  ◺CBL: $n+h=b+2r_2$

  ◺ABC: $a+b=m+n+2r$

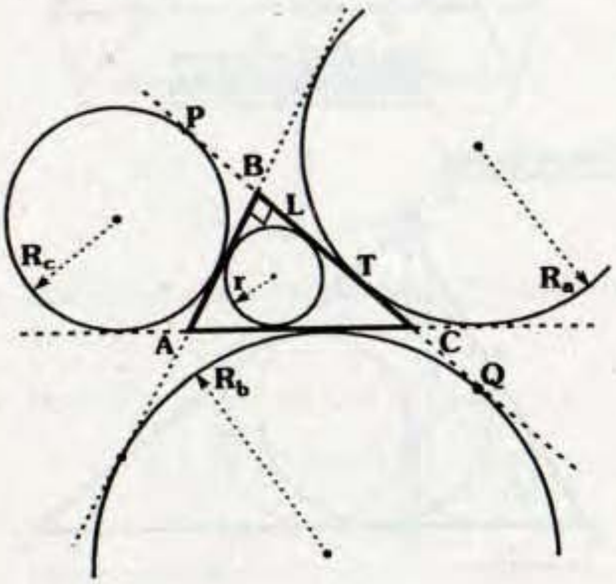
  $\therefore\ h=r_1+r_2+r$

Ⓒ Si $m\measuredangle ABC=90^\circ$



$\Rightarrow$ $\boxed{R_b=R_a+R_c+r}$

Demostración:



- Por teoremas de circunferencia, se tiene:

  $BP=R_c$, $BL=TC=r$, $BT=R_a$ y $BQ=R_b$

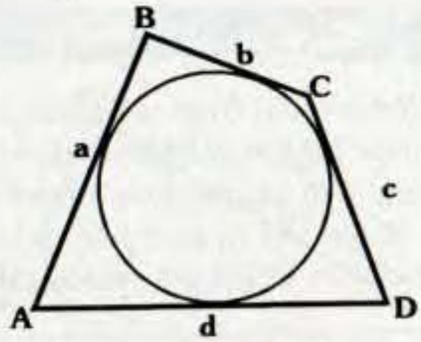
- Por el teorema 8.2 (B): $PB=CQ=R_c$.
- Del gráfico: $BQ=BT+TC+CQ$

  $\therefore\ R_b=R_a+r+R_c$

8.13 TEOREMA DE PITOT

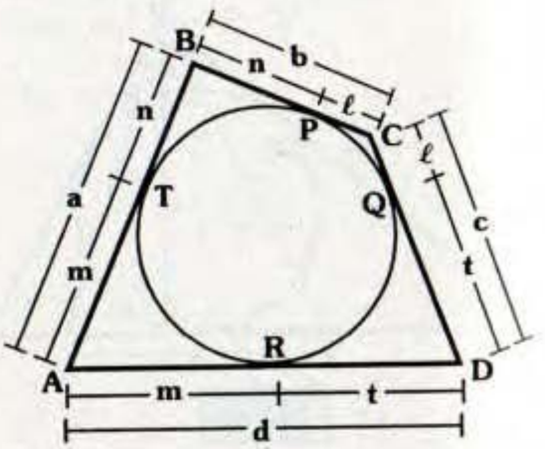
Para todo cuadrilátero circunscrito o circunscriptible las sumas de las longitudes de los lados opuestos son iguales.

▱ABCD: Cuadrilátero circunscrito.



$\Rightarrow$ $\boxed{a+c=b+d}$

Demostración:



- Por teorema de circunferencia:

$$AT = AR = m\ ,\quad BT = BP = n\ ,$$
$$CP = CQ = \ell\ ,\quad DQ = DR = t$$

- Se observa: $a = m + n\ ,\ b = n + \ell\ ,$ $c = \ell + t$ y $d = m + t$

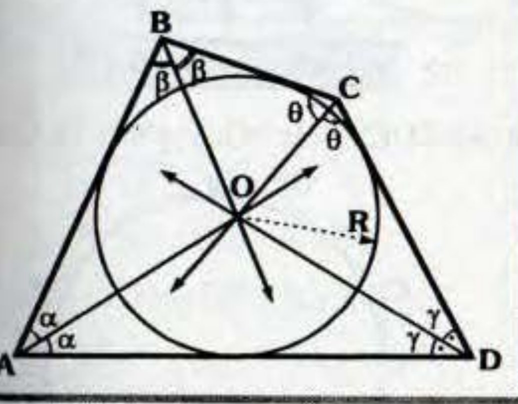
- $a + c = m + n + \ell + t$ y $b + d = n + \ell + m + t$

$$\therefore\ a + c = b + d$$

Nota

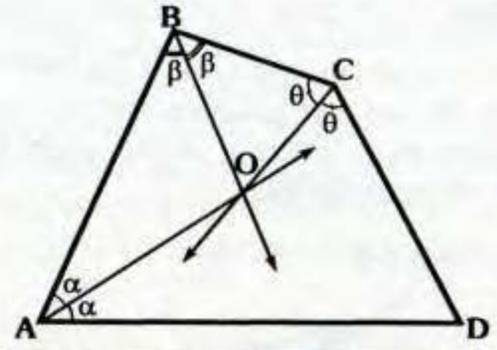
- *El semiperímetro de la región limitada por un cuadrilátero circunscrito es igual a la suma de las longitudes de cualquier par de lados opuestos.*
- *En todo cuadrilátero circunscrito las bisectrices interiores pasan por el centro de la circunferencia inscrita.*
- *Las bisectrices internas concurren en O.*

R: *Inradio del* $\triangle$ABCD.



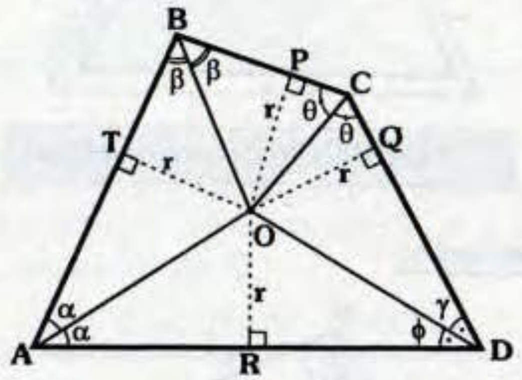
TEOREMA:

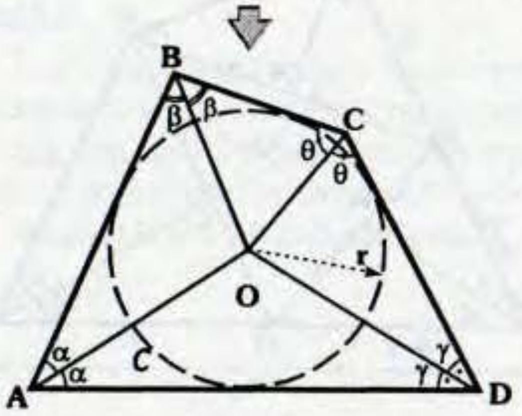
Si en un cuadrilátero convexo tres bisectrices interiores son concurrentes, dicho cuadrilátero es circunscriptible.



$\Rightarrow$ $\boxed{\triangle\text{ABCD: Circunscriptible}}$

Demostración:





- Por teorema de la bisectriz:

$$OR = OT = OP = OQ = r$$

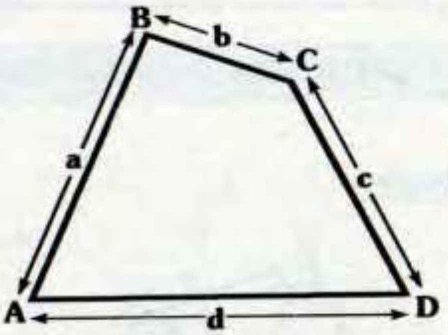
- Como: $OR = OQ \Rightarrow \phi = \gamma$
- Luego por el postulado de Euclides, con centro en O y radio **r** podemos trazar la circunferencia $\mathscr{C}$, la cual es tangente a los cuatro lados.

$\therefore$ $\triangle$ABCD: Circunscriptible

TEOREMA:

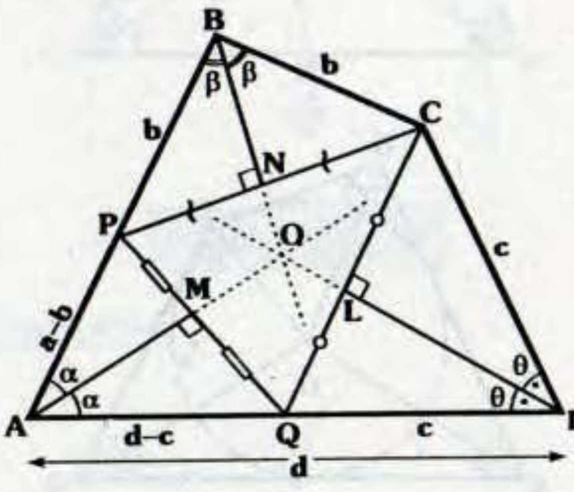
Si en un cuadrilátero convexo la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma, dicho cuadrilátero es circunscriptible.

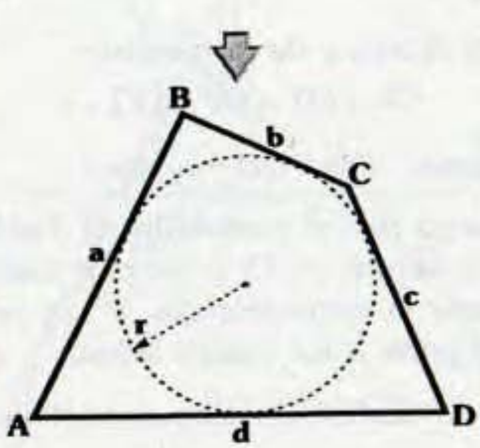
Si $a+c=b+d$



$\Rightarrow$ **△ABCD: Circunscriptible**

Demostración:



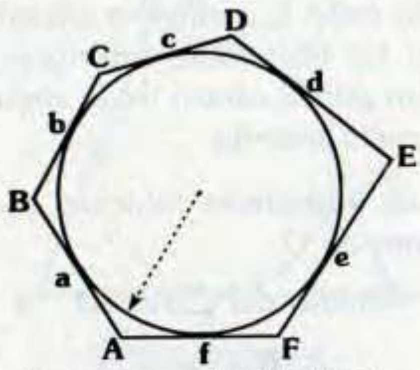


- Se ubican P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, tal que: $BP=b$ y $DQ=c$.
- De la condición del teorema se tiene $a-b=d-c$.
- Luego trazamos las alturas AM y BN las cuales se cortan en O, el cual es circuncentro del ΔPQC.
- Para el ΔPQC $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{DL}$ son concurrentes.
- Puesto que las bisectrices AM, BN y DL son concurrentes, por el teorema anterior.

$\therefore$ △ABCD: Circunscriptible.

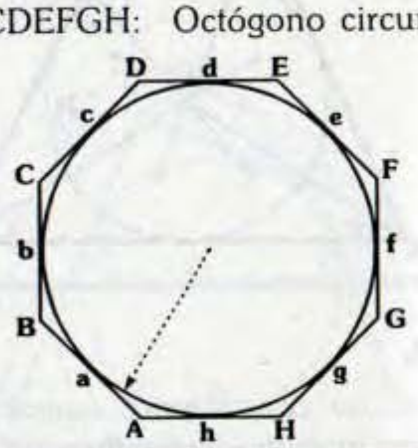
Generalizando:

Si ABCDEF: Hexágono circunscrito



$\Rightarrow$ $\boxed{a+c+e=b+d+f}$

Si ABCDEFGH: Octógono circunscrito

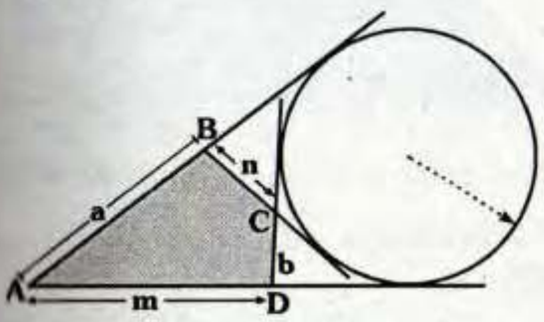


$\Rightarrow$ $\boxed{a+c+e+g=b+d+f+h}$

8.14. TEOREMA DE STEINER

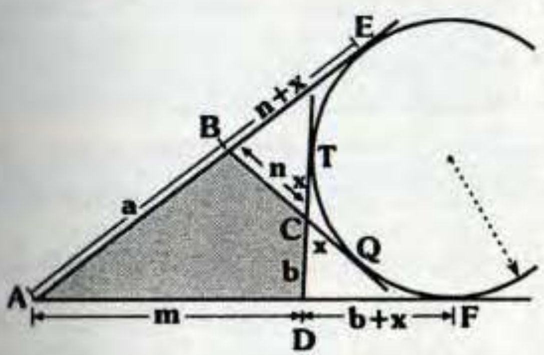
En todo cuadrilátero exinscrito o exinscriptible, las diferencias entre las longitudes de los lados opuestos son iguales.

$\triangle$ABCD: Cuadrilátero exinscrito



$$\Rightarrow \boxed{a - b = m - n}$$

Demostración:



- Por teorema:

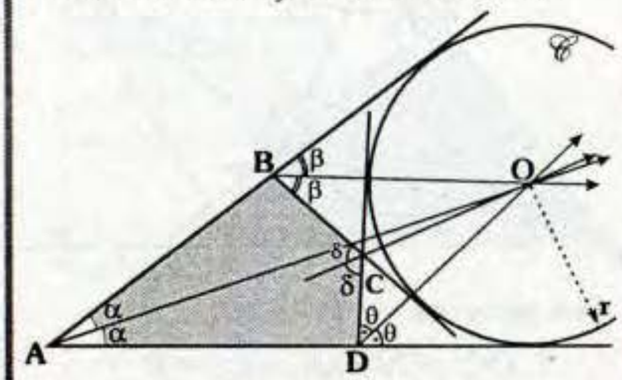
$$CT = CQ = x$$
$$BQ = BE = n + x$$
$$DT = DF = b + x$$

- Finalmente:

$$AE = AF$$
$$a + n + x = m + b + x$$
$$\Rightarrow a + n = m + b$$
$$\therefore a - b = m - n$$

Nota

En todo cuadrilátero exinscrito las bisectrices de dos ángulo exteriores opuestos y las bisectrices de los otros ángulos interiores concurren en el centro de la circunferencia exinscrita.



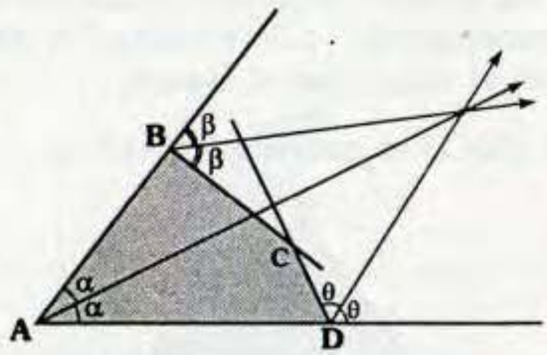
En el gráfico las bisectrices exteriores trazadas de B y D con las bisectrices trazadas desde A y C concurren en O.

r: Exradio del $\triangle$ABCD

TEOREMA:

Si en un cuadrilátero convexo las bisectrices exteriores de dos ángulos opuestos concurre con la bisectriz interior trazada desde cualquiera de los otros vértices opuestos, el cuadrilátero es **Exinscriptible**.

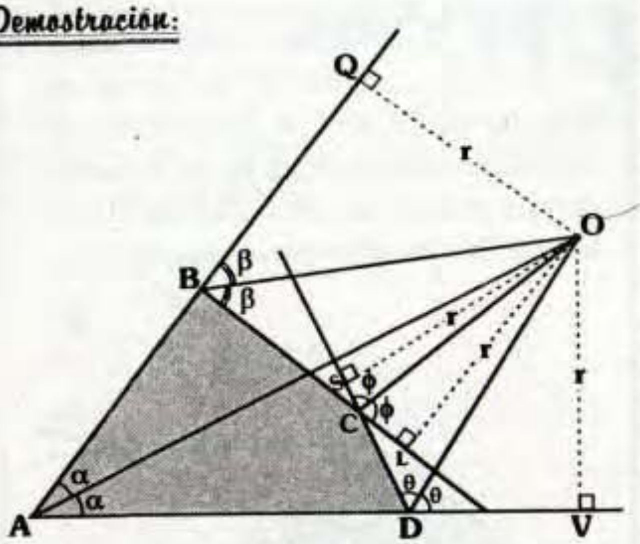
En el gráfico:



Se cumple:

$$\boxed{\triangle\text{ABCD: Exinscriptible}}$$

Demostración:



- Por teorema de la bisectriz:

$$OQ = OV = OL = OS = R$$

Se concluirá: $m\measuredangle SCO = m\measuredangle OCL = \phi$ debido a OS=OL (Recíproco) del teorema de la bisectriz.

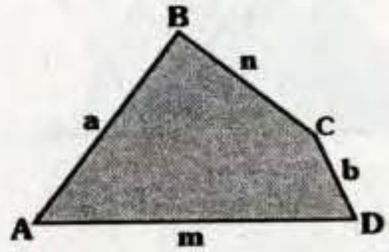
- Luego se tendrá: O equidista de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, entonces es centro de una circunferencia tangente a dichos lados.

$\therefore$ △ABCD es exinscriptible

TEOREMA:

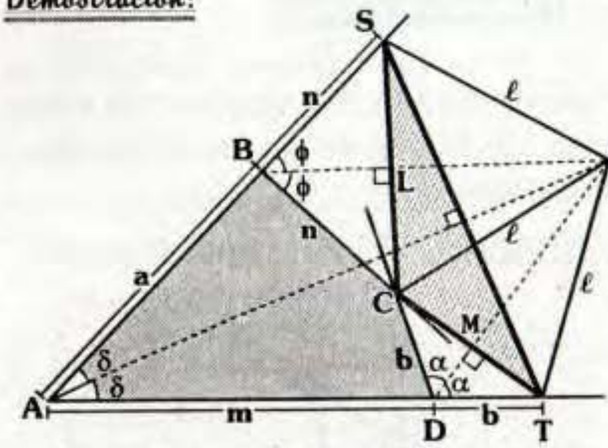
Si en un cuadrilátero convexo la diferencia de longitudes de los lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es exinscriptible. (Considerando la diferencia el mayor con el menor).

Si △ABCD es convexo y $a - b = m - n$



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{△ABCD es exinscriptible}}$

Demostración:



- Por dato: $a-b=m-n \Rightarrow a+n=b+m$
- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta S, tal que: $BS = n$.
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta T, tal que $DT=b$

$\Rightarrow \Delta CBS$ y ΔCDT : Isósceles.

- Debido a que $AS = a + n$ y $AT = m + b$

$$\Rightarrow \quad AS = AT$$

Se concluye: ΔAST : Isósceles

- Se trazan $\overline{AL}$ y $\overline{DM}$ alturas de los triángulos SBC y CDT, las cuales son bisectrices y medianas.

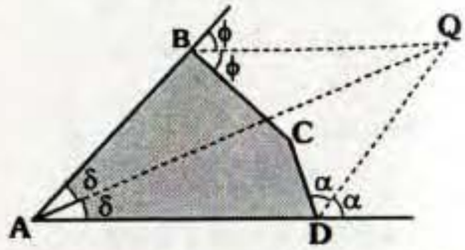
$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BQ}$ y $\overleftrightarrow{DQ}$ son mediatrices de $\overline{CS}$ y $\overline{CT}$, luego Q es circuncentro del:

$$ATCS \Rightarrow QS = QC = QT = \ell$$

- △ASQT: es trapezoide simétrico

$$\Rightarrow m\measuredangle SAQ = m\measuredangle QAT = \delta$$

- Se tendrá entonces:



- Por el teorema anterior, se deduce:

△ABCD es exinscriptible.

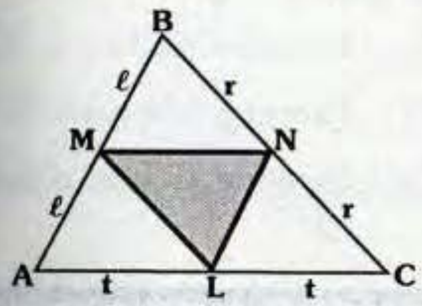
9. TRIÁNGULOS ESPECIALES

En este capítulo estudiaremos aquellos triángulos cuyos vértices tienen la misma característica respecto a un triángulo dado.

A un nivel preuniversitario se estudia a los triángulos mediano, órtico y exincentral, pero veremos que existen muchos más.

9.1 TRIÁNGULO MEDIANO, MEDIAL O COMPLEMENTARIO

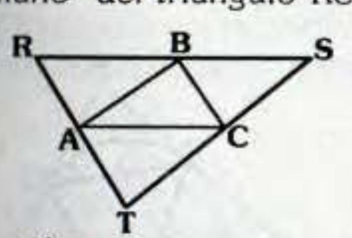
Es aquel triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado.



ΔMNL : Triángulo mediano, medial o complementario del ABC.

Nota

El triángulo antimediano del triángulo ABC *es el triángulo* RST *tal que el triángulo ABC es triángulo mediano del triángulo* RST.



En el gráfico:
El ΔABC *es triángulo mediano del* ΔRST.

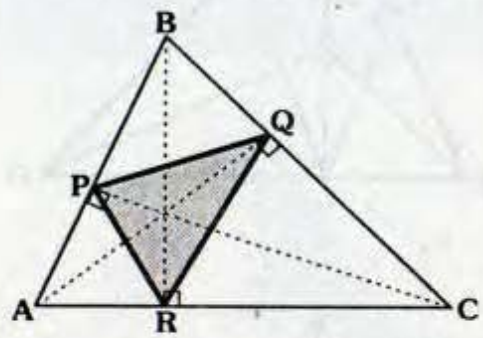
***ΔRST : Triángulo antimediano, antimedial o anticomplementario del** ΔABC.*

9.2 TRIÁNGULO ÓRTICO

Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo.

En el gráfico:

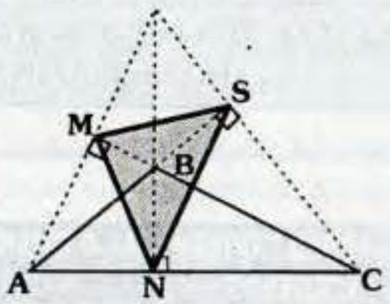
ΔABC : Acutángulo



ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC.

En el gráfico

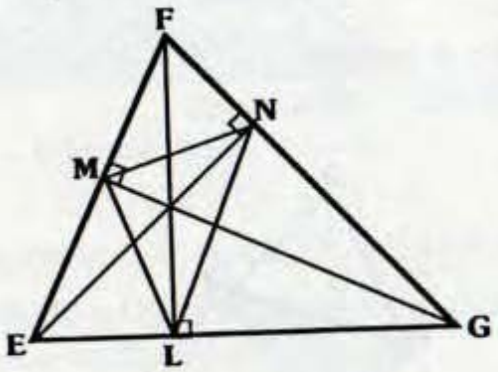
ΔABC : Obtusángulo

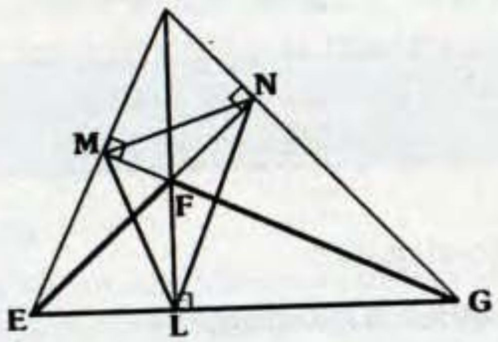


ΔMNS : Triángulo órtico del ΔABC.

Nota

- *Todos los triángulos presentan triángulo órtico, excepto el triángulo rectángulo.*
- *El triángulo* EFG *es antiórtico del triángulo* MNL, *si el triángulo* MNL *es triángulo órtico del triángulo* EFG.

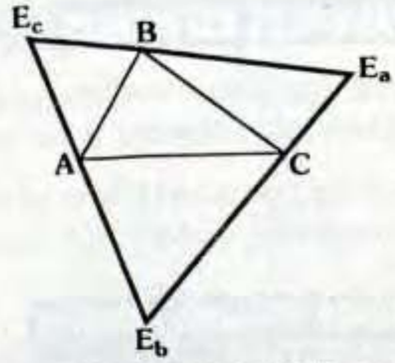




ΔEFG : Triángulo antiórtico del ΔMNL .

9.3 TRIÁNGULO EXINCENTRAL O TRIÁNGULO DE LOS EXCENTROS

Es aquel triángulo cuyos vértices son los excentros relativos a cada lado.



$\Delta E_aE_bE_c$: Δ Exincentral del Δ ABC

En el gráfico:

E_a : Excentro relativo a $\overline{BC}$.

E_c : Excentro relativo a $\overline{AB}$.

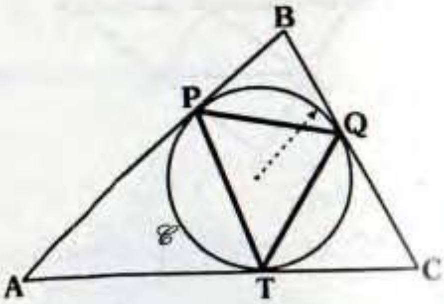
E_b : Excentro relativo a $\overline{AC}$.

9.4 TRIÁNGULO DE CONTACTO INTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

$\mathscr{C}$: Circunferencia inscrita en el ΔABC .



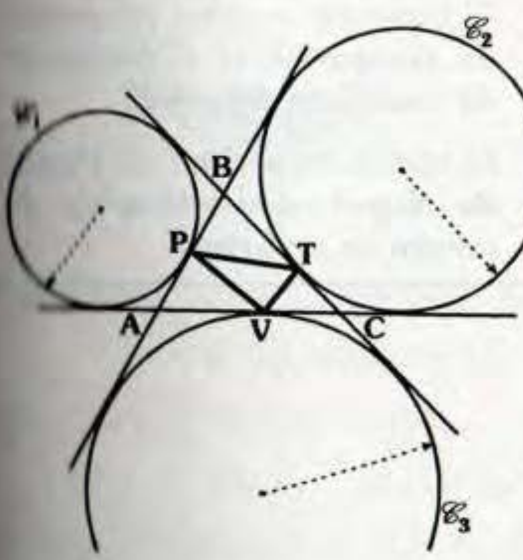
ΔPQT : Δ de contacto interior del Δ ABC.

9.5 TRIÁNGULO DE CONTACTO EXTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

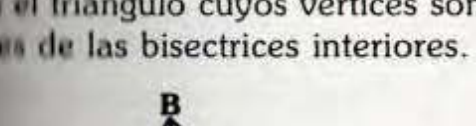
$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$, y $\mathscr{C}_3$: Circunferencias exinscritas relativas a los lados del ΔABC .



ΔVPT : Δ de contacto exterior del ΔABC .

9.6 TRIÁNGULO INCÉNTRICO

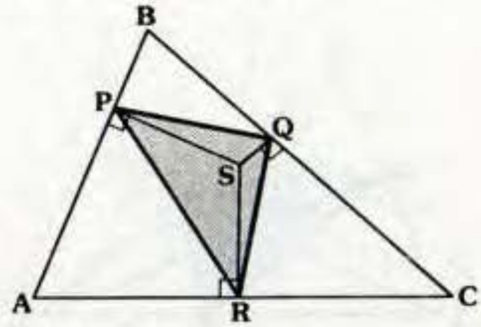
Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las bisectrices interiores.



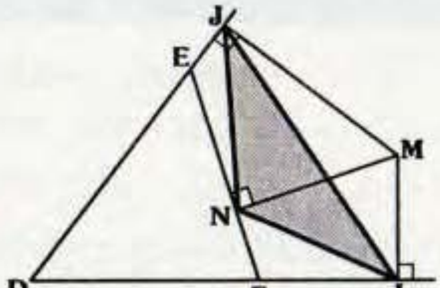
ΔEFG : Triángulo incentrico del ΔABC .

9.7 TRIÁNGULO PEDAL O PODAR

Es el triángulo cuyos vértices son las proyeccione de un punto sobre los lados de un triángulo.



ΔPQR : Triángulo pedal o podar del ΔABC respecto a S.



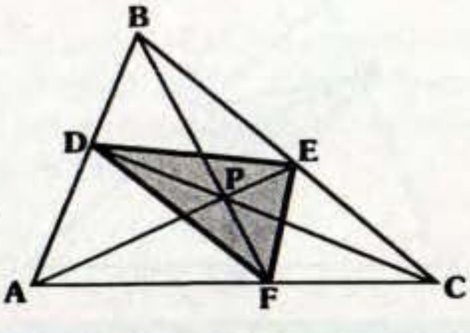
ΔINJ : Triángulo pedal o podar del ΔEFD respecto de M.

Nota

- *El triángulo pedal de circuncentro es el **triángulo mediano.***
- *El triángulo pedal del **ortocentro** es el **triángulo órtico.***
- *El triángulo pedal del **incentro** es el triángulo de contacto interior.*
- *Si el punto pertenece a la circunferencia circunscrita, los pies de las perpendiculares sobre los lados o prolongaciones son colineales (ver recta de Simson) no habría triángulo pedal.*

9.8 TRIÁNGULO CEVIANO

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las cevianas concurrentes en un punto dado.



ΔDEF : Triángulo ceviano del ΔABC respecto de P.

Nota

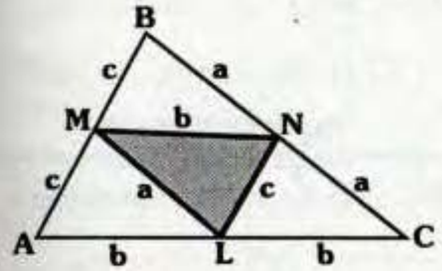
- *El triángulo ceviano del **baricentro** es el **triángulo mediano.***
- *El triángulo ceviano del **ortocentro** es el **triángulo órtico.***
- *El triángulo ceviano del **incentro** es el **triángulo incentrico.***
- *El triángulo ceviano del **punto de Gergonne** es el **triángulo de contacto interior.***
- *El triángulo ceviano de **Punto de Nagel** es el **triángulo de contacto exterior.***

10. TEOREMAS SOBRE LOS TRIÁNGULOS ESPECIALES

10.1 Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$) se cumple:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

Demostración:



En el gráfico: ΔMNL es triángulo mediano del triángulo ABC.

Por teorema de la base media:

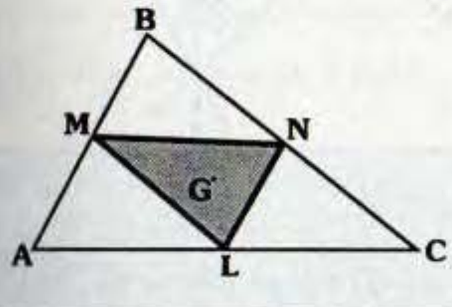
$$MN = b\ ,\ ML = a \quad y \quad LN = c$$

Por caso de congruencia LLL, se tiene:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

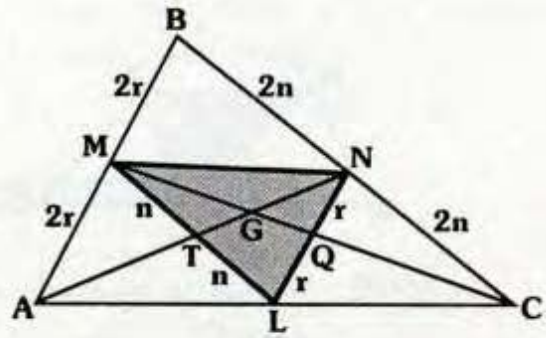
10.2 El baricentro de todo triángulo es baricentro de su triángulo mediano.

Si ΔMNL :
Triángulo mediano del ΔABC ; y
G: Baricentro del ΔABC .



⇒ **G: Baricentro del ΔMNL**

Demostración:

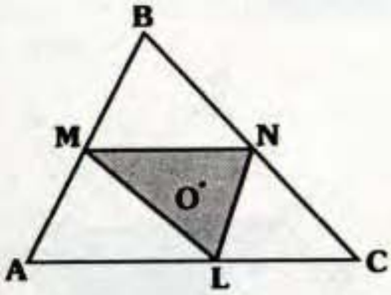


En el gráfico:

- ΔMNL : Triángulo mediano del ΔABC
  G: Baricentro del ΔABC .
- Se tiene entonces:
  $AM = MB = 2r\ ,\ \ BN = NC = 2n$ y
  $AL = LC$
- Por teorema de la base media:
  $$ML = 2n \quad y \quad \overline{ML} // \overline{BC}$$
  $$NL = 2r \quad y \quad \overline{NL} // \overline{AB}$$
- En ΔABN se tiene $AM = MB$ y $\overline{MT} // \overline{BN} \Rightarrow \overline{MT}$ es base media.
- Luego: $MT = n$
- De los anterior, se tendrá:
  $$MT = TL = n$$
  $\Rightarrow \overline{NT}$ es mediana de ΔMNL .
- En forma análoga se verifica $\overline{MQ}$ es mediana del ΔMNL .
- Del criterio principal, como $\overline{NT}$ y $\overline{MQ}$ son medianas:

  $\therefore$ G es baricentro del ΔMNL .

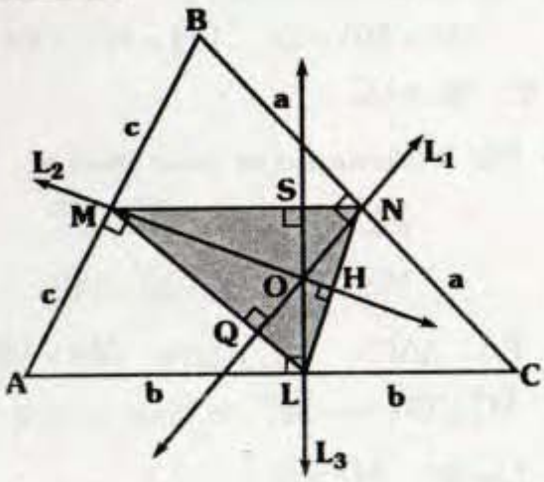
10.3 El circuncentro de todo triángulo es ortocentro de su triángulo mediano.



Si $\triangle MNL$: Triángulo mediano del $\triangle ABC$.
y O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

$\Rightarrow$ **O: Ortocentro del $\triangledown MNL$**

Demostración:

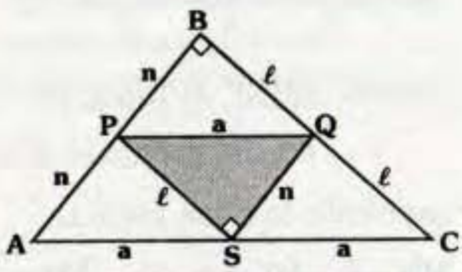


En el gráfico:

- $\triangle MNL$ es el triángulo mediano del $\triangle ABC$.
- Se sabe entonces:
  $AM = MB$, $AL = LC$ y $CN = NB$
- Se trazan $\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$ mediatrices de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
- Luego: O es circuncentro del $\triangle ABC$.
- También se sabe: $\overline{MN}$, $\overline{NL}$ y $\overline{ML}$ son las bases medias para el $\triangle ABC$, entonces:
  $\overline{MN} // \overline{AC}$, $\overline{LN} // \overline{AB}$ y $\overline{ML} // \overline{BC}$
- Luego se tendrá por propiedad de las paralelas:
  $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{ML}$, $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overline{NL}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overline{MN}$
  $\Rightarrow$ $\overline{MH}$, $\overline{NQ}$ y $\overline{LS}$: alturas del $\triangle MNL$.
  $\therefore$ O es ortocentro de $\triangle MNL$.

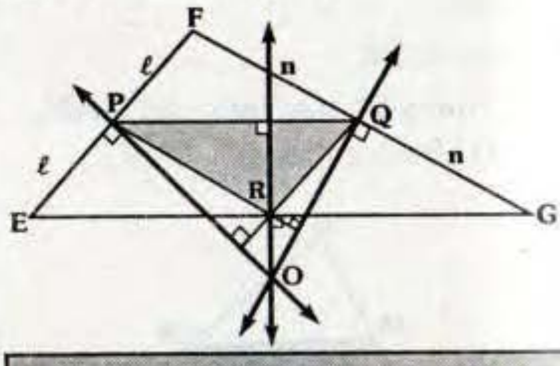
Observación

$\triangle ABC$: *Triángulo rectángulo*



$\triangle PQS$: Es el triángulo mediano de $\triangle ABC$
S: Circuncentro del $\triangle ABC$.
S: Ortocentro del $\triangle PQS$.

$\triangle EFG$: *Obtusángulo*

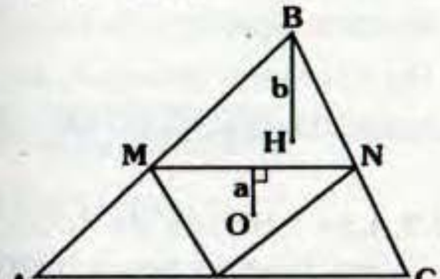


$\triangle PQR$: Triángulo mediano del $\triangle EFG$.
O: Circuncentro del $\triangle EFG$.
O: Ortocentro del $\triangle PQR$.

10.4 En todo triángulo la distancia de su ortocentro a un vértice es igual a cuatro veces la distancia del circuncentro de su triángulo mediano al lado paralelo al lado opuesto al vértice mencionado.

Si H: Ortocentro del ΔABC y

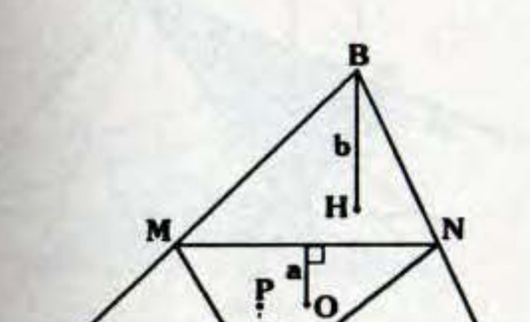
O: Circuncentro del triángulo mediano MNL.



$\Rightarrow \boxed{b = 4a}$

Demostración:

- Se ubica el circuncentro P del ΔABC, por el teorema anterior P es ortocentro del ΔMNL.



- ΔMNL: Por el teorema 8.6(A):

$$\Rightarrow PL = 2a$$

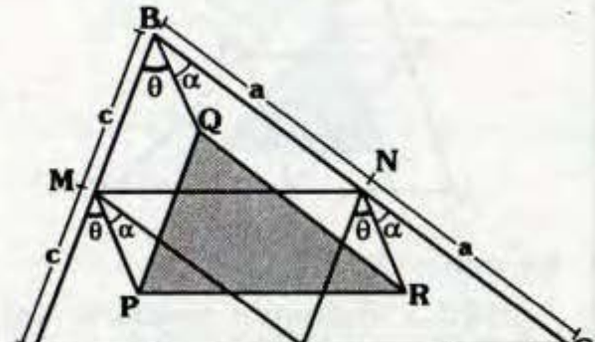
- Análogamente en el ΔABC, se tiene:

$$\therefore b = 4a$$

10.5 Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$). Sean P, Q y R punto homólogos de los triángulos AML, MBN y LNC respectivamente, se cumple.

$$\Delta PQR \cong \Delta MLN$$

Demostración:



- Sea ΔMNL, triángulo mediano del ΔABC.
- Por teorema:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

- Entonces: $MN = b$, $NL = c$, $ML = a$
- Por condición, P, Q y R son puntos homólogos, entonces:

$$MP = BQ = NR$$

$$m\measuredangle AMP = m\measuredangle MBQ = m\measuredangle LNR = \theta$$

$$m\measuredangle PML = m\measuredangle QBN = m\measuredangle RNC = \alpha$$

- Luego, se tendría:

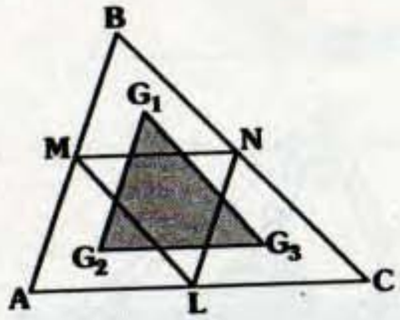
  PMBQ, QBNR y PMNR son paralelogramos.
- Entonces: $PQ = c$, $QR = a$ y $PR = b$
- Finalmente por caso de congruencia LLL.

$$\Delta PQR \cong \Delta NLM$$

Observación

Del teorema anterior podemos considerar casos particulares, cuando los puntos homólogos son algunos de los puntos notables.

Por ejemplo:



En este caso:

ΔMNL : *Triángulo mediano del* ΔABC .

G_1 : *Baricentro del* ΔMBN .

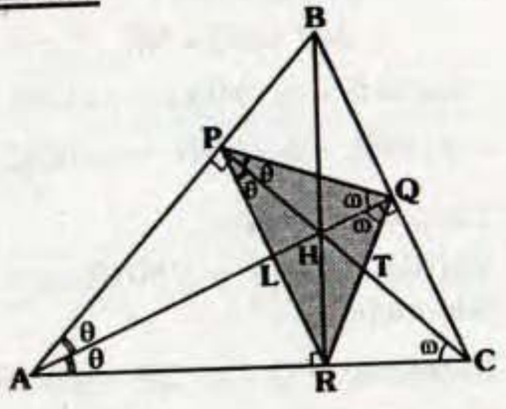
G_2 : *Baricentro del* ΔAML .

G_3 : *Baricentro del* ΔLNC .

$\Rightarrow \quad \Delta G_1G_2G_3 \cong \Delta LMN$

10.6 El ortocentro de todo triángulo acutángulo es incentro de su respectivo triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico:

  ΔABC : Acutángulo

  H: Ortocentro del ΔABC

- $\square RHQC$ y $\square APQC$: Inscriptibles

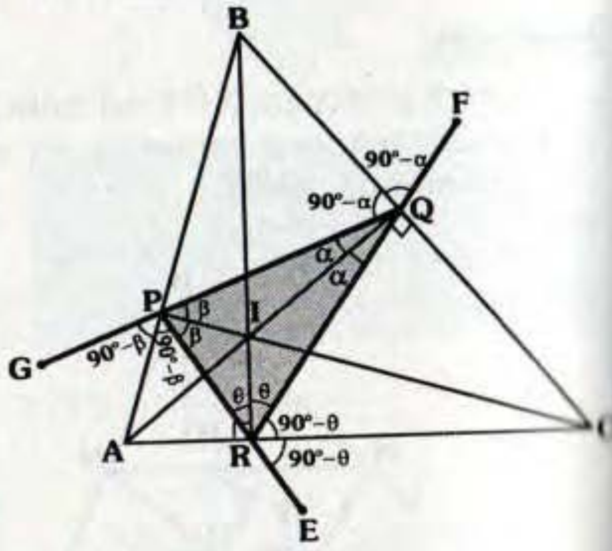
  $\Rightarrow \; m\measuredangle RCH = m\measuredangle RQA = \omega$

  y $\; m\measuredangle ACP = m\measuredangle AQP = \omega$

- En ΔPQR (triángulo órtico del ΔABC).
- Se tiene $\overline{QL}$ es bisectriz interior.
- En forma análoga, se verifica $\overline{PT}$ es bisectriz interior.
- Por el criterio principal, se tendrá entonces H es incentro del ΔPQR .

10.7 Los vértices de todo triángulo acutángulo son excentros de su triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico:

  ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC .

- Por el teorema anterior I es incentro de ΔPQR .

- Luego al prolongar $\overline{QP}$, $\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$ se tendrá:

  $m\measuredangle GPA = m\measuredangle APR = 90° - \beta$

$m\measuredangle ERC = m\measuredangle CRQ = 90° - \theta$

$m\measuredangle FQB = m\measuredangle BQP = 90° - \alpha$

- Se concluye entonces para el ΔPQR

  A es excentro relativo a $\overline{PR}$.

  B es excentro relativo a $\overline{PQ}$.

  C es excentro relativo a $\overline{RQ}$.

Observación

ΔABC: *Obtusángulo.*

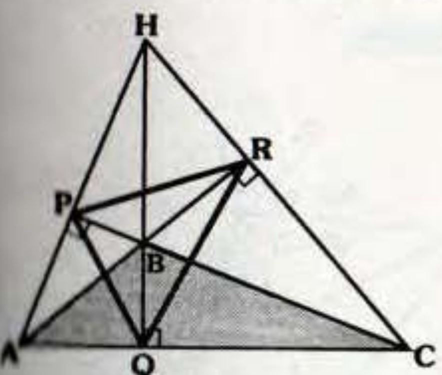
ΔPQR: *Triángulo órtico del* ΔABC.

Se cumple:

B: *es incentro del* ΔPQR.

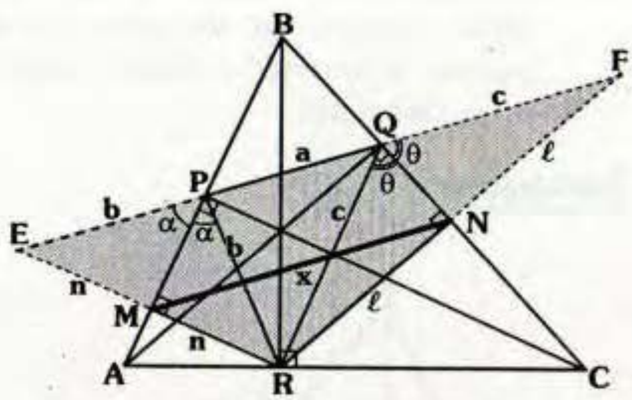
H: *ortocentro del* ΔABC.

A, H y C: *Excentros del* ΔPQR.



10.8 La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico: ΔPQR: Triángulo órtico del ΔABC.

- Se va a demostrar: $x = \dfrac{a+b+c}{2}$

- Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

$$m\measuredangle EPA = m\measuredangle APR = \alpha$$

$$m\measuredangle RQC = m\measuredangle CQF = \theta$$

- Se prolonga $\overline{RM}$ hasta E y $\overline{RN}$ hasta F se tiene entonces que en los triángulos EPR y RQF: $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son bisectrices y alturas.

  $\Rightarrow$ ΔRQF y ΔRPA son isósceles

  $\Rightarrow$ $EP = PR = b$ y $RQ = QF = c$

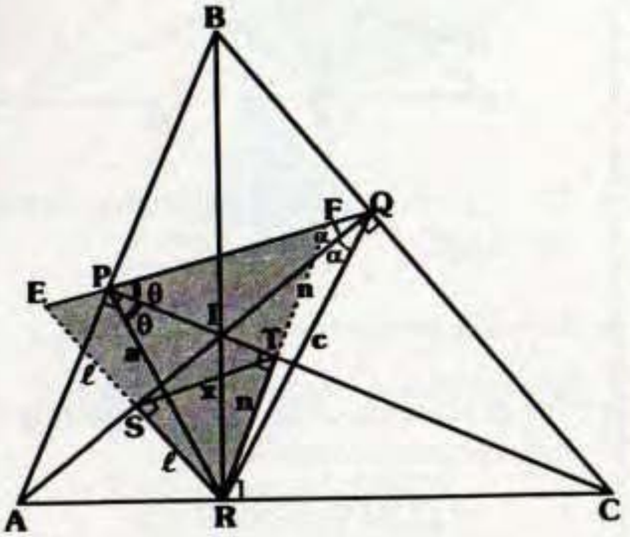
- Además: $EM = MR$ y $RN = NF$

- En ΔERF, $\overline{MN}$ es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

10.9 En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

Demostración:



- Por teorema 10.5, I es incentro del ΔPQR al prolongar $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$ hasta E y F respectivamente se tendrá:

ΔQRE y ΔPRF isósceles

$\Rightarrow QR = QE = c$ y $PR = PF = a$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

ΔREF: $\overline{ST}$ es base media.

$\Rightarrow EF = 2x$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$EP = EQ - PQ = c - b$

$\Rightarrow 2x - a = c - b$

$\Rightarrow 2x = a + c - b$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

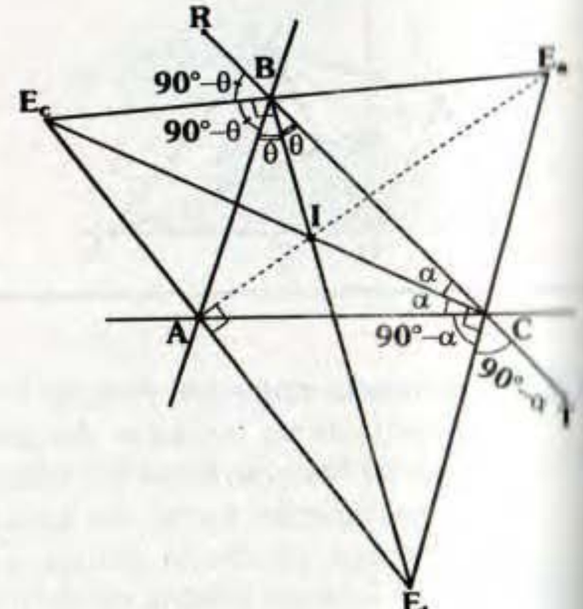
$$\therefore x = \frac{a+b+c}{2} - b$$

10.10 De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

(*ver Teorema de Fagnano*)

10.11 El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

Demostración:



En el gráfico:

$$m\measuredangle ERC = m\measuredangle CRQ = 90° - \theta$$

$$m\measuredangle FQB = m\measuredangle BQP = 90° - \alpha$$

- Se concluye entonces para el ΔPQR

  A es excentro relativo a $\overline{PR}$.

  B es excentro relativo a $\overline{PQ}$.

  C es excentro relativo a $\overline{RQ}$.

Observación

ΔABC : *Obtusángulo.*

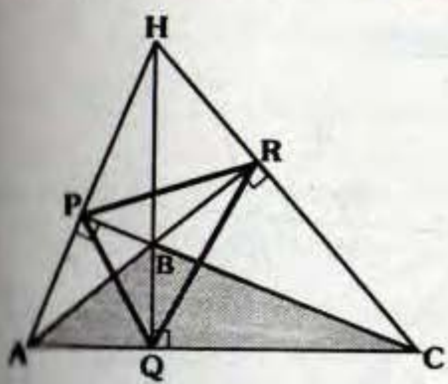
ΔPQR : *Triángulo órtico del* ΔABC.

Se cumple:

B: *es incentro del* ΔPQR.

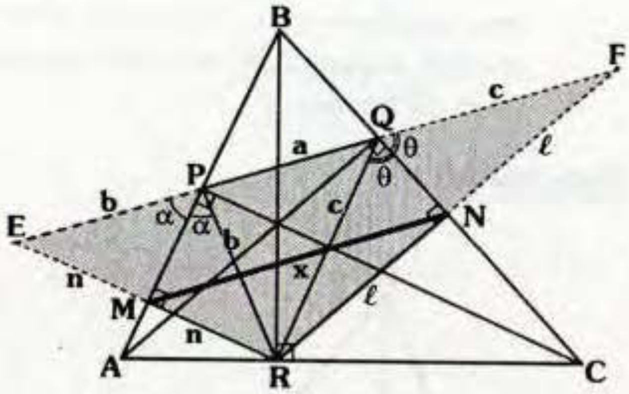
H: *ortocentro del* ΔABC.

A, H y C: *Excentros del* ΔPQR.



10.8 La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico: ΔPQR :Triángulo órtico del ΔABC.
- Se va a demostrar: $x = \dfrac{a+b+c}{2}$
- Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

$$m\measuredangle EPA = m\measuredangle APR = \alpha$$

$$m\measuredangle RQC = m\measuredangle CQF = \theta$$

- Se prolonga $\overline{RM}$ hasta E y $\overline{RN}$ hasta F se tiene entonces que en los triángulos EPR y RQF: $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son bisectrices y alturas.

  $\Rightarrow$ ΔRQF y ΔRPA son isósceles

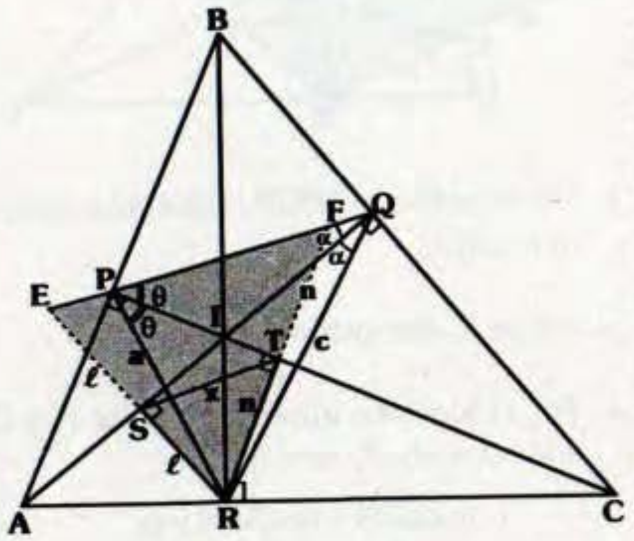
  $\Rightarrow$ $EP = PR = b$ y $RQ = QF = c$

- Además: $EM = MR$ y $RN = NF$
- En ΔERF, $\overline{MN}$ es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

10.9 En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

Demostración:



- Por teorema 10.5, I es incentro del ΔPQR al prolongar $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$ hasta E y F respectivamente se tendrá:

$$\Delta QRE \text{ y } \Delta PRF \text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow QR = QE = c \text{ y } PR = PF = a$$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

ΔREF: $\overline{ST}$ es base media.

$$\Rightarrow EF = 2x$$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$$EP = EQ - PQ = c - b$$

$$\Rightarrow 2x - a = c - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + c - b$$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

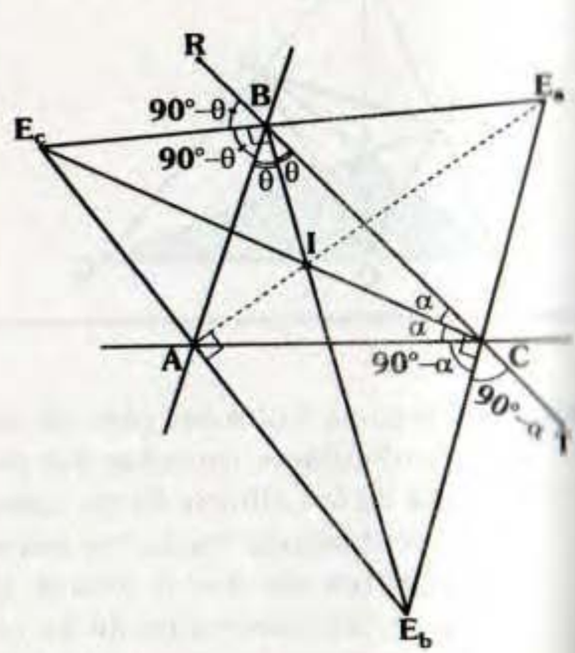
$$\therefore x = \frac{a+b+c}{2} - b$$

10.10 De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

(*ver Teorema de Fagnano*)

10.11 El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

Demostración:



En el gráfico:

- $\Delta E_a E_b E_c$: Triángulo exincentral o triángulo de los excentros del ΔABC.

  I: Incentro del ΔABC.

- Se observa:

$$m\measuredangle ACE_b = m\measuredangle E_bCT = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle E_cCE_b = 90^\circ$$

$$m\measuredangle ABE_c = m\measuredangle E_cBR = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle E_bBE_c = 90^\circ$$

- Como: $\overline{E_cC}$ y $\overline{E_bB}$ son alturas entonces I es ortocentro del $\Delta E_a E_b E_c$.

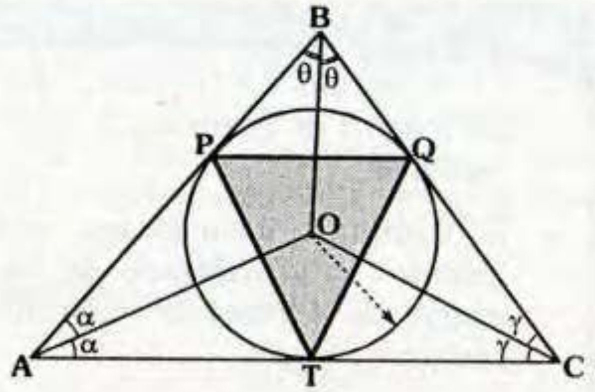
Observación

También se puede indicar:

- A, I y E_a: *Colineales.*
- $\Delta E_a E_b E_c$: *Acutángulo.*
- ΔABC *es triángulo órtico del triángulo* $E_aE_bE_c$.
- $\Delta E_a E_b E_c$ *es triángulo antiórtico del* ΔABC.

10.19 El circuncentro del triángulo de contacto interior es incentro del triángulo inicial.

Demostración:



En el gráfico:

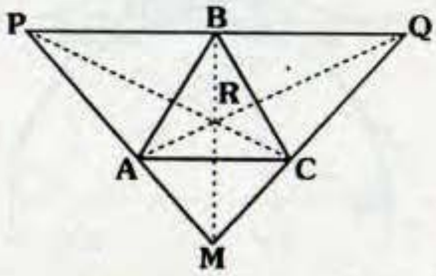
- ΔPQT es el triángulo de contacto interior del triángulo ABC.
- O es circuncentro del ΔPQT.
- Por teorema de circunferencia: $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{CO}$ y $\overleftrightarrow{BO}$ son bisectrices de los ángulos BAC, ACB y ABC respectivamente.

$$\therefore \text{ O es incentro del } \Delta ABC.$$

10.13 OTROS TRIÁNGULOS ESPECIALES

TRIÁNGULO ANTICEVIANO

El triángulo anticeviano de un triángulo ABC es el triángulo PMQ tal que el triángulo ABC es triángulo ceviano del triángulo PQR.



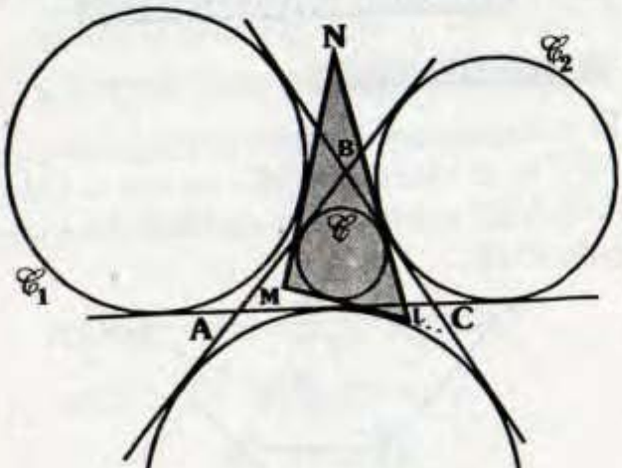
- El ΔPMQ es anticeviano del ΔABC respecto de R.
- **El ΔABC es ceviano del ΔPMQ respecto de R.**

Nota

- *El triángulo anticeviano del baricentro es el triángulo antimediano.*
- *El triángulo anticeviano del incentro es el triángulo de los excentros o triángulo exincentral.*
- *El triángulo anticeviano del ortocentro es el triángulo antiórtico..*

TRIÁNGULO INTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices resultan de la intersección de las tangentes interiores comunes a la circunferencia inscrita y a una de las circunferencias exinscritas que no corresponden a los lados.



En el gráfico:

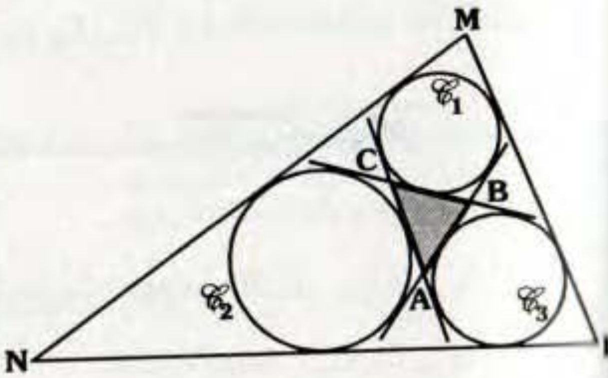
$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$: Circunferencias exinscritas

$\mathscr{C}$: Circunferencia inscrita.

ΔMNL : Triángulo intangencial del ΔABC

TRIÁNGULO EXTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices son las intersecciones de las tangentes exteriores comunes a las circunferencias exinscritas que no corresponden a las prolongaciones de los lados.



En el gráfico $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas del ΔABC .

ΔMNL : Triángulo extangencial del ΔABC .

11. RECTAS NOTABLES

A continuación vamos a estudiar aquellas rectas contenidas en un mismo plano, determinado por dichas rectas o por alguna figura relacionada a las rectas (ángulo, triángulo, circunferencia, etc.) a las cuales llamaremos rectas notables.

11.1 RECTAS PARALELAS

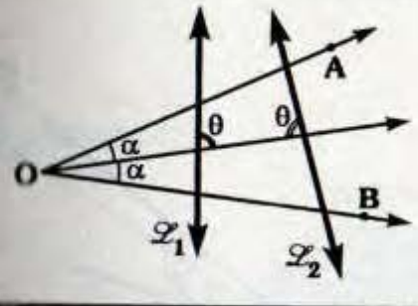
Son aquellas que no tiene punto en común.

Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{\ \}$

$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,/\!/\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}}$

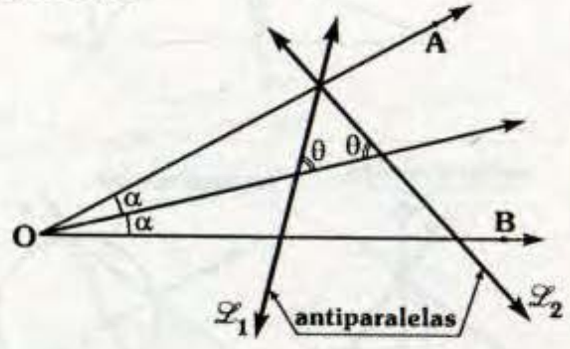
11.2 RECTAS ANTIPARALELAS

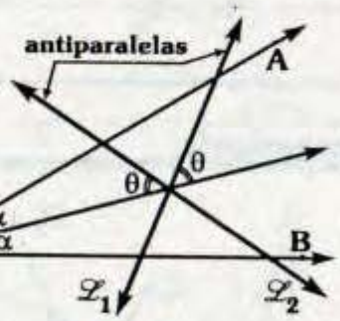
Dos rectas son antiparalelas con respecto a un ángulo, si la bisectriz de dicho ángulo es transversal y forma ángulos interiores al mismo lado de la transversal, de igual medida (y diferentes de 90°) con las rectas en mención.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.

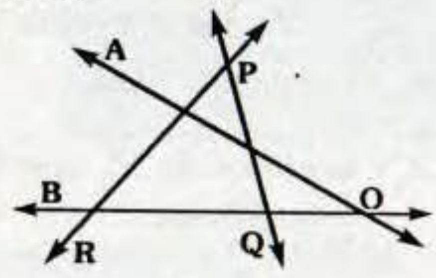
También:





Nota

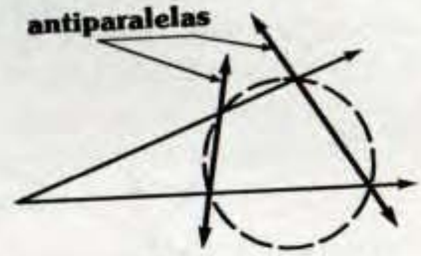
- *Los lados del ángulo son antiparalelos con respecto al ángulo formado por las rectas antiparalelas.*

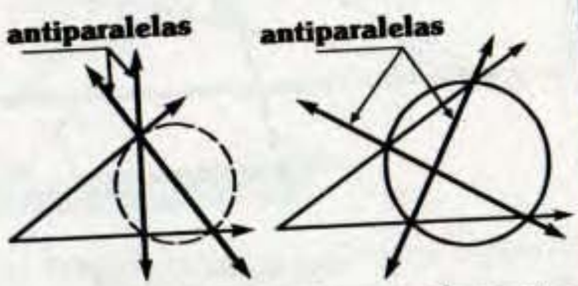


Si: $\overleftrightarrow{PQ}$ *y* $\overleftrightarrow{PR}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo* AOB.

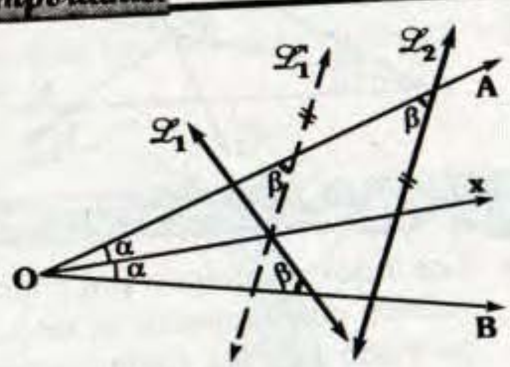
$\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{OA}$ *y* $\overleftrightarrow{OB}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo* RPQ.

- *Los puntos de corte entre los lados del ángulo y las rectas antiparalelas son concíclicos.*





Importante:



Si: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ *y* $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.*

y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1'}$: *simétrica de* $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ *con respecto a* $\overleftrightarrow{OX}$.

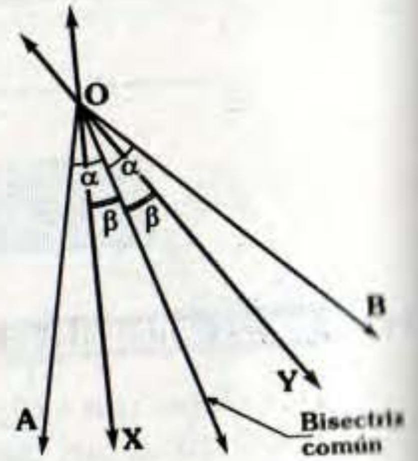
$$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1'} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}}$$

Esta es la propiedad que sugiere el uso del término antiparalelo.

11.3 RECTAS ISOGONALES

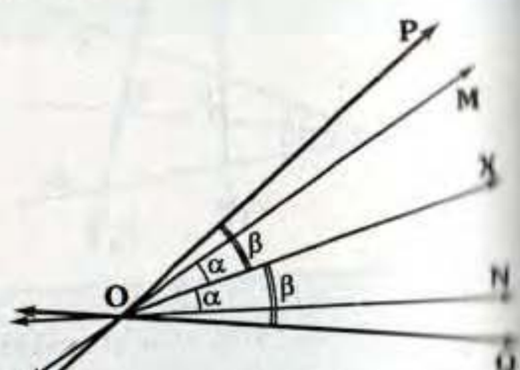
Dos rectas son conjugadas isogonales o simplemente isogonales respecto a un ángulo, cuando la bisectriz de dicho ángulo es también bisectriz del ángulo formado por las rectas en mención.

$\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ son isogonales con respecto al $\measuredangle AOB$.



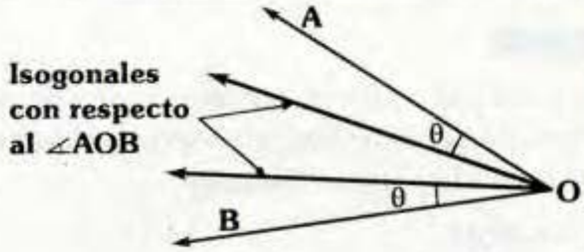
También:

$\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{OQ}$ son isogonales con respecto al $\measuredangle MON$.



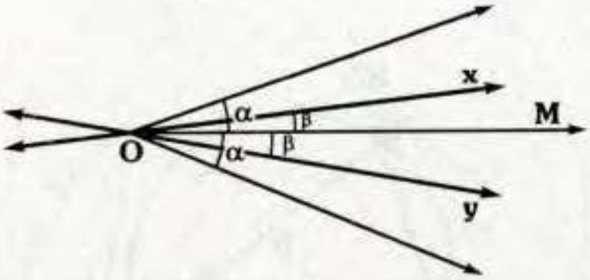
Nota

- Las isogonales con respecto a un ángulo forman ángulos de igual medida con los lados del ángulo.

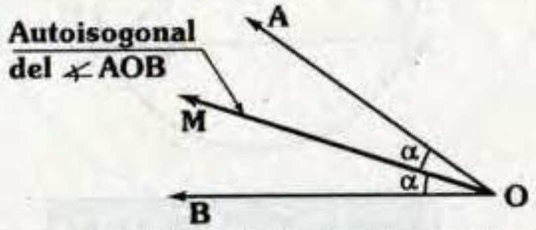


- Las isogonales con relación a un ángulo son simétricos con respecto a la bisectriz de dicho ángulo.

  Las isogonales $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ son simétricas con respecto a la bisectriz OM.



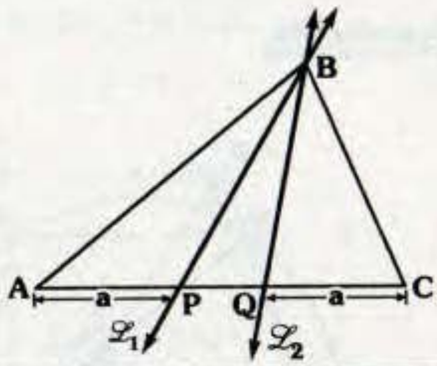
- La bisectriz de un ángulo, también es conocida como la autoisogonal.



11.4 RECTAS ISOTÓMICAS

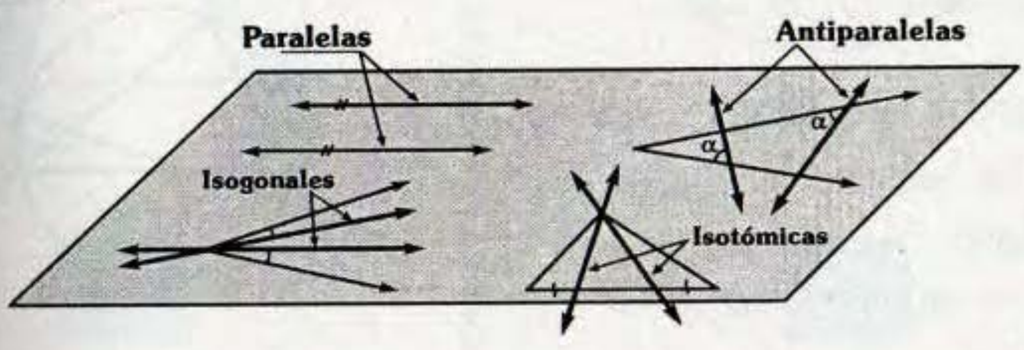
Dos rectas son isotómicas con respecto a un triángulo cuando pasando por un mismo vértice determinan en el lado opuesto dos segmentos extremos de igual longitud.

Si AP=QC=a



$\Rightarrow$ **$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son isotómicas con respecto ΔABC.**

En resumen:

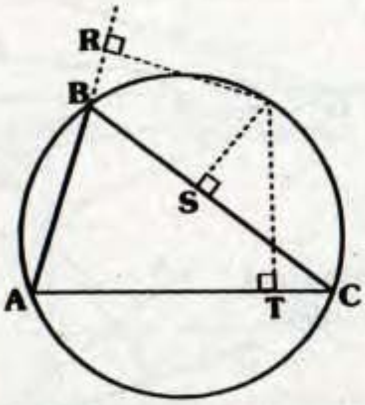


11.5 RECTA DE SIMSON - WALLACE

TEOREMA

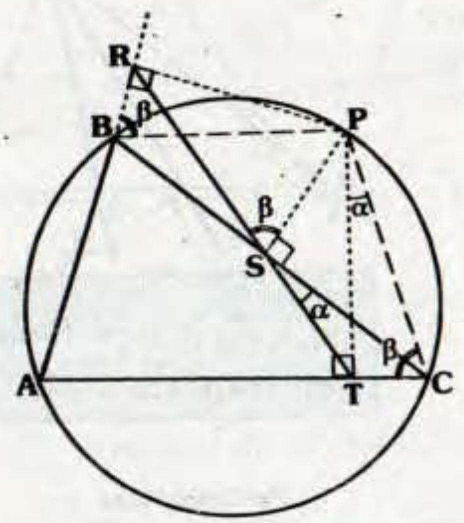
En todo triángulo las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados son colineales.

Se cumple:



R, S y T: Colineales

Demostración:



- $\triangle$SPCT: Inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle TSC = m\measuredangle TPC = \alpha$

- $\triangle$ABPC: Inscrito

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle RBP = m\measuredangle PCA = \beta$

- $\triangle$BRPS: Inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle RBP = m\measuredangle RSP = \beta$

- $\triangle$PTC : $\alpha + \beta = 90^\circ$, con lo cual en "S" : $\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$.

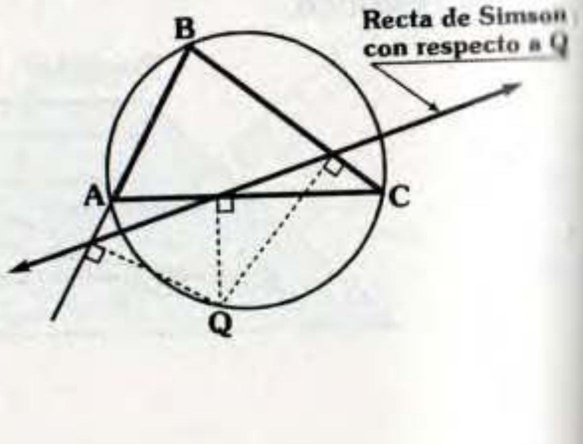
  $\therefore$ R, S y T son colineales

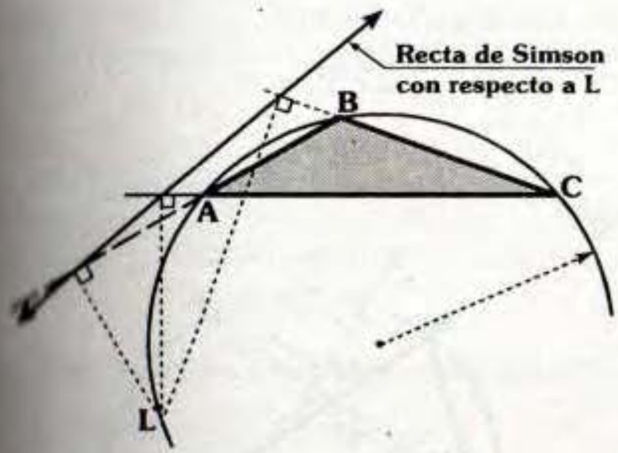
RECTA SIMSON

Es la recta que pasa por las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita a los lados de un triángulo.

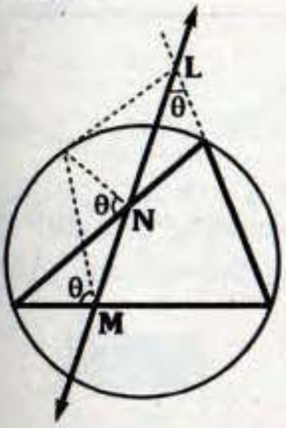
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Simson del ΔABC, con respecto a P.

También:



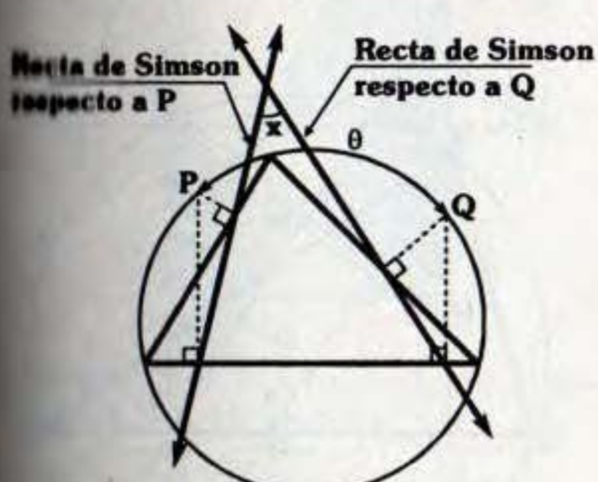


Generalizando:



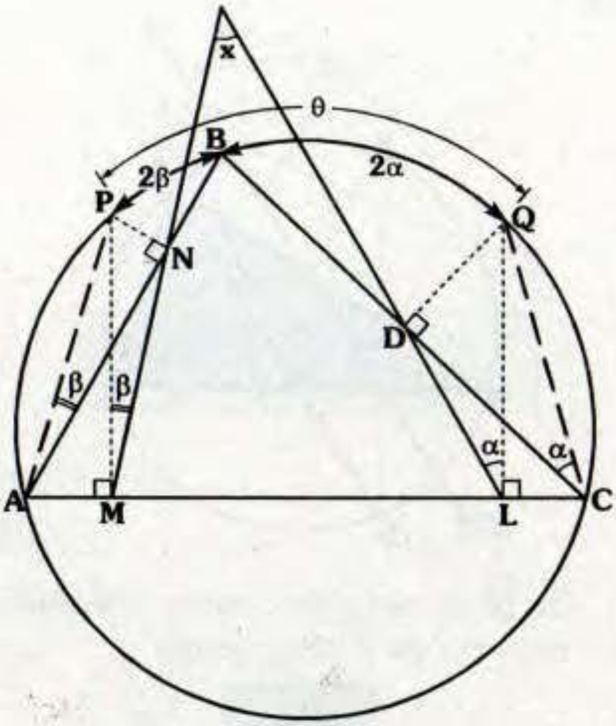
M, N, L son colineales

11.8.1 ÁNGULO ENTRE LAS RECTAS DE SIMSON



$$\boxed{x = \frac{\theta}{2}}$$

Demostración:



- Se observa que $\overline{PM} // \overline{QL}$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = x \qquad \ldots(I)$$

- $\triangle$APNM: Inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle PAN = m\measuredangle PMN = \beta$$

- $\triangle$DQCL: Inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle DLQ = m\measuredangle DCQ = \alpha$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{PB} = 2\beta \quad y \quad m\widehat{BQ} = 2\alpha$$

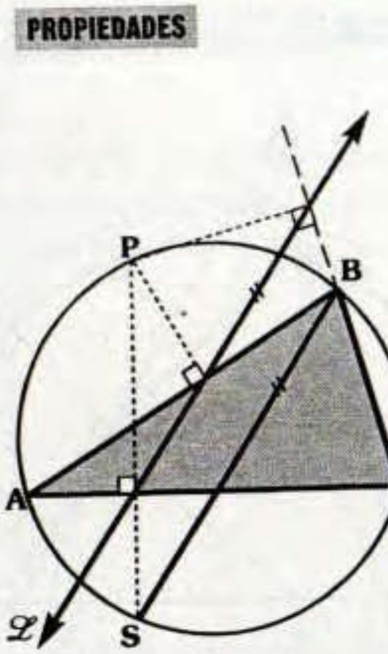
- Como: $2\alpha + 2\beta = \theta \qquad \ldots(II)$

- De (I) y (II):

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{\theta}{2}}$$

11.5.2 PROPIEDADES

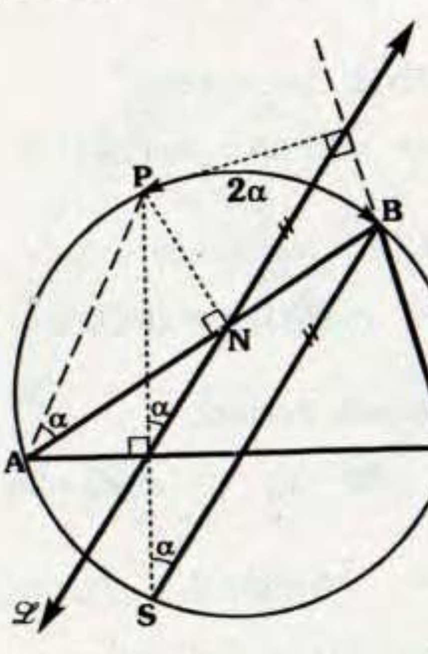
1



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta de Simson del ΔABC, respecto de P. Se cumple :

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{BS}}$$

Demostración:



- $\triangle$APNL: Inscriptible

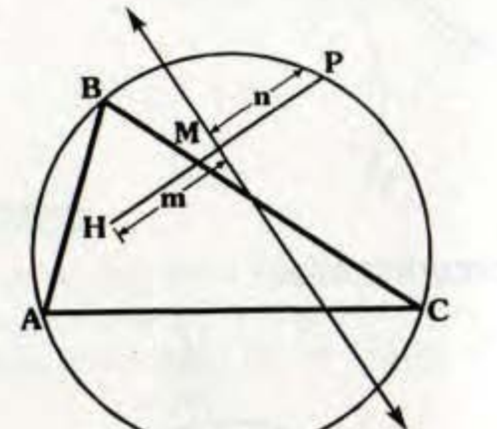
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PAN = m\measuredangle PLN = \alpha$

- Por ángulo inscrito:

  $m\measuredangle PSB = \alpha$

  $\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{BS}$

2

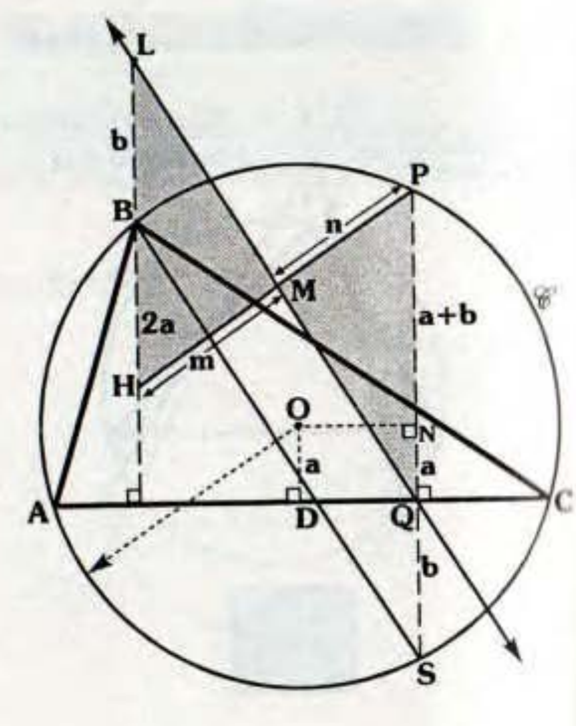


Si H : ortocentro del ΔABC y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ recta de Simson del ΔABC, respecto a P.

$$\boxed{m = n}$$

Demostración:

Método 1



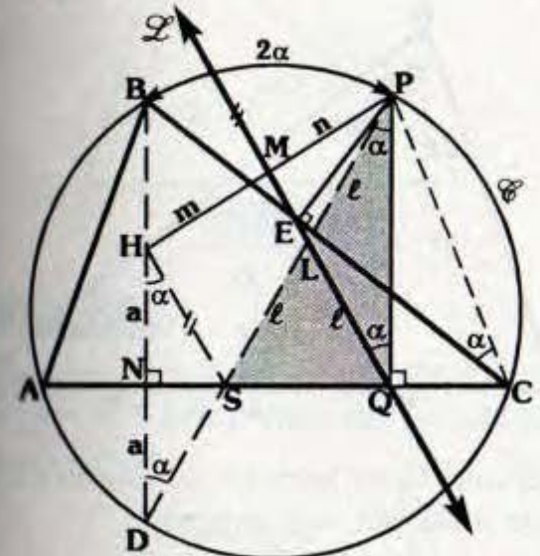
- Trazamos $\overline{PQ}$ cuya prolongación corta a $\mathscr{C}$ en S.
- De la propiedad anterior : $\overline{BS} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- BLQS: Paralelogramo

  $\Rightarrow \; QS = BL = b$
- Ubicamos el circuncentro O del ABC y trazamos $\overline{OD} \perp \overline{AC}$.
- Por el teorema 8.6: $BH = 2a$
- ODQN: Rectángulo

  $\Rightarrow \; NQ = a$
- Por teorema: $NP = NS = a + b$
- $\Delta HLM \cong \Delta MPQ$ (ALA), se tiene.

  $\therefore \; m = n$

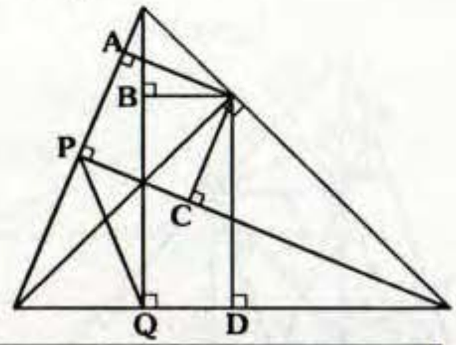
Método 2



- Prolongamos $\overline{BN}$ hasta D, por el teorema 8.5: HN=ND=a
- ΔPQS: $PL = LQ = \ell \;\Rightarrow\; SL = \ell$
- $\overline{ML}$: Base media del ΔPHS.

  $\therefore \; m = n$

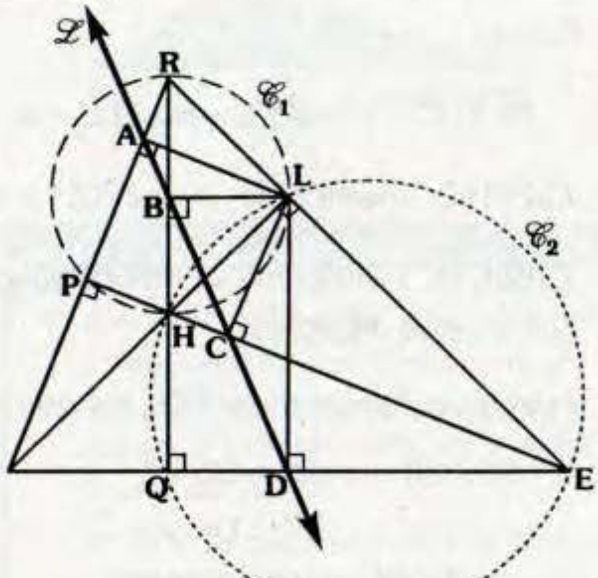
3 Se cumple:



A, B, C y D: Colineales y PQ = AD – BC

Demostración:

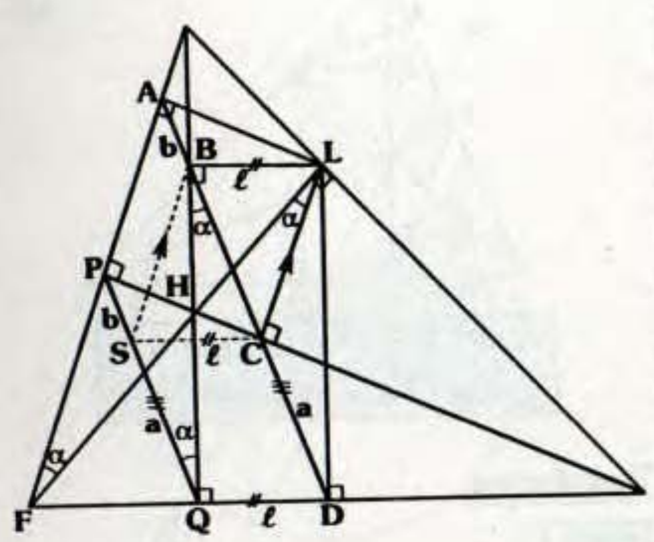
Paso 1



- $\square$RPHL: Inscriptible, con lo cual se observa que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Simson del ΔPRH, respecto a L (A, B y C son colineales) en $\mathscr{C}_1$.
- Análogamente, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Simson del ΔHQE, respecto a L (B, C y D son colineales) en $\mathscr{C}_2$.

  $\therefore$ A, B, C y D son colineales.

Paso 2



- Como:

$$\overline{PF} \,//\, \overline{LC} \Rightarrow m\measuredangle PFL = m\measuredangle FLC = \alpha$$

- $\triangle$FPHQ: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle PQH = \alpha$
- $\triangle$BLCH: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle HBC = \alpha$, con lo cual $\overline{PQ} \,//\, \overline{AD}$.
- Luego ubicamos S en $\overline{PQ}$, tal que

$$\overline{SC} \,//\, \overline{QD} \Rightarrow SC = QD = \ell \quad y$$
$$SQ = DC = a$$
(SCDQ *paralelogramo*)

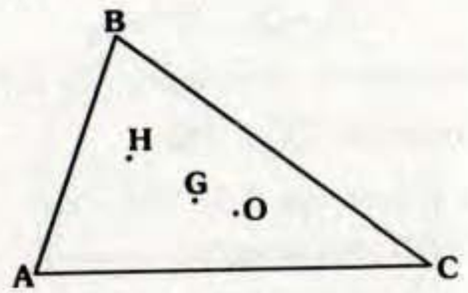
- BLDQ: Rectángulo $\Rightarrow BL = QD = \ell$
- Puesto que $\overline{SC} \,//\, \overline{BL}$ y $SC = BL = \ell$
  $\Rightarrow \overline{BS} \,//\, \overline{CL}$ (SCLB: *paralelogramo*)
- ABSP: Paralelogramo

$$\Rightarrow PS = AB = b$$
$$\therefore \quad PQ = AD - BC$$

11.6 RECTA DE EULER

TEOREMA

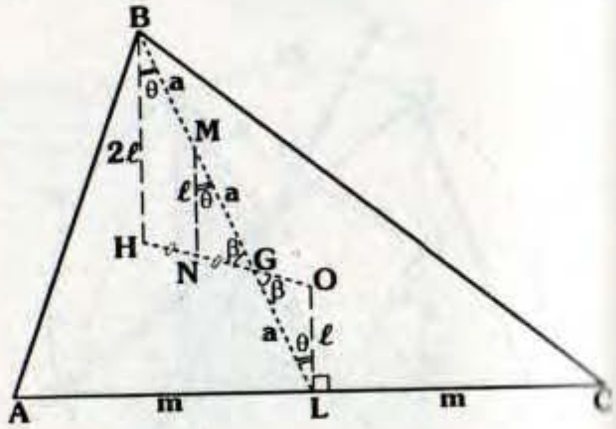
El ortocentro, baricentro y circuncentro, de un triángulo no equilátero, son colineales.



Para el ΔABC: H: Ortocentro
G: Baricentro ; O: Circuncentro

H, G y O son colineales

Demostración:



- Como G es baricentro, entonces $\overline{BL}$ es mediana, así tenemos:

$$AL = LC = m \quad y \quad BG = 2(GL) = 2a$$

- Por el teorema 8.4 (B):

$$m\measuredangle OLC = 90^\circ$$

- Por el teorema 8.6 (A):

$$BH = 2(OL) = 2\ell$$

- Luego trazamos la base media MN del ΔBHG $(BM = MG = a)$.

  $\Rightarrow MN = \ell \quad y \quad \overline{MN} // \overline{BH}$

- $\Delta MNG \cong \Delta GOL$ (LAL)

  $\Rightarrow m\measuredangle MGN = m\measuredangle LGO = \beta$

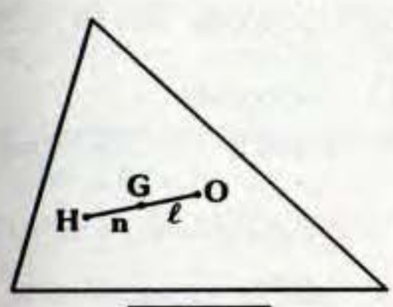
  $\therefore$ H, G y O son colineales

Además: $HG = 2(GO)$

COROLARIO

En todo triángulo no equilátero, la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del circuncentro al baricentro.

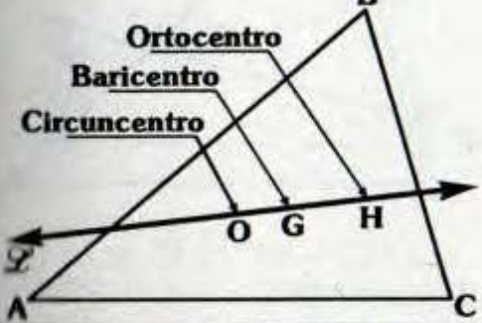
Se cumple:



$$\boxed{n = 2\ell}$$

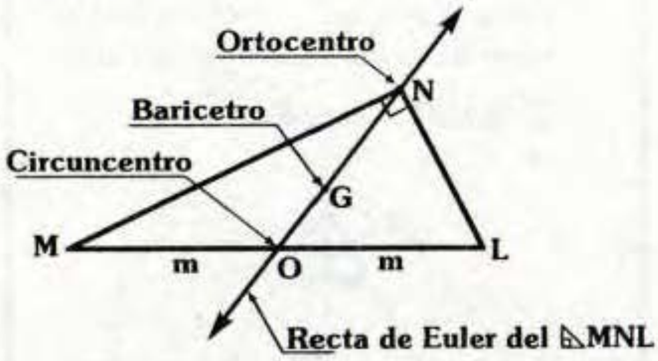
RECTA DE EULER

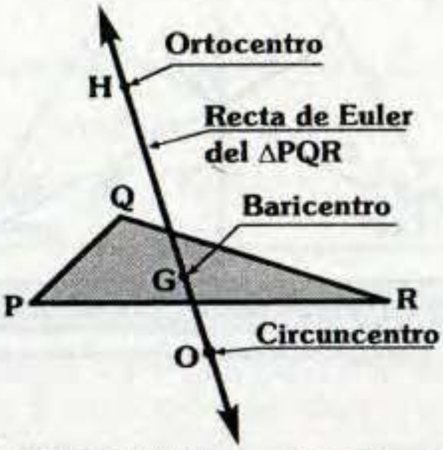
Es la recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo no equilátero.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: **Recta de Euler del ΔABC**

También:

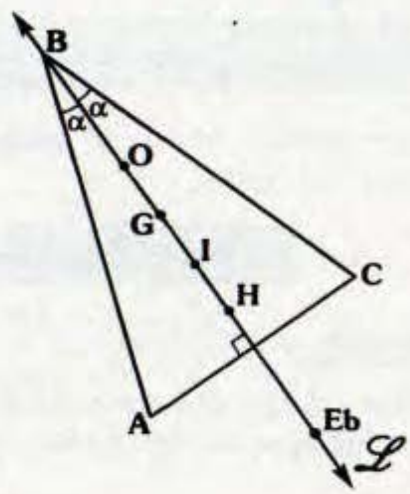




Nota

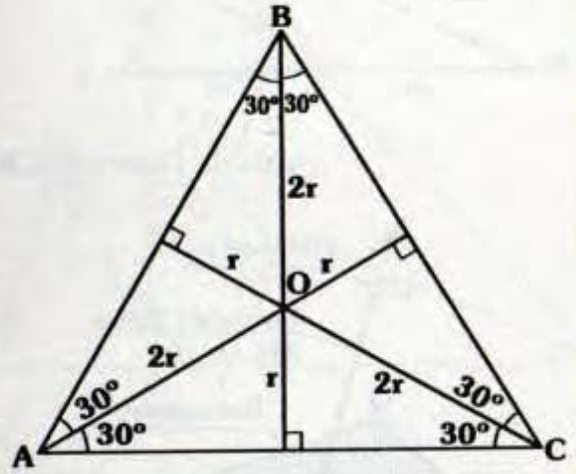
- *En todo triángulo isósceles, el circuncentro, baricentro, incentro, ortocentro y el excentro relativo a la base, son colineales (recta de Euler).*

  $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: *Recta de Euler del triángulo isósceles* ABC *de base* $\overline{AC}$.



- *Para todo triángulo equilátero el circuncentro, baricentro, incentro y baricentro, coinciden.*

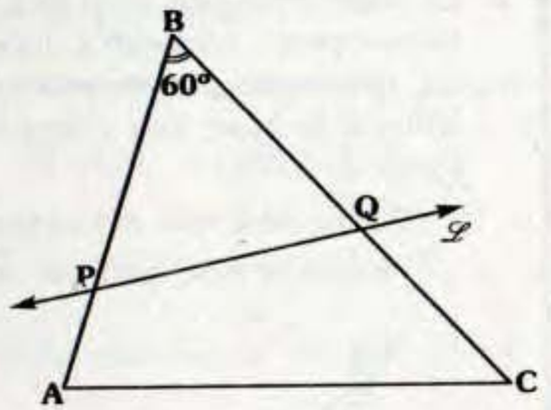
  Si ΔABC : *Equilátero*



$\Rightarrow$ **O: Circuncentro, incentro, ...**

PROPIEDADES

1

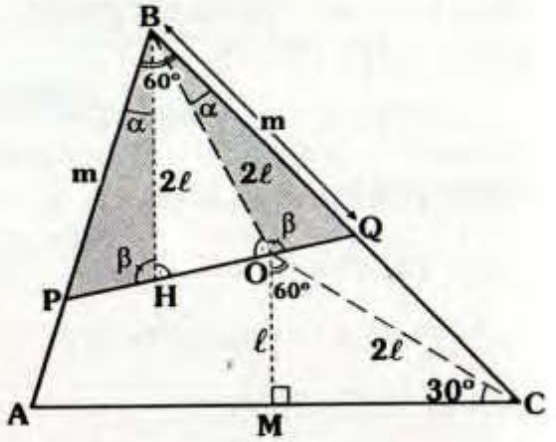


Si: $m\measuredangle ABC = 60°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del ΔABC.

$\Rightarrow$ **ΔPBQ : Equilátero**

Demostración:

- Ubicamos el ortocentro H y circuncentro O del ΔABC.



- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por el teorema 8.6: $BH = 2(OM) = 2\ell$
- Puesto que O es circuncentro:

  $\Rightarrow m\measuredangle MOC = m\measuredangle ABC = 60°$ y

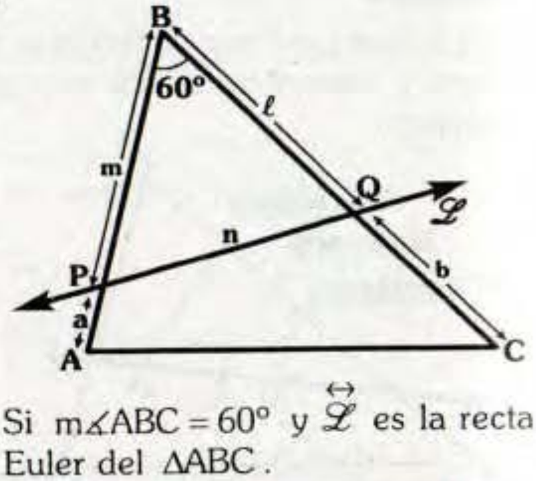
  $OC = OB$
- $\triangle MOC$: Notable $\Rightarrow OC = 2\ell$
- ΔBHO : Isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle BHP = m\measuredangle BOQ = \beta$
- $\Delta BHP \cong \Delta BOQ$ (ALA) $\Rightarrow BP = BQ = m$

  $\therefore$ ΔBPQ es equilátero.

Además: $PH = OQ$

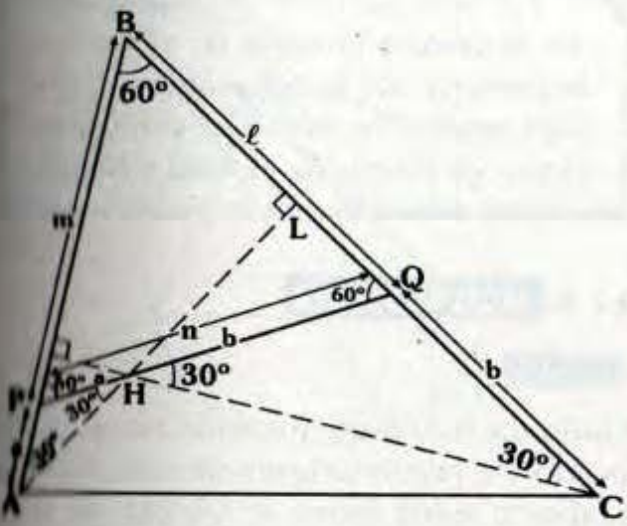
2



Si $m\measuredangle ABC = 60°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del ΔABC.

$\Rightarrow$ $\boxed{m = n = \ell = a + b}$

Demostración:



- Por la propiedad anterior:

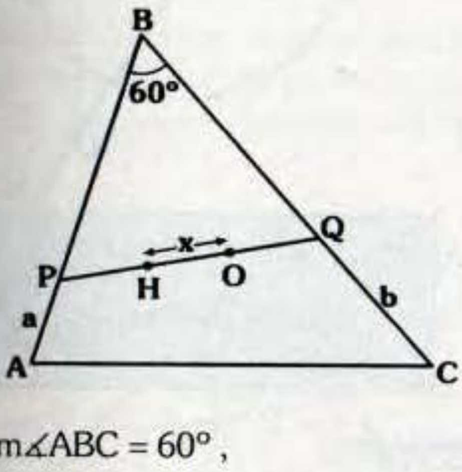
  $m = n = \ell \;$ y $\; m\measuredangle BPQ = 60°$

- Ubicamos el ortocentro H, con lo cual $\overline{AL}$ es altura $\Rightarrow \; m\measuredangle BAL = 30°$.

- ΔAPH : Isósceles $\Rightarrow PH = a$, del mismo modo: $HQ = b$

  $\therefore \; m = \ell = n = a + b$

◆

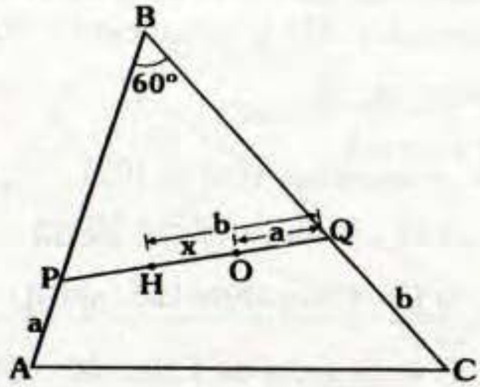


Si: $m\measuredangle ABC = 60°$,

H: Ortocentro y O: Circuncentro.

$\Rightarrow \; \boxed{x = b - a}$

Demostración:



- Se sabe que $\overleftrightarrow{HO}$ es la recta de Euler.
- De las propiedades anteriores

  $PH = a , \; HQ = b \;$ y $\; OQ = a$

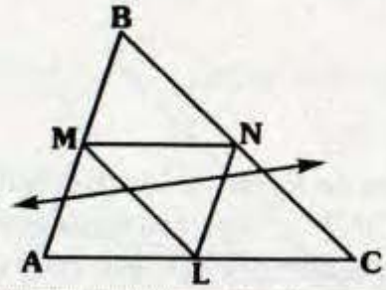
  $\therefore \; x = b - a$

TEOREMA

La recta de Euler de todo triángulo es también la recta de Euler de su respectivo triángulo mediano.

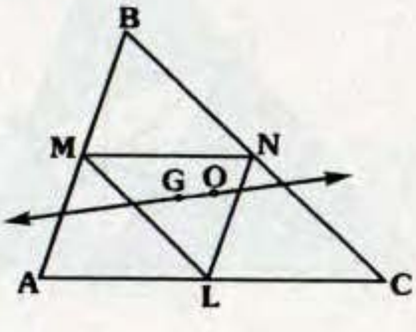
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Euler del ΔABC y

ΔMNL : Triángulo mediano del ΔABC .



$\Rightarrow \; \boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \text{ Recta de Euler del } \Delta MNL.}$

Demostración:



- Puesto que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler, el baricentro (G) y circuncentro (O) se ubican en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

- Por el teorema 10.2 y 10.3:

  $\Rightarrow$ G: Baricentro del ΔMNL.

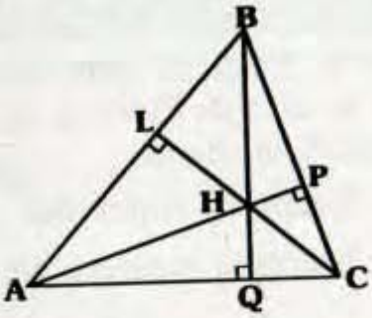
  y O: Ortocentro del ΔMNL.

  $\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del ΔMNL.

TEOREMA

Se cumple:

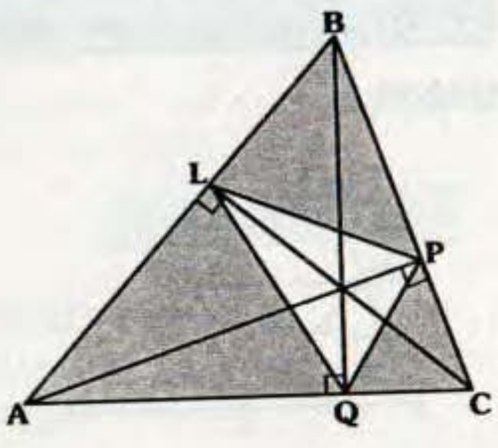
Las rectas de Euler de los triángulos ABH, BCH, ACH y ABC son concurrentes.



TEOREMA

Se cumple:

Las rectas de Euler de los triángulos AQL, BPL, CPQ y la circunferencia de Feuerbach del ΔABC, son concurrentes.



Nota

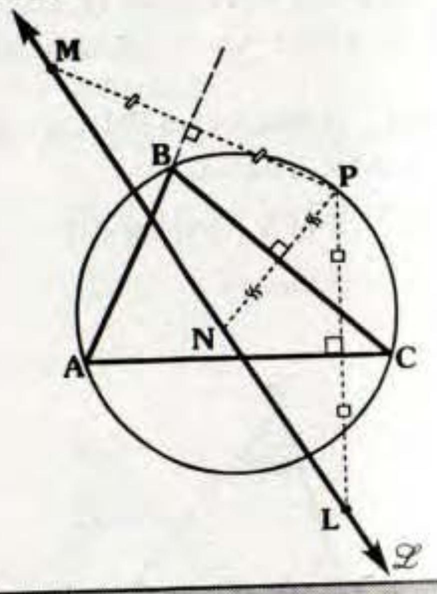
La demostración de este teorema la desarrollaremos en el capítulo denominado temas selectos. También estarán incluídos las demostraciones de Rectas de Housel y Nagel.

11.7 RECTA DE STEINER

TEOREMA

Dado un triángulo, los simétricos de un punto de la circunferencia circunscrita respecto a los lados se ubican en una recta denominada recta de Steiner.

Si, M, N y L son simétricos de P respecto a los lados AB, BC y AC respectivamente.

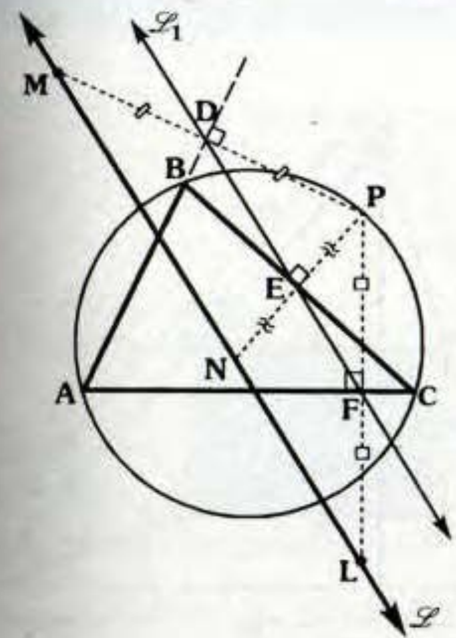


$\Rightarrow$ **M, N y L colineales y**

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Steiner, respecto a P.

Demostración:

- Sabemos: D, E y F son colineales ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: recta de Simson).



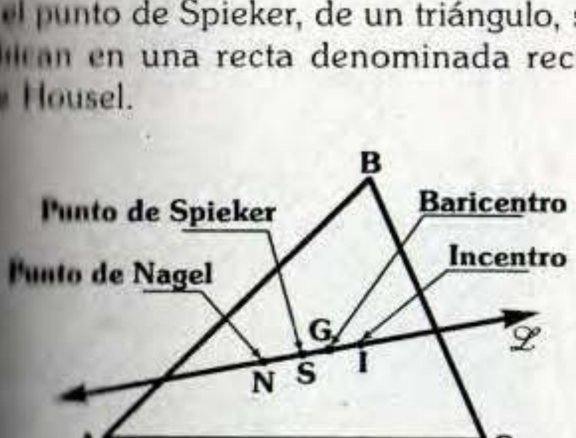
- EF: Base media $\Delta NPL \Rightarrow \overline{NL} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
- ED: Base media $\Delta MNP \Rightarrow \overline{MN} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
- Por postulado de N solo podemos trazar una recta paralela.

  $\therefore$ M, N y L son colineales.

11.8 RECTA DE HOUSEL

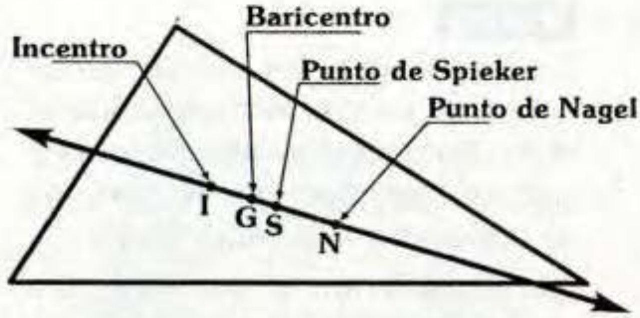
TEOREMA

El incentro, baricentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker, de un triángulo, se ubican en una recta denominada recta de Housel.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: **Recta de Housel del ΔABC**

PROPIEDADES



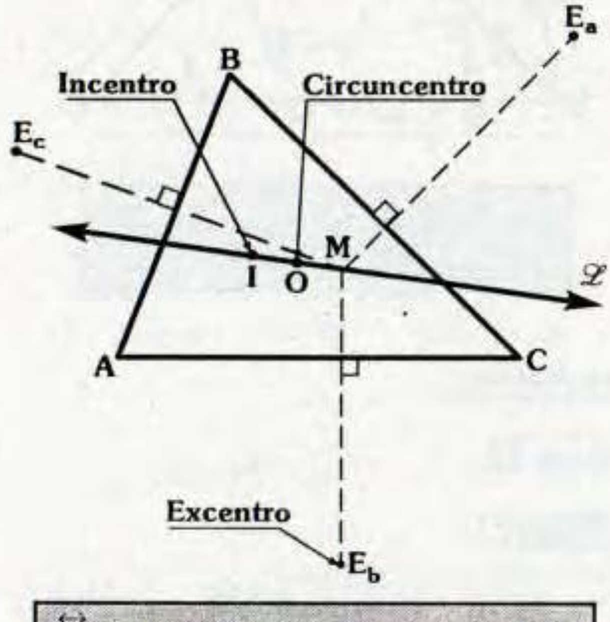
Se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} IS=SN, \quad GN=2(GI) \\ y \quad (IG)(SN)=(GS)(IN) \end{array}}$$

11.9 RECTA DE NAGEL

TEOREMA

El incentro, el circuncentro y el punto de concurrencia de las perpendiculares trazadas desde los excentros a los lados del triángulo, se encuentran en una recta conocida como la recta de Nagel.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: **Recta de Nagel del ΔABC**

Además: $\boxed{IO=OM}$

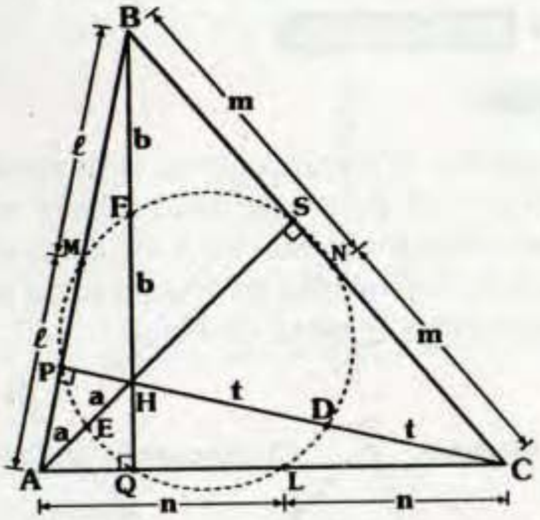
12. CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

12.1 TEOREMA

En un triángulo los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro son concíclicos.

La circunferencia que pasa por dichos puntos se denomina circunferencia de los nueve puntos, circunferencia de Euler o de Feuerbach.

En el gráfico:



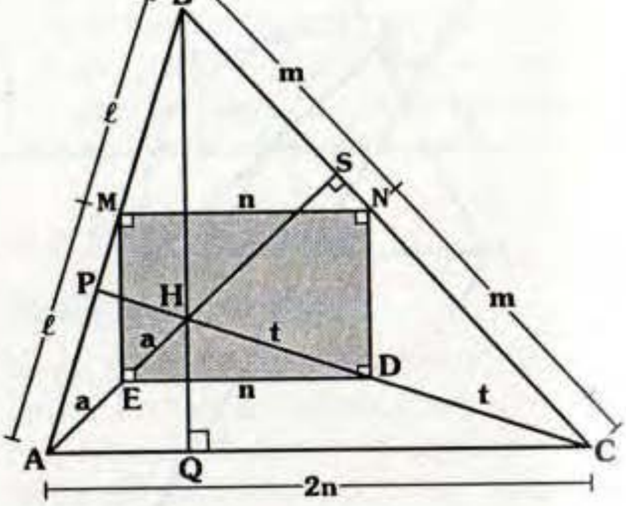
M, N, L, P, Q, S, E, F y D: Concíclicos

Demostración:

Método 1

Paso 1

- En el ΔABC, ΔAHC, ΔAHB y ΔBHC se tiene: $\overline{MN}$, $\overline{ED}$, $\overline{EM}$, $\overline{ND}$ son bases medias respectivamente.



- Por teorema:

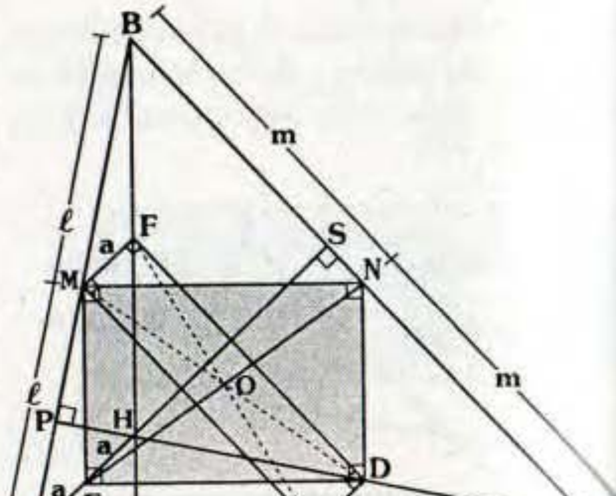
$$\overline{MN} // \overline{AC} \text{ y } \overline{ED} // \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} // \overline{ED}$$

$$\overline{EM} // \overline{HB} \text{ y } \overline{DN} // \overline{HB} \Rightarrow \overline{EM} // \overline{DN}$$

- Pero: $\overline{HB} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{EM} \perp \overline{MN}$

$\Rightarrow$ EMND es rectángulo

Paso 2

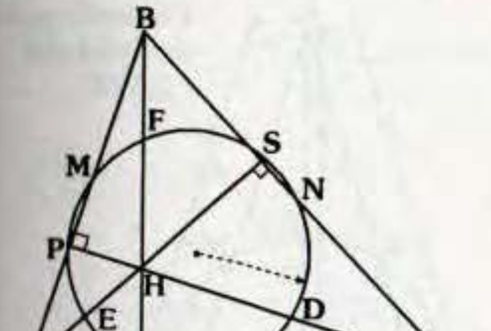


- En forma similar al anterior, MFDL es también rectángulo.
- Además $\overline{MD}$ es diagonal para ambos rectángulos (MFDL y EMND), luego $\overline{FL}$, $\overline{EN}$ y $\overline{MD}$ concurren en O (punto medio de dichas diagonales).
- Con ello tenemos que O equidista de E, M, F, N, D y L.
- En los triángulos rectángulos FQL, ESN y MPD, O es punto medio de $\overline{FL}$, $\overline{EN}$ y $\overline{MD}$ (hipotenusas de dichos triángulos rectángulos).
- Por teorema del ◺: O equidista de P, Q y S, debido a que $EN = MD = FL$.

  $\therefore$ E, M, N, D, F, L, P, Q y S son concíclicos.

Método 2

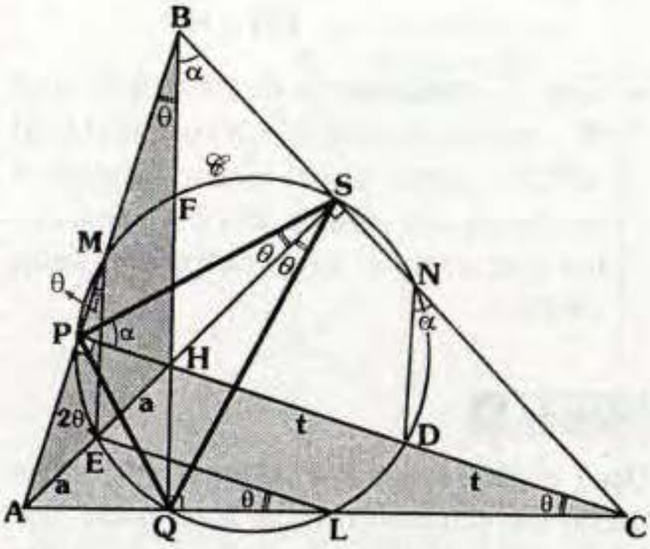
Otra forma para verificar el teorema, sería trazar la circunferencia que pasa por los pies de las alturas y comprobar que los otros puntos están sobre dicha circunferencia.



En el gráfico P, Q y S son pies de las alturas, se ha trazado la circunferencia que pasa por P, Q y S, vamos a demostrar:

$$AM = MB\ ,\ BN = NC\ \text{ y }\ AL = LC$$
$$AE = EH\ ,\ BF = FH\ \text{ y }\ HD = DC$$

Así tenemos:



- ΔPQS es triángulo órtico de ΔABC.
- Por teorema 10.5 y 10.6 se tiene:
  - H es incentro del ΔPQS.
  - A, B y C son excentros de ΔPQS.
  - Notar que $\mathscr{C}$ es la circunferencia circunscrita al ΔPQS.
- Por teorema 8.3-B:

  $$AE = EH\ ,\ HD = DC\ \text{ y }\ HF = FB$$
- ⏢PBSH: Inscriptible

  $$\Rightarrow\ m\measuredangle PSH = m\measuredangle PBH = \theta$$
- Por ángulo inscrito: $\quad m\widehat{EP} = 2\theta$

  $$\Rightarrow\ m\measuredangle PME = \theta$$
- En ΔAHB: $\overline{ME} /\!/ \overline{BH}$ y debido a que $AE = EH$ se concluye $\overline{EM}$ es base media $\Rightarrow AM = MB$.
- En forma análoga:

  En ΔAHC: $\overline{EL}$ es base media

  $$\Rightarrow\ AL = LC$$

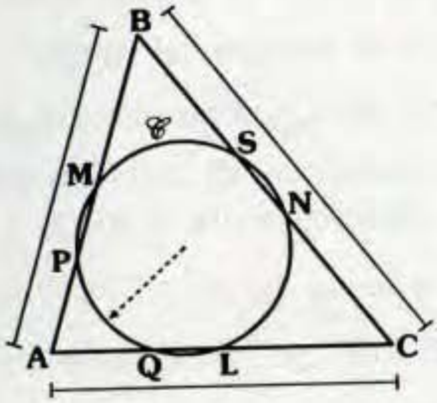
En $\triangle BHC$: $\overline{ND}$ es base media

$$\Rightarrow BN = NC$$

- Con lo cual queda demostrado que $\mathscr{C}$, circunferencia circunscrita al $\triangle PQS$, corta en el punto medio a los lados del $\triangle ABC$ y a los segmentos que unen el ortocentro con cada vértice.

Método 3

Otro método similar al anterior, sería trazar la circunferencia que pasa por los puntos medios de cada lado y demostrar que los otros puntos están sobre esa circunferencia.



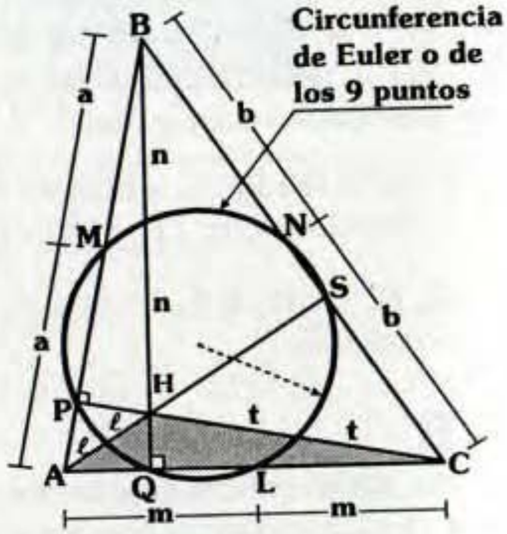
En el gráfico M, N y L son puntos medios de los lados del $\triangle ABC$, $\mathscr{C}$ es la circunferencia que pasa por ellos, se demuestra en forma análoga que P, Q y S son pies de las alturas y que $\mathscr{C}$ pasa por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y cada vértice.

Método 4

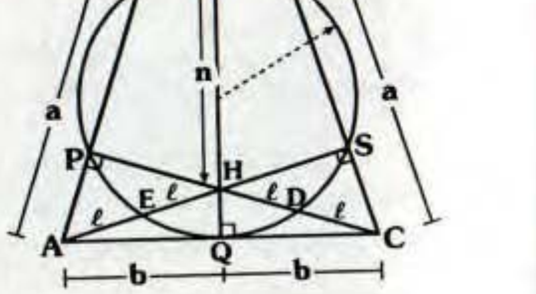
En el capítulo de temas selectos, daremos otra demostración de la circunferencia de los nueve puntos.

Observaciones

- *Notar que el triángulo órtico y el triángulo mediano están circunscritos a la circunferencia de Euler.*
- *En el gráfico, la circunferencia de Euler o de los nueve punto del* $\triangle ABC$, *es la misma para los triángulos* AHC, AHB *y* BHC.



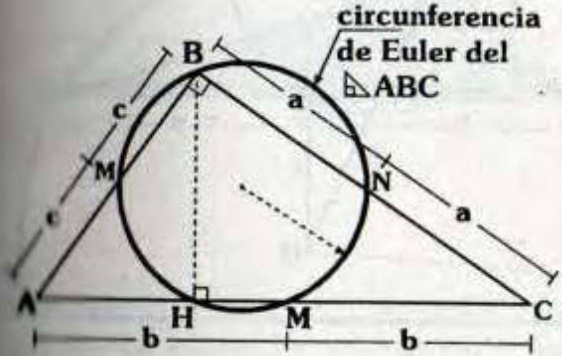
- *En el triángulo isósceles.*



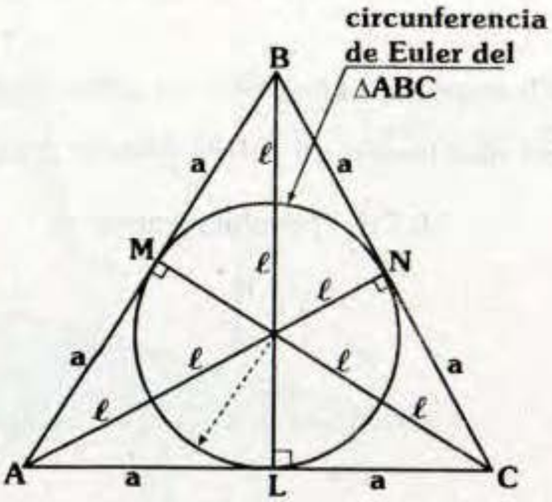
- *En el gráfico* AB=BC.

  Se cumple $\overline{AC}$ *es tangente a la circunferencia de Euler.*

- *En el triángulo rectángulo.*



- *En el triángulo equilátero.*



- *En el gráfico el triángulo* ABC *es equilátero,* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *son tangentes a la circunferencia de Euler, la cual coincide con la circunferencia inscrita.*

12.2 TEOREMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE EULER O DE LOS NUEVE PUNTOS

12.2.1 El radio de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es la mitad del circunradio de dicho triángulo.

Demostración:

- Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC .

  $\overline{BS}$: Altura $\Rightarrow$ $\overline{FL}$ es diámetro de:

  $$\mathscr{C} \Rightarrow FL = 2r$$

- Debido a que AL=LC

  $$\Rightarrow \overline{OL} \perp \overline{AC}$$

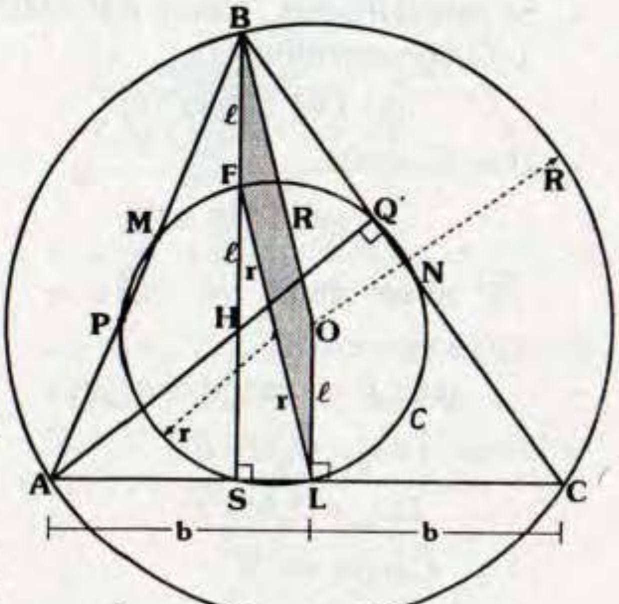
- Por teorema: $HB = 2(OL)$

  $$\Rightarrow HF = FB = OL$$

- Luego OLFB es un paralelogramo, pues:

  $\overline{FB} // \overline{LO}$ y $FB = LO \Rightarrow 2r = R$

  $$\therefore \quad r = \frac{R}{2}$$



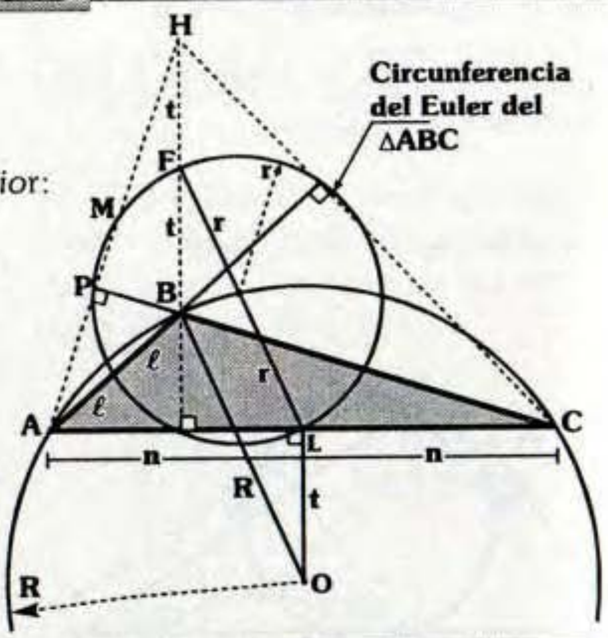
Observación

En el gráfico el ΔABC *es obtusánglo.*

Se demuestra en forma similar a la anterior:

OLFB: *Paralelogramo y*

$$r=\frac{R}{2}$$



12.2.2 El centro de la circunferencia de los nueve puntos es punto medio del segmento que une el ortocentro y circuncentro de un triángulo dado.

Demostración:

- En el gráfico sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC.
- H y O: Ortocentro y circuncentro del ΔABC, respectivamente.
- Se sabe HE=EB. Como AM=MC y O circuncentro.

  $\Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema:

  $\Rightarrow OM=HE=EB$

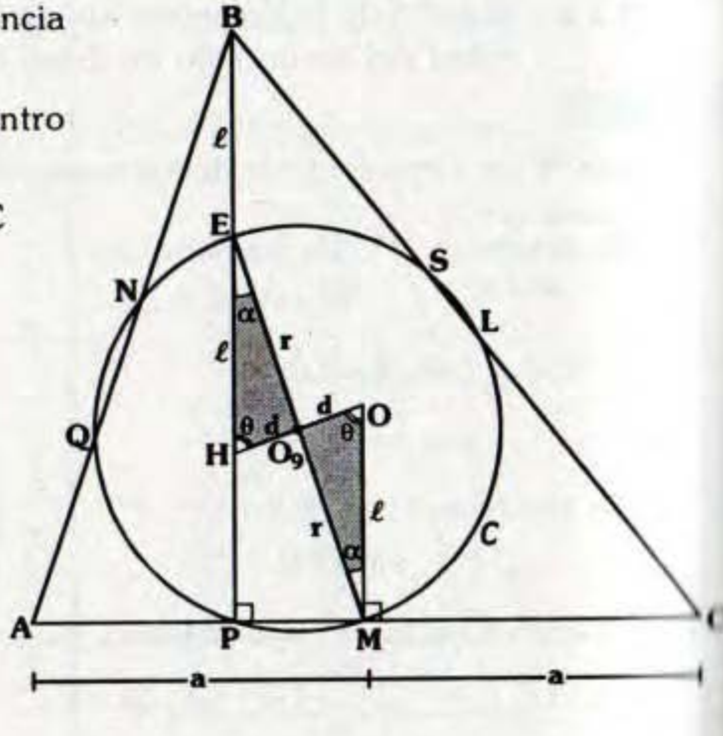
  $\overline{BP}$ al ser altura $\Rightarrow$ $\overline{EM}$: Diámetro de $\mathscr{C}$

  $\Delta HO_9E \cong \Delta OO_9M$ (ALA)

  $\Rightarrow HO_9=O_9O=d$

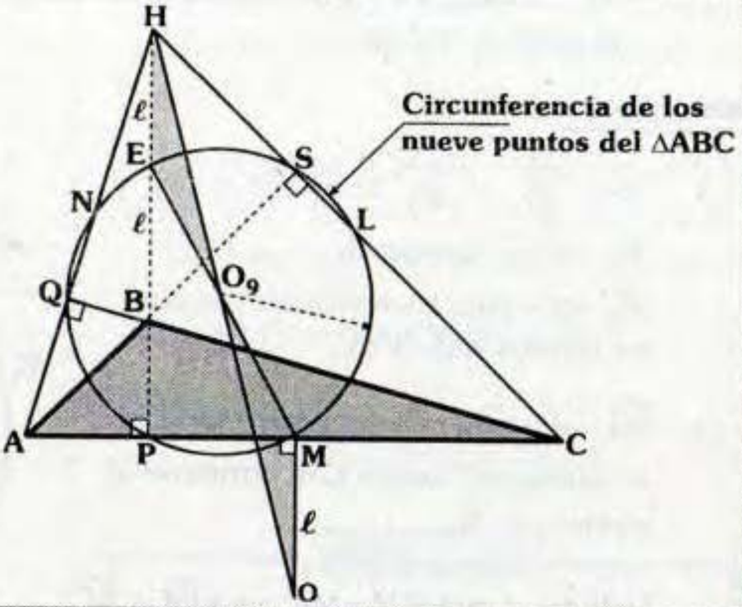
  $EO_9=O_9M=r$

  O_9: Centro de $\mathscr{C}$
- Se demuestra entonces O_9 biseca a $\overline{OH}$.



Nota

Si el $\triangle ABC$ es obtusángulo también se demuestra en forma análoga: $OO_9 = O_9H$ donde H es ortocentro, O es circuncentro del $\triangle ABC$ y O_9 es centro de la circunferencia de los nueve puntos.

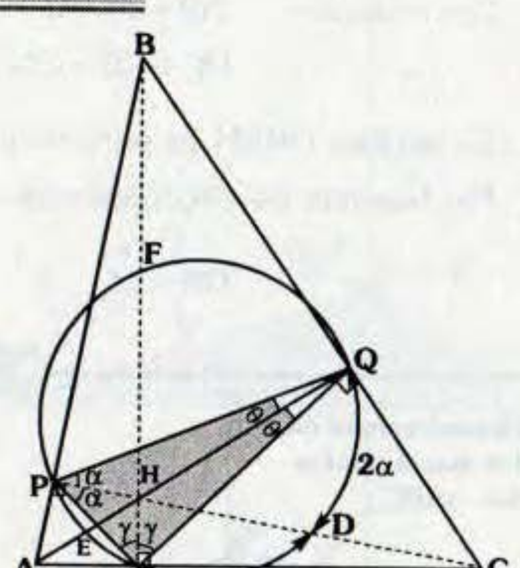


12.2.3. La altura de un triángulo biseca al arco, en la circunferencia de los nueve puntos, cuyos extremos son los pies de las otras alturas.

En el gráfico, se cumple:

$$m\widehat{PE} = m\widehat{ES}\ ;\ m\widehat{PF} = m\widehat{FQ}\quad \text{y}\quad m\widehat{QD} = m\widehat{DS}$$

Demostración:

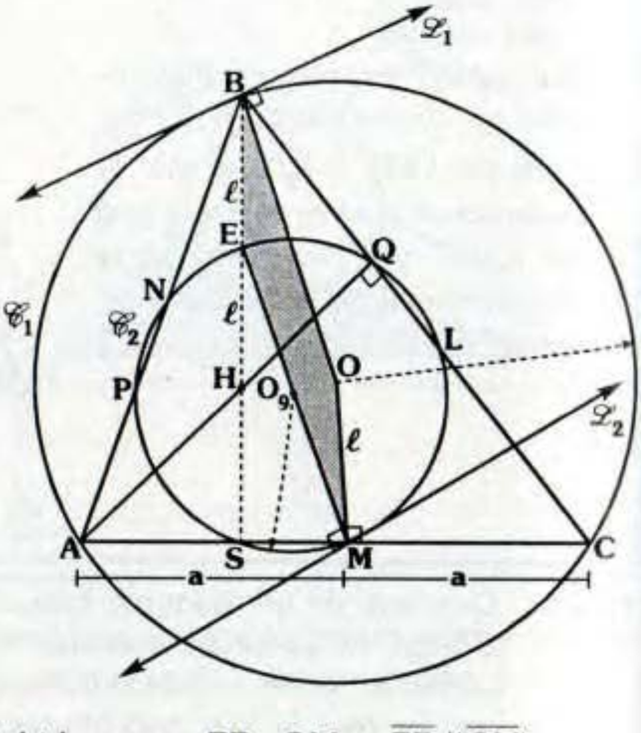


- Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos.
- Se observa $\triangle PQS$ es el triángulo órtico del $\triangle ABC$.
- Por teorema 10.5 H es incentro del $\triangle PQS$, por ángulo inscrito:

$$m\widehat{PE} = m\widehat{ES} = 2\theta$$
$$m\widehat{SD} = m\widehat{DQ} = 2\alpha$$
$$m\widehat{PF} = m\widehat{FQ} = 2\gamma$$

12.2.4 La recta tangente a la circunferencia de los nueve puntos en e punto medio de un lado, es paralela a la recta tangente a la circunferencia circunscrita en el vértice opuesto.

Demostración:

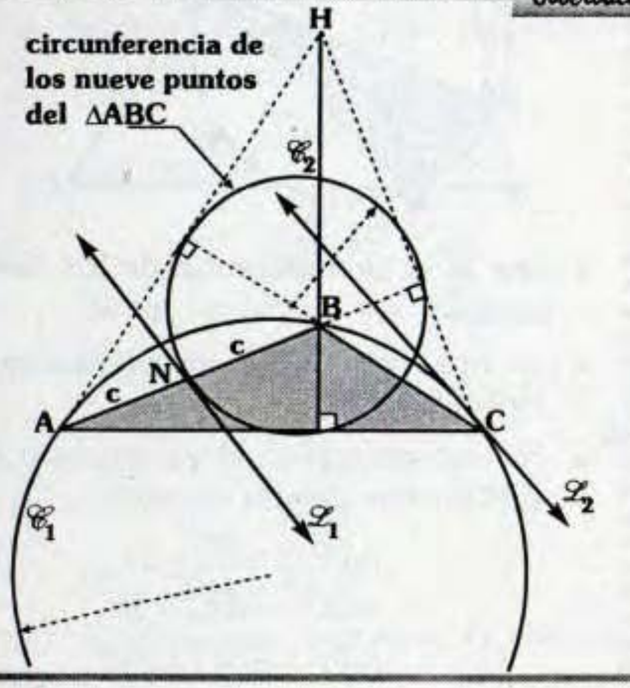


- Sea: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente.
  $\mathscr{C}_2$ es la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC.
- $\overline{BS}$: altura y H ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{EM}$ es diámetro, luego $\overline{EM}$ contiene al centro de $\mathscr{C}_2$.
- Debido a que $AM=MC \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema: $HB=2(OM)$

  $\Rightarrow \quad HE=EB=OM=\ell$
- Se verifica OBEM es paralelogramo (debido a que $EB=OM$ y $\overline{EB} // \overline{OM}$).
- Por teorema de circunferencia.

$$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \quad y \quad \overline{EM} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

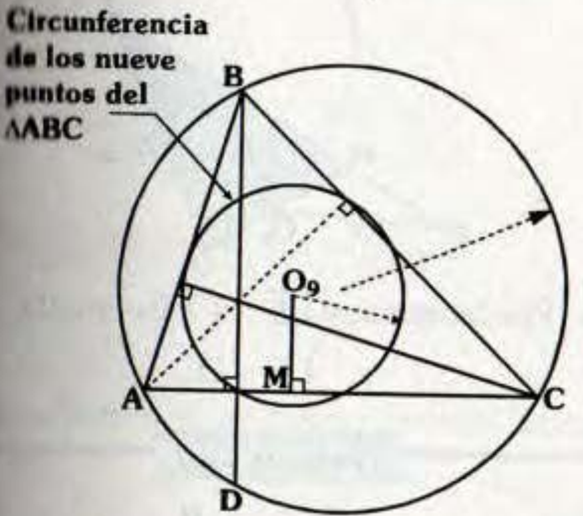
Observación



En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son recta tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente, se cumple:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}}$$

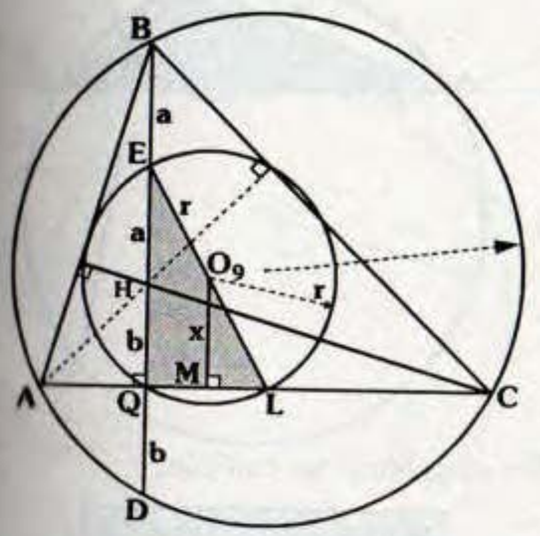
10.2.5. La longitud del segmento, cuyos extremos son un vértice de un triángulo y el punto de corte de la prolongación de la altura trazada de dicho vértice hacia un lado con la circunferencia circunscrita, es cuatro veces la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos hacia dicho lado.



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{BD = 4(O_9M)}$$

Demostración:

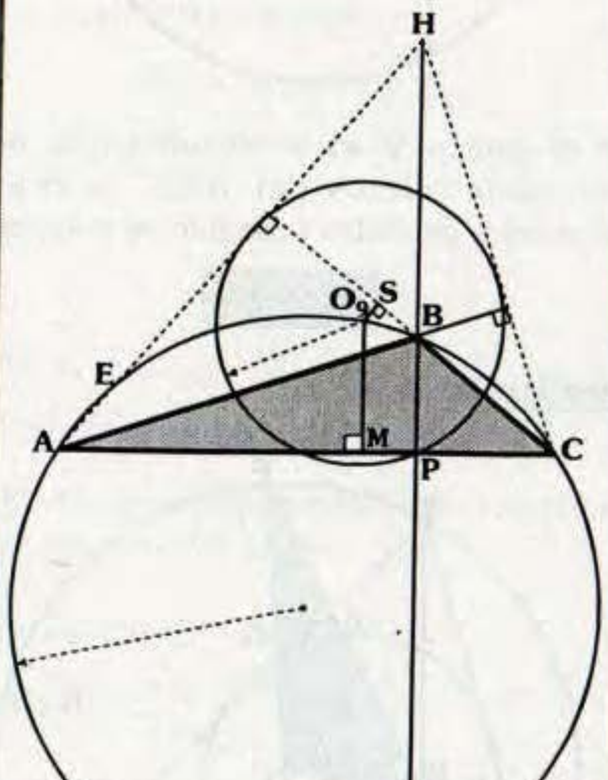


- Debido a que $\mathscr{C}$ es la circunferencia de los nueve puntos, se cumple BE = EH donde H es ortocentro del ΔABC.
- Por teorema 8.5: HQ = QD, como $\overline{BQ}$: altura $\Rightarrow$ $\overline{EL}$ es diámetro, en ⊿EQL: $\overline{O_9M}$ es base media $\Rightarrow$ $a + b = 2x$.
- Del gráfico: $BD = 2a + 2b$

$$\Rightarrow BD = 2(a + b)$$

$$\therefore BD = 4x$$

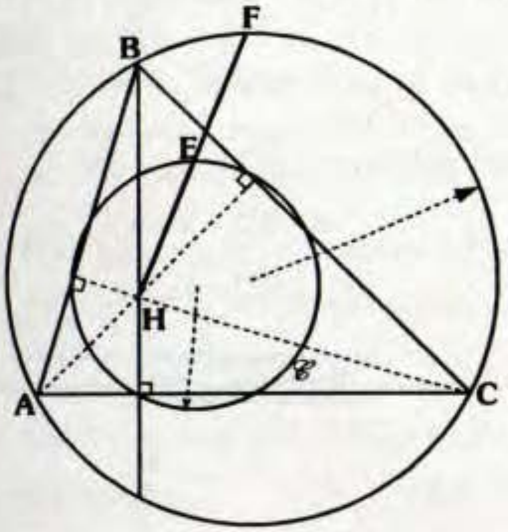
Observación



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{BD = 4(O_9M) \qquad AE = (O_9S)}$$

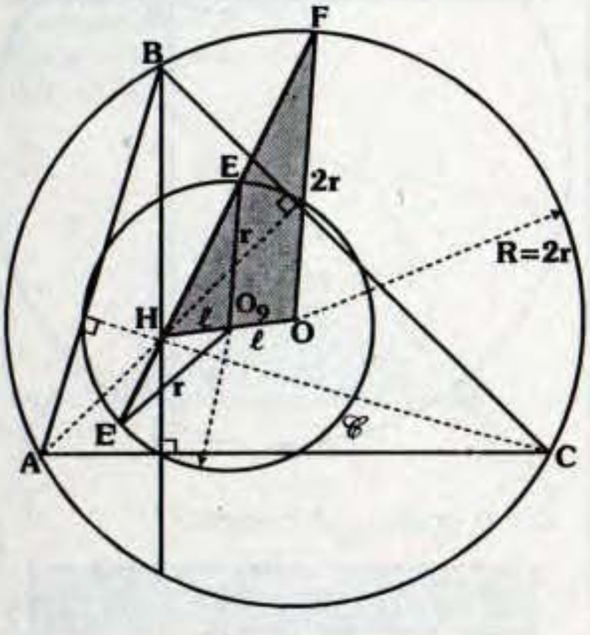
12.2.6 La circunferencia de los nueve puntos biseca al segmento que une el ortocentro con cualquier punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo.



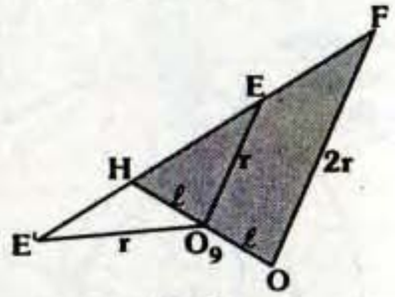
En el gráfico 𝒞 es la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC y H es ortocentro de dicho triángulo se cumple:

$$\boxed{HE=EF}$$

Demostración:



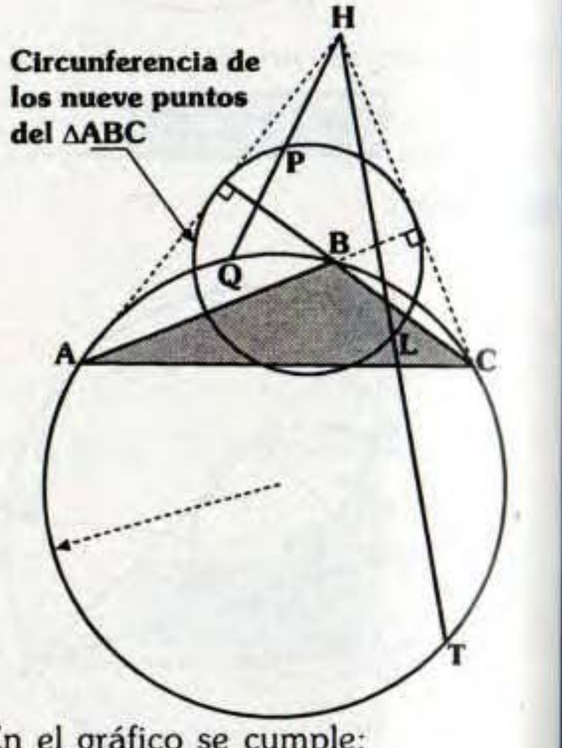
- Sea 𝒞 la circunferencia de los nueve puntos cuyo centro es O_9 y O es centro de la circunferencia circunscrita al ΔABC.
- Por teorema: 12.11 y 12.1.2 se tiene: H=2r; O, O_9 y H son colineales, además $OO_9 = O_9H$.
- En ΔOHF se tendrá:



- Por teorema: $\overline{O_9E}$ es base media.

$$\therefore \quad HE = EF$$

Observación

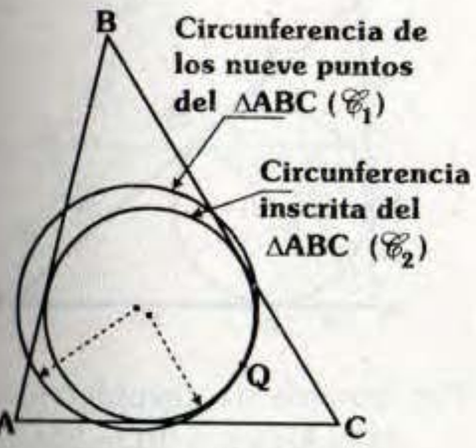


En el gráfico se cumple:

$$\boxed{HP=PQ \quad y \quad HL=LT}$$

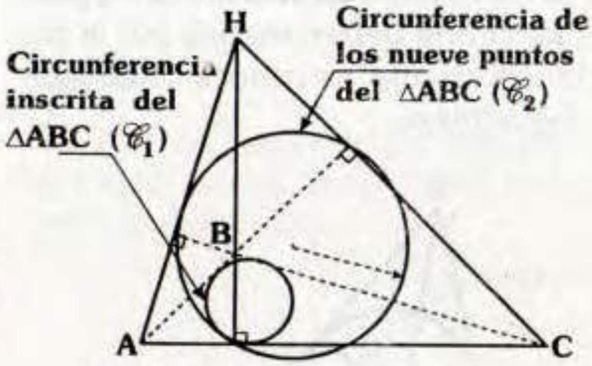
TEOREMA DE FEUERBACH

La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y a cada una de las circunferencias exinscritas.



En el gráfico se cumple:

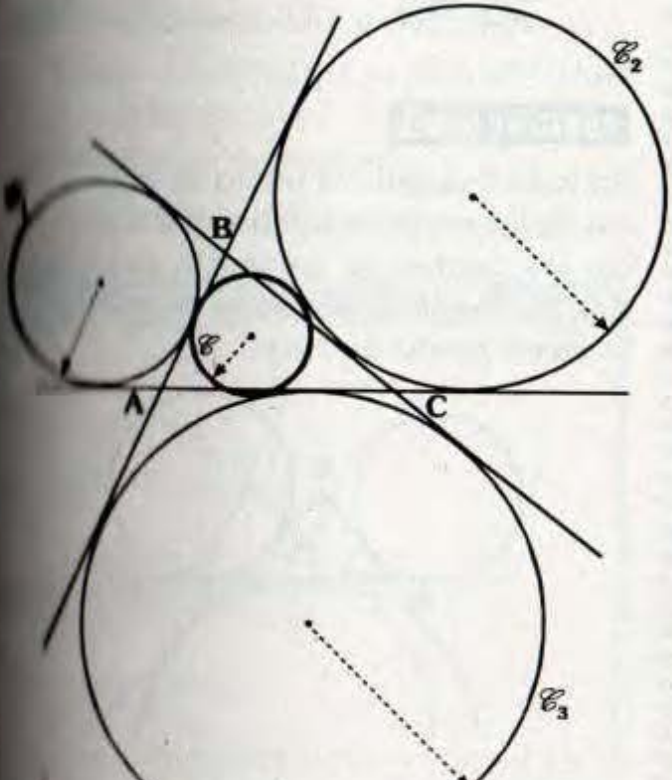
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes



En el gráfico se cumple:

$\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}_2$

Con respecto a las circunferencias exinscritas:



En el gráfico: $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas del $\triangle ABC$.

$\mathscr{C}$ es la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$.

Se cumple:

$\mathscr{C}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

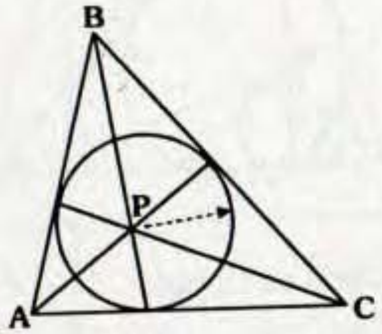
Nota

La demostración de este maravilloso teorema se realizará en el capítulo de temas selectos.

13. OTROS PUNTOS NOTABLES

PUNTO DE GEORGONNE

En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por la circunferencia inscrita, se conoce como punto de Georgonne.



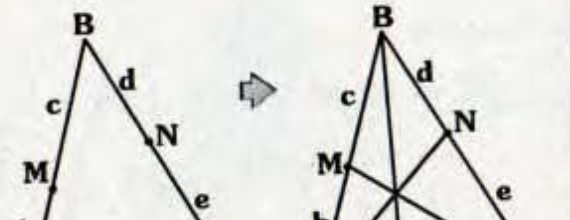
P: Punto de Georgonne del $\triangle ABC$.

Demostración:

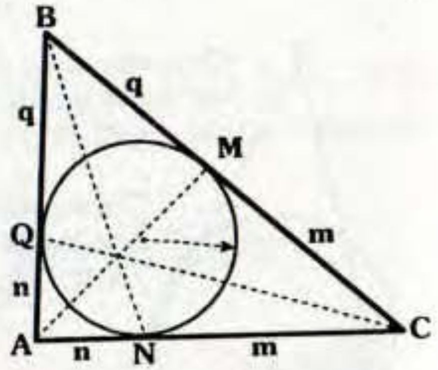
Tener en cuenta lo siguiente:

Observación

"Recíproco del teorema de Ceva"



Si $ace = bdf \Rightarrow \overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes.



- Por teorema de circunferencia:

  $AQ = AN = n, \quad BQ = BM = q,$

  $CN = CM = m$

- Del gráfico:

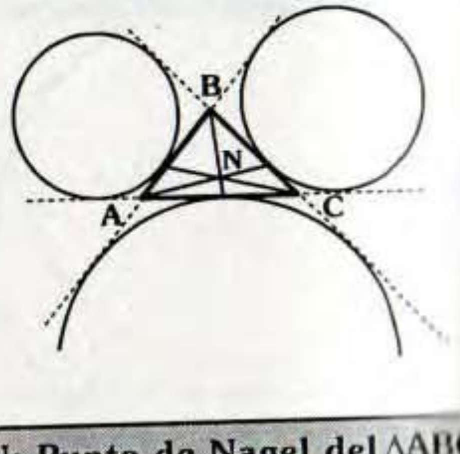
  $(AQ)(BM)(CN) = (AN)(BQ)(CM)$

- De la observación, se tiene:

  $\therefore \ \overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes

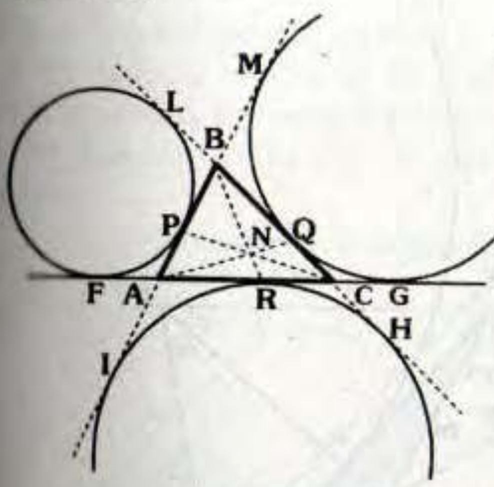
PUNTO DE NAGEL

En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas interiores trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por las circunferencias exinscritas, se le llama punto de Nagel.



N: Punto de Nagel del $\triangle ABC$

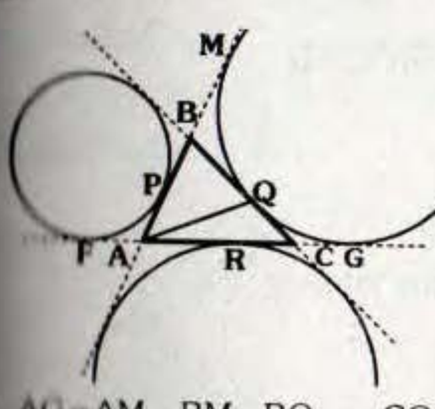
<u>*Demostración:*</u>



- Por el teorema 8.2:
  AF=CG, CH=BL y AI=BM ...(I)
- Por teorema de circunferencia:
  AF=AP, AI=AR, BL=BP
  BM=BQ, CH=CR y CG=CQ ...(II)
- De (I) y (II) :
  AP=CQ, BQ=AR y BP=CR
- Como : (AP)(BQ)(R)=(PB)(QC)(AR) la observación del punto de Georgonne, se concluye:

  ∴ $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ son concurrentes.

Nota

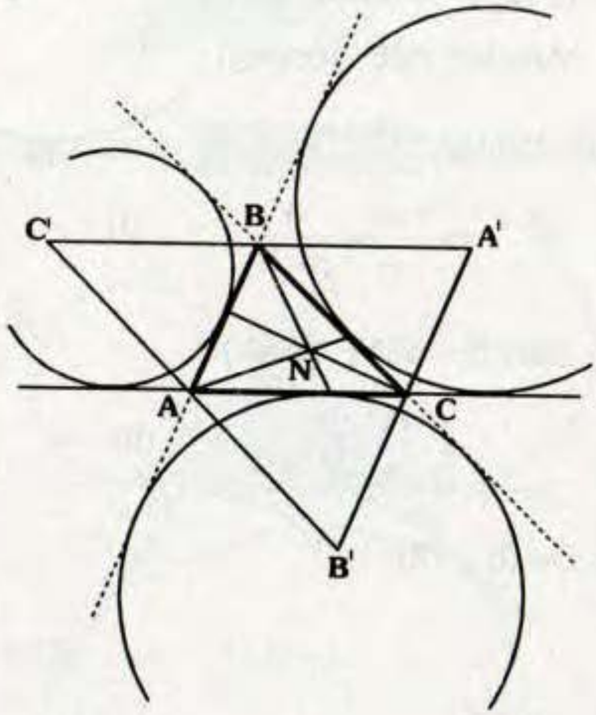


- AG=AM , BM=BQ y CQ=CG
- ⇒ $\text{Perímetro}_{\Delta ABQ} = \text{Perímetro}_{\Delta AQC}$

Por lo cual al trazar una de las cevianas AQ, BR o CP determinan regiones triangulares isoperimétricas. Debido a esta característica al punto de Nagel también es conocido como el **punto isoperimétrico.**

TEOREMA

El punto de Nagel de un triángulo es el incentro de su respectivo triángulo anticomplementario.



Si N : Punto de Nagel del ΔABC y

$\Delta A'B'C'$: Anticomplementario del ΔABC.

⇒ $\boxed{\textbf{N: Incentro del } \Delta A'B'C'}$

<u>*Demostración:*</u>

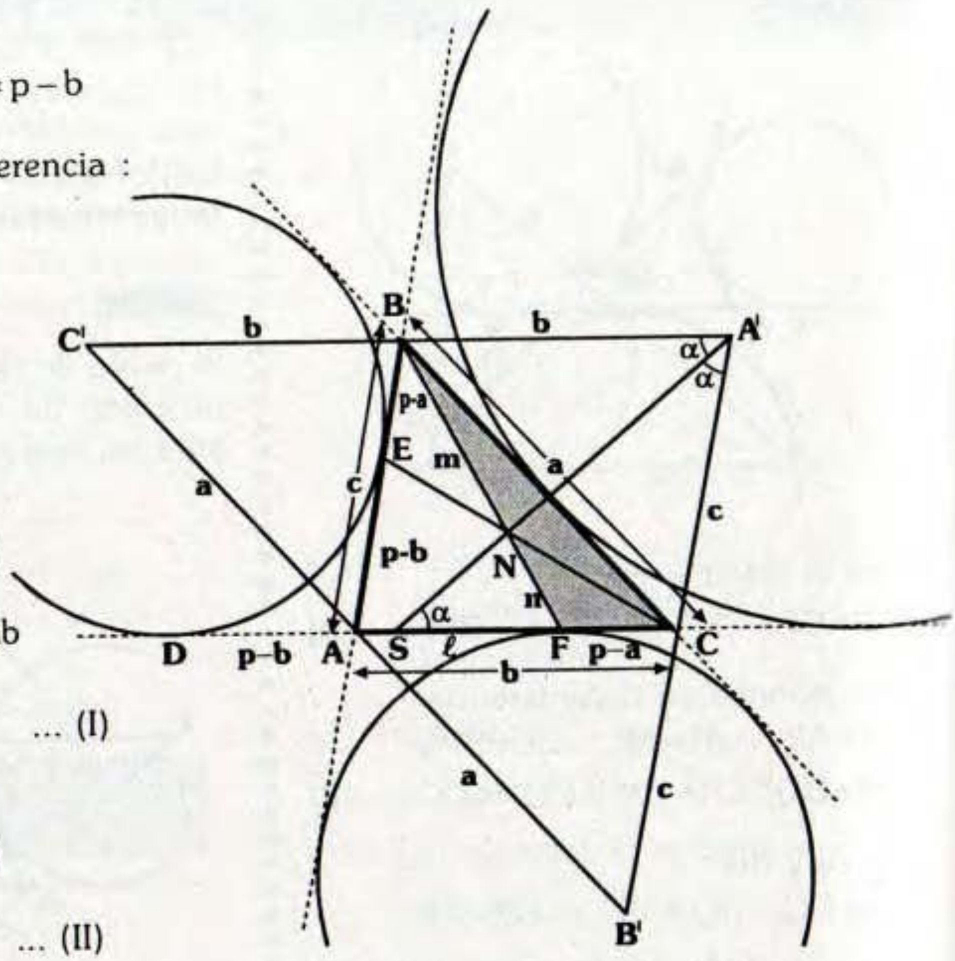
Sea : $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

- Por teorema 8.2 :

$$CD = p \Rightarrow AD = p - b$$

- Por teorema de circunferencia :

$$AE = p - b$$



- Análogamente :

$$BE = CF = P - a$$

- ΔFBC: Teorema de Menelao ($\overline{CE}$: secante)

$$(p-b)m(p-a) = (p-a)nb$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{p-b} \quad \text{... (I)}$$

- $\Delta BA'N \sim \Delta SNF$ (AAA)

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{\ell} \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$\ell = p - b \quad \Rightarrow \quad SC = p - b + p - a = c \Rightarrow SC = CA'$$

- $\Delta A'SC$:

$$\text{Isósceles} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle A'SC = m\measuredangle SA'C = \alpha$$

- Por ángulos alternos internos; $m\measuredangle SA'C = \alpha$

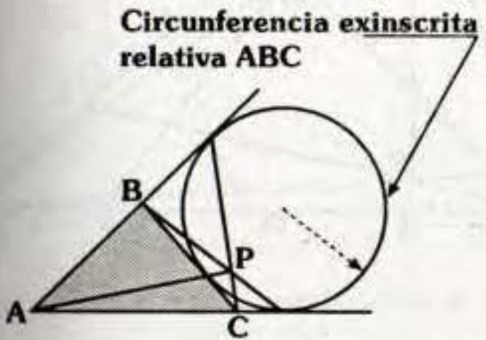
$$\Rightarrow \overrightarrow{A'N}: \text{ Bisectriz interior}$$

- Análogamente, $\overline{B'N}$ y $C'N$ son bisectrices.

$$\therefore \quad N: \text{ Incentro del } \Delta ABC$$

PUNTO DE PONCELET

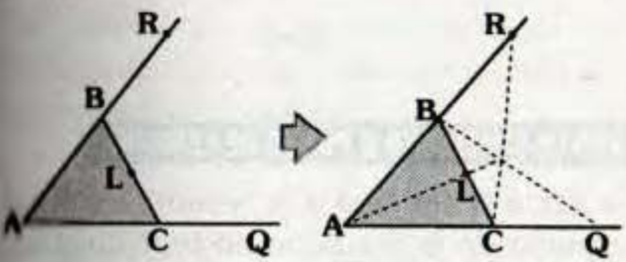
Dada la circunferencia exinscrita relativa a un lado, el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia se llama punto de poncelet.



P: Punto de Poncelet relativo a $\overline{BC}$ del $\triangle ABC$.

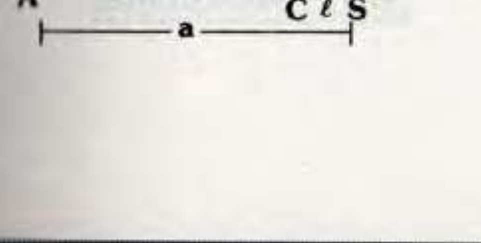
Demostración

Para demostrar la concurrencia de las líneas mencionadas, usaremos el siguiente teorema (recíproco del teorema de Ceva).



Si: $(AB)(BL)(CQ)=(AQ)(LC)(BR)$ $\Rightarrow$ $\overline{AL}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ son concurrentes

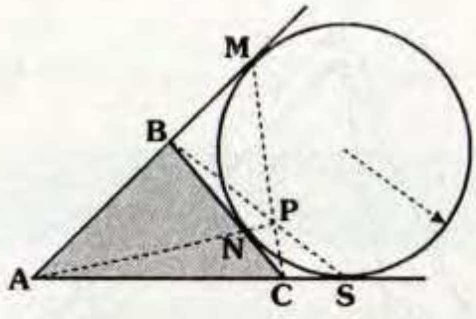
En el gráfico sea $\mathscr{C}_1$ la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$.



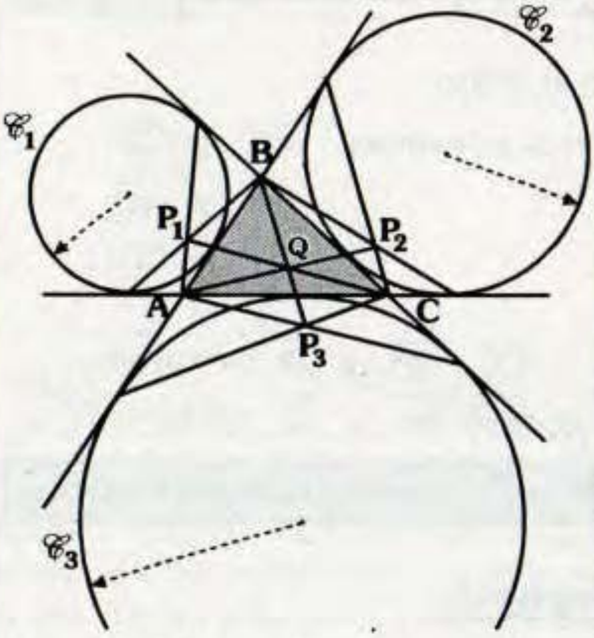
Por teoremas de circunferencia AM=AS, BM=BN y NC=CS

$$\Rightarrow (AM)(BN)(CS)=(AS)(NC)(BM)$$

Por el teorema mencionado $\overline{BS}$, $\overline{CM}$ y $\overline{AN}$ son concurrentes.



Observación

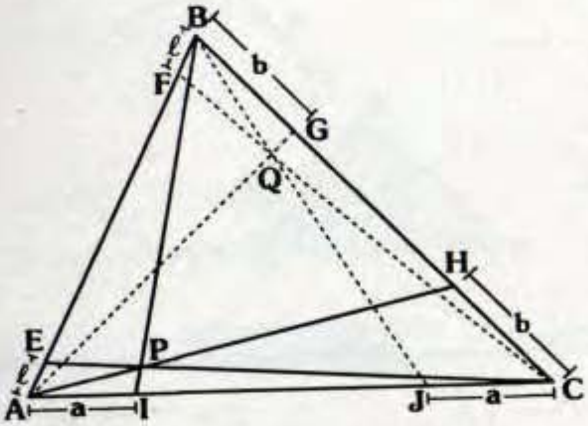


En el gráfico:

- $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ *son las circunferencias exinscritas del* $\triangle ABC$.
- P_1, P_2 y P_3: *Puntos de Poncelet relativos a* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *respectivamente.*
- Q: *Punto de Nagel del* $\triangle ABC$.

PUNTOS CONJUGADOS ISOTÓMICOS

Si en un triángulo se trazan desde cada vértice un par de cevianas isotómicas tal que tres de ellas, una de cada vértice, sean concurrentes entonces las otras tres también concurren.



En el gráfico:

Líneas isotómicas: $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$

$\overline{BI}$ y $\overline{BJ}$

$\overline{AG}$ y $\overline{AH}$

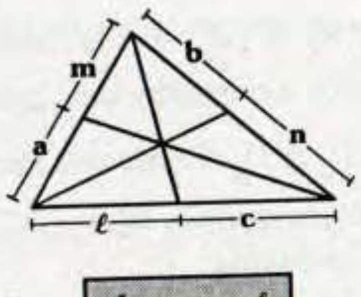
Si: $\overline{CE}$, $\overline{AH}$ y $\overline{BI}$ concurren

$\Rightarrow$ $\overline{AG}$, $\overline{BJ}$ y $\overline{CF}$ concurren

P y Q: Conjugados isotómicos

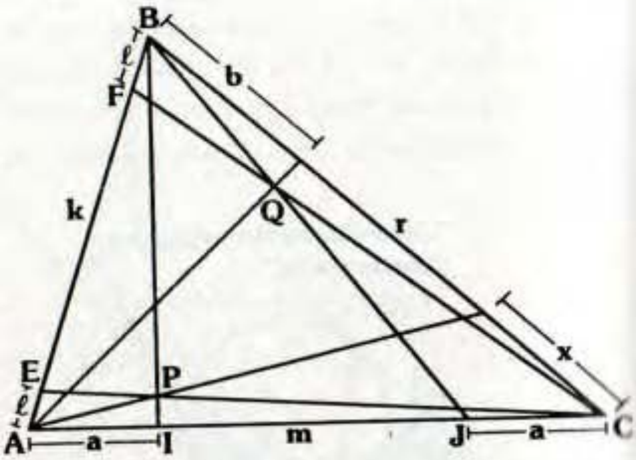
Demostración:

Tener en cuenta el Teorema de Ceva.



Se cumple: $\boxed{abc = mn\ell}$

En el gráfico:



Se va a demostrar: $x=b$

Por Teorema de Ceva:

$$a(x)(\ell+k)=(a+m)(b+r)\ell$$

$$ab(\ell+k)=(a+m)(x+r)\ell$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{b}=\frac{b+r}{x+r}$$

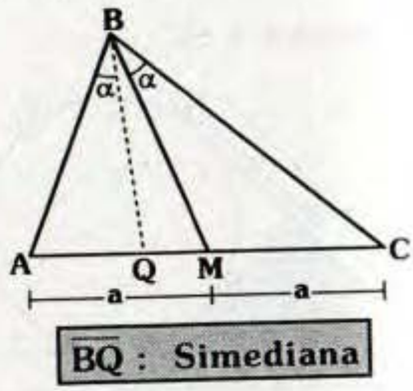
Acomodando: $(x+b+r)(x-b)=0$

$\therefore \quad x=b$

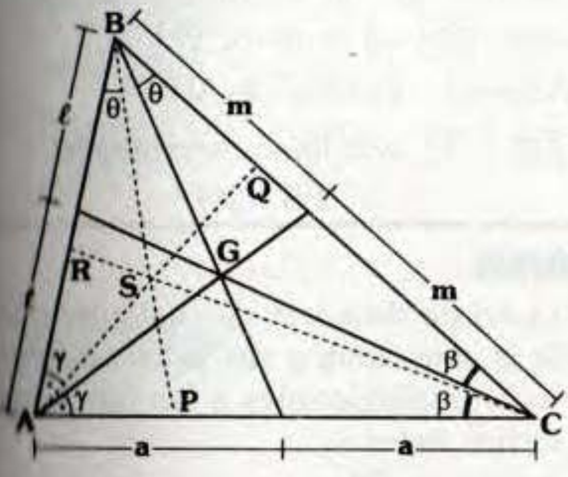
PUNTO SIMEDIANO O PUNTO DE LEMOINE

Se llama simediana a la ceviana isogonal respecto de la mediana en un triángulo.

El punto simediano es el punto de concurrencia de las semidianas de un triángulo.



$\overline{BQ}$: Simediana



En el gráfico:

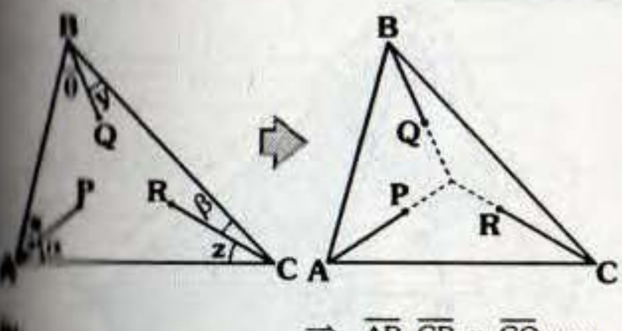
$\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ son simedianas

G : Baricentro del ΔABC.

S : Punto Simediano del ΔABC.

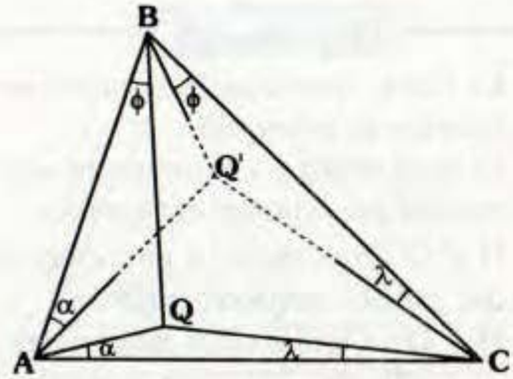
Demostración:

Para demostrar la concurrencia de las simedianas hay que tener en cuenta algunos teoremas previos:



Si
senα senβ senθ = senx senz seny $\Rightarrow$ $\overline{AP}$, $\overline{CR}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes

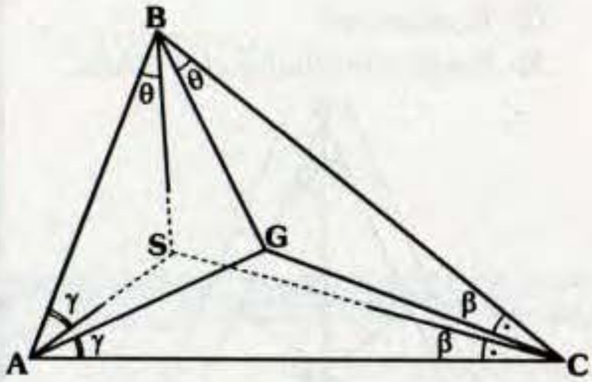
El teorema anterior es muy importante para la concurrencia, con el cual se demuestra rápidamente lo siguiente:



Si tres cevianas son concurrentes también lo son sus isogonales.

Q y Q' son conjugadas isogonales.

Con lo último la demostración de la concurrencia es inmediata:

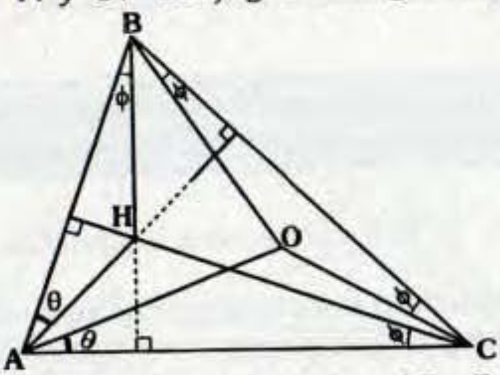


Debido a que las medianas son concurrentes en el baricentro (G), por el teorema anterior las isogonales de las medianas (simedianas) también son concurrentes (en S).

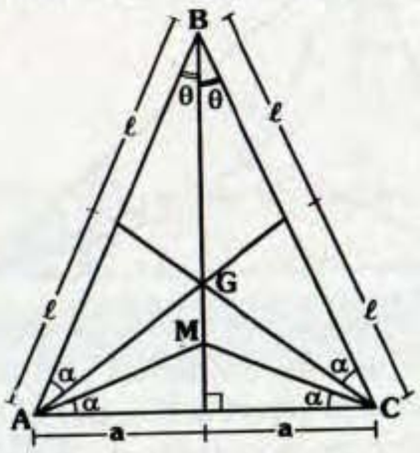
Luego G y S son conjugados isogonales.

Observación

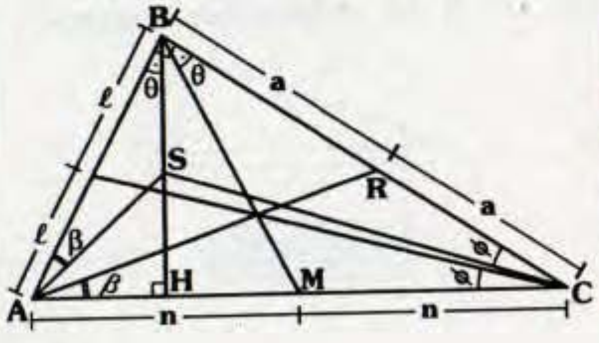
- *El punto simediano siempre es interior al triángulo.*
- *El ortocentro y circuncentro son puntos conjugados isogonales.*
  H y O: *Ortocentro y circuncentro del* ΔABC *respectivamente.*
  H y O: *Conjugados isogonales*



- *En triángulo isósceles*: AB=BC
  G: *Baricentro*
  M: *Punto simediano del* ΔABC.



- *En el triángulo rectángulo*:
  S: *Punto simediano*
  Se cumple: BS = SH



Con respecto al último podemos asegurar que la isogonal de la mediana $\overline{BM}$ *es la altura* $\overline{BH}$.

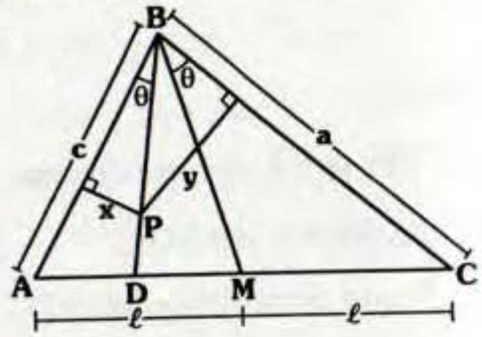
Además: $\triangle ABS \sim \triangle AHB$

$\overline{AR}$ y $\overline{AS}$ *son líneas homólogas*

$\Rightarrow$ BS = SH

TEOREMAS

La razón de distancia de cualquier punto de la simediana a sus lados adyacentes son proporcionales a las longitudes de dichos lados.

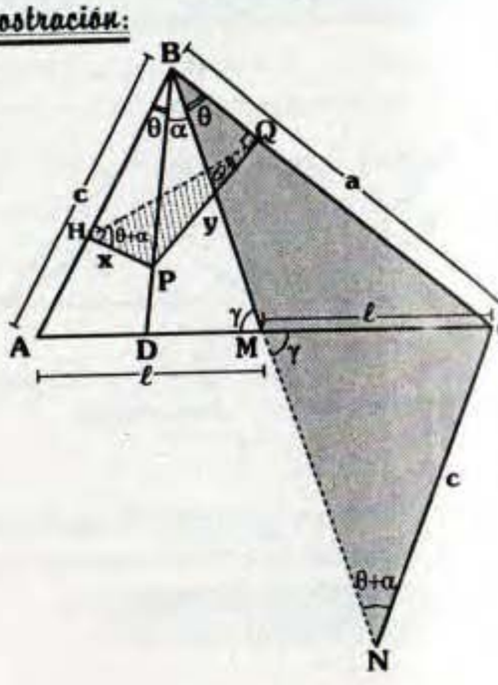


En el gráfico: $\overline{BD}$ es simediana

Se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{c}{a}}$$

Demostración:



- Se prolonga $\overline{BM}$ tal que $MN=BM$

$\Delta NMC \cong \Delta BMA$ (L.A.L)

$\Rightarrow m\measuredangle MNC = \theta+\alpha$ y $NC=c$

⏢BHPQ: Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle HQP = \theta$ y

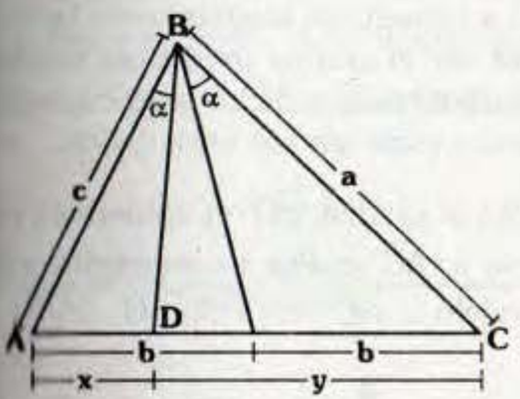
$\Rightarrow m\measuredangle PHQ = \theta+\alpha$

$\Delta QHP \sim \Delta NBC$:

$$\Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{y}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{c}{a}$$

- Los segmentos en que divide la simediana a un lado son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha simediana.



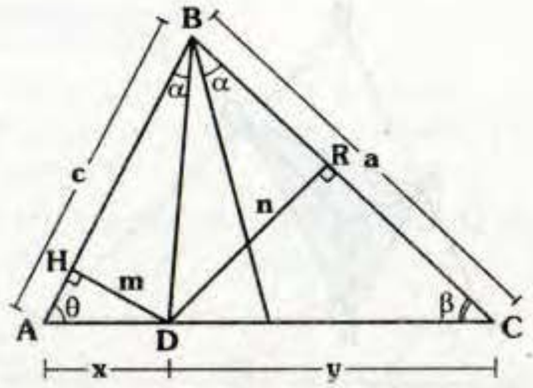
En el gráfico $\overline{BD}$ es simediana se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2}}$$

Demostración:

$\overline{BD}$ es simediana.

Por teorema anterior: $\dfrac{m}{n}=\dfrac{c}{a}$



⊿AHD: $m = x \operatorname{sen}\theta$

⊿DRC: $n = y \operatorname{sen}\beta$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{a}$$

$$\Delta ABC: \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{a}{c}$$

Reemplazando: $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{a}$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2}$$

Nota

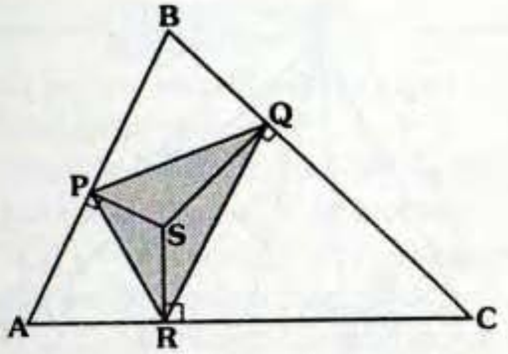
Si trazamos una ceviana tal que divida internamente al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes a dicha ceviana entonces dicha línea es ***Simediana****.*

- El punto simediano es baricentro del triángulo pedal asociado a dicho punto.

En el gráfico:

S : Punto simediano del ΔABC.

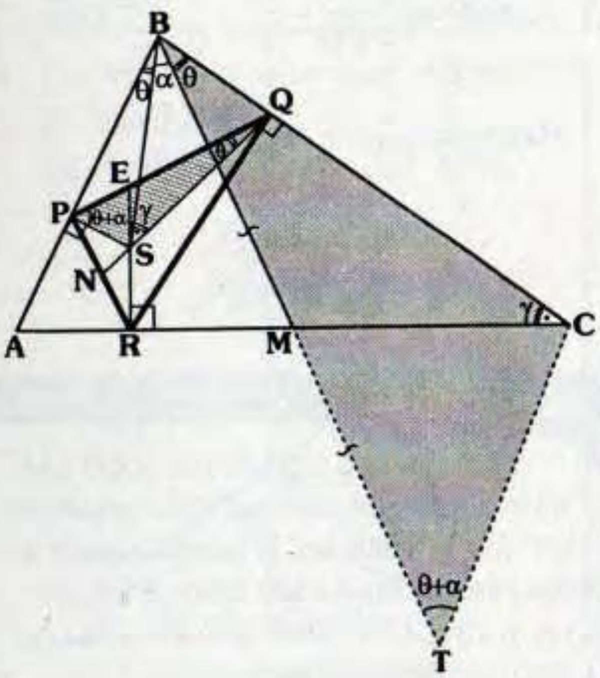
ΔPQR: Triángulo pedal del ΔABC respecto de S.



Se cumple:

S: Baricentro del ΔABC

Demostración:



En forma análoga al teorema se prolonga la mediana $\overline{BM}$ (isogonal a $\overline{BS}$) tal que: $MT=BM$

$$\Delta AMB \cong \Delta CMT$$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle BTC = \theta+\alpha$$

$$m\measuredangle CBT = \theta$$

$\triangle$SPBQ: Inscriptible

$$\Rightarrow\ m\measuredangle PQS = \theta$$

$$m\measuredangle SPQ = \theta+\alpha$$

$\triangle$SRCQ: Inscriptible

$$m\measuredangle ESQ = \gamma$$

$$\Delta PSQ \sim \Delta TCB$$

$\overline{CM}$ y $\overline{SE}$: Líneas homólogas

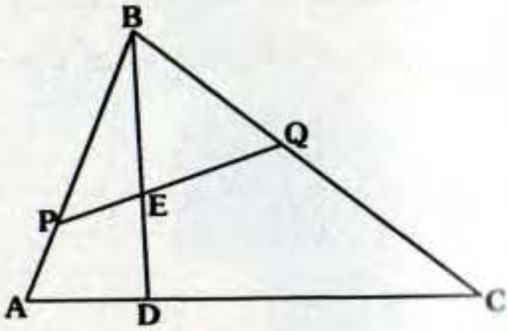
$$BM = MT \Rightarrow PE=EQ$$

Se demuestra $\overline{RE}$ es mediana, en forma análoga $\overline{QN}$ es mediana.

$\therefore$ S es baricentro del ΔPQR.

- La simediana relativa a un lado, corta en el punto medio al segmento antiparalelo a dicho lado cuyos extremos están en los otros lados.

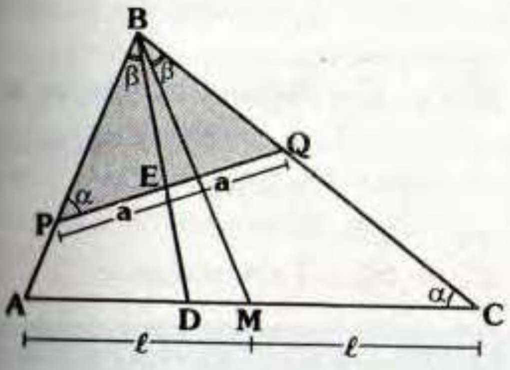
  En el gráfico $\overline{BD}$ es simediana relativa a $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ es segmento antiparalelo a $\overline{AC}$ respecto del $\measuredangle ABC$.



Se cumple:

$$\boxed{EP = EQ}$$

Demostración:



Se traza la mediana $\overline{BM}$:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ABD = m\measuredangle MBC$$

Por ser $\overline{PQ}$ antiparalela respecto del $\measuredangle ABC$.

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BPQ = m\measuredangle ACB$$

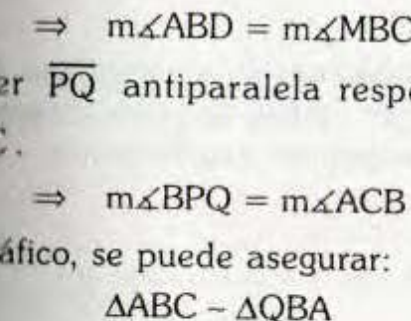
Del gráfico, se puede asegurar:

$$\Delta ABC \sim \Delta QBA$$

$\overline{BM}$ y $\overline{BE}$ son líneas homólogas, pero $\overline{BM}$ es mediana $\Rightarrow$ $\overline{BE}$ también es mediana:

$$\therefore \quad EP = EQ$$

Observación

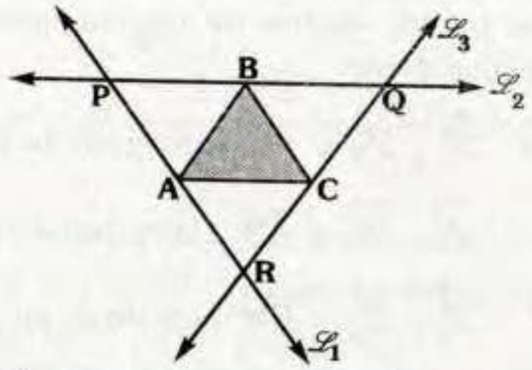


De lo anterior se puede concluir si $\overline{RT}$ *es antiparalelo con* $\overline{AC}$ *respecto del* $\measuredangle ABC$ *y* $RN = NT$ *entonces la simediana relativa a* $\overline{AC}$ *pasa por* N.

PUNTO EXMEDIANO

Se llama exmedianas a las rectas paralelas a los lados opuestos trazadas desde los vértices.

El punto exmediano es el punto de intersección de dos exmedianas.



En el gráfico:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overline{BC}, \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \,//\, \overline{AC} \quad y \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \,//\, \overline{AB}$$

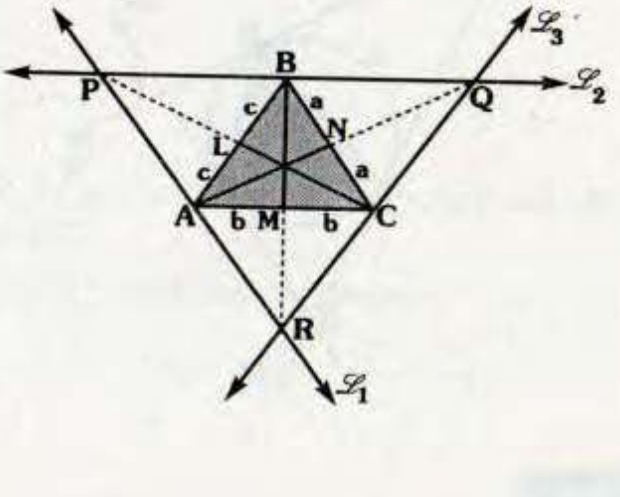
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Exmedianas

P, Q y R: Puntos exmedianas del ΔABC.

TEOREMA

Dos exmedianas y la mediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exmedianos.

Demostración:



En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son las exmedianas

$\overline{AN}$, $\overline{CL}$ y $\overline{BM}$ son medianas.

Se puede observar ABQC, CBPA y ABCR son paralelogramos, en los cuales N, L y M son puntos medios de sus diagonales respectivamente.

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{CL}$ concurren en P.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overline{AN}$ concurren en Q.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overline{BM}$ concurren en R.

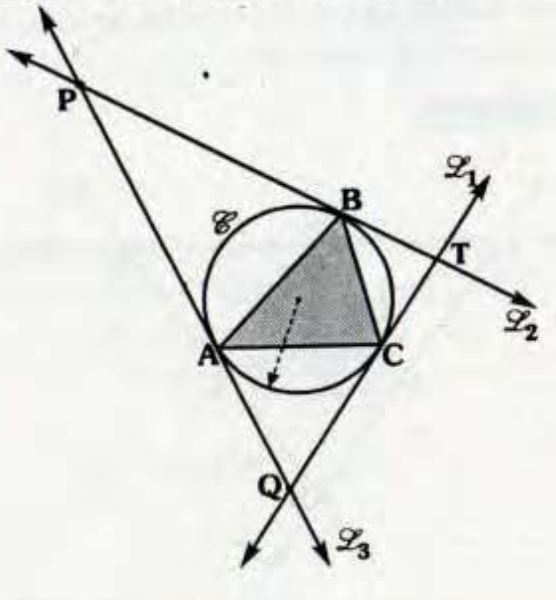
Nota

De los gráficos el ΔABC es el triángulo mediano del ΔPQR.

PUNTO EXSIMEDIANO

Se llama exsimediana a cada una de las rectas tangentes en los vértices del triángulo de la circunferencia circunscrita.

El punto exsimediano es el punto de intersección de dos exsimedianas.



En el gráfico:

$\mathscr{C}$: Circunferencia circunscrita al ΔABC

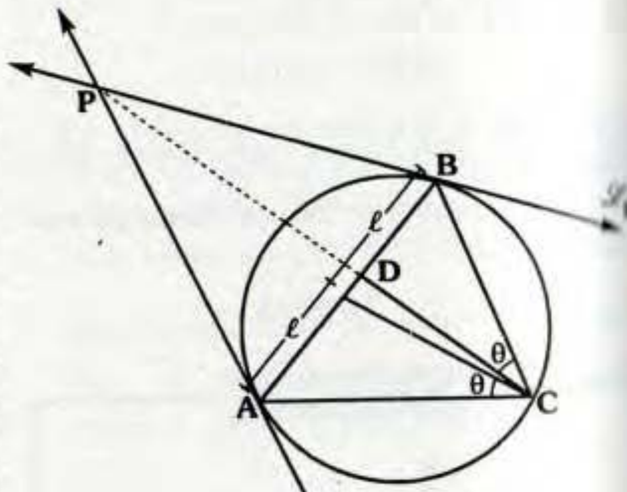
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Rectas tangentes a $\mathscr{C}$ en C, B y A respectivamente.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Exsimedianas

P, Q y T: Puntos exsimedianos

TEOREMA

Dos exsimedianas y la simediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exsimedianos.



En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: Exsimedianas

$\overline{CD}$: Simediana

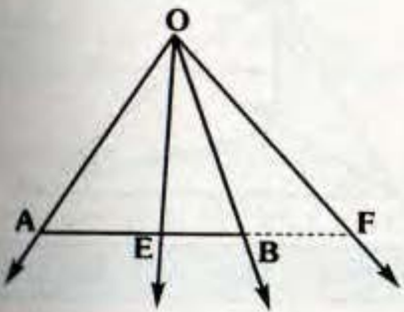
Se cumple:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{CD}$ son concurrentes

Demostración:

Para realizar esta demostración se requiere conocer algunos otros teoremas (conjugación armónica) que se estudiarán con más detalle en la publicación de proporcionalidad de segmentos y semejanza, la cual expondremos brevemente:

•



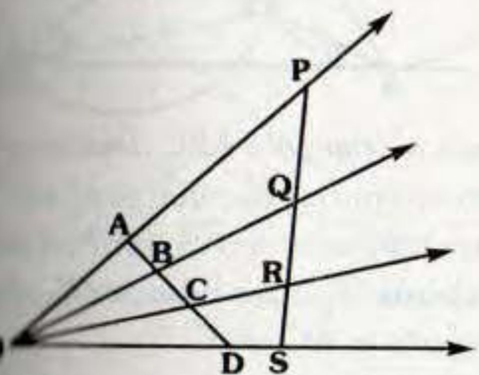
Si: $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{BF}$ se dice E y F son conjugados armónicos de $\overline{AB}$.

$\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OE}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OF}$: Haz armónico

O : Centro del haz

A, E, B y F: Cuaterna armónica.

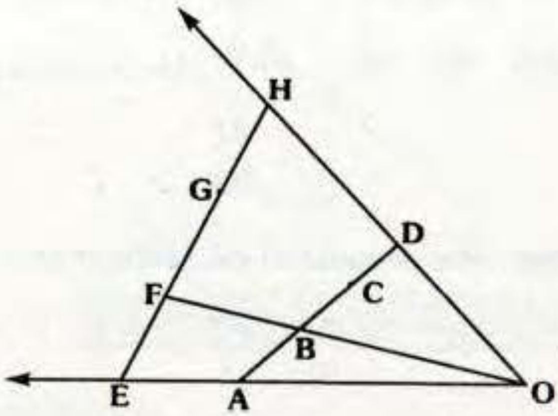
•



Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

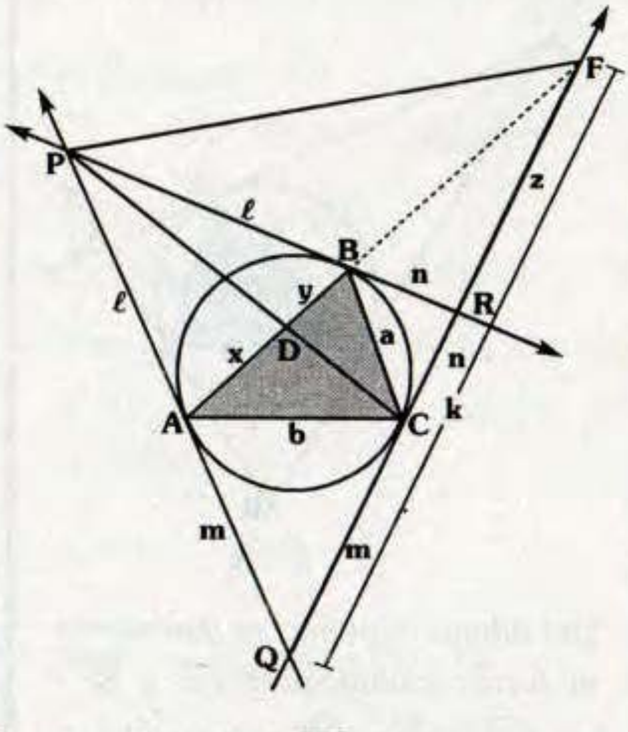
⇒ P, Q, R y S también forman cuaterna armónica.

•



Si A, B, C y D: Cuaterna armónica
E, F, G y H: Cuaterna armónica
⇒ O, C y G: Colineales

En el gráfico tracemos la tangente en C corta a la prolongación de $\overline{AB}$.



Se va a demostrar $\overline{CD}$ es simediana del ΔABC.

ΔQPR : Teorema de Menelao

$$m\ell z=\ell nk \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{k}{z}$$

$\Rightarrow$ Q, C, R y F : Cuaterna armónica

$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PF}$: Haz armónico

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{AF}{BF}$$

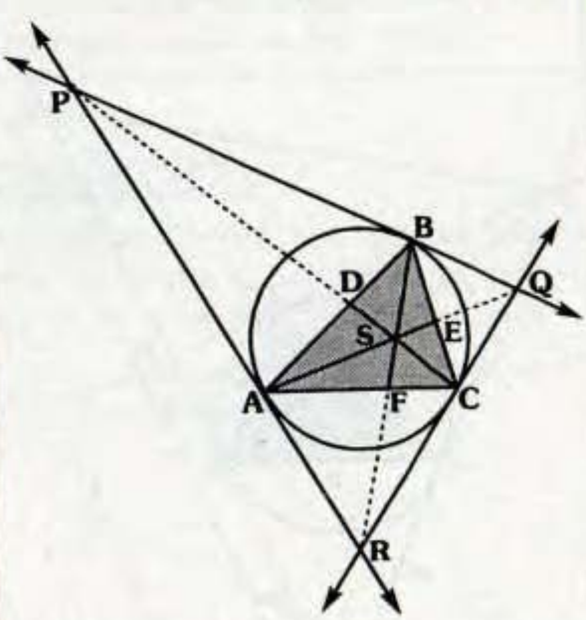
ΔABC : Por propiedad de semejanza

$$\frac{AF}{BF}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{b^2}{a^2}$$

Por teorema: $\overline{CD}$ es simediana.

Observación



Del último teorema, se demuestra en forma análoga para $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.

$\Rightarrow$ $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ *son medianas.*

Del gráfico tenemos:

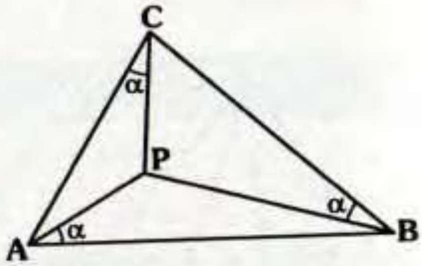
S: Punto Simediano del ΔABC.

S: Punto de Gergonne del ΔPQR.

PUNTOS DE BROCARD

Dado un triángulo ABC y un punto P, si $m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA$, entonces P es el punto de Brocard del triángulo ABC.

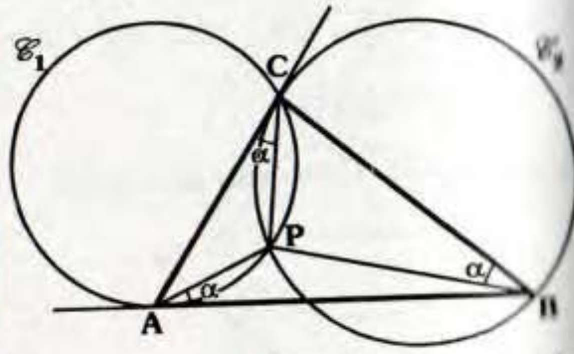
Si $m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA$



P: Punto de Brocard del ΔABC

Importante:

- *Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard, veamos:*

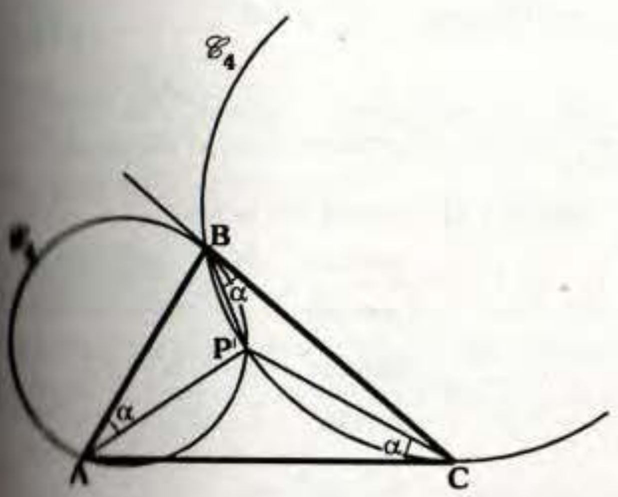


Dado el triángulo ABC, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$, que pase por C y sea tangente a $\overline{AB}$ en A, luego trazamos $\mathscr{C}_2$, que pase por B y sea tangente a $\overline{AC}$ en C.

Por ángulo inscrito y semiinscrito en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, tenemos:

$\Rightarrow m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA = \alpha$

$\therefore$ ***P: Primer punto de Brocard***



Análogamente, trazamos $\mathscr{C}_3$ que pase por A y sea tangente a $\overline{BC}$ en C, luego trazamos $\mathscr{C}_4$ que pase por C y sea tangente a $\overline{AB}$ en B.

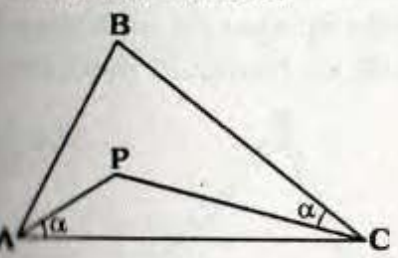
$\Rightarrow$ $m\measuredangle P'AC = m\measuredangle P'BA = m\measuredangle P'CB = \alpha$

P' : **Segundo punto de Brocard.**

α : Medida del ángulo de Brocard.

Cuidado:

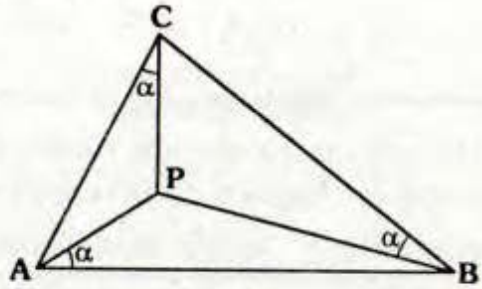
P' no necesariamente es punto de Brocard del ΔABC.



TEOREMA

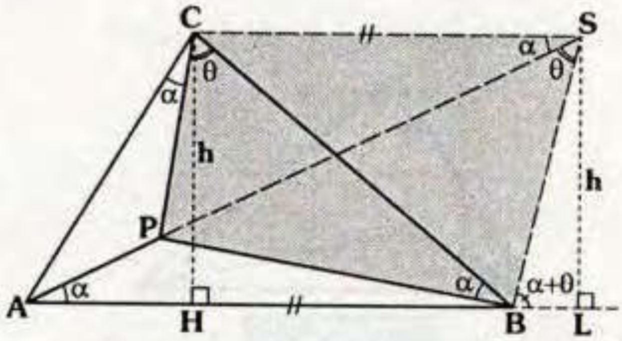
La cotangente de la medida del ángulo de Brocard es igual a la suma de las cotangentes de los ángulos interiores del triángulo.

Si P: Punto de Brocard



$$\Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C}$$

Demostración:



- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S, tal que:
$$\overline{CS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle CSA = \alpha$$

- ⏢PCSB: Inscriptible
$$\Rightarrow m\measuredangle PCB = m\measuredangle PSB = \theta$$

- Trazamos $\overline{CH}$ y $\overline{SL}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ CH = SL = h (CHSL: rectángulo).

- ⊿ASL : $\cot\alpha = \dfrac{AL}{h}$

- Pero : $AL = AH + HB + BL$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{AH + HB + BL}{h}$$
$$= \frac{AH}{h} + \frac{HB}{h} + \frac{BL}{h}$$
$$= \cot A + \cot B + \cot(\alpha + \theta)$$

- Se observa: $\alpha+\theta=C$

$\therefore\ \cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

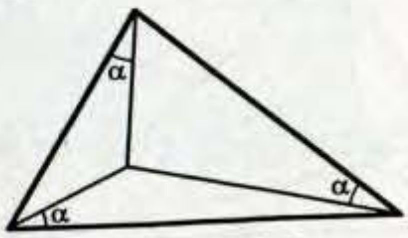
Observación

De la siguiente expresión se concluye que los ángulos de Brocard respecto a P y P' son de igual medida.

TEOREMA

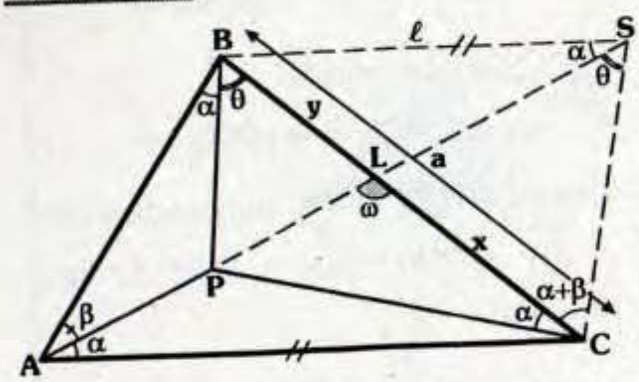
La medida del ángulo de Brocard es mayor que 0° y menor o igual que 30°.

α : medida del ángulo de Brocard



$$\Rightarrow\ \boxed{0^\circ<\alpha\leq 30^\circ}$$

Demostración:



- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S, tal que $m\measuredangle ASB=\alpha$.

- $\Delta BLS\sim\Delta ALC$ (AAA)

$$\Rightarrow\ \frac{x}{y}=\frac{b}{\ell}\qquad\ldots\text{(I)}$$

- $\Delta ABC\sim\Delta BSC$ (AAA)

$$\Rightarrow\ \frac{\ell}{a}=\frac{a}{b}\qquad\ldots\text{(II)}$$

- Se observa: $x+y=a\qquad\ldots$(III)

- De (I), (II) y (III): $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$

- ΔALC: Teorema de senos

$$\frac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

- Sabemos: $(a-b)^2\geq 0$

$$a^2-2ab+b^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\,\omega\geq 2\,\text{sen}\alpha$$

- Además: $\text{sen}\,\omega\ \leq\ 1$

$$\Rightarrow\ 1\geq\text{sen}\,\omega\geq 2\,\text{sen}\,\alpha$$

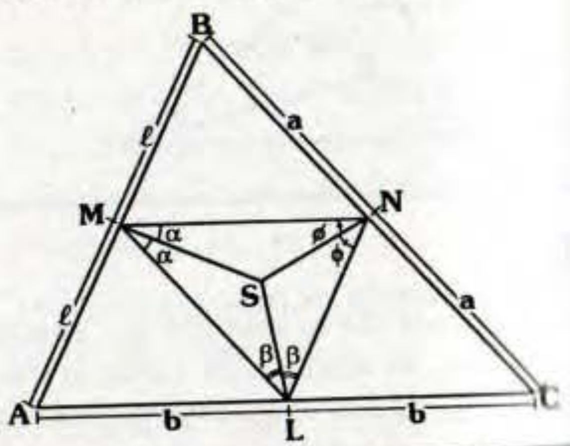
$$\Rightarrow\ 1\geq 2\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\,\alpha\leq\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 0^\circ<\alpha\leq 30^\circ$$

PUNTO DE SPIEKER

El punto de Spieker de un triángulo es el incentro de su triángulo mediano.



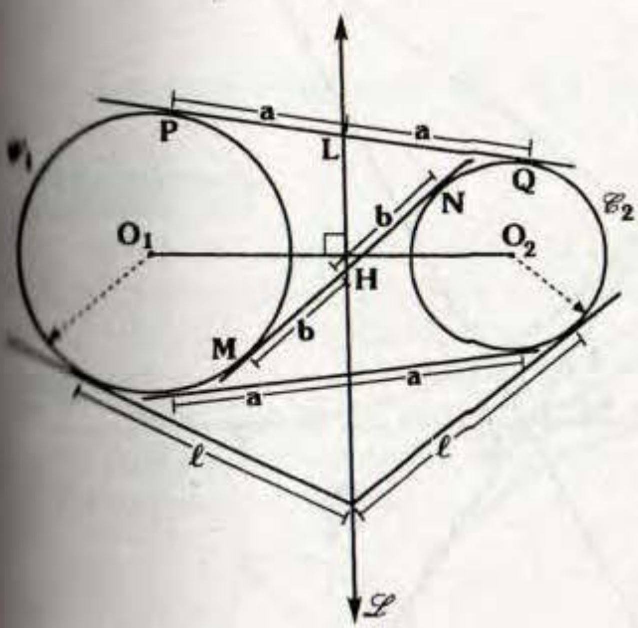
S: Punto de Spieker del ΔABC

TEOREMA

El punto de Spieker es el punto de concurrencia de los ejes radicales de las circunferencias exinscritas.

Demostración:

Antes de efectuar la demostración, mencionaremos algunas propiedades del eje radical.



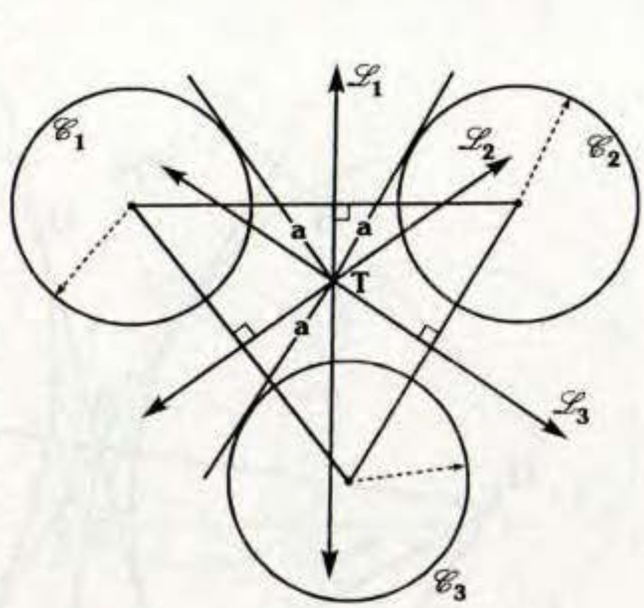
Del gráfico:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Se cumple :

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{O_1O_2}$$

$$PL=LQ \ , \ MH=HN$$

- El eje radical es perpendicular al segmento que une los centros .
- El eje radical biseca al segmento tangente común a ambas circunferencias.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: Eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

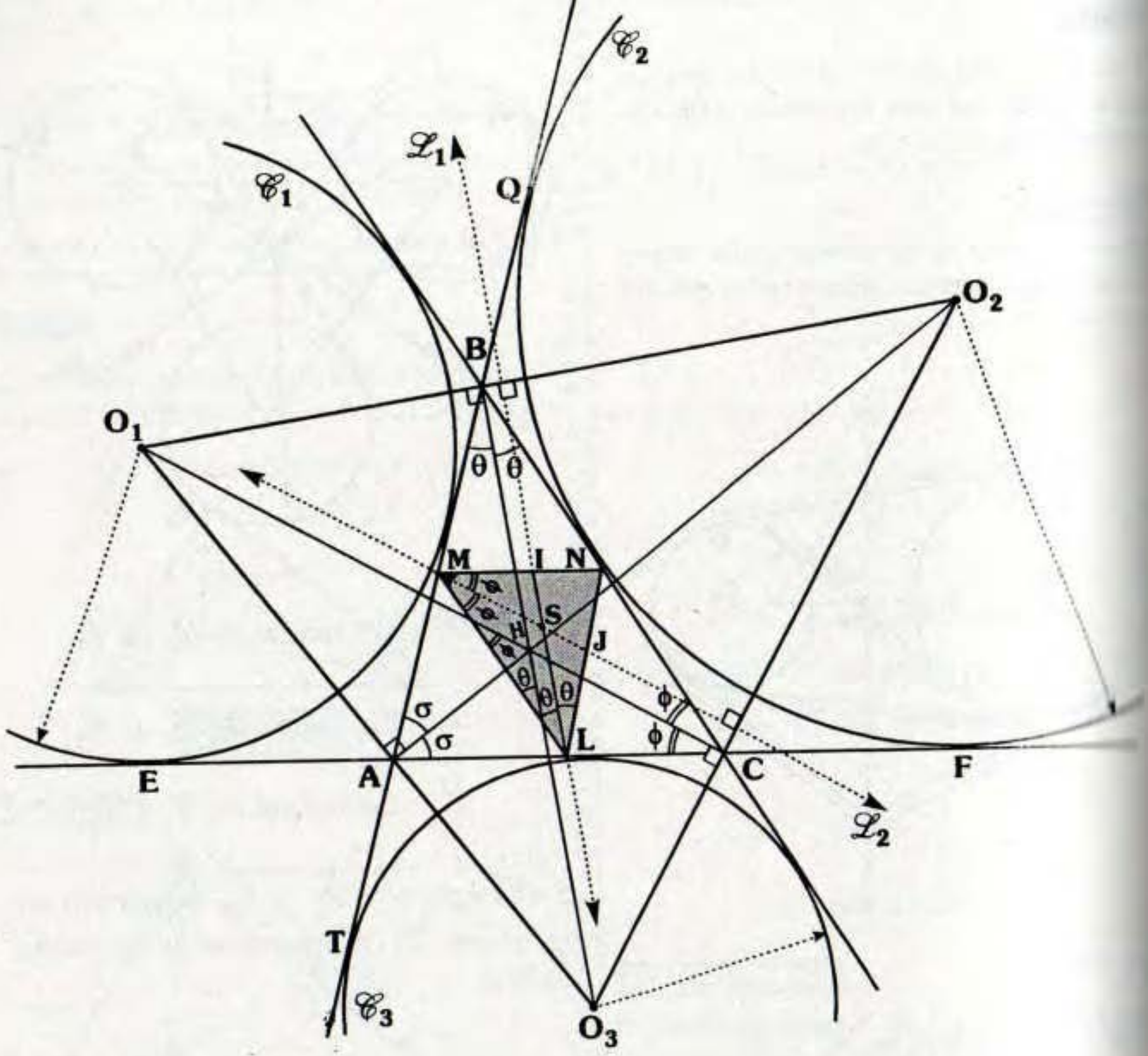
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: Eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

Se cumple: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en un punto (T), al cual se le llama centro radical.

Nota

Se ha mencionado sobre el centro y eje radical para circunferencias exteriores, debido a que las circunferencias exinscritas lo son, ya en la publicación sobre eje radical se analizará para los demás casos.



Del gráfico:

- S : Punto de Spieker del ΔABC.
- $\mathscr{C}_1$ $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ las circunferencias exinscritas del ΔABC.
- ΔMNL : Triángulo mediano del triángulo ABC

  $\Rightarrow$ LMNC y LMBN son paralelogramos
- Se observa $\Delta O_1O_2O_3$ es triángulo exincentral del ΔABC.

  H : Incentro del ΔABC y H : Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$ (Teorema 10.9)
- Luego: $\overline{MJ} // \overline{O_1C} \Rightarrow \overline{MJ} \perp \overline{O_3O_2}$

  $\overline{LI} // \overline{O_3B} \Rightarrow \overline{LI} \perp \overline{O_1O_2}$

- Por teorema de circunferencia:

$$TA = BQ \Rightarrow TM = MQ,$$

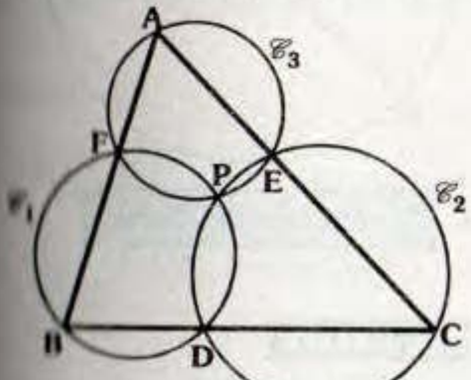
quiere decir que "M" está en el eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ y debido a que $\overline{MJ} \perp \overline{O_3O_2} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_2$.

- En forma análoga $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

$\therefore$ S es centro radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

PUNTO DE MIQUEL

Si D, E y F son puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente del triángulo ABC, entonces las circunferencias que pasan por las ternas de puntos B, D y F; C, E y D; A, F y E son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le conoce como punto de Miquel.

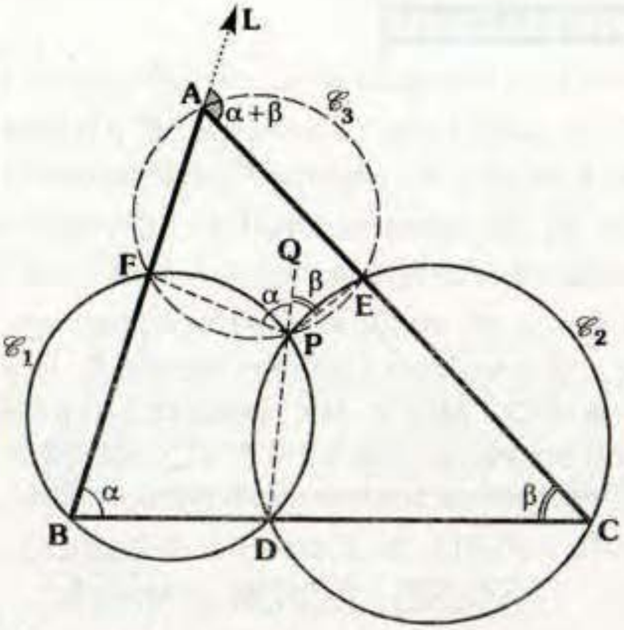


Punto de Miquel del ΔABC

Demostración:

- Para demostrar la concurrencia tendríamos que demostrar que el ⌂AFPE es inscriptible.
- ⌂BFPD: Inscrito

$$\Rightarrow m\measuredangle FBD = m\measuredangle FPQ = \alpha$$



- ⌂CEPD: Inscrito

$$\Rightarrow m\measuredangle ECD = m\measuredangle EPQ = \beta$$

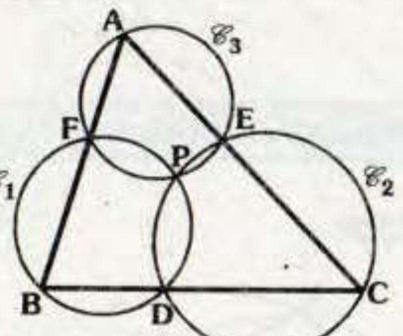
- Por ángulo exterior del ΔABC:

$$m\measuredangle LAC = \alpha + \beta$$

- ⌂AEPF: Inscriptible

$\therefore$ $\mathscr{C}_3$ pasa por P

Nota



P: *Punto de Miquel del triángulo* ABC *respecto a la terna* D, E, F.

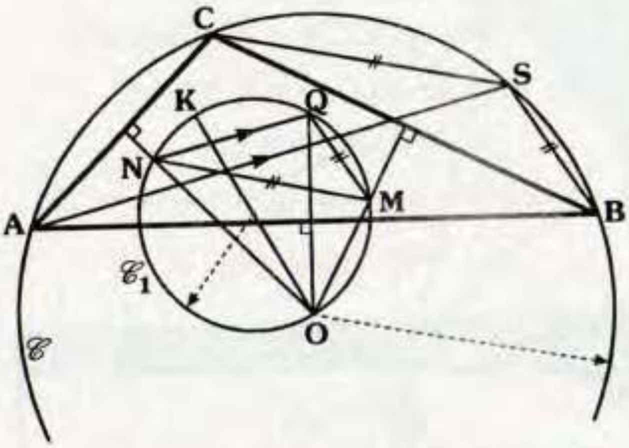
ΔDEF : *Triángulo de Miquel del* ABC *respecto a* P.

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$: *Circunferencias de Miquel de los puntos* D, E y F.

PUNTO DE STEINER

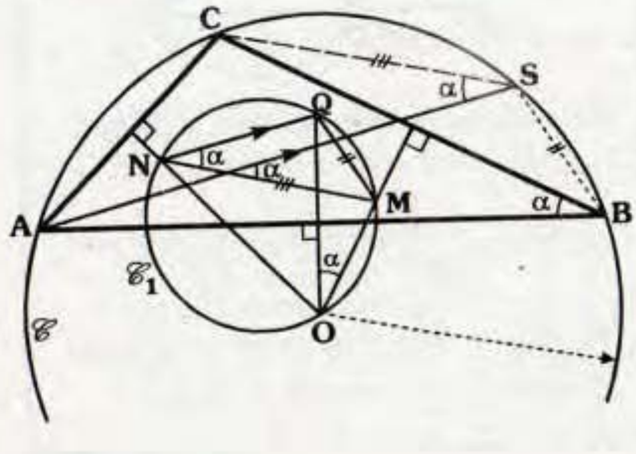
Dado un triángulo ABC; de circuncentro O, circunferencia circunscrita $\mathscr{C}$ y punto de Lemoine K, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ de diámetro OK, los circunradios perpendiculares a los lados AB, BC y AC cortan a $\mathscr{C}_1$ en Q, M y N respectivamente, las paralelas trazadas desde A, B y C a $\overline{NQ}$, $\overline{MQ}$ y $\overline{MN}$ respectivamente concurren en un punto, al cual se le denomina de Steiner del triángulo ABC.

Si K: Punto de Lemoine del ΔABC,
$\overline{AS} /\!/ \overline{NQ}$, $\overline{BS} /\!/ \overline{QM}$ y $\overline{MN} /\!/ \overline{SC}$.



$\Rightarrow$ **S: Punto de Steiner del ΔABC**

Demostración:



- Sea $\overline{AS} /\!/ \overline{QN}$, vamos a demostrar que $\overline{SC} /\!/ \overline{MN}$ y $\overline{BS} /\!/ \overline{QM}$.
- Los ⏢s ACSB y NQMO son inscritos:

$\Rightarrow$ m∡QNM=α y m∡CSA=α

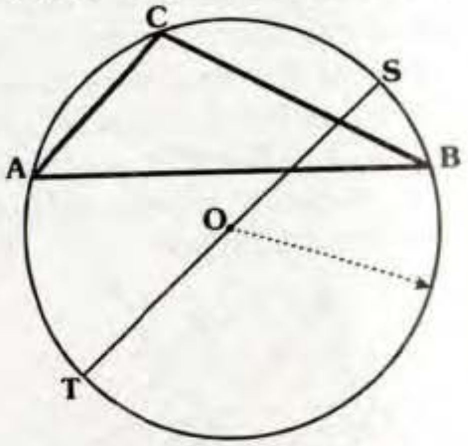
- Por ángulos entre paralelas, tenemos

$\therefore$ $\overline{SC} /\!/ \overline{MN}$ y $\overline{BS} /\!/ \overline{QN}$

PUNTO DE TARRY

Dado un triángulo, el punto de Tarry es el simétrico del punto de Steiner con respecto al circuncentro.

Si S: Punto de Steiner del ΔABC.



$\Rightarrow$ **T: Punto de Tarry**

PUNTOS DE JERABEK

Sea un triángulo ABC, se ubica P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente, tal que AP=BQ=CR, si desde dichos puntos trazamos paralelas a $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ y $\overline{CB}$ ellas se intersecaran en A', B' y C' respectivamente entonces $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes en un punto, al cual se le llama punto de Jerabek (J_1).

En el gráfico:

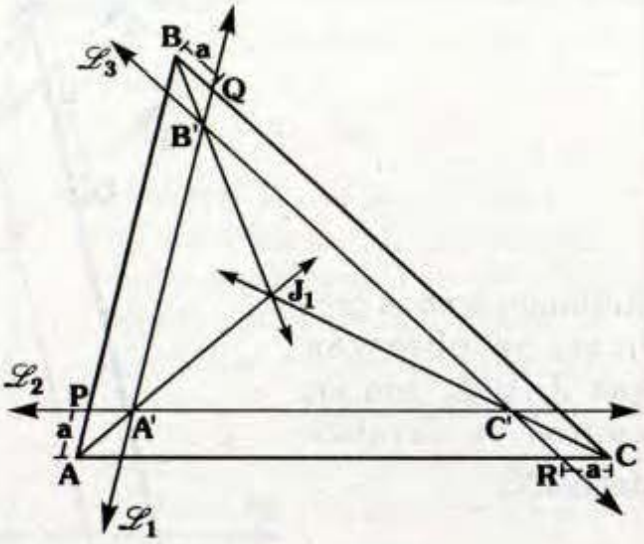
$AP = BQ = CR$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overline{AB},\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overline{AC},\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \parallel \overline{BC}$

Se cumple:

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ son concurrentes

J_1: Punto de Jerabek



Ahora, si ubicamos P_1, R_1 y Q_1 en $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$ tal que $AP_1 = BQ_1 = CR_1$ y con un procedimiento similar encontraremos un segundo punto de Jerabek (J_2).

En el gráfico:

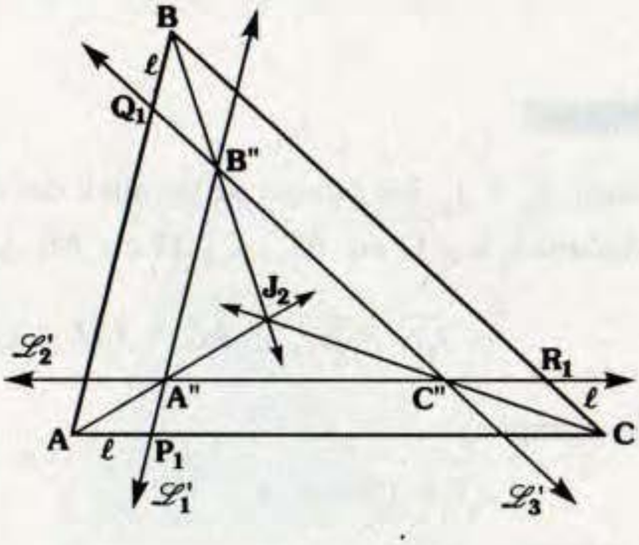
$AP_1 = BQ_1 = CR_1$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_1} \parallel \overline{AB},\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}'_2} \parallel \overline{AC},\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}'_3} \parallel \overline{BC}$

También:

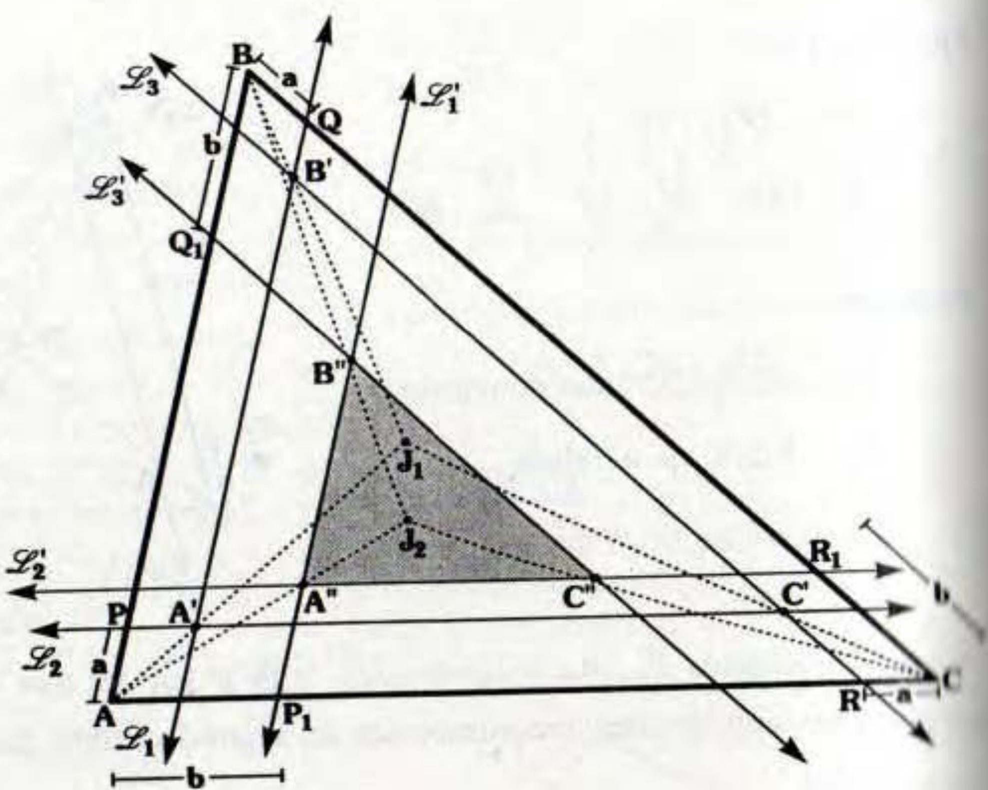
$\overrightarrow{AA''}$, $\overrightarrow{BB''}$ y $\overrightarrow{CC''}$ son concurrentes

J_2: Punto de Jerabek



Observación

- *En un triángulo se pueden ubicar dos puntos de Jerabek en la parte interna.*
- *La demostración de la concurrencia no es díficil, en virtud que J_1 ó J_2 son centros de homotecia del triángulo determinado con las paralelas y el triángulo inicial (Ver homotecia).*



Juntando ambos gráficos, se observan que J_1 y J_2 son los puntos de Jerabek del ΔABC .

TEOREMA

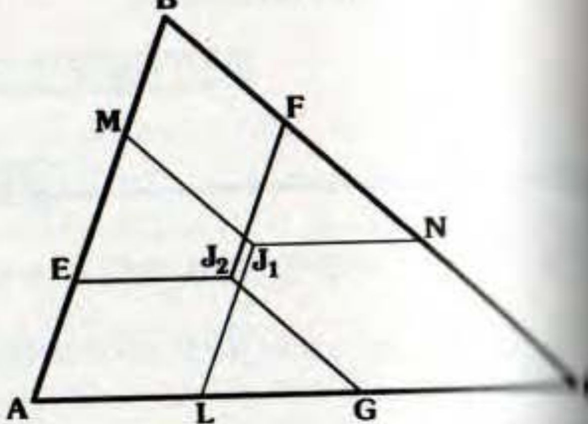
Sean J_1 y J_2 los puntos de Jerabek del ABC (considerando los gráficos anteriores) si ubicamos L y G en $\overline{AC}$, E y M en $\overline{AB}$ y F y N en $\overline{BC}$ tal que:

$$\overline{J_1N} \parallel \overline{EJ_2} \parallel \overline{AC},\ \overline{J_1M} \parallel \overline{GJ_2} \parallel \overline{CB} \quad \text{y} \quad \overline{J_1L} \parallel \overline{FJ_2} \parallel \overline{BA}$$

Se cumple:

$$J_1L = J_1M = J_1N \quad \text{y}$$

$$J_2E = J_2F = J_2G$$

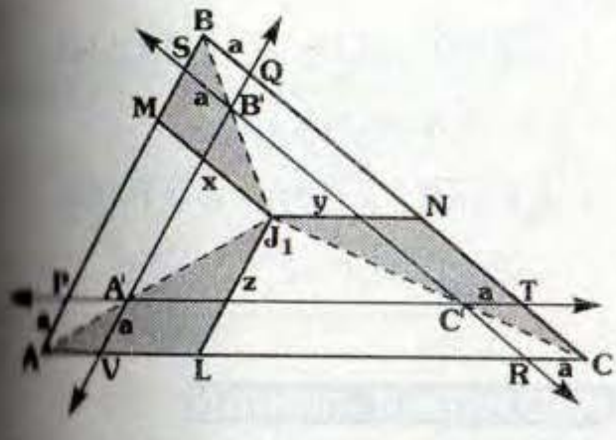


En el gráfico:

Sean: J_1 y J_2 los puntos de Jerabek

(J_1 obtenido al ubicar los puntos P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ tal que AP=BQ=CR, del primer gráfico y J_2 del segundo gráfico).

Demostración:



Del gráfico J_1 es punto de Jerabek, se ha trazado $\overline{J_1L} // \overline{AB}$, $\overline{J_1M} // \overline{BC}$ y $\overline{J_1N} // \overline{AC}$, vamos a demostrar: $x=y=z$

$$\Delta ALJ_1 \sim \Delta AVA' \Rightarrow \frac{z}{a}=\frac{AJ_1}{AA'}$$

$$\Delta CNJ_1 \sim \Delta CTC' \Rightarrow \frac{y}{a}=\frac{CJ_1}{CC'}$$

$$\Delta BMJ_1 \sim \Delta BSB' \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{BJ_1}{BB'}$$

ΔAJ_1B, por Teorema de Tales:

$$\frac{AJ_1}{AA'}=\frac{BJ_1}{BB'}$$

En forma análoga en el ΔBJ_1C:

$$\frac{BJ_1}{BB'}=\frac{CJ_1}{CC'}$$

Se concluye:

$$\frac{z}{a}=\frac{y}{a}=\frac{x}{a}$$

$$\therefore \; x=y=z$$

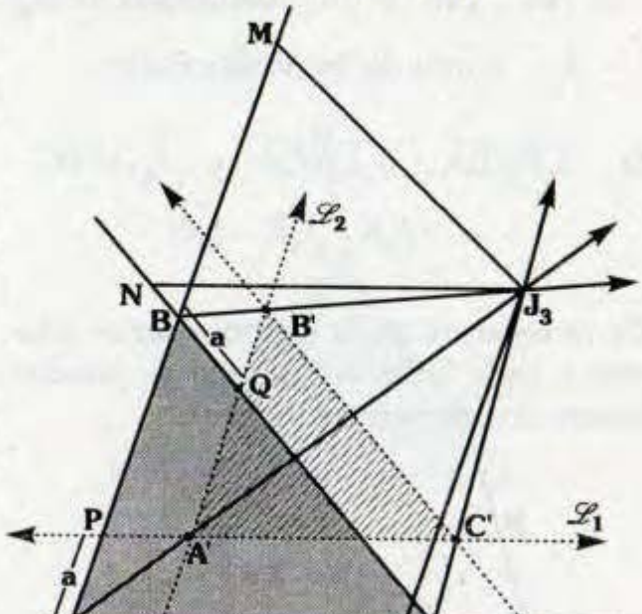
Nota

- *De la misma forma se procede para J_2:*

$$J_2E=J_2F=J_2G$$

- *Si alguno de los puntos ubicados sobre los lados (P, Q o R considerados al comienzo) se ubica en alguna de las prolongaciones se obtendrán dos puntos exteriores de Jerabek respecto a cada lado.*
- *Resulta un total de ocho puntos de Jerabek : dos interiores y seis exteriores.*

Analizando el caso externo:



Del gráfico: $AP=BQ=CR$

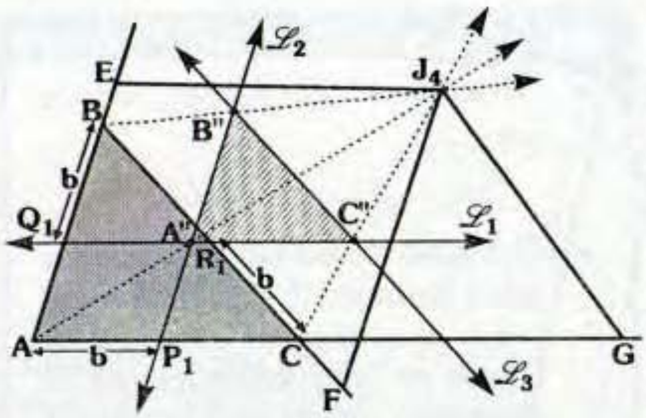
$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overline{AC},\; \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overline{AB} \text{ y } \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overline{BC}$$

$\Rightarrow \overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en J_3.

J_3: Punto de Jerabek exterior.

Si : $\overline{J_3N} // \overline{J_3L} // \overline{AB}$ y $\overline{JM} // \overline{CB}$

$$\Rightarrow J_3N=J_3L=JM$$



En el gráfico:

$$BQ_1 = AP_1 = CR_1$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overline{AC}, \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overline{AB} \quad y \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overline{BC}$$

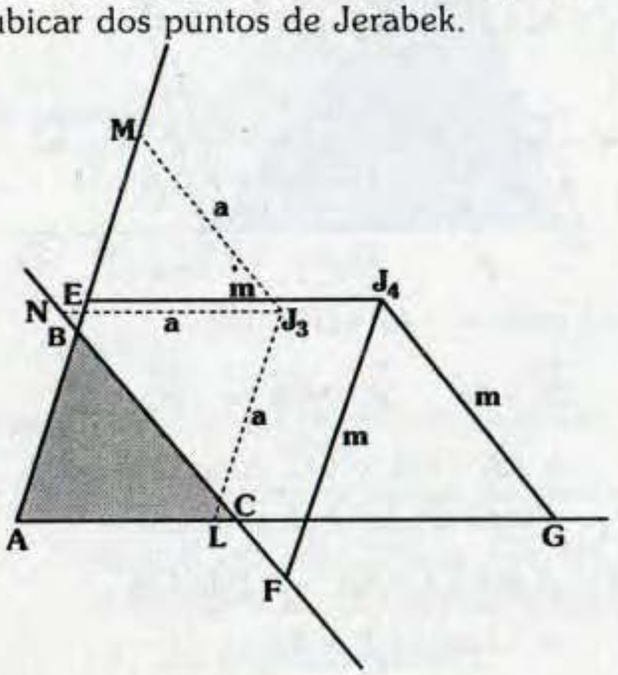
$$\Rightarrow \overrightarrow{AA"}, \overrightarrow{BB"} \text{ y } \overrightarrow{CC"} \text{ concurren en } J_4$$

J_4 : Punto de Jerabak exterior

Si $\overline{J_4F} // \overline{BA}$, $\overline{J_4E} // \overline{CA}$ y $\overline{J_4G} // \overline{BC}$

$$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$$

De lo anterior, en la región exterior relativa a cada lado vemos que se pueden ubicar dos puntos de Jerabek.



J_3 y J_4 : Puntos de Jerabek

$$\overline{J_3N} // \overline{AC}, \ \overline{J_3M} // \overline{BC} \text{ y } \overline{J_3L} // \overline{BA}$$

$$\Rightarrow J_3N = J_3M = J_3L$$

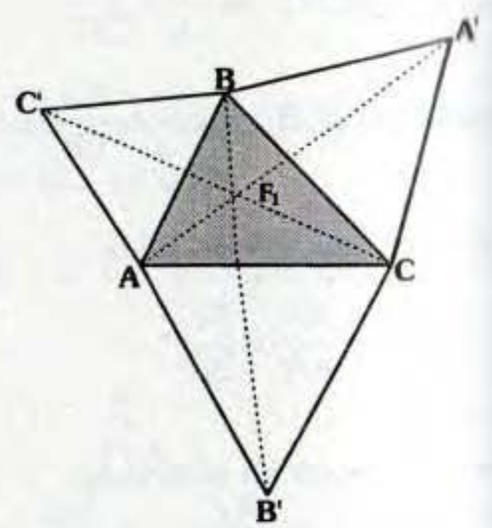
$$J_4E // \overline{AC}, \ \overline{J_4G} // \overline{BC} \text{ y } \overline{J_4F} // \overline{BA}$$

$$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$$

PUNTO DE FERMAT - TORRICELLI

Dado un triángulo ABC, si sobre los lados se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ACB', BCA' y ABC', se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes, a dicho punto se le denomina punto de Fermat además se cumple :

$$AA' = BB' = CC'$$



En el gráfico:

$\Delta ACB'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ABC'$ equiláteros

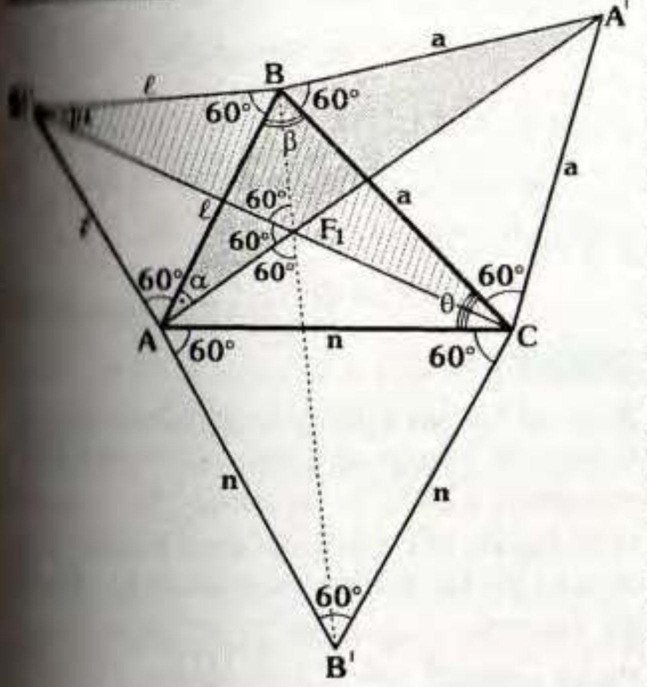
$\Rightarrow$ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes

F_1 : Punto de Fermat

Además :

$$\boxed{AA' = BB' = CC'}$$

Demostración:



- En el gráfico se trazan inicialmente los triángulos equiláteros ABC', BCA' y ACB', luego al trazar $\overline{CC'}$ y $\overline{AA'}$ se cortan en F_1 vamos a demostrar B, F_1 y B' son colineales.

- $\Delta CBC' \cong \Delta ABA'$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle BC'C = m\measuredangle BAA' = \alpha$$
$$CC' = AA'$$

- $\triangle AF_1BC'$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle AF_1C' = 60°$$
$$\Rightarrow m\measuredangle C'F_1B = m\measuredangle C'AB = 60°$$

- $\triangle AF_1CB'$ resulta ser inscriptible debido a que:

$$m\measuredangle AB'C = m\measuredangle AF_1C' = 60°$$
$$\Rightarrow m\measuredangle AF_1B' = m\measuredangle ACB' = 60°$$

- Finalmente:

$$m\measuredangle AF_1B' + m\measuredangle AF_1C' + m\measuredangle C'F_1B = 180°$$

B', F_1 y B son colineales.

- Debido a que B', F_1 y B son colíneales, se tendrá entonces:

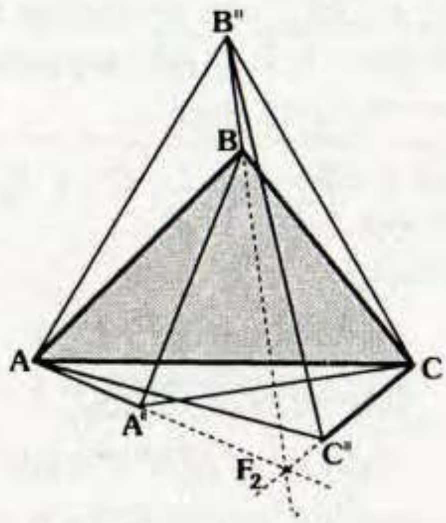
$$\Delta B'CB \cong \Delta ACA' \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow BB' = AA'$$
$$\therefore BB' = AA' = CC'$$

SEGUNDO PUNTO DE FERMAT

Dado un triángulo ABC, si ahora trazamos interiormente los triángulos equiláteros ABC'', BCA'' y ACB'', cumple $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le llama segundo punto de Fermat.

Además se cumple:

$$AA'' = BB'' = CC''$$



En el gráfico:

$\Delta ACB''$, $\Delta BCA''$ y $\Delta ABC''$ son equiláteros

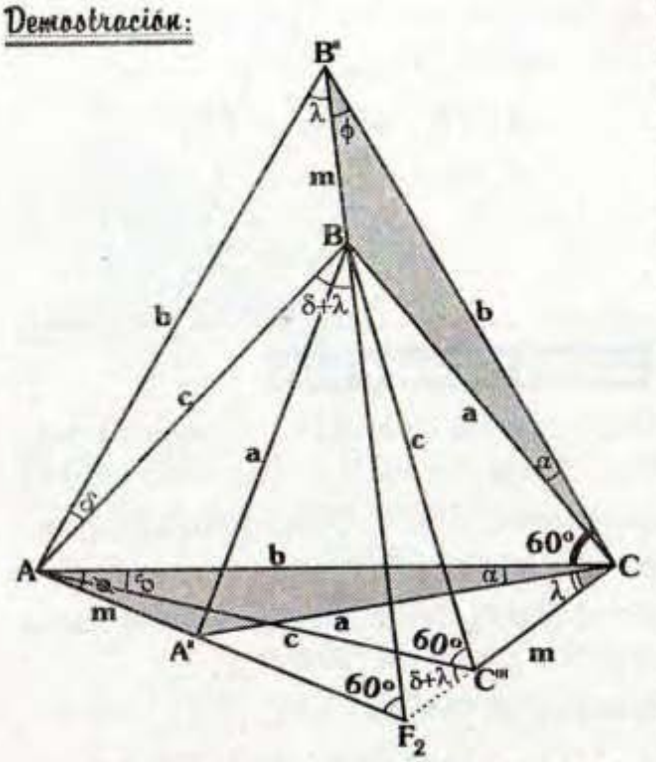
$\Rightarrow$ $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ con concurrentes

F_2 : Segundo punto de Fermat

Además:

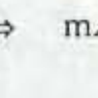
$$\boxed{AA'' = BB'' = CC''}$$

Demostración:



- En el gráfico los triángulos ACB", BCA" y ABC" son equiláteros se ha prolongado $\overline{B"B}$ y $\overline{AA"}$ las cuales se cortan en F_2.
- Vamos a demostrar C, C" y F_2 son colineales.
- Se observa:

$$m\measuredangle ACA" = m\measuredangle BCB" = \alpha$$
$$m\measuredangle C"AC = m\measuredangle BAB" = \delta$$
$$\Delta ACA" \cong \Delta CB"B \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CAA" = m\measuredangle CB"B = \phi$$
$$AA" = BB" = m \qquad \text{... (I)}$$
$$\Delta C"AC \cong \Delta BAB" \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle C"AC = m\measuredangle AB"B = \lambda$$
$$CC" = BB" = m \qquad \text{... (II)}$$

- En  : $60° + \phi = \phi + m\measuredangle AF_2B"$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AF_2B" = 60°$$

- Luego el $\square F_2ABC"$ es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AC"F_2 = \delta + \lambda$$

- En el $\Delta ACC"$: $\delta + \lambda = m\measuredangle AC"F_2$

$$\Rightarrow \quad C,\ C" \text{ y } F_2 \text{ son colineales}$$

- De (I) y (II) se deduce:

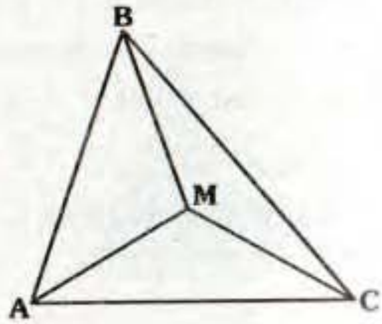
$$AA" = BB" = CC"$$

TEOREMA

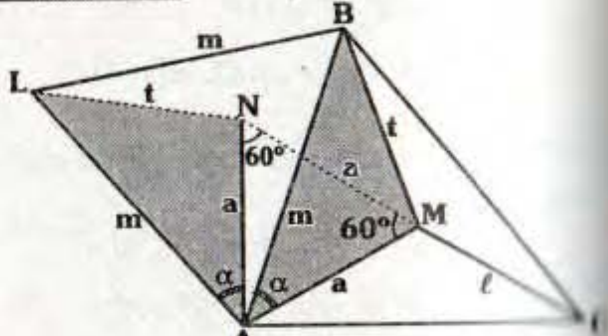
Si se ubica un punto en el plano de un triángulo cuyos ángulos interiores son menores 120°, si la suma de distancias hacia los vértices es mínima entonces dicho punto es el primer punto de Fermat.

En el gráfico:

Si MA+MB+MC es mínimo ⇒ M es el primer punto de Fermat.



Demostración:



- Lo que vamos a buscar es MA+MB+MC, para cualquier punto del plano, considerando que el ΔABC es fijo.

- Se trazan los triángulos equiláteros:

  AMN y ABL $\Rightarrow m\measuredangle LAN = m\measuredangle BAM = \alpha$

- Luego:

$$\Delta NAL \cong \Delta MAB \quad (L.A.L)$$
$$\Rightarrow \quad NL = MB$$

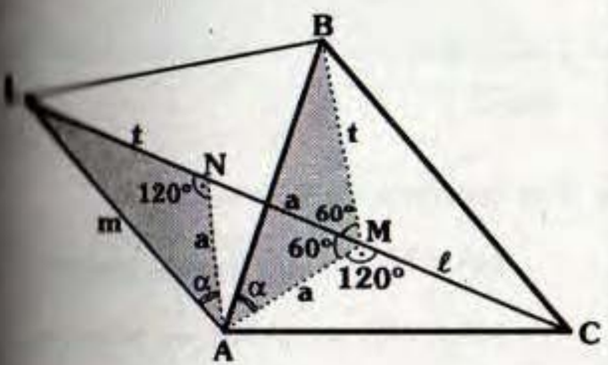
- Se observa:

$$MA + MB + MC = CM + MN + NL$$

  Pero debido a que el triángulo ABC es fijo $\Rightarrow$ L también es fijo.

- Lo que se busca es MA+MB+MC mínimo, que será lo mismo que CM+MN+NL mínimo, lo cual se dará cuando C, M, N y L sean colineales y más aún como C y L son fijos $\Rightarrow$ M y N en $\overleftrightarrow{CL}$.

- Así tenemos:



- De lo anterior se deduce M es el primer punto de Fermat, debido a que se encuentra $\overline{CL}$ y $m\measuredangle AML = 60^\circ$.

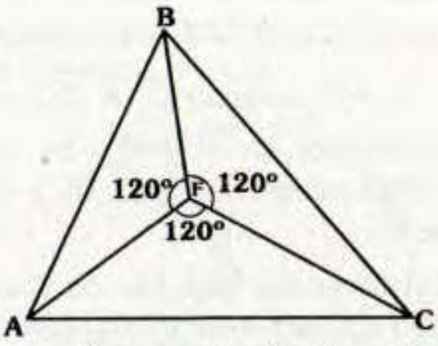
- También se nota:

  $m\measuredangle AMC = m\measuredangle AMB = m\measuredangle BMC = 120^\circ$

Nota

- *Sea* F *el primer punto de Fermat del* ΔABC *cuyas medidas de sus ángulos interiores menores a* 120°. *Se cumplirá:*

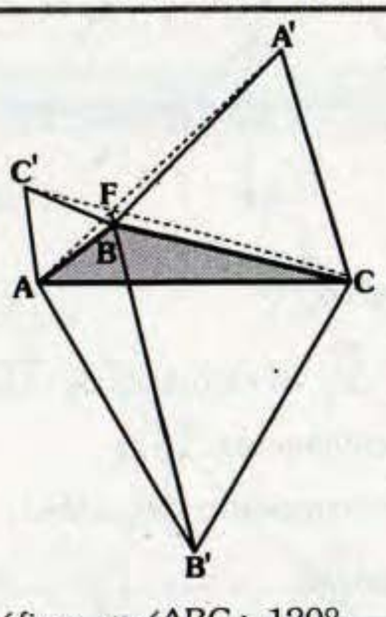
  $m\measuredangle AFB = m\measuredangle BFC = m\measuredangle CFA = 120^\circ$



F *es punto de Fermat*

- *Si el triángulo* ABC *tiene un ángulo interior cuya medida es mayor a* 120°, *el punto de Fermat (F) es externo, seguirá cumpliendo :*

$$AA' = BB' = CC'$$



En el gráfico: $m\measuredangle ABC > 120^\circ$

$\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ACB'$ son equiláteros.

Se cumple: $\overline{B'B}$, $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F.

Además: $AA' = BB' = CC'$

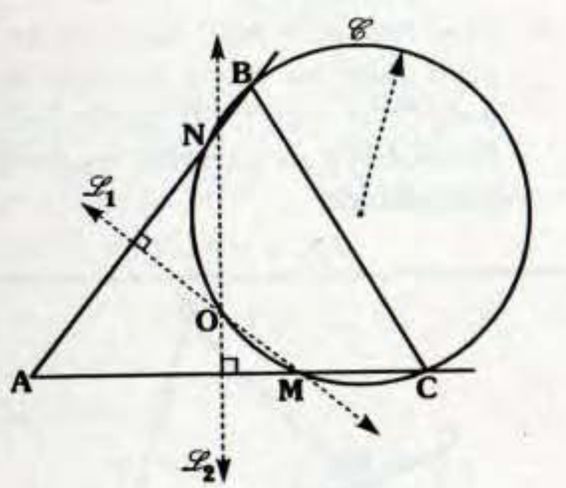
14. CIRCUNFERENCIAS NOTABLES

En esta sección estuidiaremos aquellas circunferencias que pasan por puntos determinados por alguna característica respecto a un triángulo. A dichas circunferencias llamaremos circunferencias notables.

CIRCUNFERENCIA DE MANNHEIM

Dado un triángulo ABC, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ intersecan a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente en M y N. Se cumple que el circuncentro, M, C, B y N son concíclicos.

La circunferencia que las contiene se denomina circunferencia de Mannheim.



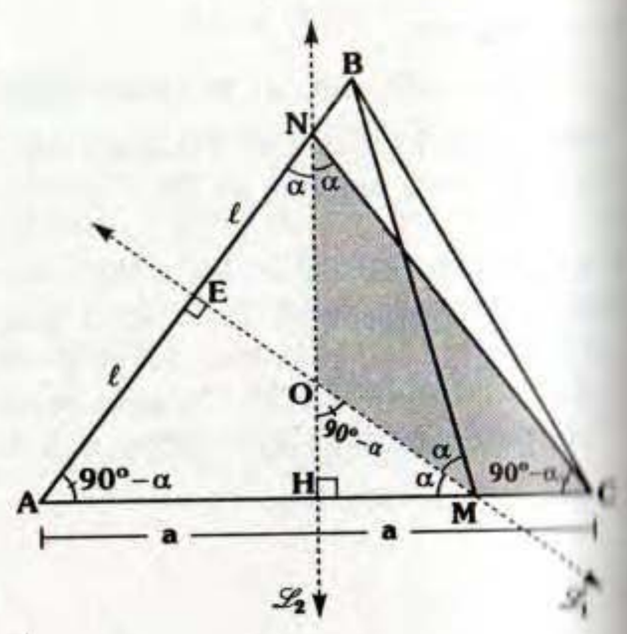
En el gráfico:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
- O es circuncentro del ΔABC.
- Se cumple:

O, M, C, B y N: Concíclicos

$\mathscr{C}$: Circunferencia de Mannheim

Demostración:



- En el gráfico O es circuncentro del ΔABC.
- Por teorema de la mediatriz.

  $NA = NC \Rightarrow \Delta ANC$ es isósceles

  $MA = MB \Rightarrow \Delta AMB$ es isósceles

- Debido a $m\measuredangle HOM = m\measuredangle MCN = 90° - \alpha$

  $\Rightarrow$ ⏢NOMC: Inscriptible

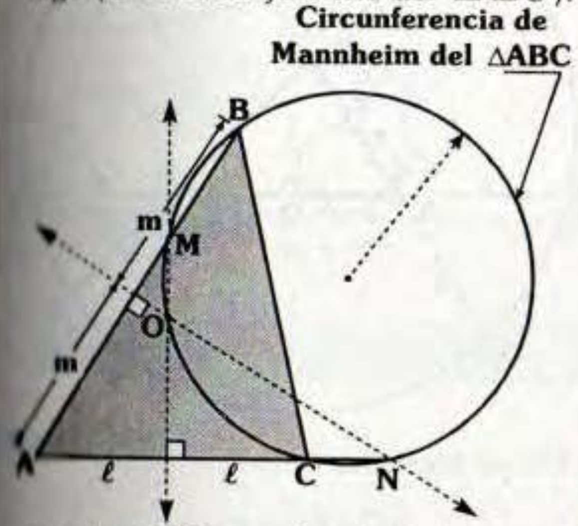
  $m\measuredangle OMA = m\measuredangle ONA = \alpha$

  $\Rightarrow$ ⏢MONB: Inscriptible

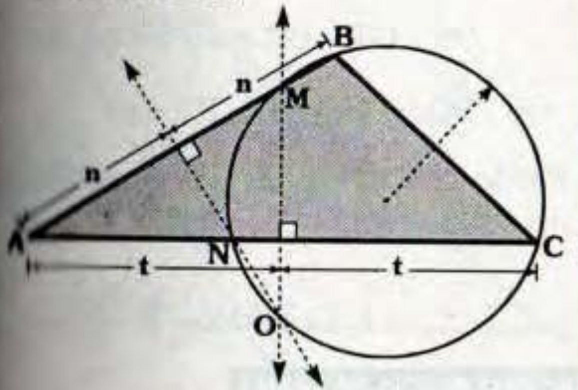
$\therefore$ O, M, C, B y N son concíclicos

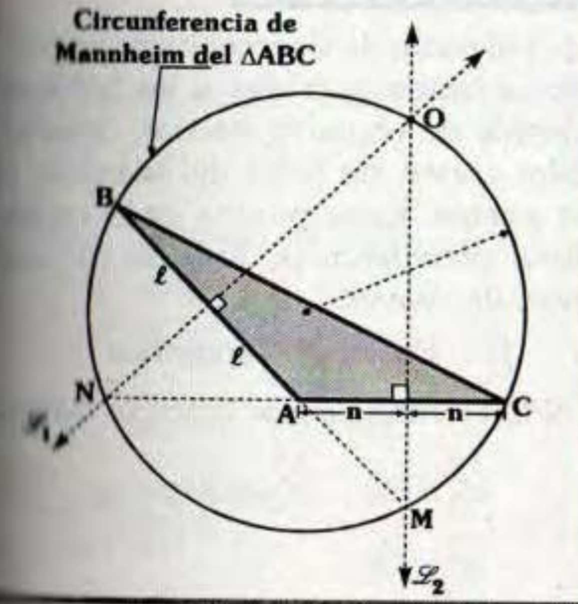
Observación

- *Para las siguientes posibilidades de la circunferencia, la demostración es análoga* (O *es circunferencia del* ΔABC).



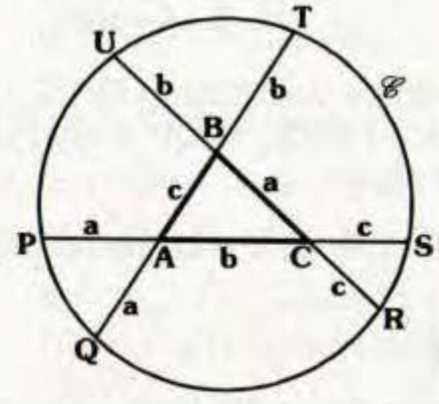
- *Si el* ΔABC *es obtusángulo de circuncentro* O:





CIRCUNFERENCIA DE CONWAY

Si las longitudes de las prolongaciones de los lados de un triángulo son iguales a la longitud del lado opuesto al vértice desde el cual se ha trazado las prolongaciones, entonces los extremos de las prolongaciones se encuentran en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Conway.



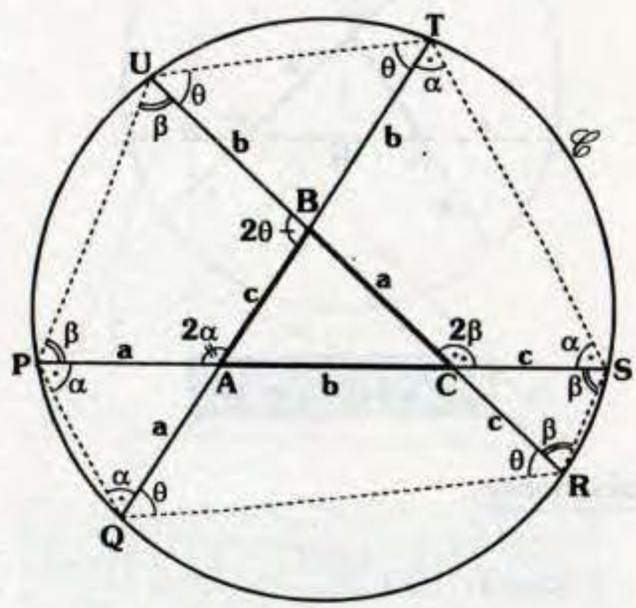
Si: $AP = AQ = BC = a$

$BT = BU = AC = b$ y

$CS = CR = AB = c$

$\Rightarrow$ **$\mathscr{C}$: Circunferencia de Conway**

Demostración:



- Los triángulos APQ y ATS son isósceles.

$\Rightarrow$ $m\measuredangle APQ = m\measuredangle AQP$

$m\measuredangle ATB = m\measuredangle ABT = \alpha$

- Análogamente:

$m\measuredangle UPC = m\measuredangle PUC = m\measuredangle CSR = m\measuredangle CRS = \beta$

$m\measuredangle BUT = m\measuredangle BTU = m\measuredangle BQR = m\measuredangle BRQ = \theta$

- $\Delta ABC:\quad 2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360°$

$\Rightarrow\quad \alpha + \beta + \theta = 180°$

- Por ello los cuadriláteros QPUT, PUTS, UTSR, TSRQ, SRQP y RQPU son inscriptibles.

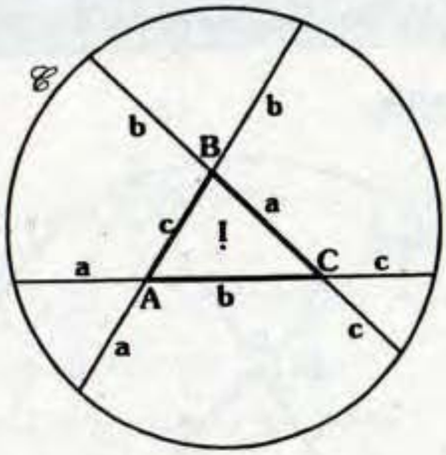
$\therefore$ P, Q, R, S, T y U son concíclicos

TEOREMA

El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia de Conway.

Si: I : Incentro de ABC y

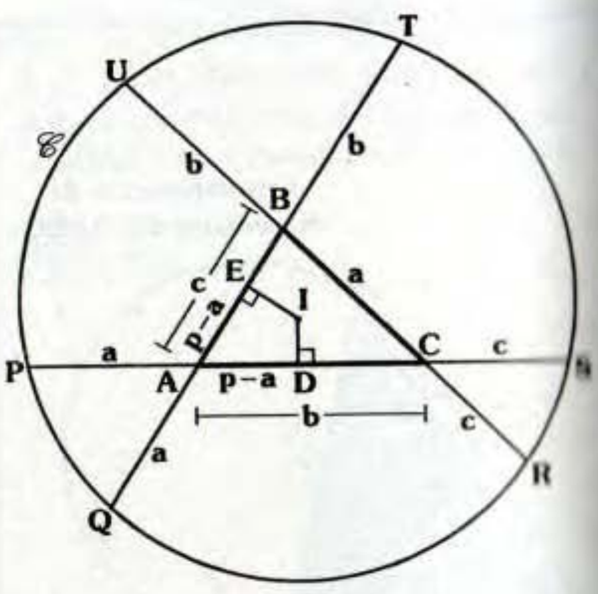
$\mathscr{C}$: Circunferencia de Conway.



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{I: Centro de } \mathscr{C}}$

__Demostración:__

- Trazamos $\overline{ID} \perp \overline{AC}$ e $\overline{IE} \perp \overline{AB}$



- Por el teorema 8.1:

$$AD = AE = p - a$$

- Se observa que:

$$PS = QT = UR = a + b + c = 2p$$

$$\Rightarrow\quad PD = DS = QE = ET = p$$

- Por lo cual $\overleftrightarrow{DI}$ y $\overleftrightarrow{EI}$ son mediatrices de $\overline{PS}$ y $\overline{QT}$.

$\therefore$ I : Centro de $\mathscr{C}$

CIRCUNFERENCIA DE ADAMS

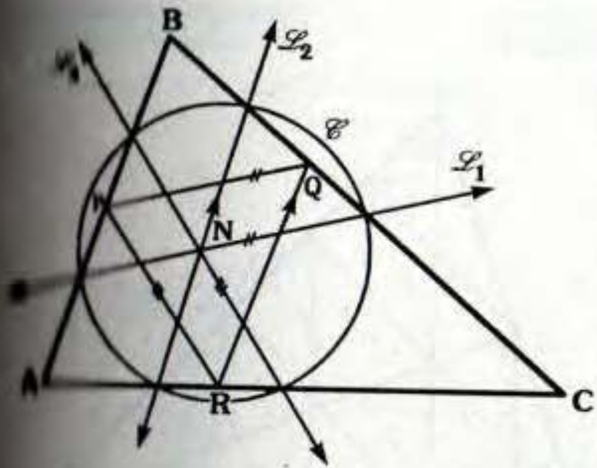
Si por el punto de Georgonne de un triángulo se trazan paralelas a los lados del triángulo de contacto interior, estas paralelas cortan los lados del triángulo en seis puntos. Estos puntos están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Adams.

Si: N : Punto de Georgonne

ΔPQR : Triángulo de contacto interior

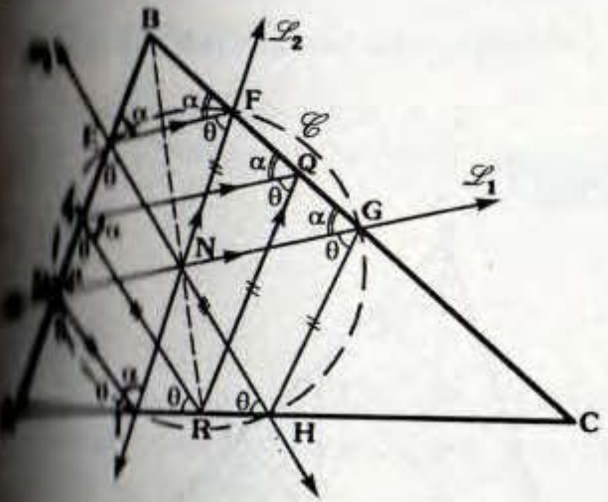
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overline{PQ}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \,//\, \overline{QR}$ y

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \,//\, \overline{PR}$



$\mathscr{C}$: Circunferencia de Adams

Demostración:



- $\triangle PQR$: Δ de contacto interior $\Rightarrow PB=BQ$

  $AP=AR$ y $CR=CQ$ ...(I)

- $\triangle PBR$: Teorema de Tales

  $$\frac{PB}{PE}=\frac{BR}{NR} \quad ...(II)$$

- $\triangle BQR$: Teorema de Tales

  $$\frac{PQ}{FQ}=\frac{BR}{NR} \quad ...(III)$$

- De (I), (II) y (III) : $PE=FQ$
- DEFG: Trapecio isósceles

  $\Rightarrow$ G, F, E y D: Concíclicos

- Se sabe: $m\measuredangle ARP = m\measuredangle PQR = \theta$
- Análogamente:

  EHID: Trapecio isósceles

  $\Rightarrow$ F, E, D y I: Concíclicos

  E, D, I y H: Concíclicos

- IFGH: Trapecio isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle FGH = \alpha+\theta$

  $\Rightarrow$ D, I, H y G: Concíclicos

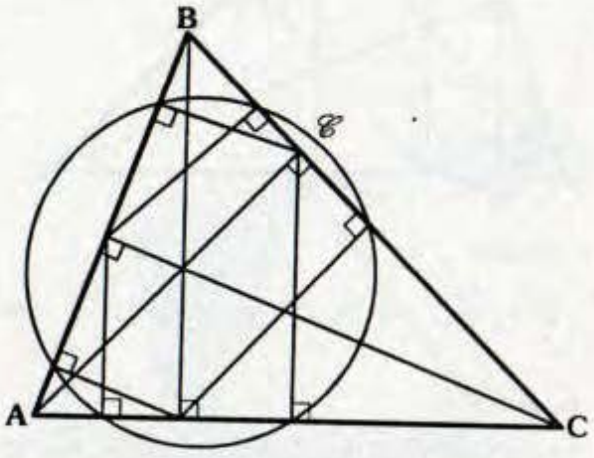
  I, H, G y F: Concíclicos

  H, G, F y E: Concíclicos

  $\therefore$ G, F, E, D, I, H: Concíclicos

CIRCUNFERENCIA DE TAYLOR

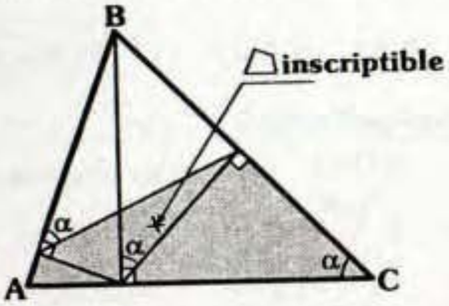
Las proyecciones de los pies de las alturas de un triángulo sobre los lados se ubican en una misma circunferencia, conocida como la circunferencia de Taylor.

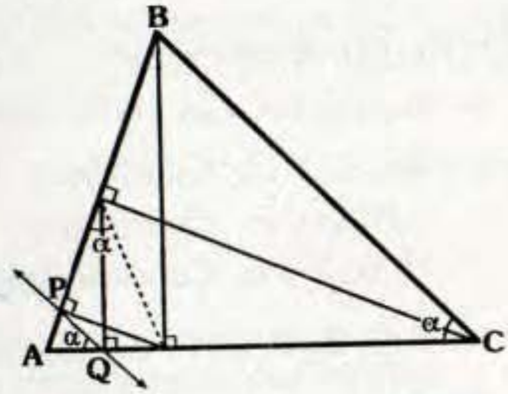


$\mathscr{C}$: Circunferencia de Taylor del ΔABC.

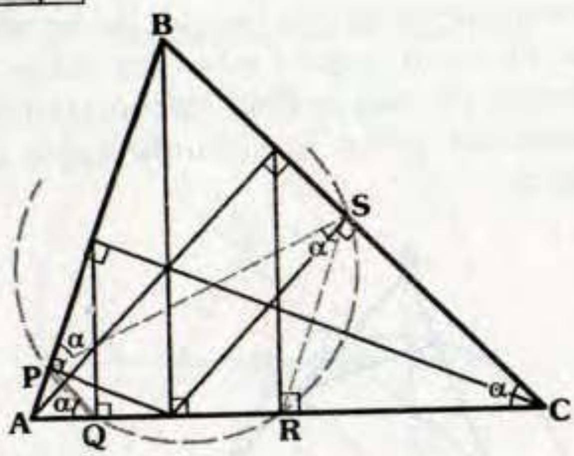
Demostración:

- Para la demostración tener en cuenta, las siguientes propiedades.





Paso 1



- Como:

  $\overline{PQ} // \overline{BC} \Rightarrow m\measuredangle PQA = m\measuredangle BCA = \alpha$

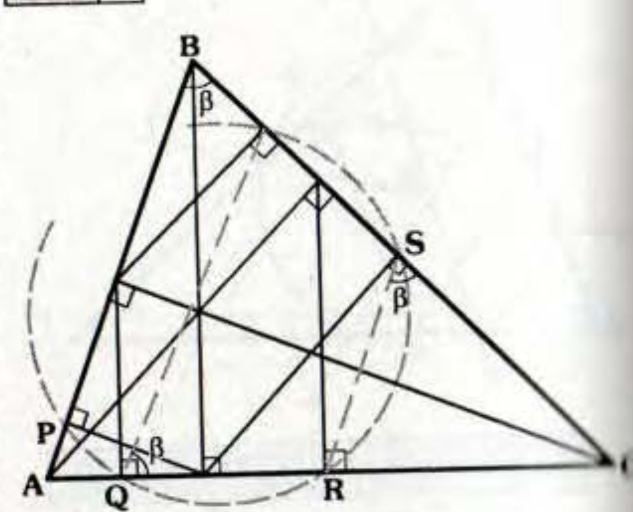
- $\triangle$APSC:

  Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle BPS = m\measuredangle BCA = \alpha$

- Se sabe : $\overline{SR} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle PSR = \alpha$

  $\therefore$ P, Q, R y S son concíclicos

Paso 2

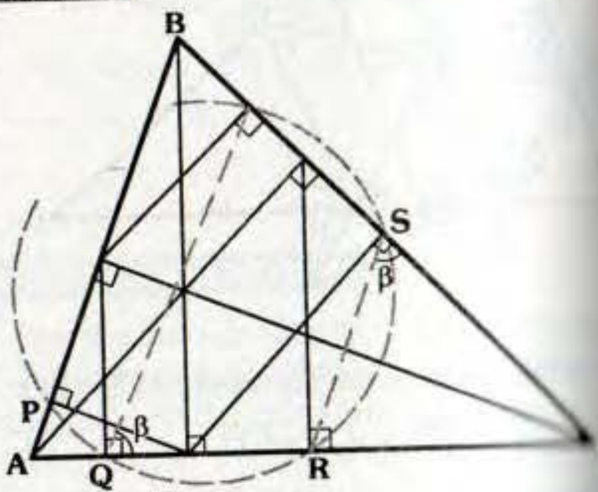


- $\overline{RS} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle RSC = \beta$
- $\triangle$ABTQ:

  Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle TQC = \beta$

  $\therefore$ Q, R, S y T son concíclicos

Paso 3



- Análogamente:

  R, S, T y U son concíclicos.

  S, T, U y P son concíclicos.

  T, U, P y Q son concíclicos.

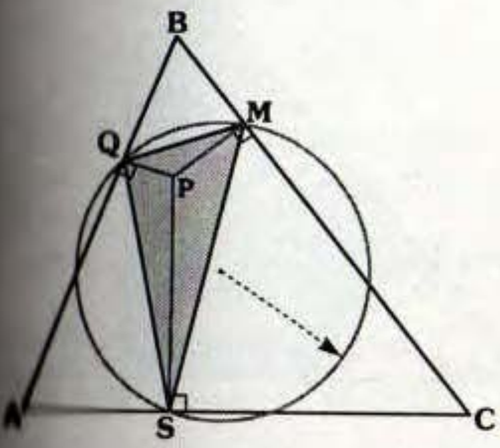
  U, P, Q y R son concíclicos.

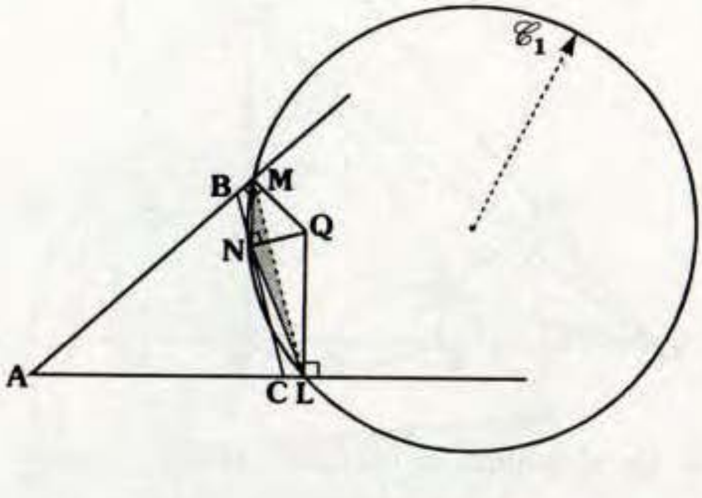
- Por teorema de configuración:

  $\therefore$ P, Q, R, S, T y U son concíclicos

CIRCUNFERENCIA PEDAL

Es la circunferencia circunscrita al triángulo pedal.





En el gráfico:

ΔQMS : Triángulo pedal del ΔABS, respecto de P.

$\mathscr{C}$: Circunferencia Pedal respecto de P.

ΔMNL : Triángulo pedal del ΔABS respecto de Q.

$\mathscr{C}_1$: Circunferencia pedal respecto de Q.

TEOREMA

La circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo pedal (circunferencia pedal) interseca a los lados del triángulo dado en otros tres puntos los cuales son vértices de otro triángulo pedal.

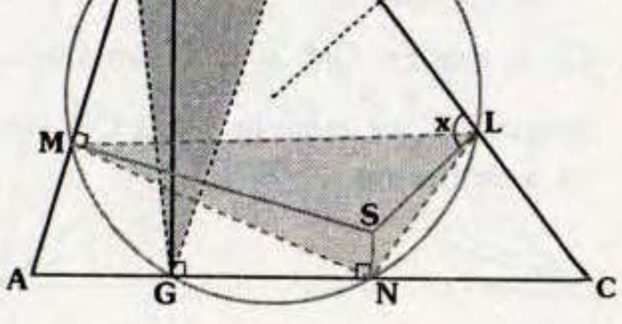
En el gráfico:

ΔEFG : Triángulo pedal del ΔABC respecto de P.

Si trazamos las perpendiculares en M y L a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se encuentra S, se cumple:

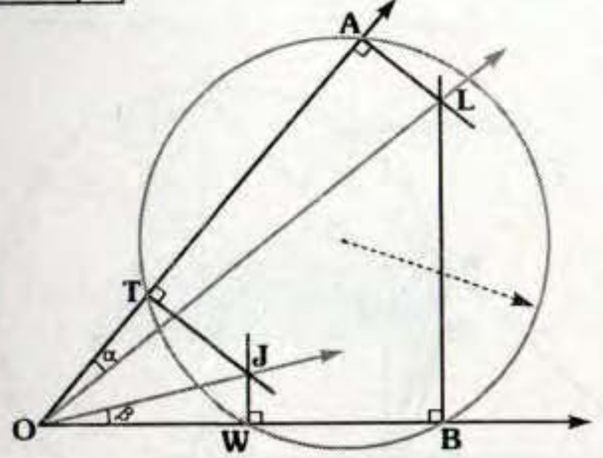
$$m\measuredangle SLB = 90^\circ$$

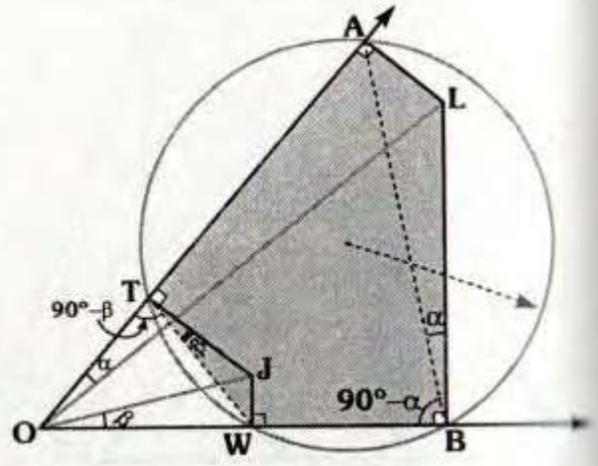
$\Rightarrow$ ΔMNL : Triángulo Pedal del ΔABC.



Demostración:

Paso 1





- En el gráfico se cumple: $\alpha = \beta$
- Es decir:

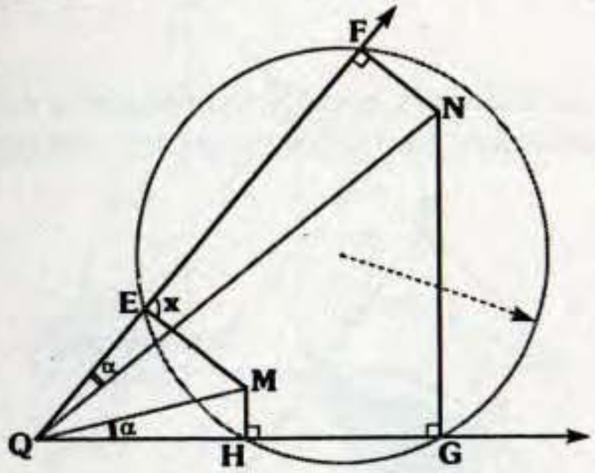
  $\overleftrightarrow{OL}$ y $\overleftrightarrow{OJ}$ son rayos isogonales del $\measuredangle AOB$.

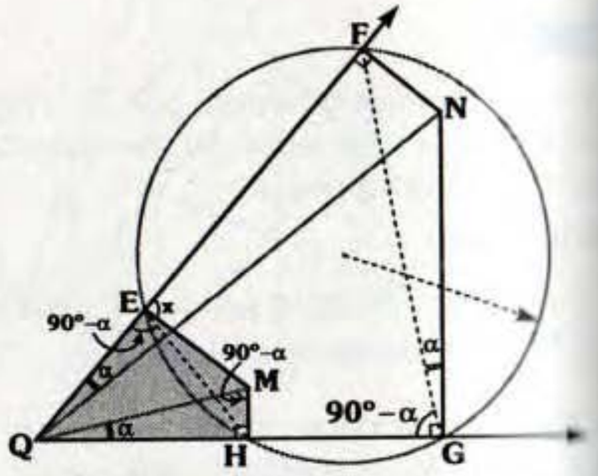
- ⌂OTJW y ⌂OALB: Inscriptibles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle WTJ = \beta$ y $m\measuredangle LBA = \alpha$
- ⌂WTAB: Inscrito
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle OTW = m\measuredangle OBA$

  $90° - \beta = 90° - \alpha$

  $\therefore$ $\beta = \alpha$

Paso 2 ***(recíproco)***





- En el gráfico $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$ son rayos isogonales, se cumple $\overline{ME} \perp \overline{QF}$ (se va a demostrar $x = 90°$).

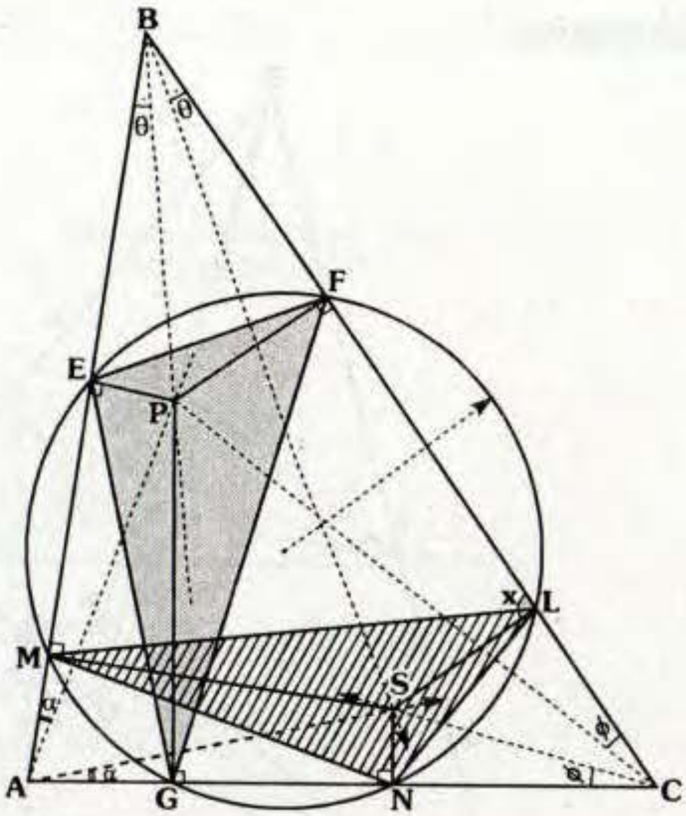
- ⌂QFNG: Inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle FGN = \alpha$
- ⌂EFGH: Inscrito $\Rightarrow$ $m\measuredangle HEG = 90° - \alpha$
- Debido a que:

  $m\measuredangle QEH = m\measuredangle QMH = 90° - \alpha$

  $\Rightarrow$ ⌂QEMH: Inscriptible

  $\therefore$ $m\measuredangle MEF = 90°$

Paso 3



- Por el primer paso:

  m∡SAC=m∡PAE = α

  m∡EBP=m∡SBC = θ

- Por teorema de los puntos conjugados isogonales (P y S en el gráfico) se tiene:

  m∡SCN=m∡PCF = θ

- Por el segundo paso:

  Para el ángulo ACB, se tiene:

  $\overline{SN} \perp \overline{AC}$, $\overline{PG} \perp \overline{AC}$, $\overline{PF} \perp \overline{BC}$ y

  m∡SCN = m∡PCF = φ

  ⇒ x=90°

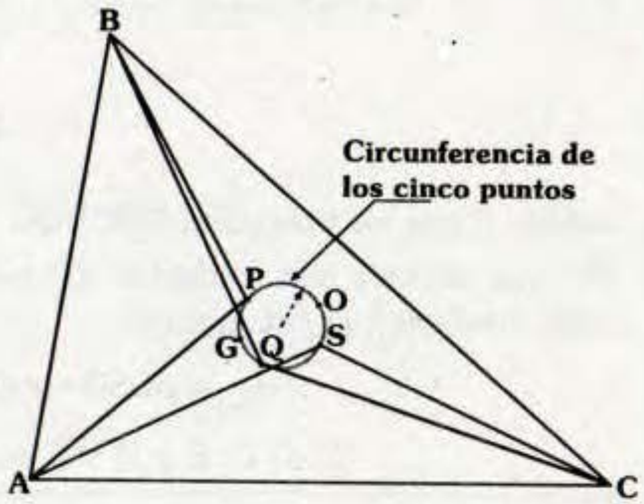
- Con lo cual se concluye que si ΔEFG es triángulo pedal entonces el ΔMNL también lo será:

CIRCUNFERENCIA DE LOS CINCO PUNTOS O DE LOS MOMENTOS IGUALES

TEOREMA

Si los lados de un triángulo dado son las bases de los triángulos isósceles trazados interiormente, cuyas áreas de las tres regiones son iguales a la tercera parte del área de la región inicial, entonces los tres vértices de dichos triángulos isósceles, el circuncentro y baricentro del triángulo inicial son concíclicos. La circunferencia que contiene a estos puntos se denomina circunferencia de los cincos puntos.

En el gráfico:



O y G: Circuncentro y baricentro del ΔABS respectivamente.

ΔABS , ΔBQS y ΔASC :

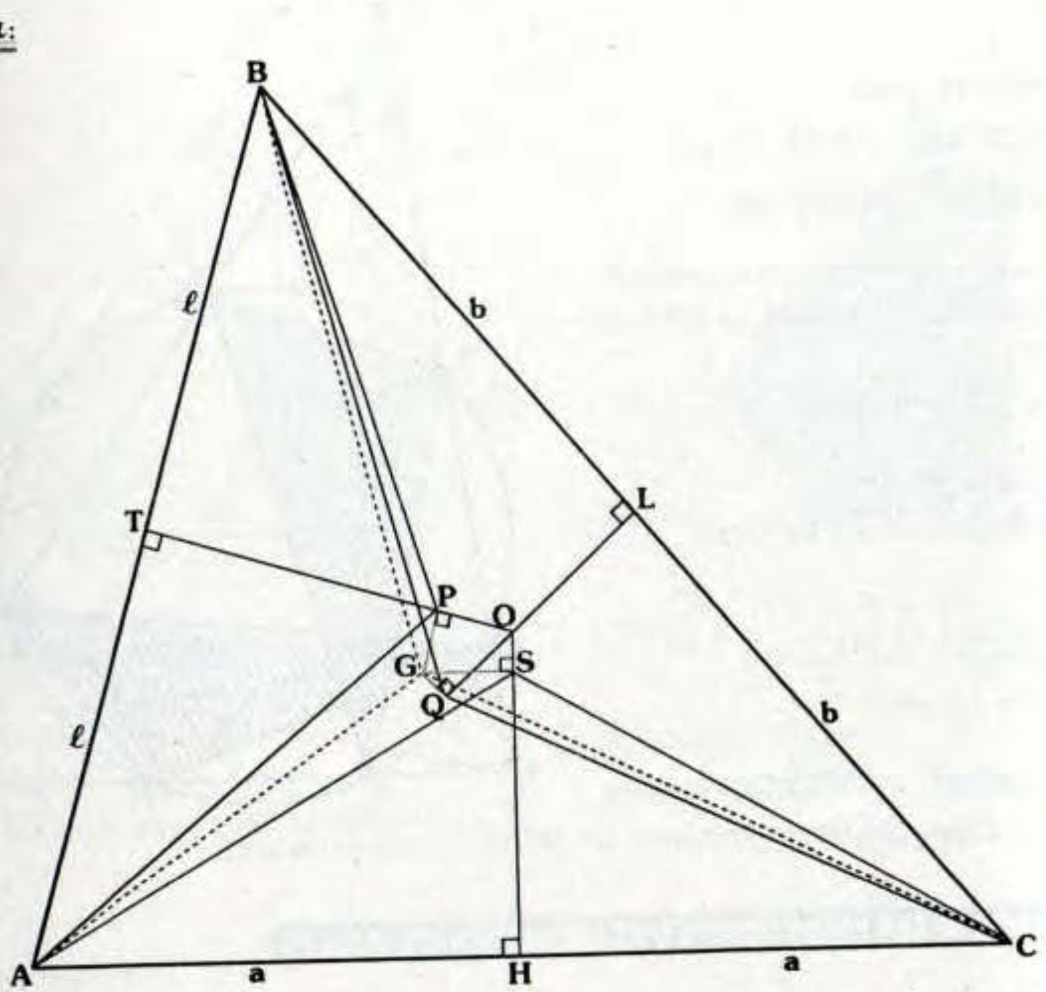
Isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

$$S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

Se cumple :

O, G, P, Q y S son concíclicos

Demostración:



- Por teorema: Si G es baricentro $\Rightarrow S_{\Delta AGC} = S_{\Delta AGB} = S_{\Delta CGB} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{3}$

- Luego por condición inicial: $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{3}$

- Acomodando las expresiones: $S_{\Delta AGC} = S_{\Delta ASC} \Rightarrow \overline{GS} // \overline{AC}$

$$S_{\Delta AGC} = S_{\Delta APB} \Rightarrow \overline{GP} // \overline{AB}$$

$$S_{\Delta CGB} = S_{\Delta BQC} \Rightarrow \overline{GQ} // \overline{BC}$$

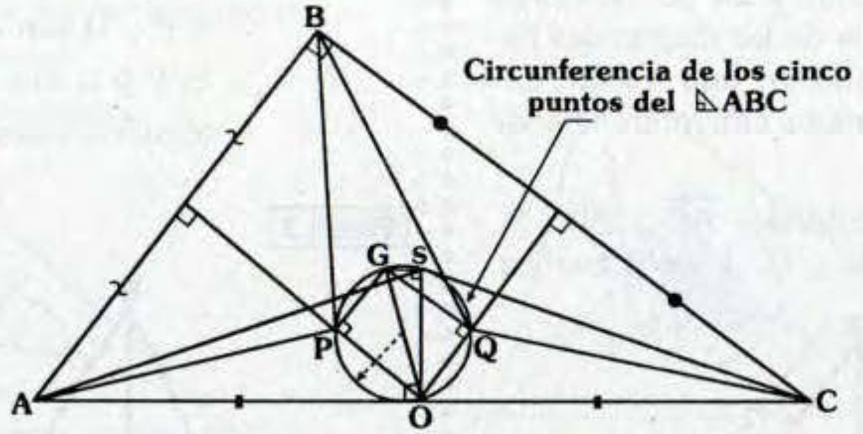
- Debido a que los triángulos ABP, BQC y ASC son isósceles, las alturas $\overline{SH}$, $\overline{QL}$ y $\overline{PT}$ que también son medianas son parte de las mediatrices de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, luego contienen al circuncentro.

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle GSO = m\measuredangle GPO = m\measuredangle GQO = 90^\circ$$

$\therefore$ G, P, O, S y Q son concíclicos de diámetro $\overline{OG}$.

Observación

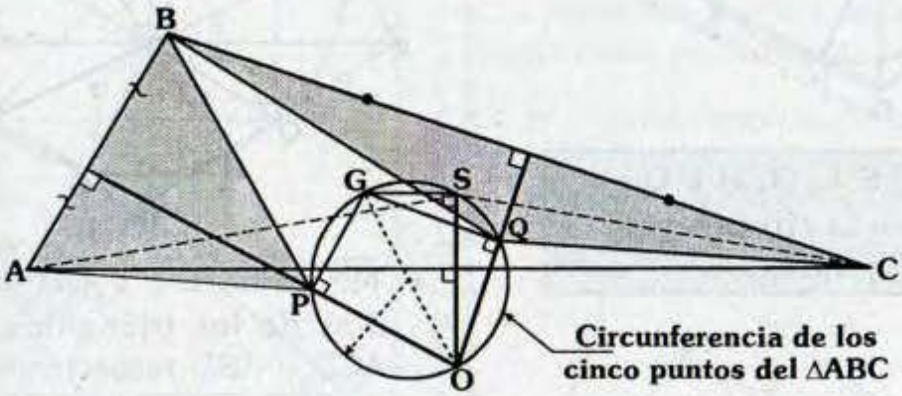
- *Si el triángulo* ABC *es rectángulo (recto en* B).



Si : O *y* G *son circuncentro y baricentro del* ΔABC.

$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

- *Si el triángulo es obtusángulo:*



Sea:

ΔABC : *Obtusángulo*

O *y* G: *Circuncentro y baricentro de* ΔABC.

ΔAPB, ΔBQC *y* ΔASC:

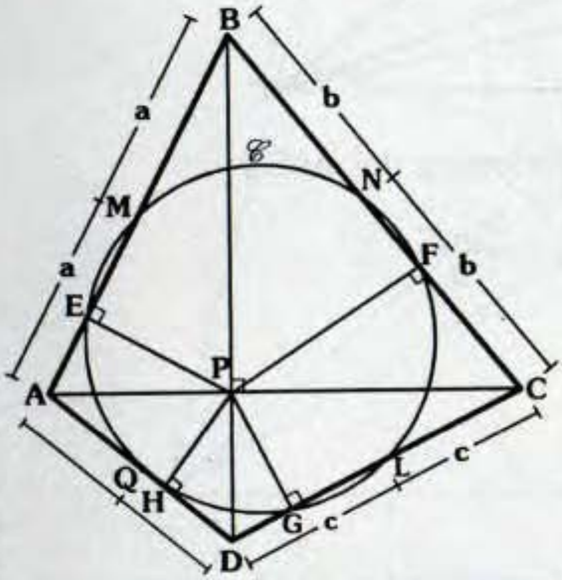
Isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *respectivamente y:*

$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta BQC} = S_{\Delta ASC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

CIRCUNFERENCIA DE LOS OCHO PUNTOS

Dado un cuadrilátero inscriptible de diagonales perpendiculares, los puntos medios de los lados y las proyecciones del punto de corte de las diagonales hacia los lados están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de los ocho puntos.

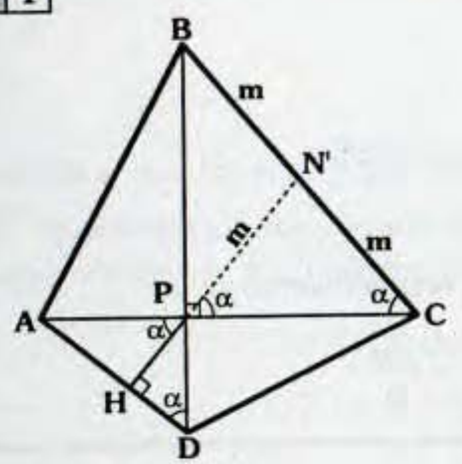
Si ABCD : Inscriptible, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, M, N, L, y D : Puntos medios.



$\Rightarrow$ **E, M, N, F, L, G, H y Q pertenecen a la circunferencia de ocho puntos.**

Demostración:

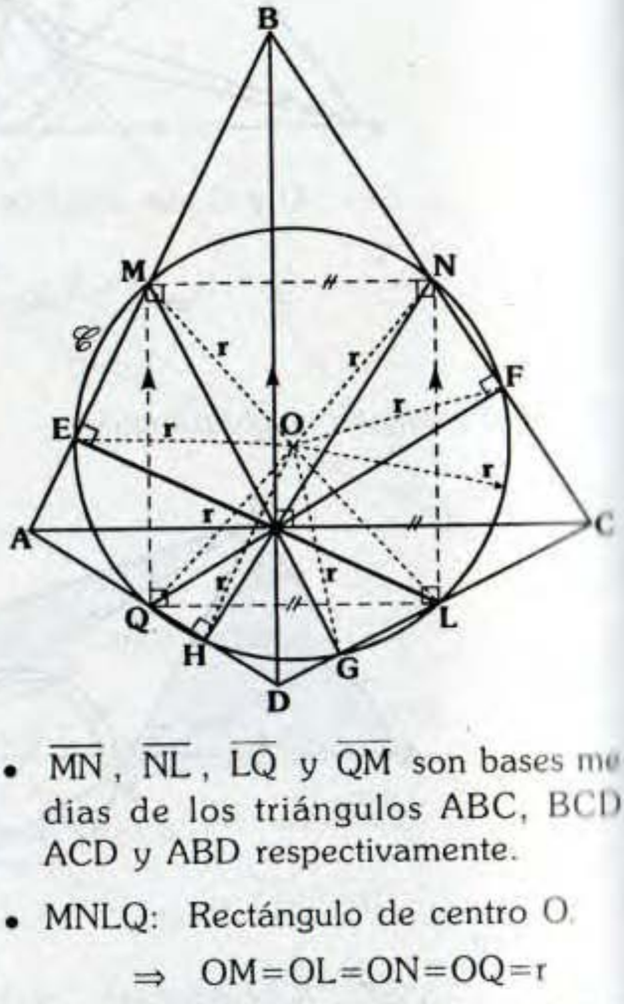
Paso 1



- $\triangle$BPC: Teorema BN' = N'C = m

  $\Rightarrow$ H, P y N son colineales
  G, P y M son colineales
  F, P y Q son colineales
  E, P y L son colineales
  (*Gráfico anterior*)

Paso 2



- $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LQ}$ y $\overline{QM}$ son bases medias de los triángulos ABC, BCD, ACD y ABD respectivamente.
- MNLQ: Rectángulo de centro O.

  $\Rightarrow$ OM=OL=ON=OQ=r
- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en los triángulos QHN, MEL, QFN: OH=r, OE=r y OF=r
- Luego con centro O y radio "r" trazamos $\mathscr{C}$.

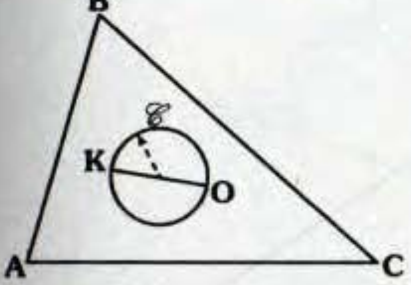
  $\therefore$ H, Q, E, M, N, F, L y G son concíclicos.

CIRCUNFERENCIA DE BROCARD

Es aquella circunferencia cuyo diámetro es el segmento cuyos extremos son el circuncentro y su punto simediano.

Si O : Circuncentro

K : Punto simediano

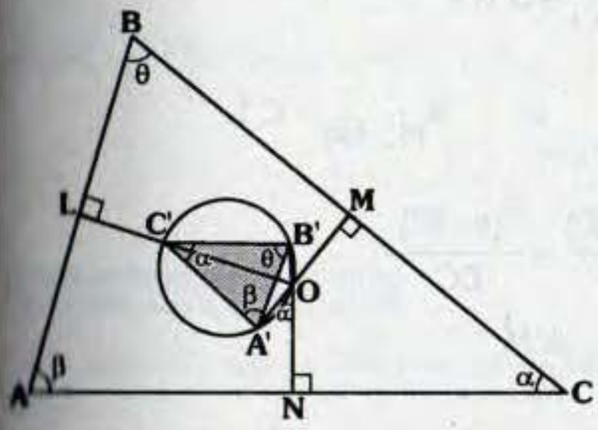


𝒞 : Circunferencia de Brocard

Nota

Si O: Circuncentro y

𝒞 : Circunferencia de Brocard



⇒ **ΔA'B'C': *Primer triángulo de Brocard***

- ⌂OMCN : Inscriptible

  ⇒ m∡A'ON=m∡MCN=α

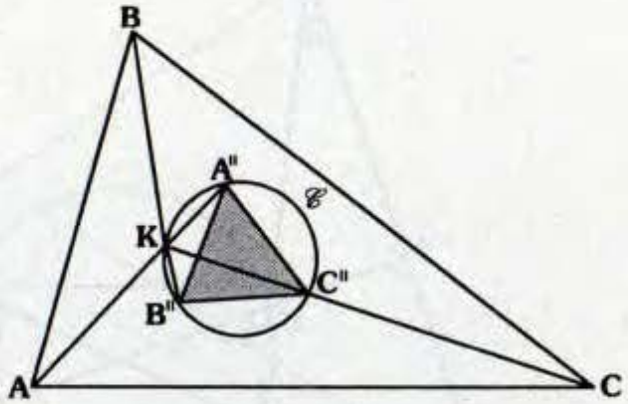
- ⌂OA'C'B' : Inscrito

  ⇒ m∡A'C'B'=α

  ∴ ΔA'B'C' ~ ΔABC

Si K : Punto simediano y

𝒞 : Circunferencia de Brocard

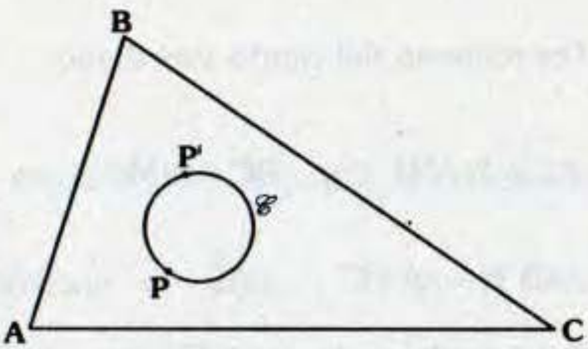


⇒ **ΔA"B"C" : Segundo triángulo de Brocard**

TEOREMA

Los puntos de Brocard pertenece a la circunferencia de Brocard.

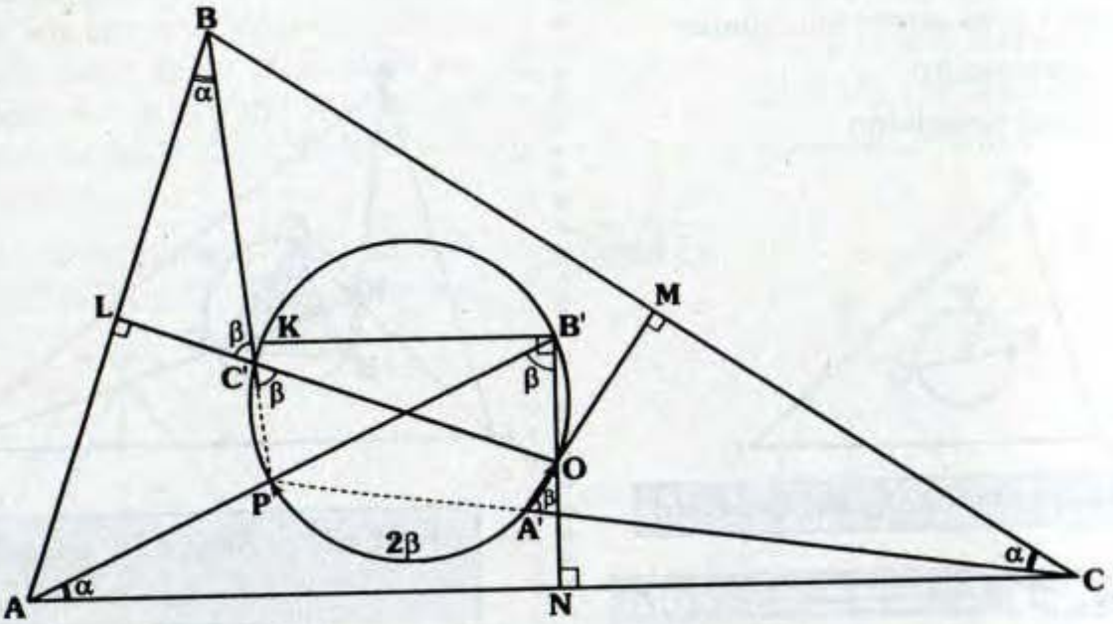
Si 𝒞 : Circunferencia de Brocard



⇒ **Los puntos de Brocard: P y P' pertenecen a 𝒞.**

Demostración:

Paso 1



- $\overline{OK}$: Diámetro $\Rightarrow$ $m\measuredangle KB'O = 90^o$, con lo cual las distancias de K y B' hacia $\overline{AC}$ son iguales:

$$d_{(K\,,\,\overline{AC})} = B'N$$

- Análogamente: $d_{(K\,,\,\overline{AC})} = A'M$ y $d_{(K\,,\,\overline{AB})} = C'L$

- Por teorema del punto simediano: $\dfrac{d_{(K\,,\,\overline{AC})}}{AC} = \dfrac{d_{(K\,,\,\overline{BC})}}{BC}$

- $AC = 2(AN)$ y $BC = 2(MC)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{B'N}{AN} = \dfrac{A'M}{MC}$

- $\Delta AB'N \sim \Delta A'MC$: LAL $\Rightarrow$ $m\measuredangle B'AN = m\measuredangle A'CM = \alpha$

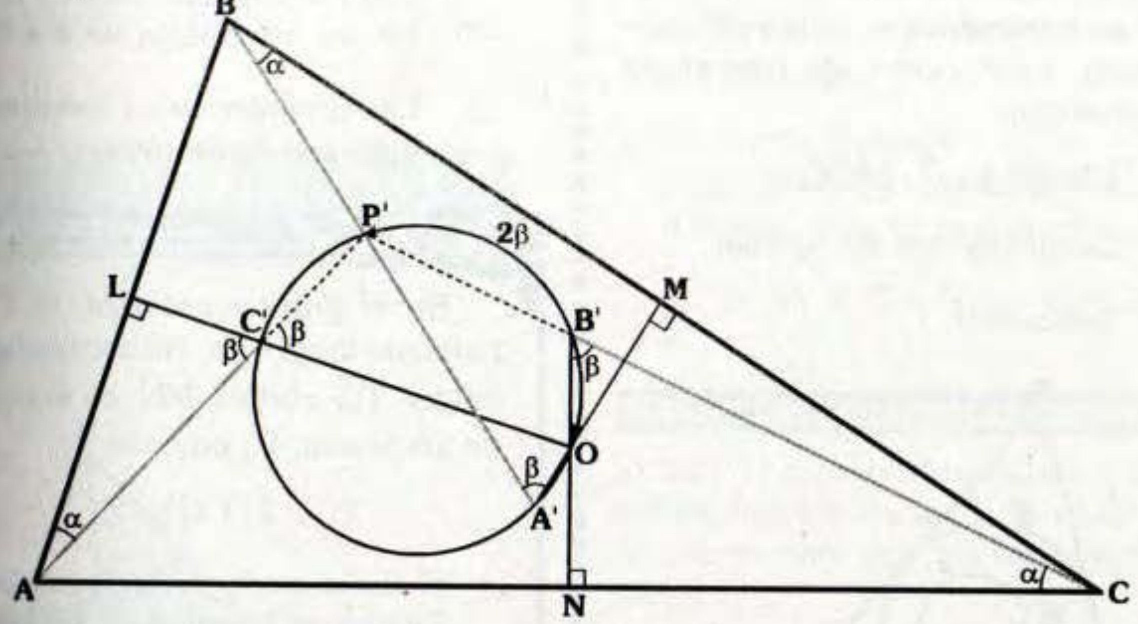
- Del mismo modo: $m\measuredangle LBC' = \alpha$

- Se observa :

  $\alpha + \beta = 90^o$ y $m\widehat{OP} = 2\beta$, entonces las prolongaciones de $\overline{BC'}$ y $\overline{CA'}$ llegan a P (por ángulo inscrito y exinscrito).

$\therefore$ P : primer punto de Brocard

Paso 2



- Análogamente los triángulos AC'L , BA'M y B'NC son semejantes:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAM = m\measuredangle NB'C = m\measuredangle AC'L = \beta$$

- $\overline{AC'}$ y $\overline{CB'}$ llegan a P'.

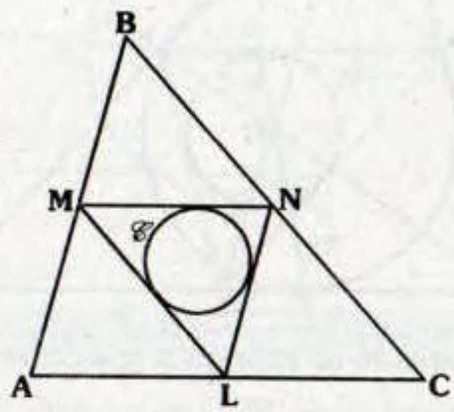
$$\therefore \quad P': \text{ Segundo punto de Brocard.}$$

CIRCUNFERENCIA DE SPIEKER

Es la circunferencia inscrita en el triángulo mediano con respecto a un triángulo dado.

ΔMNL : Triángulo mediano y

$\mathscr{C}$: Circunferencia inscrita en el ΔMNL .



⇒ **$\mathscr{C}$: Circunferencia de Spieker**

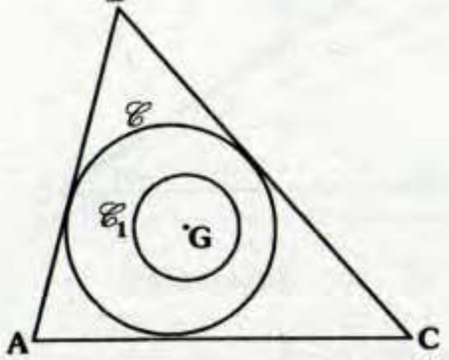
TEOREMA

En todo triángulo la circunferencia de Spieker es homotética a la circunferencia inscrita, cuyo centro de homotecia es el baricentro.

Si $\mathscr{C}$: Inscrita en el ΔABC.

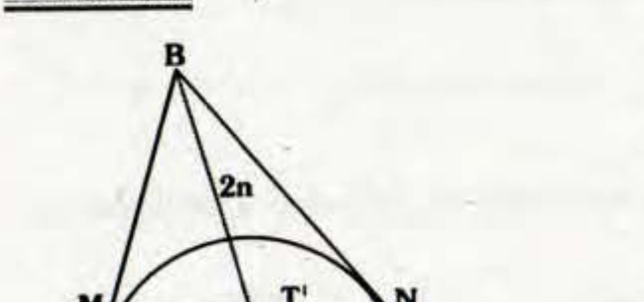
$\mathscr{C}_1$: Circunferencia de Spieker.

G : Baricentro.



$\Rightarrow$ **$\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ son homotéticas con centro en G.**

Demostración:



- Al trazar el triángulo mediano MNL sabemos que $\mathscr{C}_1$ esta inscrita.

- G : Baricentro $\Rightarrow$ se observa que los triángulos MNL y ABC son homotéticos con centro G y razón de homotecia de 1 a 2.

$\therefore$ Las circunferencias inscritas también son homotéticas.

Nota

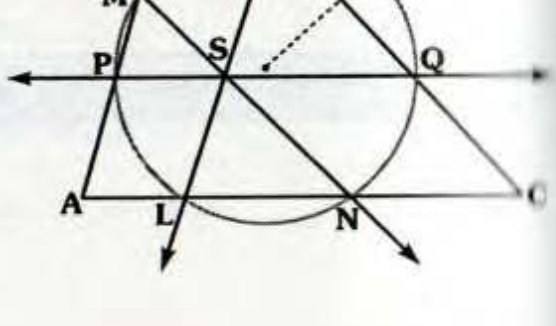
En el gráfico anterior, si T *es punto de tangencia, entonces al prolongar* $\overline{TG}$ *corta a* $\overline{MN}$ *en el punto de tangencia* T', *además:*

$$TG = 2(T'G) = 2K$$

$\therefore$ *El radio de la circunferencia de Spieker es la mitad de la circunferencia inscrita propiedades aparentemente parecidas a la circunferencia de los nueve puntos.*

PRIMERA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE

Si por el punto simediano trazamos rectas paralelas a los lados, los seis puntos de intersección con los lados del triángulo son concíclicos. La circunferencia que las contiene se denomina primera circunferencia de Lemoine.



En el gráfico:

S : Punto simediano

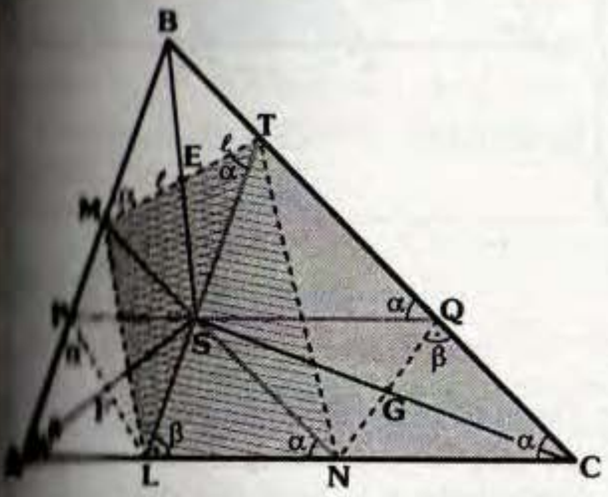
$\overline{PQ}//\overline{AC}$, $\overline{MN}//\overline{BC}$ y $\overline{LT}//\overline{AB}$

Se cumple:

L, M, T, Q y N: Concíclicos

$\mathscr{C}$: Primera circunferencia de Lemoine.

Demostración:



Se observa:

- APSL, MBTS y SQCN son paralelogramos y F, E y G son puntos medios de sus diagonales.
- Debido a que ME = ET ⇒ $\overline{MT}$ y $\overline{AC}$ son antiparalelas con respecto al: $\measuredangle ABC$ ⇒ $m\measuredangle ACB = m\measuredangle BMT = \alpha$ (*Teorema del punto simediano pag. 104*)
- $\overline{PQ}//\overline{AC}$ ⇒ $m\measuredangle PQB = m\measuredangle ABB = \alpha$
  ⇒ ⏢PMTQ es inscriptible
- En forma análoga:
  ⏢MPLN y ⏢LNQT también son inscriptibles
- Debido a que ⏢MPLN: Inscriptible
  ⇒ $m\measuredangle APL = m\measuredangle ANM = \alpha$
  y $\overline{PM}//\overline{LT}$ ⇒ ⏢LPMT es un trapecio isósceles.
- En forma análoga:
  ⏢PLNQ y ⏢NQTM son trapecios isósceles, con lo cual se demuestra:

  L, N, M, T, Q y N son concíclicos

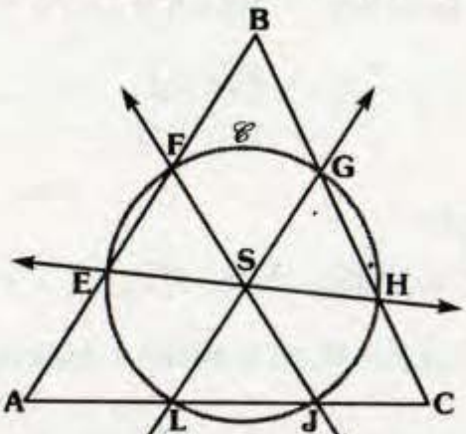
SEGUNDA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE

Si por el punto simediano trazamos antiparalelos a los lados, los seis puntos de intersección con los lados son concíclicos.

La circunferencia que contiene a dichos puntos se denomina segunda circunferencia de Lemoine.

En el gráfico:

S : Punto simediano del ABC y $\overline{EH}$ y $\overline{AC}$, $\overline{FJ}$ y $\overline{BC}$, $\overline{LG}$ y $\overline{AB}$ son antiparalelas a los ángulos ABC, BAC y ACB respectivamente.

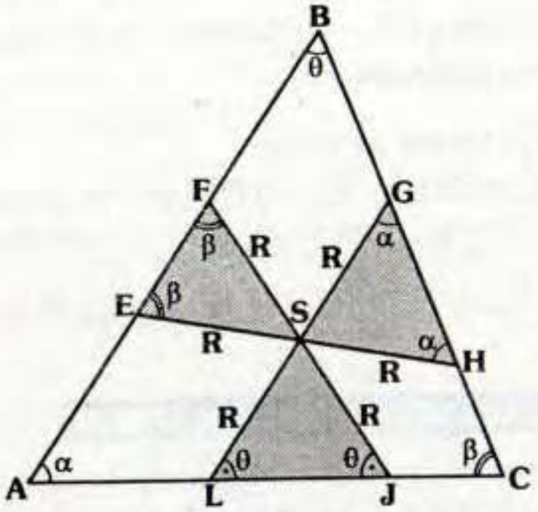


Se cumple:

E, L, J, H, G y F son concíclicos

$\mathscr{C}$: Segunda circunferencia de Lemoine

Demostración:



- Del dato de las antiparalelas se tiene:

  $m\measuredangle ABC = m\measuredangle GLC = m\measuredangle FJA = \theta$

  $m\measuredangle BAC = m\measuredangle EHB = m\measuredangle LGC = \alpha$

  $m\measuredangle ACB = m\measuredangle BEH = m\measuredangle EFJ = \beta$

- $\Rightarrow$ ΔLSJ , ΔESF , ΔGSH : Isósceles

- Por teorema: $ES = SH$

  $FS = SJ$

  $LS = SG$

- Luego:

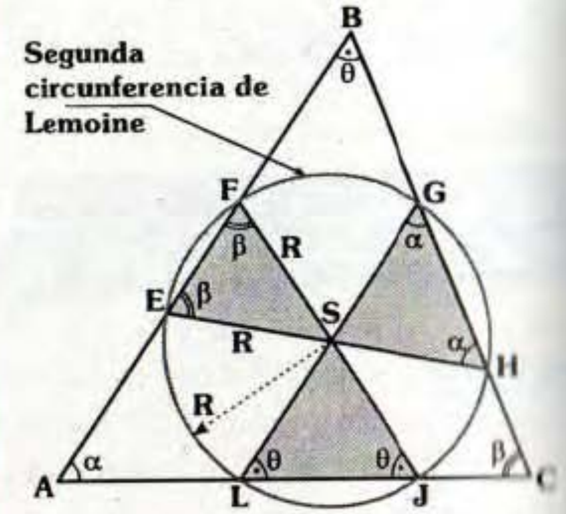
  S equidista de E, F, G, H, J y L

  $\therefore$ E, L, J, H, G y F son concíclicos.

También:

El punto simediano es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos mencionados.

Observación



Se cumple: $EF = 2R\cos\beta$

$LJ = 2R\cos\theta$

$HG = 2R\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{EF}{\cos\beta} = \frac{LJ}{\cos\theta} = \frac{LJ}{\cos\alpha} = 2R$$

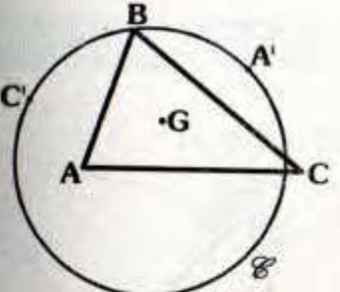
De la última expresión, se concluye que las cuerdas que determina cada lado a la segunda circunferencia de Lemoine son proporcionales a los cósenos de los ángulos opuestos, es por ello que a esta circunferencia también se le llama ***Circunferencia Coseno***.

CIRCUNFERENCIA DE STEINER

La circunferencia que pasa por el vértice de un triángulo y por los simétricos de los otros vértices con respecto al baricentro, se le conoce como circunferencia de Steiner.

Si G: Baricentro de ΔABC.

A' y C' : Simétricos de A y C, respectivamente, con respecto a G.



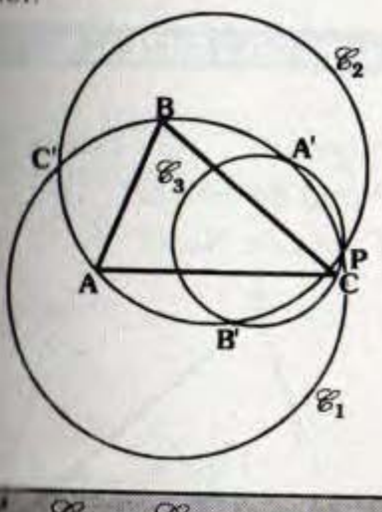
⇒ **B, A' y C' pertenecen a la circunferencia de Steiner $\mathscr{C}$.**

Nota

El triángulo tiene tres circunferencias de Steiner, las otras dos (siendo B' *el simétrico de* B *con respecto a* G*) contienen a las ternas* AB'C' *y* CA'B'.

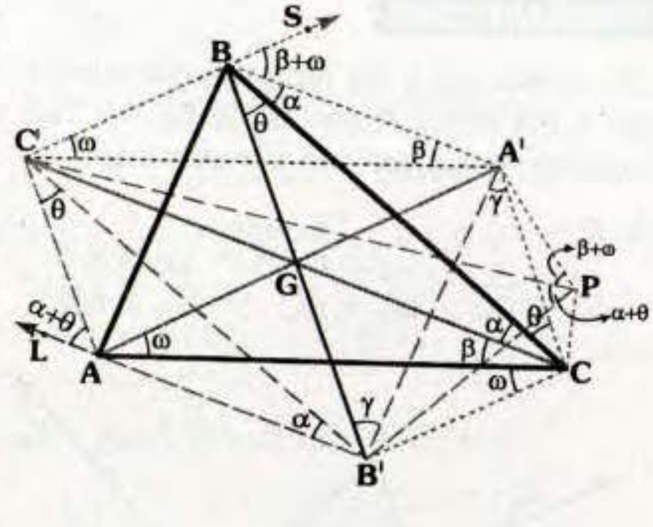
...as tres circunferencias de Steiner de un ...ángulo son concurrentes. Dicho punto ... concurrencia es el Punto de Steiner ...ág 114).

... $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias ... Steiner.



⇒ **$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ concurren en el punto P.**

__Demostración:__



- Supongamos que $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ se cortan en P, es decir que los ⏢s C'BA'P y A'B'CP son inscriptibles.

- Se observa:

$$\Delta A'BC' \cong \Delta AGC\ ,\ \Delta BGC \cong \Delta CAB$$

$$m\measuredangle SBA' = m\measuredangle A'C' = \beta + \omega$$

- ⏢A'PCB':

$$m\measuredangle A'PB' = m\measuredangle A'CB' = \beta + \omega + \alpha + \theta$$

- Se nota:

$$m\measuredangle C'PB' = m\measuredangle C'AL = \alpha + \theta$$

$\Rightarrow$ ⏢C'PB'A : Inscriptible

$\therefore$ La circunferencia que pasa por A, B' y C' también pasa por P.

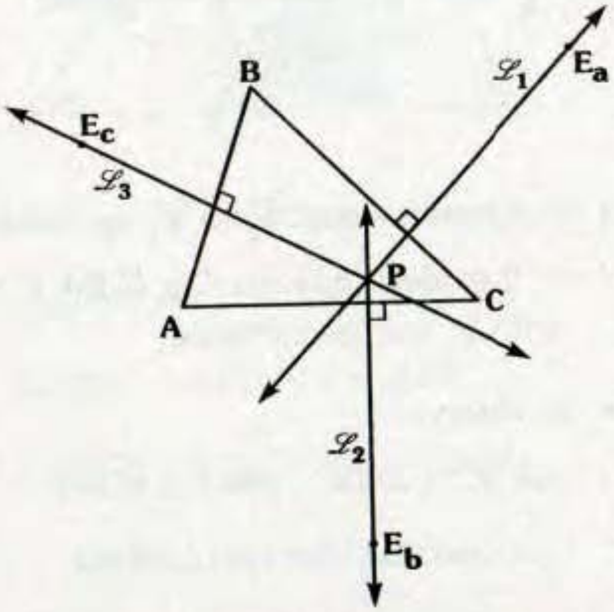
15. TEMAS SELECTOS (DEMOSTRADOS)

TEOREMA DE LORIGA

En un triángulo, las rectas perpendiculares a los lados trazadas desde sus respectivos excentros son concurrentes.

Si E_a, E_b y E_c: Excentros,

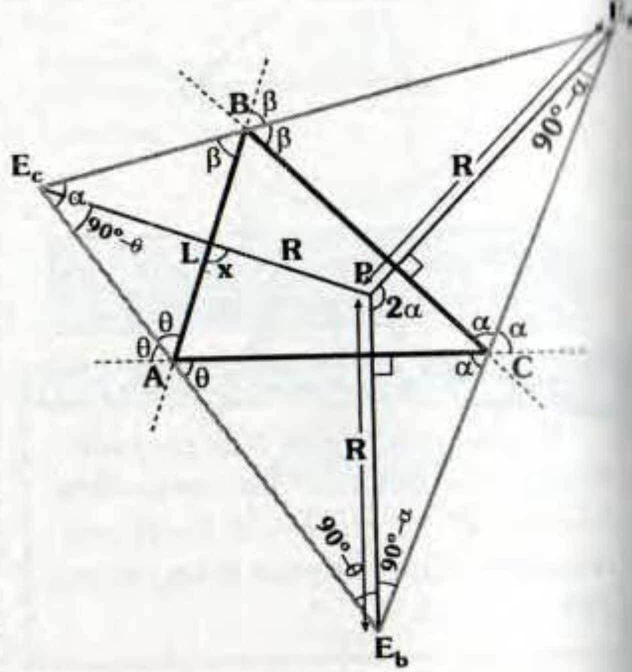
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \overline{AB}$



$\Rightarrow$ **$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en P : punto de Lóriga**

Demostración:

- Sean $\overline{E_aP} \perp \overline{BC}$, $\overline{E_bP} \perp \overline{AC}$
- ΔPE_aE_b: Isósceles
  $\Rightarrow E_aP = E_bP = R$ y $m\measuredangle E_aPE_b = 2\alpha$
- ΔABC: $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360°$
  $\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180°$
- ΔABE_c: $m\measuredangle AE_cB = \alpha$

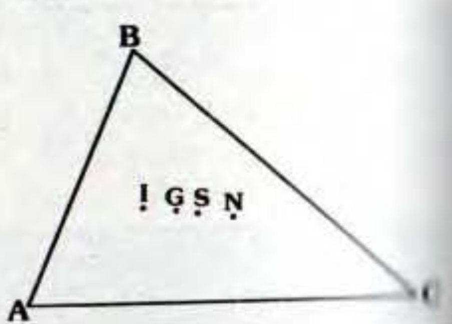


- Por el teorema 7.13:
  P : Circuncentro de $E_aE_bE_c$
  $\Rightarrow E_cP = R$
- ΔAE_cL: Por ángulo exterior: $x = 90°$
  $\therefore \overline{E_cP} \perp \overline{AB}$

DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE HOUSSEL

Sean:

I : Incentro, G : Baricentro,
S : Punto de Spieker y
N : Punto de Nagel

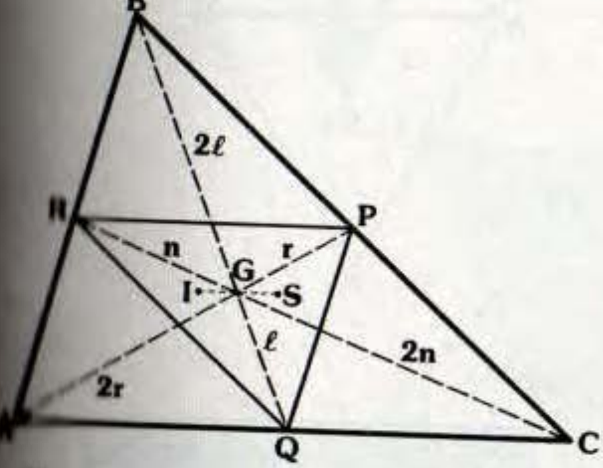


$\Rightarrow$ **I, G, S y N son colineales**

- Primero vamos a demostrar que I, G y S son colineales.
- Luego que I, G y N son colineales.

Demostración:

Paso 1



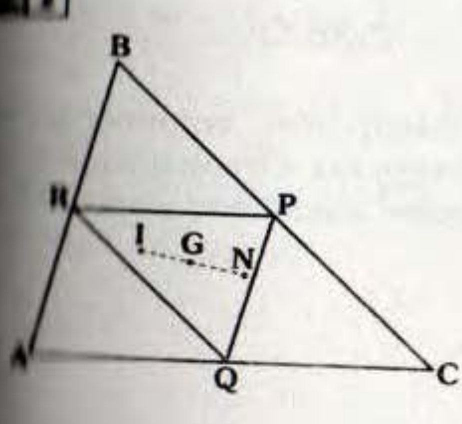
- Trazamos las medianas AP, BQ y CR, se observa que los triángulos ABC y PQR son homotéticos respecto de G y de razón 2.
- Puesto que I : Incentro de ABC y
  S : Incentro de PQR.

  $\therefore$ I, G y S : Colineales

Además : IG=2(GS)

(*Ver homotecia pág. 170*)

Paso 2



- I : Incentro del $\Delta ABC \Rightarrow$ I: Punto de Nagel del ΔPQR (Teorema Pág. 97-98).
- G : Centro de homotecia

  $\therefore$ G, S y N : colineales

Además: GN=2(GI)

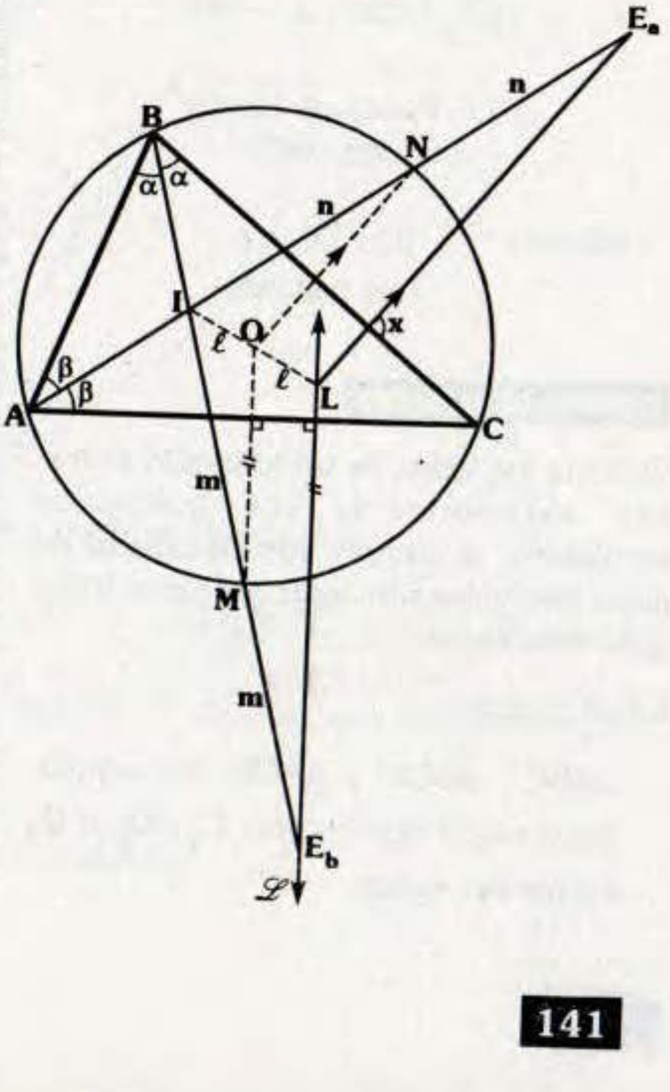
En conclusión: I, G, S y N son colineales:

$$GN = 2(IG) = 4(GS) \text{ y}$$

$$(IG)(SN) = (GS)(IN)$$

(*ver homotecia pág. 170*)

DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE NAGEL



- Sea I : Incentro,
  O : Circuncentro,
  E_a y E_b : Excentro

- Trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AC}$ que corte a la prolongación de $\overline{IO}$ en L.

- Por teorema:

  $IM = ME_b = m\ , \quad IM = ME_a = n\ ,$

  $\overline{OM} \perp \overline{AC} \quad y \quad \overline{ON} \perp \overline{BC}$

- $\overline{OM}$: Base media del ΔILE_b

  $\Rightarrow \ IO = OL = \ell$

- $\overline{ON}$: Base media del ΔIE_aL

  $\Rightarrow \ \overline{LE_a} \,//\, \overline{OM} \Rightarrow x = 90°$

  $\therefore$ L : Punto de Loriga
  (*ver pag.* 140)

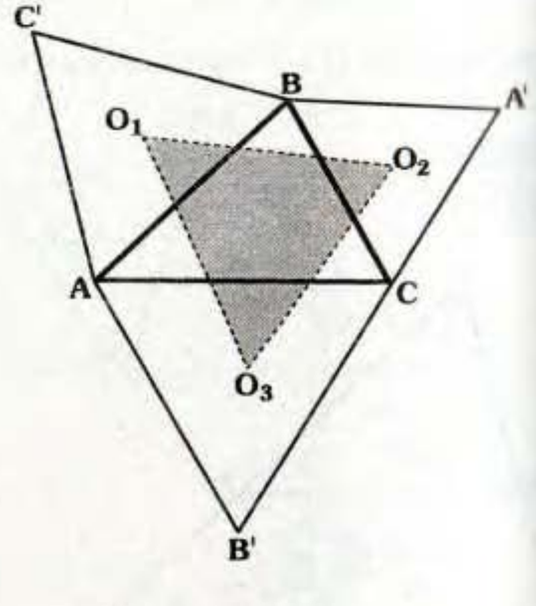
Además : $IO = OL = \ell$
(ver pag. 85)

TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan exteriormente los triángulos equiláteros se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.

En el gráfico:

$\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ACB'$ son equiláteros cuyos centros son O_1, O_2 y O_3 respectivamente.



Se cumple:

$\Delta O_1O_2O_3$ es equilátero

Demostración:

- Por teoremas vistos en el punto de Fermat se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F.

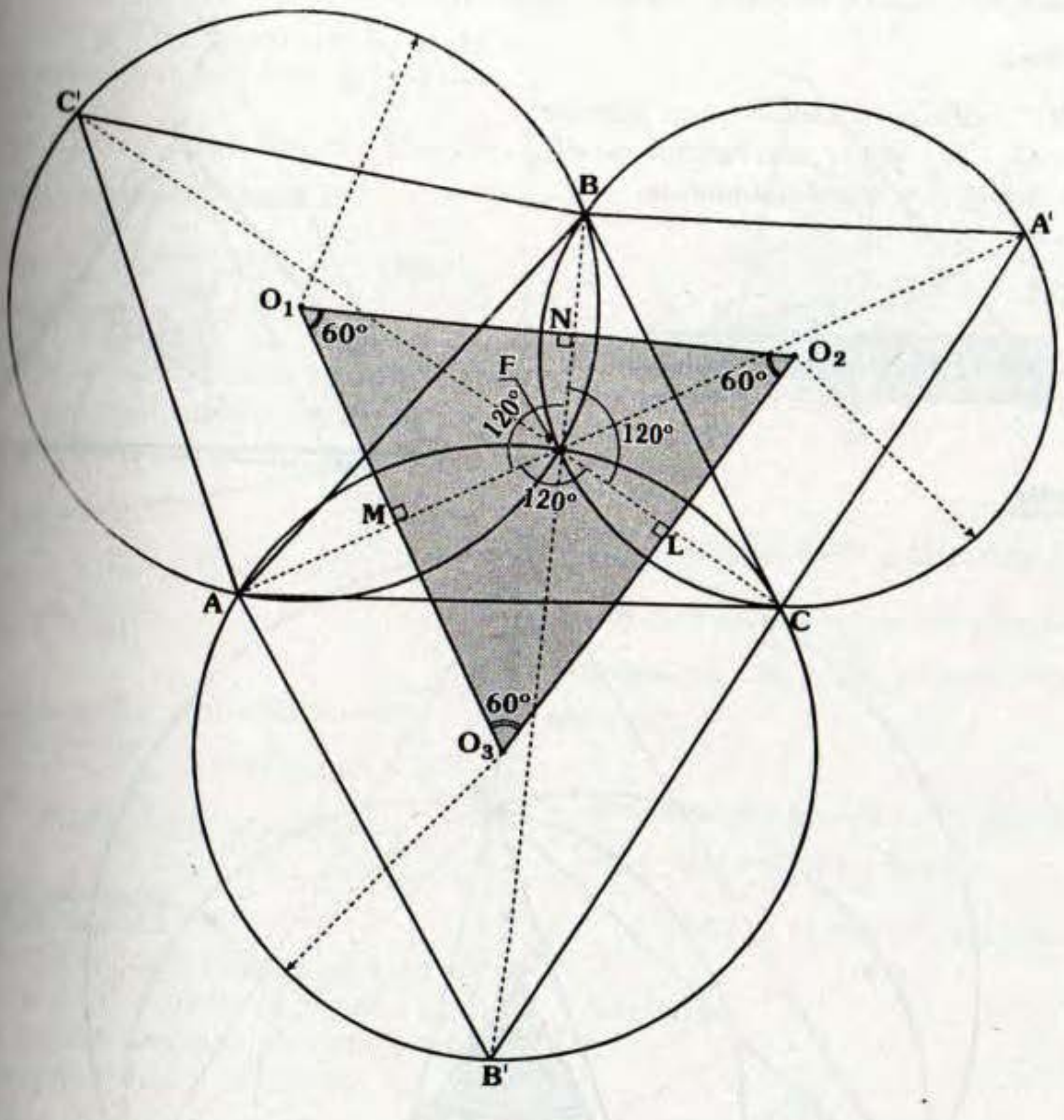
  Además :

  $m\measuredangle AFB = m\measuredangle BFC = m\measuredangle AFC = 120°$

  $\Rightarrow \ \triangle AC'BF, \quad \triangle BA'CF$
  y $\triangle AB'CF$

  Son inscriptibles, entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros concurren en F.

■ Así tenemos:



■ Para las circunferencias $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$ son cuerdas comunes:

$$\Rightarrow \ \overline{O_1O_2} \perp \overline{BF}, \quad \overline{O_1O_3} \perp \overline{AF} \ \text{ y } \ \overline{O_2O_3} \perp \overline{FC}$$

■ En los cuadriláteros O_1MFN, O_2LFN y O_3LFM se deduce que los ángulos del $\Delta O_1O_2O_3$ miden 60°.

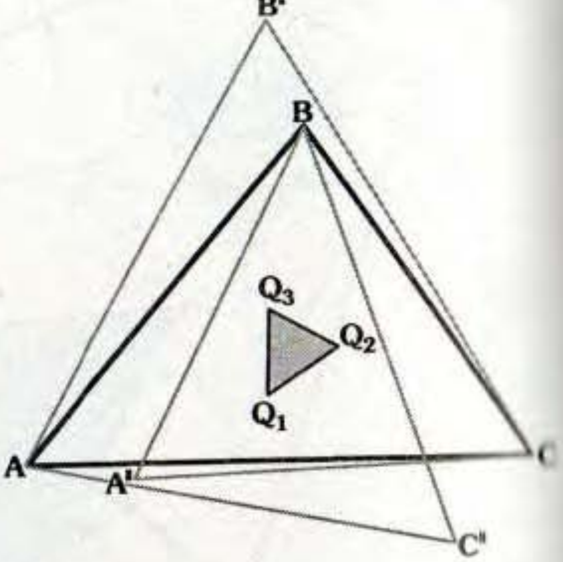
$$\therefore \quad \Delta O_1O_2O_3 \ \text{ es equilátero.}$$

SEGUNDO TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan interiormente triángulos equiláteros, se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.

En el gráfico:

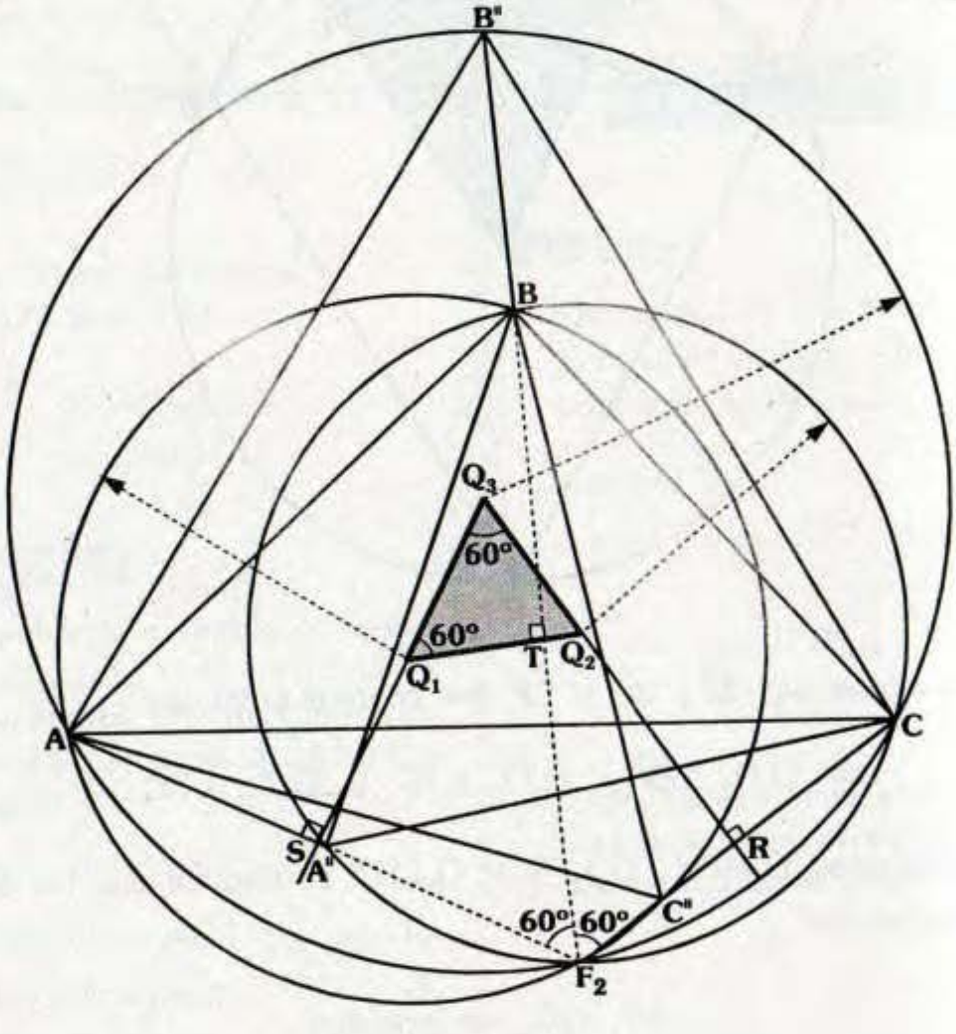
$\Delta ABC''$, $\Delta BCA''$ y $\Delta ACB''$ son equiláteros Q_1, Q_2 y Q_3 son centros de dichos triángulos respectivamente.



Se cumple:

$$\boxed{\Delta Q_1Q_2Q_3 \text{ es equilátero}}$$

Demostración:



- En forma análoga a la demostración anterior, usaremos lo que hemos visto en el teorema de Fermat.
- $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ concurren en el denominado segundo Punto de Fermat.
- Del gráfico: $m\measuredangle AF_2B = m\measuredangle BF_2C = 60°$ (Por ser punto de Fermat 2).
- $\square ABC''F_2$, $\square AB''CF_2$ y $\square CBA''F_2$ son inscriptibles.
  - → Las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros son concurrentes en F_2.
- Por teorema:

  $\overline{Q_3Q_1} \perp \overline{AF_2}$, $\overline{Q_3Q_2} \perp \overline{F_2C}$ y $\overline{Q_1Q_2} \perp \overline{BF_2}$

  → $\triangle SQ_3RF_2$: $m\measuredangle SQ_3R = 60°$

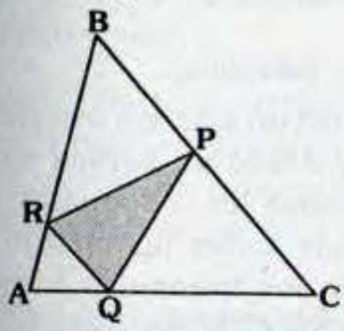
  $\triangle TQ_1SF_2$: $m\measuredangle Q_3Q_1Q_2 = 60°$

  ∴ $\Delta Q_1Q_2Q_3$ es equilátero.

TEOREMA DE FAGNANO

Dado un triángulo, si el perímetro de la región triangular inscrita es mínimo entonces la región triangular le corresponde al triángulo órtico y visceversa.

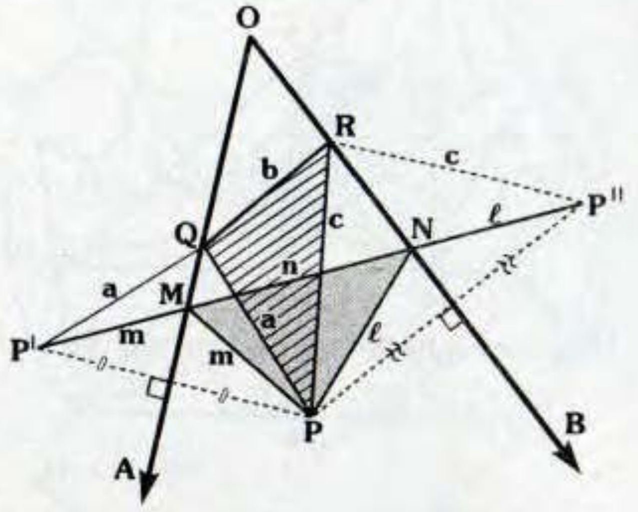
Si Perímetro$_{\Delta PRQ}$ es mínimo



→ $\boxed{\Delta PQR : \text{Triángulo órtico}}$

Demostración:

Nociones Previas:



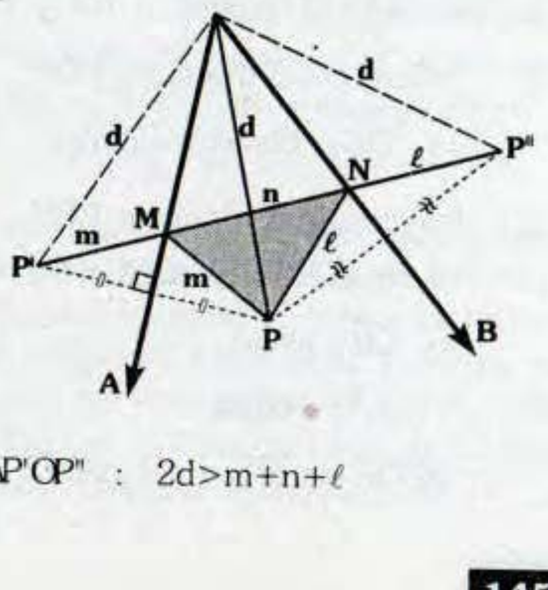
Dado el ángulo AOB y el punto P.

¿Cuál es el menor recorrido partiendo de P tocando a $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y llegando al mismo punto P?

- Tenemos por menor recorrido de P' a P'': $m+n+\ell < a+b+c$

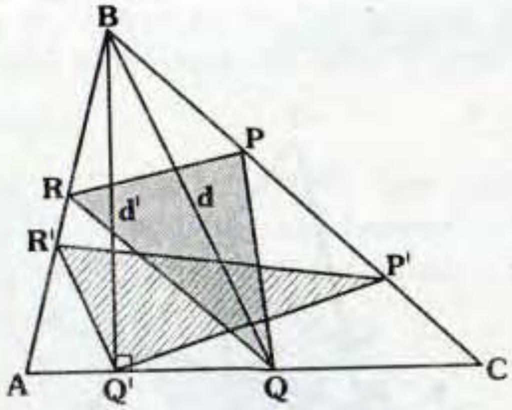
  ∴ PMN es el menor recorrido.

  Además:



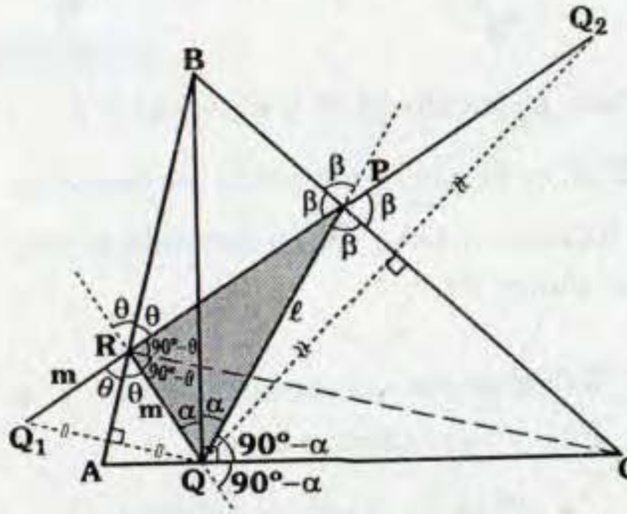
- $\Delta P'OP''$: $2d > m+n+\ell$

Trabajando en el triángulo:



Se nota que "d" debe ser mínimo:

$\Rightarrow$ $\overline{BQ}$: Altura



- El vértice Q ya es fijo, entonces debemos ubicar los otros vértices P y R, para lo cual procedemos ubicando los simétricos de Q respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- B : Excentro del triángulo PQR.

  $\Rightarrow$ $\overrightarrow{QB}$: Bisectriz interior
- C : Excentro del triángulo PQR.

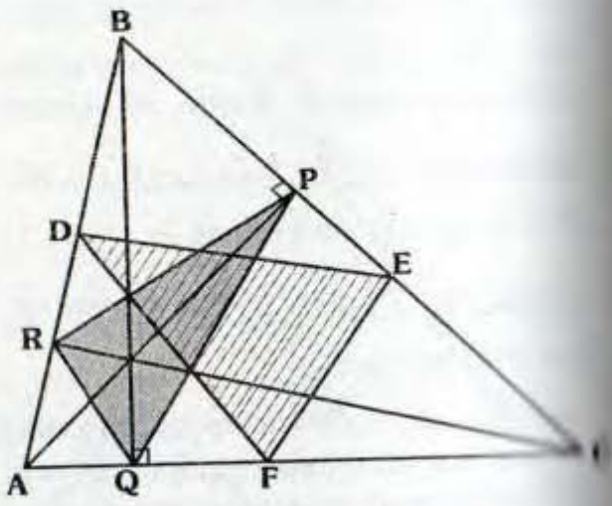
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PRC = m\measuredangle QRC = 90° - \theta$

  $\Rightarrow$ $\overline{CR}$: altura

  $\overline{AP}$: Altura

$\therefore$ ΔPQR es órtico del ΔABC.

Demostración del recíproco:



- Se observa que: $FB > BQ$
- De lo anterior se obtiene:

$$\text{Perím.}_{\Delta PQR} < \text{Perím.}_{\Delta DEF}$$

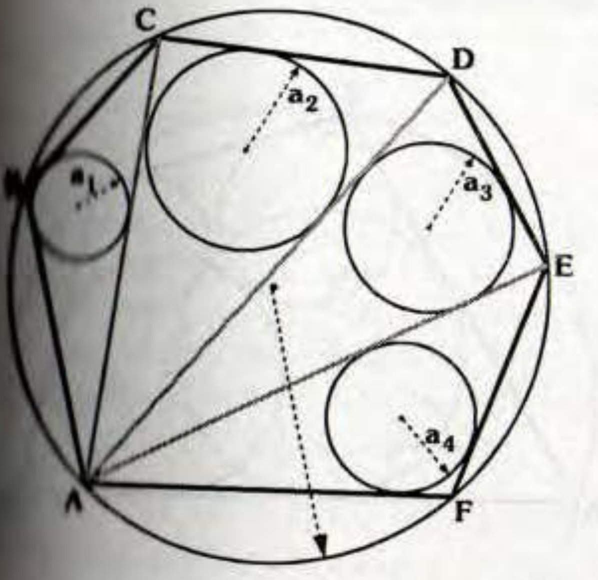
$\therefore$ ΔPQR es el de menor perímetro

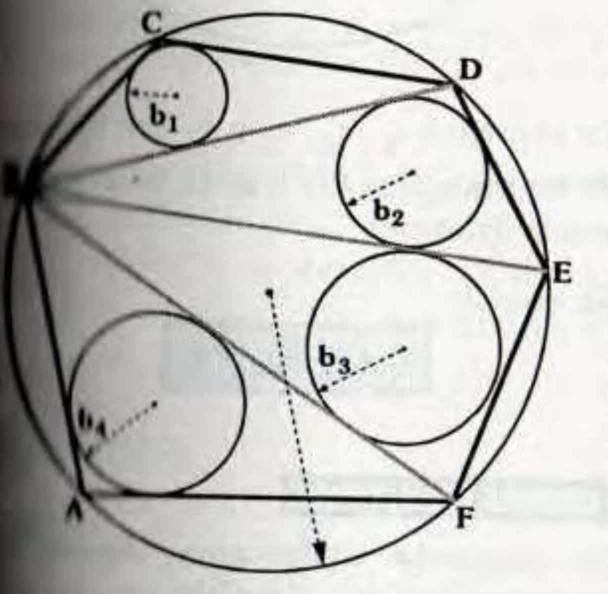
PRIMER TEOREMA DE MIKAMI Y KOVAYASHI

También se le conoce como primer teorema japonés, al teorema aquí mostrado se le denomina **"Problema Sangaku"**, problemas que colgaban los japoneses bajo las terrazas de templos y santuarios (aproximadamente 1 603 - 1 867).

El teorema establece:

Si en una circunferencia inscribimos un polígono y desde un vértice cualquiera trazamos todas las diagonales, la suma de radios de todas las circunferencias inscritas en los triángulos formados es una constante que es independiente del vértice que se elija para la triangulación



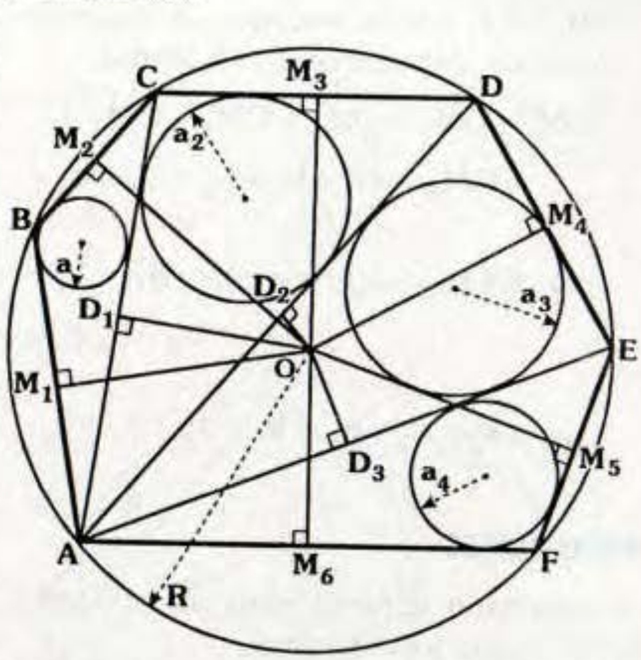


...mos considerado en el gráfico un hexá-
...no inscrito, pero puede ser cualquier
...r polígono inscrito.

...han considerado las triángulaciones
...de A y B por separado para el mis-
...o polígono (puede ser cualquier vér-
...), el teorema expresa la siguiente
...aldad :

$$\boxed{\ldots a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4}$$

Demostración:



- Se ha considerada una triangulación arbitrario, de igual forma la ubicación de O.
- Se trazan las perpendiculares de O hacia cada lado y diagonal del polígono.
- Por teorema de Carnot. (Pág. 53)

ΔABC: $OM_1 + OM_2 - OD_1 = R + a_1$

ΔACD: $OD_1 + OM_3 - OD_2 = R + a_2$

ΔADE: $OD_2 + OM_4 + OD_3 = R + a_3$

ΔAEF: $OM_5 - OD_3 + OM_6 = R + a_4$

- Sumando las expresiónes anteriores:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + \\ + OM_6 = 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

- Este resultado nos indica que la suma de distancias del centro de la circunferencia (cuando el centro es interior al polígono) hacia cada lado, en general para un polígono de "n" lados sería: (n – 2)R más la suma de inradios para cualquier triangulación.

- Para el caso particular del hexágono ABCDEF, ahora escogemos la triangulación del vértice B, se tendrá:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + OM_6 = 4R + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\Rightarrow \ 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4R + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\therefore \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

GENERALIZANDO:

La expresión general para un polígono de "n" lados inscrito será:

$$\sum_{i=1}^{n} OM_i = (n-2)R + \sum_{i=1}^{n-2} r_i$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^{n} OM_i - (n-2)R$$

Donde:

OM_i : Distancia del centro o de la circunferencia hacia cada lado del polígono.

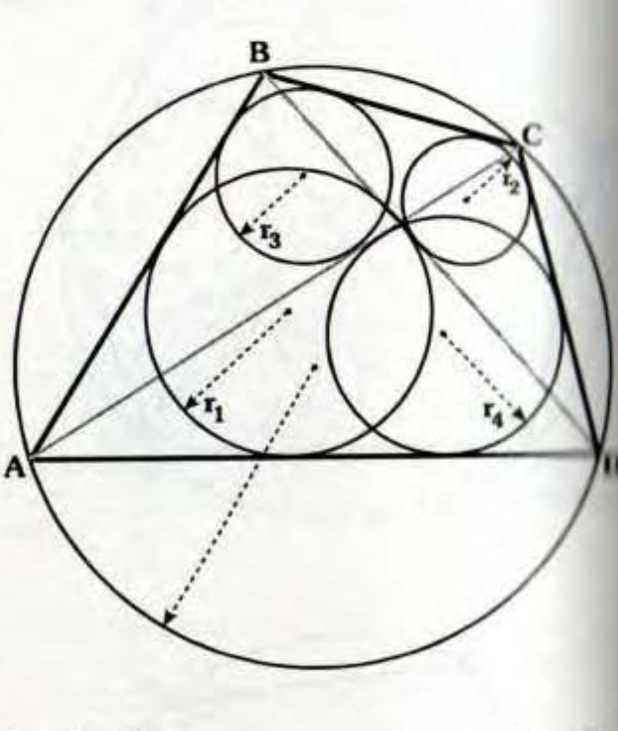
$\sum_{i=1}^{n-2} r_i$:Suma de inradios para una triangulación dada.

Podemos observar entonces que la suma de inradios en una triangulación dada es constante.

Observación

Recordar que si un triángulo es obtusángulo la distancia hacia el lado mayor "se puede considerar" como si fuera negativa.

Caso Particular (n=4)



En el gráfico r_1, r_2, r_3 y r_4 son inradios de los triángulos ABD, BCD, BCD y ACD respectivamente.

Se cumple:

$$\boxed{r_1 + r_2 = r_3 + r_4}$$

LUGARES GEOMÉTRICOS

En esta parte, analizaremos algunos lugares geométricos, descritos por los puntos notables.

① Dada una semicircunferencia de diámetro AB y un punto P de la semicircunferencia, el lugar geométrico del incentro y baricentro del triángulo APB es un cuadrante y una semicircunferencia, respectivamente.

② En una circunferencia se ubican los puntos fijos A y B y el punto móvil P, el lugar geométrico del incentro, baricentro y ortocentro del triángulo ABP es un arco de circunferencia, circunferencia y una circunferencia congruente a la espectivamente.

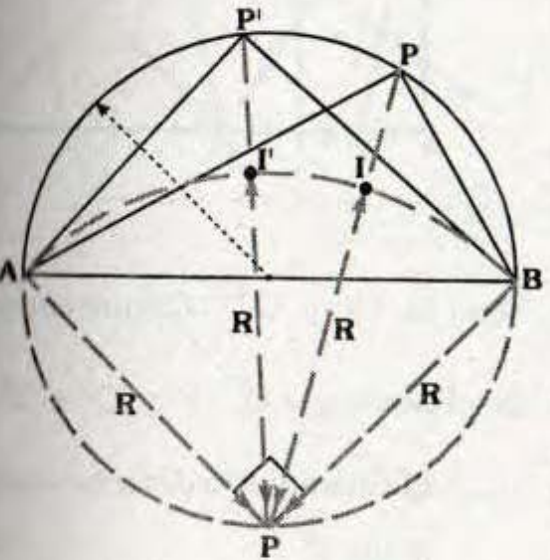
(13) Se tiene un cuadrado ABCD, en el cual se ubican los puntos fijos M y N y el punto móvil L, el lugar geométrico del circuncentro y baricentro del triángulo MNL es parte de la mediatriz de $\overline{MN}$ y un cuadrado, respectivamente.

(14) El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas de Simson de un triángulo con respecto a dos puntos diametralmente opuestos es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo mencionado.

(15) El lugar geométrico, del ortocentro del triángulo ABC, teniendo a B y C fijos y A se desplaza sobre una recta paralela a $\overline{BC}$, es una parábola.

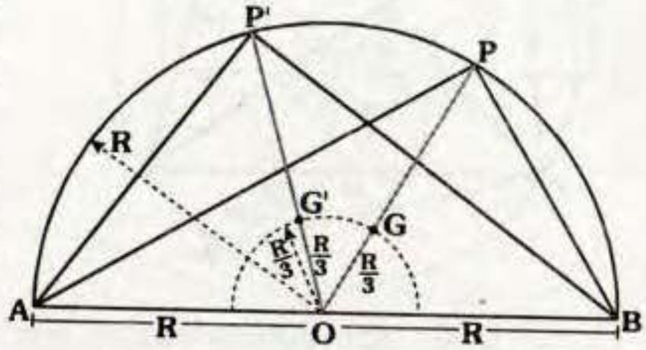
Demostraciones:

(1)



- Sean I e I' incentros de los triángulos.
- Por teorema: $IP = PB = AP = R$
  y $I'P = PA = PB = R$
- Además: $m\measuredangle APB = 90°$

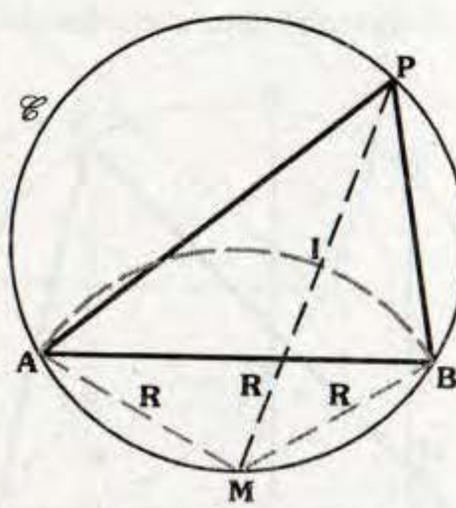
  $\therefore$ I describe el cuadrante AB.



- $AO = OB = PO = PO' = P$
- Por teorema: $OG = OG' = \dfrac{R}{3}$

  $\therefore$ G describe una circunferencia de centro O y radio R/3.

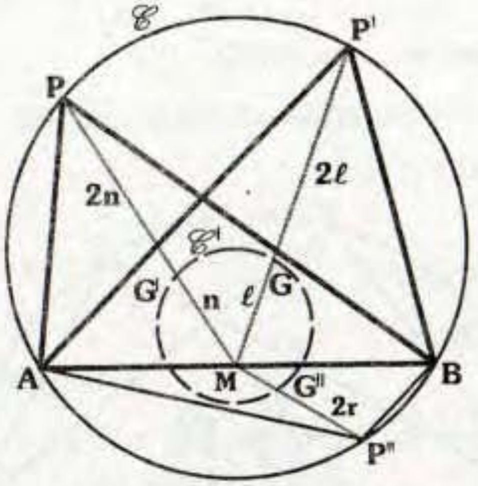
(2)



- I : Incentro del $\triangle APB$.
- Como $\mathscr{C}$ y AB son fijos, entonces $AM = MB = R$ (R: constante).

- Por teorema: $MI = R$

  $\therefore$ I describe un arco de circunferencia de centro M y radio R.

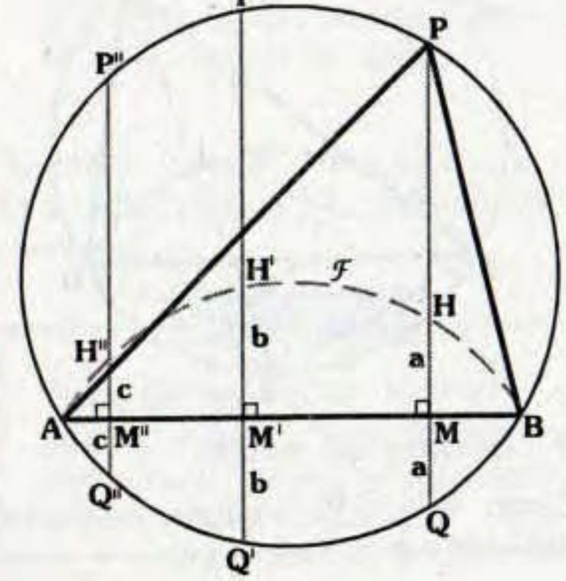


- G, G' y G" son baricentros de los triángulos APB, AP'B y AP"B respectivamente.

- Se sabe : $\dfrac{MG}{MP} = \dfrac{MG'}{MP'} = \dfrac{MG''}{MP''} = \dfrac{1}{3}$

- 𝒞' es homotético de 𝒞, con respecto a M.

  $\therefore$ G describe una circunferencia.



- Sean H, H' y H": Ortocentros

- Por teorema:

  $HM = MQ = a$, $H'M' = M'Q' = b$ y

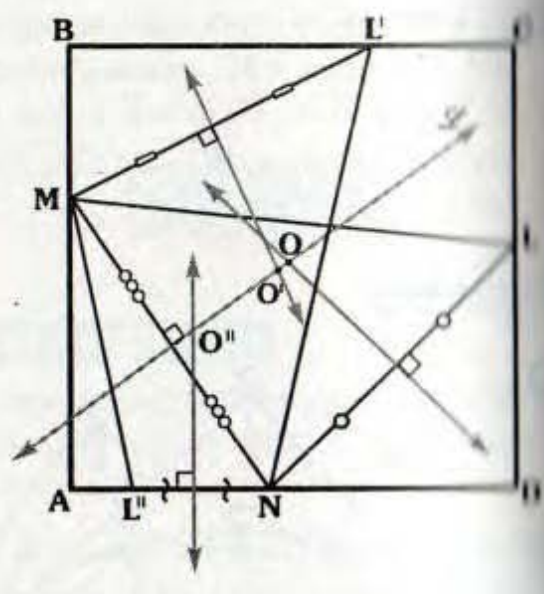
  $H''M'' = M''Q'' = c$

  $\Rightarrow$ ℱ es simétrico del arco AB con respecto a $\overline{AB}$.

- Si el punto P se encuentra en el otro arco AB, los ortocentros describen un arco simétrico.

  $\therefore$ El ortocentro describe una circunferencia congruente a la inicial.

(3)



- Sean O, O' y O": Circuncentros

- Se observa que O, O' y O" $\in \mathscr{L}$

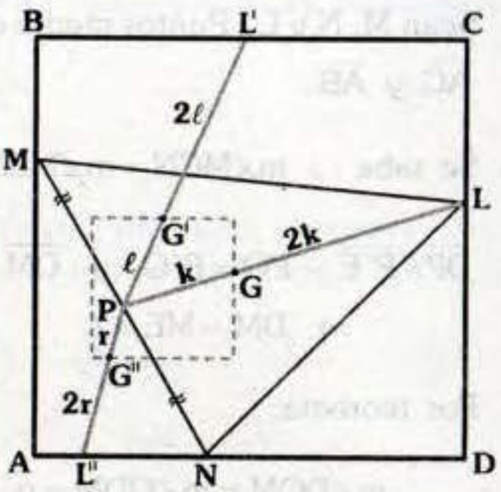
  $\therefore$ El circuncentro describe una parte de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

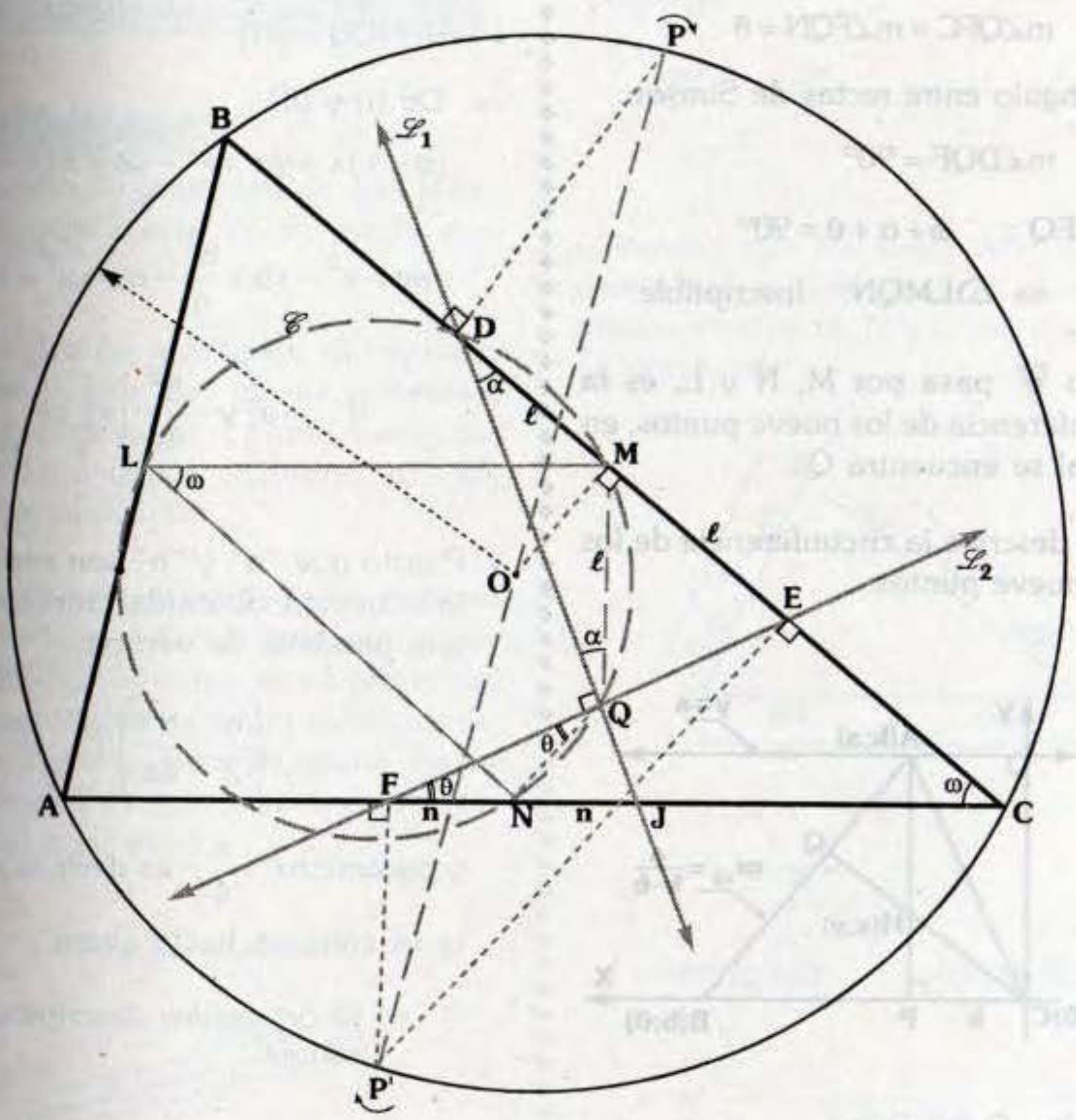
- Sean G, G' y G": Baricentros.

- $\dfrac{PG}{PL}=\dfrac{PG'}{PL'}=\dfrac{PG''}{PL''}=\dfrac{1}{3}$

- Como L describe el cuadrado ABCD, por homotecia:

∴ El baricentro describe un cuadrado.





- Sean M, N y L : Puntos medio de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

- Se sabe : $m\measuredangle MCN = m\measuredangle MLN = \omega$

- $\overline{DP} // \overline{P'E}$, $PO = P'O$ y $\overline{OM} // \overline{P'E}$

$$\Rightarrow \; DM = ME = \ell$$

- Por teorema:

$$m\measuredangle DQM = m\measuredangle QDM = \alpha$$

- Análogamente:

$$m\measuredangle QFC = m\measuredangle FQN = \theta$$

- Por ángulo entre rectas de Simson:

$$m\measuredangle DQF = 90°$$

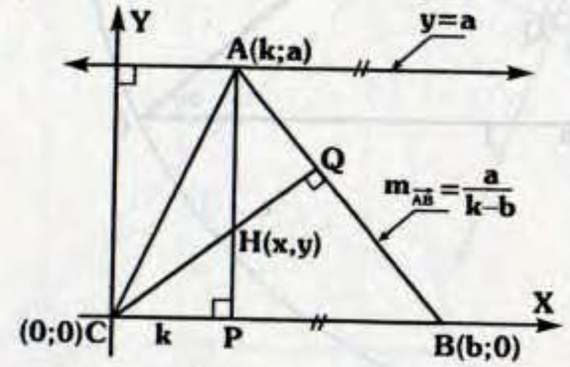
- $\measuredangle DCFQ$: $\omega + \alpha + \theta = 90°$

$$\Rightarrow \triangle LMQN: \text{ Inscriptible}$$

- Como $\mathscr{C}$ pasa por M, N y L, es la circunferencia de los nueve puntos, en la cual se encuentra Q.

$\therefore$ Q describe la circunferencia de los nueve puntos.

⑤



- Sea H : Ortocentro

- Trazamos el plano cartesiano con

- $\overleftrightarrow{AP}$: $x = k$ ... (I)

- $m_{\overleftrightarrow{CQ}} = \dfrac{b-k}{a}$

- $\left(m_{\overleftrightarrow{CQ}}\right)\left(m_{\overleftrightarrow{AB}}\right) = -1$

- $\overleftrightarrow{CQ}$: $(b-k)x = ya$ ... (II)

- $\overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{CQ} = \{H\}$

$\Rightarrow$ De (I) y (II) :

$$(b-x)x = ya \;\Rightarrow\; -ya = x(x-b)$$

$$-ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} - ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4}$$

$$\mathscr{P}: \; -a\left(y - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

- Puesto que "a" y "b" son constantes, la ecuación obtenida corresponde a una parábola de vértice:

$$\left(\frac{b}{2}; \frac{b^2}{4a}\right)$$

y parámetro $-\dfrac{a}{4}$; es decir la parábo-

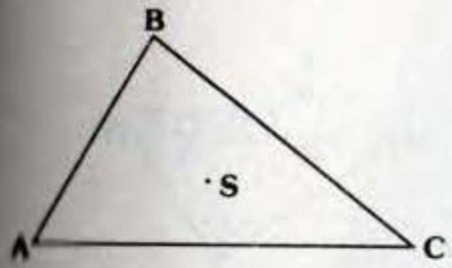
la es cóncava hacia abajo.

$\therefore$ El ortocentro describe una parábola.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO

El centro de gravedad de un triángulo es el punto de Spieker.

S : Punto de Spieker



S : Centro de gravedad del triángulo ABC.

NOCIONES PRELIMINARES

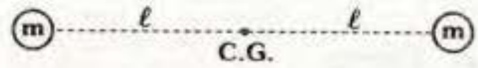
- El centro de gravedad de una barra homogénea esta en su punto medio.

- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de igual peso, es el punto medio del segmento cuyos extremos son las masas puntuales.

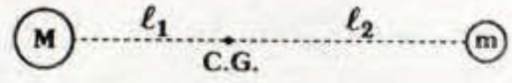
- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de pesos diferentes, es un punto del segmento que tiene por extremos dichas masas cuya distancia hacia las masas es inversamente proporcional a su peso.

Barra homogénea

Sistema de masas puntuales (igual masa)

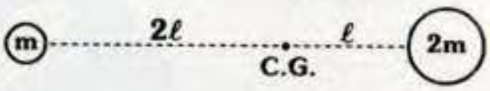


Sistema de masas puntuales (masas distintas)

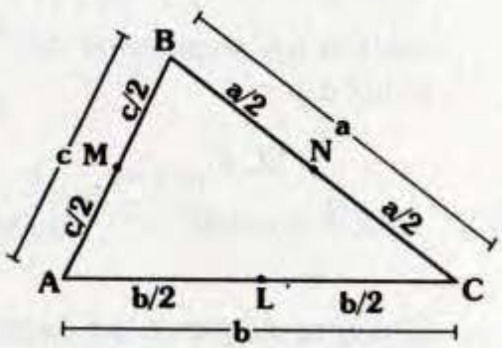


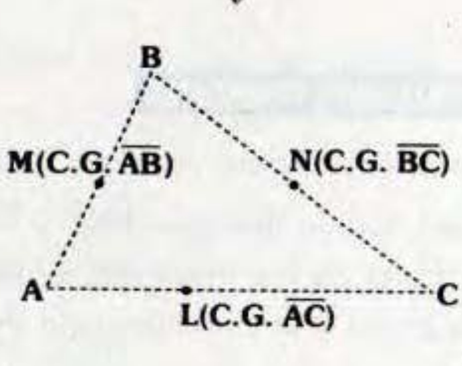
$$\ell_1 M = \ell_2 m$$

Ejemplo:



Considerando los lados AB, BC y AC como "barras homogéneas", entonces los puntos medios M, N y L son sus centros de gravedad.





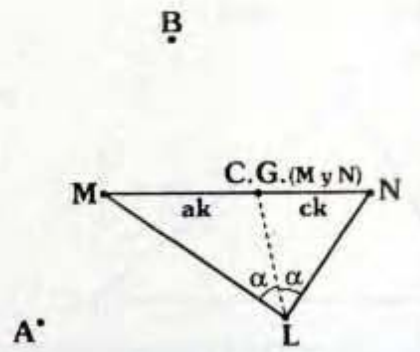
Debido a la homogeniedad de las barras las masas son proporcionales a las longitudes.

- Como:

$$\frac{MC.G_{(M\,y\,N)}}{NC.G_{(M\,y\,N)}}=\frac{a}{c}=\frac{ML}{LN}$$

$\Rightarrow$ $\overline{LC.G}_{(M\,y\,N)}$

Bisectriz del ΔMNL

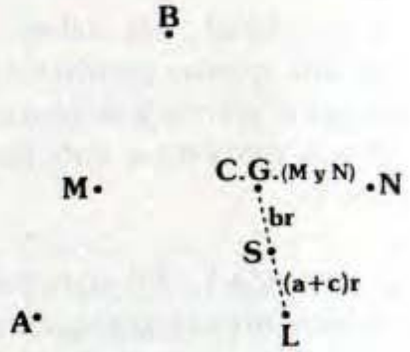


- Con lo cual el centro de gravedad del triángulo se encontrara en $\overline{LC.G}_{(M\,y\,N)}$.

Hallando el centro de gravedad de L y $C.G_{(M\,y\,N)}$.

- Como L representa al segmento de longitud b y $C.G_{(M\,y\,N)}$ representa a los segmentos de longitudes a y c.

$$\Rightarrow\quad \frac{SC.G_{(M\,y\,N)}}{SL}=\frac{b}{a+c}$$

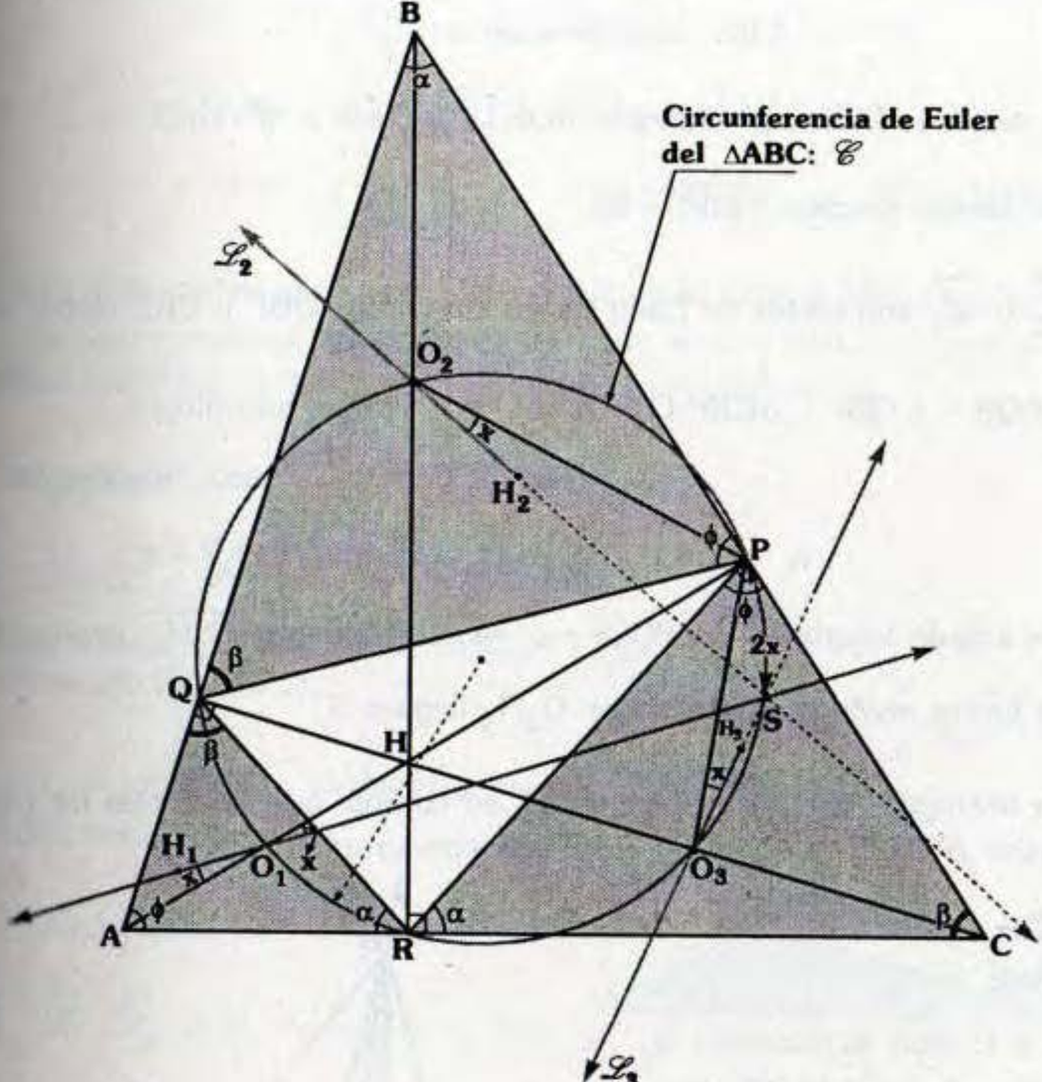


$\therefore$ El centro de gravedad del triángulo ABC (S) es el incentro del triángulo MNL (Punto de Spieker).

DEMOSTRACIONES PENDIENTES

- En el tema sobre recta de Euler se enuncia el siguiente teorema (sin demostración), sea un triángulo ABC y sus alturas $\overline{AP}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CQ}$ se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AQR, BQR y CPR son concurrentes en un punto que pertenece a la circunferencia de Euler del ΔABC.

Resolución :



Del gráfico:

- H es ortocentro del $\triangle ABC$, entonces al ser los cuadriláteros AQHR, HQBP y RHPC inscriptibles se cumple:
- Las circunferencias circunscritas a los triángulos AQR, QBP y CRP contienen a H.
- Debido a que $\mathscr{C}$ es la circunferencia de Euler del $\triangle ABC$, se cumple:

$$BO_2 = O_2H \ , \ \ AO_1 = O_1H \quad y \quad CO_3 = O_3H$$

$\Rightarrow$ O_1 es circuncentro del $\triangle AQR$.

O_2 es circuncentro del $\triangle QBP$.

O_3 es circuncentro del $\triangle CRP$.

- Sean también: H_1, H_2 y H_3 ortocentros de los triángulos AQR, QBP y CRP respectivamente.

- La recta de Euler del triángulo AQR $\left(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\right)$ corta a $\mathscr{C}$ en S.

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{PS} = 2x$

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son rectas de Euler de los triángulos QBP y CRP respectivamente.

- $\Delta AQR \sim \Delta QBP \sim \Delta CRP$: O_1, O_2 y O_3: Puntos homólogos

  H_1, H_2 y H_3: Puntos homólogos

  $\Rightarrow\ m\measuredangle H_1O_1A = m\measuredangle H_3O_3P = m\measuredangle H_2O_2P = x$

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle PO_2S = x \Rightarrow$ Al prolongar $\overline{O_2H_2}$ llega a S.

- En forma análoga al prolongar $\overline{O_3H_3}$ llega a S.

■ En un triángulo ABC de ortocentro H, se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AHB, BHC, AHC y ABC son concurrentes.

Demostración :

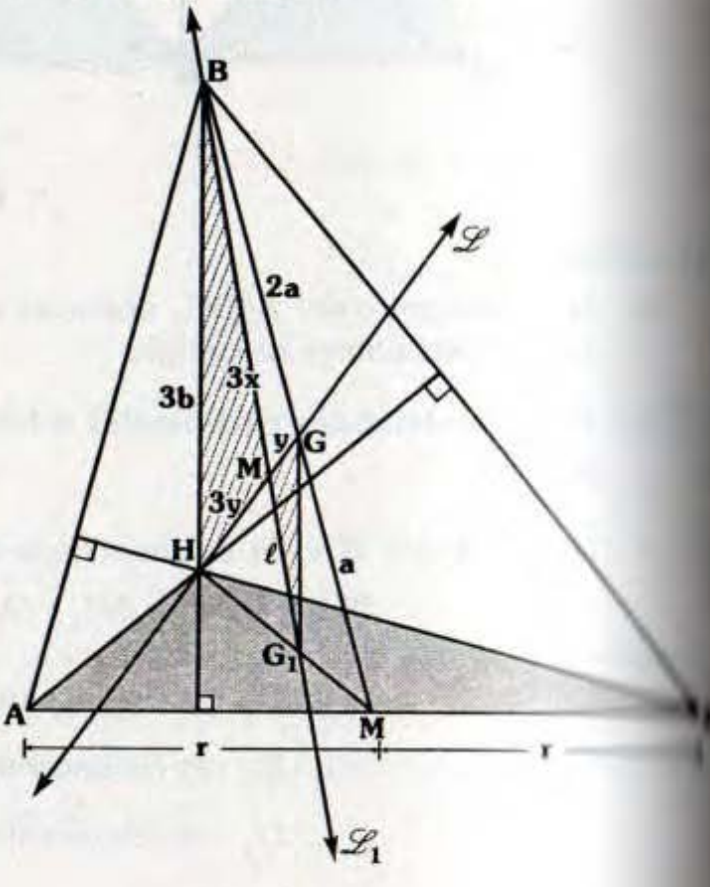
En el gráfico:

- H y G son ortocentro y baricentro del ΔABC respectivamente.

- G_1 es baricentro del ΔABC y B su ortocentro.

- Se sabe que B es ortocentro del ΔAHC.

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ son rectas de Euler de los triángulos ABC y AHC respectivamente.



- Por teoremas sobre el baricentro:

$$HG_1 = 2(G_1M) \quad y \quad BG = 2(GM) \quad \Rightarrow \quad \overline{G_1G} // \overline{HB}$$

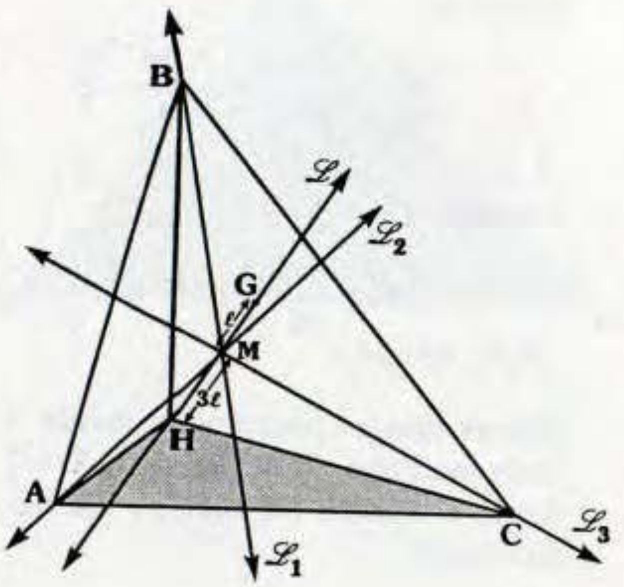
$$\Delta\, G_1MG \sim \Delta\, HMB \quad \Rightarrow \quad HB = 3(G_1G)$$

$$\Delta\, HMB \sim \Delta\, GMG_1 \quad \Rightarrow \quad HM = 3(MG) \quad y \quad BM = 3(MG_1)$$

- Quiere decir que la recta de Euler del triángulo corta a $\overline{HG}$ en la razón de 3 a 1 y en forma análoga las rectas de Euler de AHB y BHC cortaran a $\overline{HG}$ en la misma razón por lo tanto todas serán concurrentes en M.

- En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son rectas de Euler de los triángulos ABC, AHC, BHC y AHB respectivamente.



- H y G ortocentro y baricentro del ΔABC respectivamente.

- Se cumple entonces:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en M.

IÓN EN LA GEOMETRÍA

método de inducción matemática es un método especial de demostración que mite a base de observaciones particulares llegar a deducciones generales.

demostración por el método por inducción consta de dos partes :

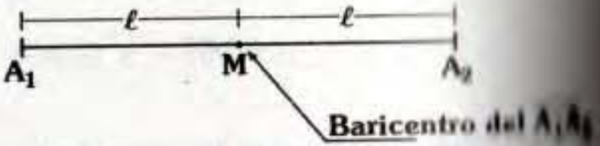
- Se comprueba que la proposición es valida para el menor de los valores de "n" para los cuales ella tiene sentido (no necesariamente n=1).
- Se demuestra que si la proposición es válida para un número natural "n", también es válida para el número siguiente inmediato, es decir n+1. (Hipotesis inductiva)

demostración del método de inducción no siempre es estricta bajo el esquema, a resulta necesario suponer que la proposición es válida para dos números sucesi- n−1 y n y demostrar que es valida para n+1.

El método de inducción matemática tiene su mayor aplicación en aritmética, álgebra y la teoría de números pero en particular resaltan su belleza en la geometría, a continuación veremos dos teoremas interesantes que tienen que ver con la inducción.

BARICENTRO DE UN POLÍGONO

- Llamaremos baricentro de un segmento a su punto medio.



- Dado el $\Delta\, A_1A_2A_3$ sabemos que el baricentro del triángulo es el punto de concurrencia del segmento que une un vértice y los baricentros de los lados opuestos.

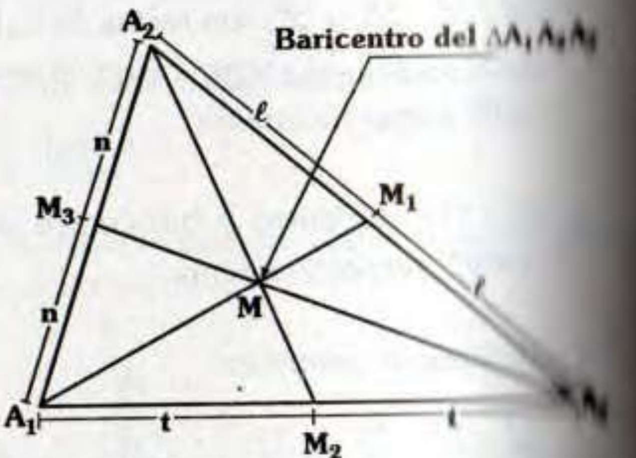
  Teorema:

$$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_3M}{MM_3}=2$$

  También:

  $\overline{A_1A_3}\,//\,\overline{M_3M_1}$, $\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{M_1M_2}$ y $\overline{A_2A_3}\,//\,\overline{M_3M_2}$

  Vemos que el baricentro divide a cada mediana en la razón de 2 a 1 desde el vértice (lo cual ya fue demostrada).



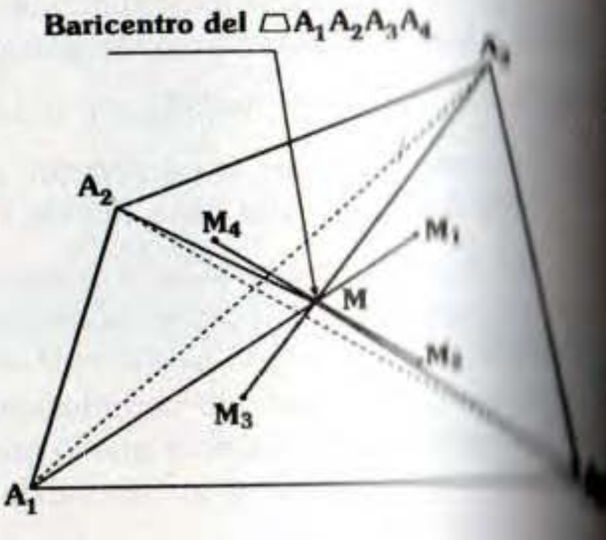
- Ahora vamos a definir el baricentro de un cuadrilátero.

  En el gráfico:

  M_1, M_2, M_3 y M_4 son baricentros de los $\Delta\, A_2A_3A_4$, $\Delta\, A_1A_3A_4$, $\Delta\, A_1A_2A_4$ y $\Delta\, A_1A_2A_3$ respectivamente.

  Llamaremos medianas a :

  $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$.



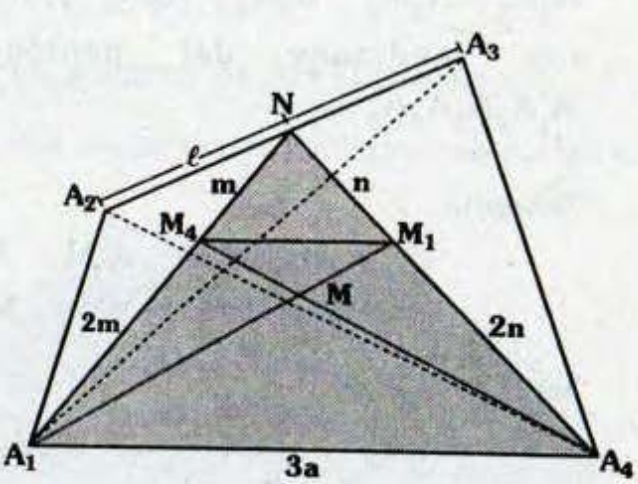
Teorema: · $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ son concurrentes

· $\dfrac{A_1M}{MM_1} = \dfrac{A_2M}{MM_2} = \dfrac{AM}{MM_3} = \dfrac{A_4M}{MM_4} = 3$

· $\overline{A_1A_2} \,//\, \overline{M_2M_1}$, $\overline{A_1A_3} \,//\, \overline{M_3M_2}$, $\overline{A_3A_4} \,//\, \overline{M_4M_3}$ y $\overline{A_2A_4} \,//\, \overline{M_4M_1}$

Demostración:

Vamos a demostrar que cada dos medianas se cortan en la misma razón.



Sean M_4 y M_1 baricentros de los triángulos $A_1A_2A_3$ y $A_2A_3A_4$ $\Rightarrow$ al prolongar $\overline{A_1M_4}$ y $\overline{A_4M_1}$ cortaran a A_2A_3 en su punto medio (N).

Se sabe: $\quad A_2M_4 = 2(M_4N)$

$$A_4M_1 = 2(M_1N)$$

Por teorema de Tales: $\quad \overline{M_4M_1} \,//\, \overline{A_1A_4}$

$$\Delta\, A_1NA_4 \sim \Delta\, M_4NM_1$$

$$\Rightarrow\ A_1A_4 = 3(M_4M_1)$$

$$\Delta\, M_4M_1M \sim \Delta\, M_4MA_1$$

$$\Rightarrow\ \frac{A_1M}{MM_1} = 3 \quad y \quad \frac{A_4M}{MM_4} = 3$$

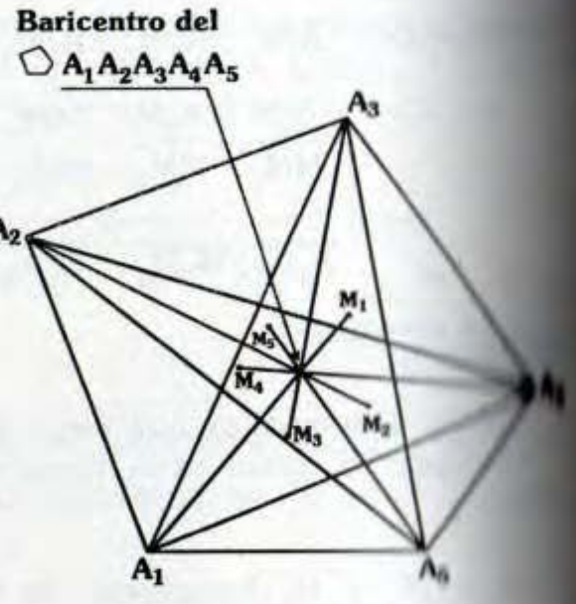
De lo anterior se deduce que cada dos medianas del cuadrilátero se cortan en la razón de 3 a 1 desde el vértice.

- En el pentágono ocurre algo análogo.

  En el gráfico :

  M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5 son baricentros de $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_2A_4A_5A_1$, $A_3A_5A_1A_2$ y $A_1A_2A_3A_4$ respectivamente.

  $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$, $\overline{A_4M_4}$ y $\overline{A_5M_5}$ son medianas del pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Teorema:

$$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_3M}{MM_3}=\frac{A_4M}{MM_4}=\frac{A_5M}{MM_5}=4$$

También:

$$\overline{A_1A_2}//\overline{M_2M_1},\ \overline{A_2A_3}//\overline{M_3M_2},\ \overline{A_3A_4}//\overline{M_4M_3},\ \overline{A_4A_5}//\overline{M_5M_4}\ \text{y}\ \overline{A_5A_1}//$$

- Ahora supongamos que se cumple que el baricentro de un polígono de "n" lados divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

  Las medianas del polígono son aquellos segmentos que unen sus vértices con baricentros de los polígonos de $(n-1)$ lados formados por los $(n-1)$ vértices restantes.

  En el gráfico:

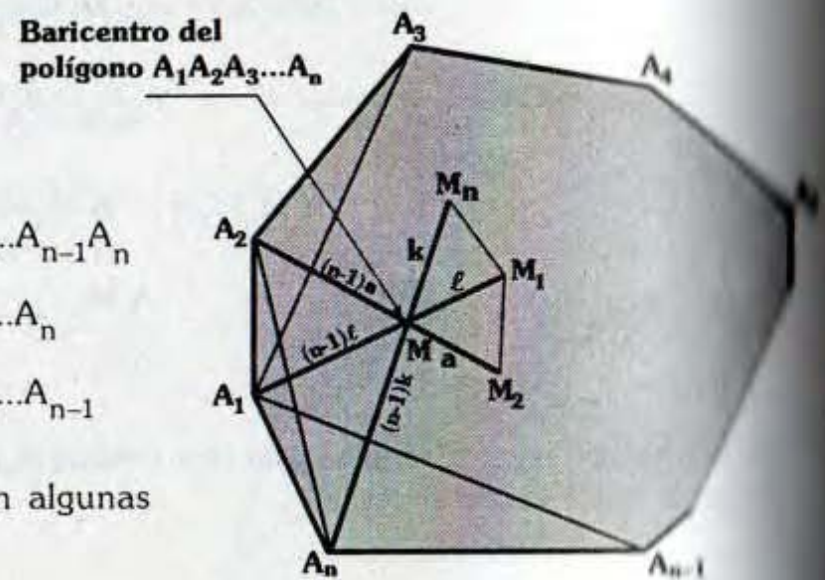
  $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$: Polígono de "n" lados

  M_1: Baricentro de $A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$

  M_2: Baricentro de $A_1A_3A_4...A_n$

  M_n : Baricentro de $A_1A_2A_3...A_{n-1}$

  $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$ y $\overline{A_nM_n}$ son algunas de las "n" medianas.



Suponiendo que M divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

Así tenemos: $$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_nM}{MM_n}=n$$

Similar para las demás medianas, pero como se ha indicado analizaremos solo dos medianas.

También: $$\overline{A_1A_2} \,//\, \overline{M_2M_1} \quad y \quad \overline{A_1A_n} \,//\, \overline{M_1M_n}$$

Vamos a demostrar que se cumple para un polígono de $(n+1)$ lados.

Será suficiente con demostrar que cada dos medianas del polígono se cortan en la razón de "n" a "1".

En el gráfico:

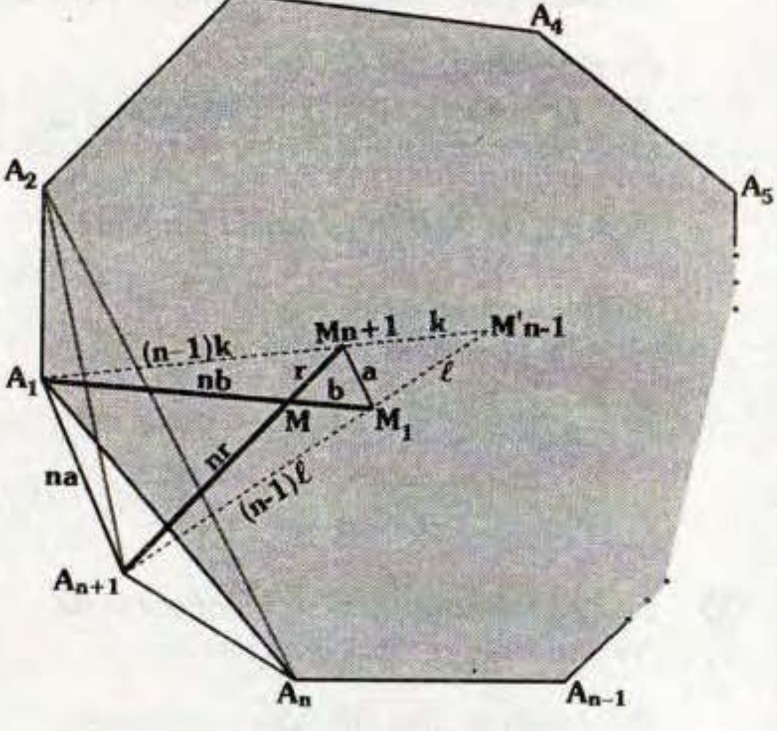
$A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$:

Polígono de $n+1$ lados

Sea:

M_1: Baricentro de $A_2A_3A_4 \ldots A_nA_{n+1}$

M_{n+1}: Baricentro de $A_1A_2A_3 \ldots A_n$



Ya que $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ y $A_2A_3A_4A_nA_{n+1}$ son polígonos de "n" lados, lo cual es nuestra suposición.

Considerando:

M_{n-1}: Es el baricentro del polígono de "$n-1$" lados : $A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$

$\Rightarrow$ Las medianas de $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ y $A_2A_3A_4 \ldots A_nA_{n+1}$ trazadas de A_1 y A_{n+1} tienen como extremo: M'_{n-1}

Se tendrá : $$\frac{A_1M_{n+1}}{M_{n+1}M'_{n-1}}=\frac{A_{n+1}M_1}{M_1M'_{n-1}}=n-1$$

Por teorema de Tales se tendrá: $\overline{A_1A_{n+1}} // \overline{M_{n+1}M_1}$

$$\Delta\, A_1M'_{n-1}A_{n+1} \sim \Delta\, M_{n+1}M'_{n-1}M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{n+1}A_1}{M\,M_{n+1}} = n$$

$$\Delta\, M_1MM_{n+1} \sim \Delta\, A_1MA_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_{n+1}M}{M\,M_{n+1}} = n$$

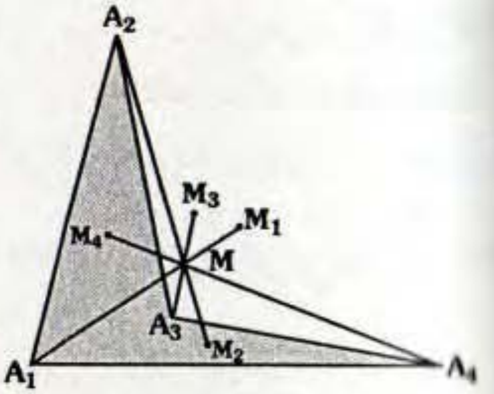
Con lo cual estamos demostradas que cada dos medianas del polígono $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ se cortan en la razón de "n" a 1.

Nota

① *Si bien es cierto en nuestra demostración hemos considerado un polígono convexo pero también se cumple para un polígono no convexo.*

En el gráfico:

M_1, M_2, M_3 y M_4 *son baricentros de los triángulos:* $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ y $A_1A_2A_3$ *respectivamente.*



También se cumple:

- $\dfrac{A_1M}{MM_1} = \dfrac{A_2M}{MM_2} = \dfrac{A_3M}{MM_3} = \dfrac{A_4M}{MM_4} = 3$
- $\overline{A_1A_2} // \overline{M_2M_1}$, $\overline{A_3A_4} // \overline{M_4M_3}$, $\overline{A_2A_3} // \overline{M_2M_3}$ y $\overline{A_1A_4} // \overline{M_4M_1}$

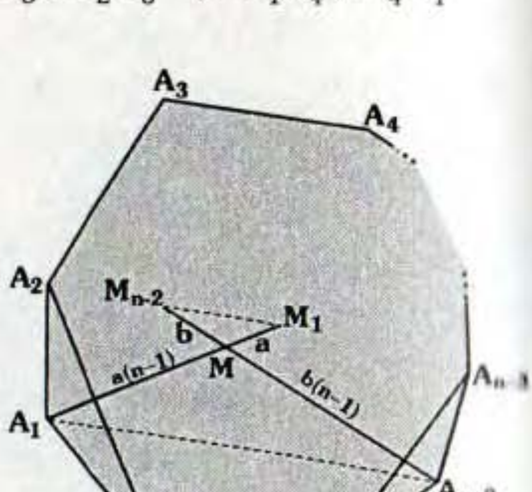
② *En el gráfico se tiene un polígono de "n" lados cuyo baricentro es* M.

Si ubicamos dos vértices cualesquiera.

Por ejemplo:

A_1 y A_{n-2} y sean $\overline{A_1M_1}$ y $\overline{A_{n-2}M_{n-2}}$ *las medianas trazadas desde dichos puntos se cumple:*

$$\boxed{\overline{A_1A_{n-2}} // \overline{M_{n-2}M_1}}$$



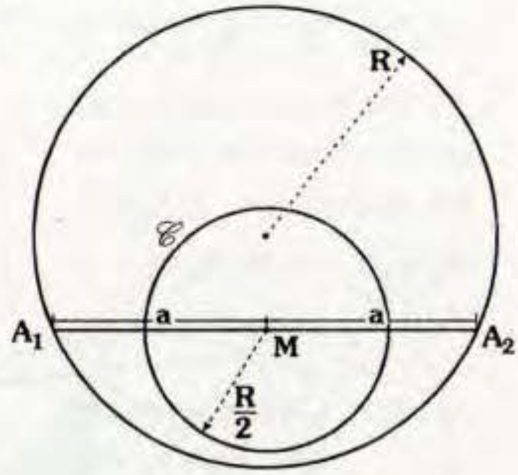
CIRCUNFERENCIA DE EULER PARA POLÍGONOS INSCRITOS

De forma análoga al análisis anterior, definamos así: primero para una cuerda, el triángulo y el cuadrilatero, y luego el caso de un polígono de "n" lados.

- Dada una circunferencia de radio R se denomina circunferencia de Euler de una cuerda a la circunferencia cuyo centro es el punto medio de la cuerda y su radio R/2.

  En el gráfico: $A_1M = MA_2$

  $\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ es la circunferencia de Euler de $\overline{A_1A_2}$.

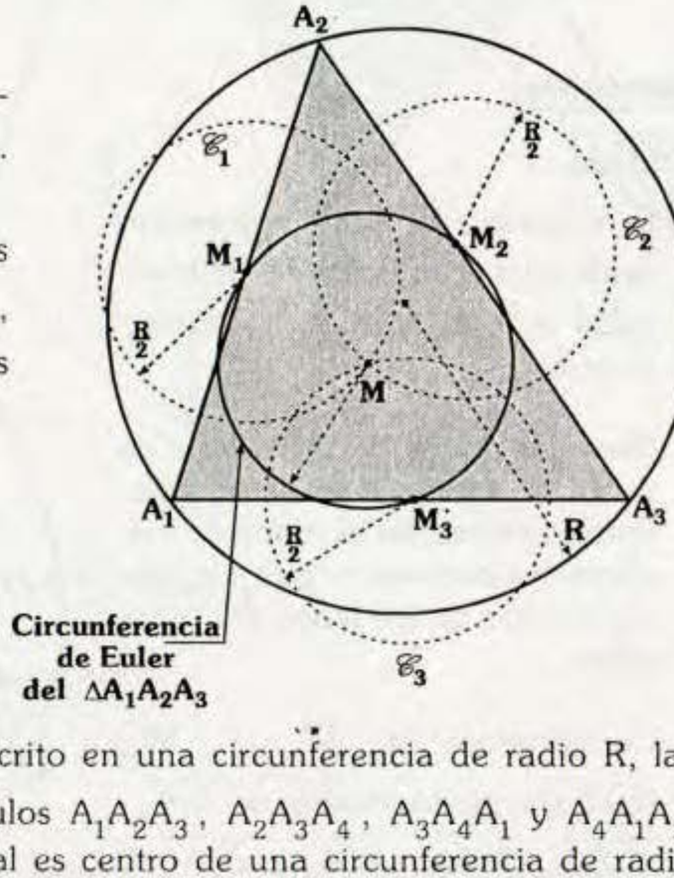


- Sea el triángulo $A_1A_2A_3$ inscrito en la circunferencia de radio R, las tres circunferencias de radio R/2 y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de las tres cuerdas.

  Circunferencia se denomina circunferencia de Euler del triángulo $A_1A_2A_3$.

  En el gráfico $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias de Euler de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ y $\overline{A_3A_1}$ respectivamente las cuales son concurrentes en M.

  En el capítulo sobre circunferencia de Euler (para el triángulo) ya hemos analizado sus propiedades, así como sus demostraciones.



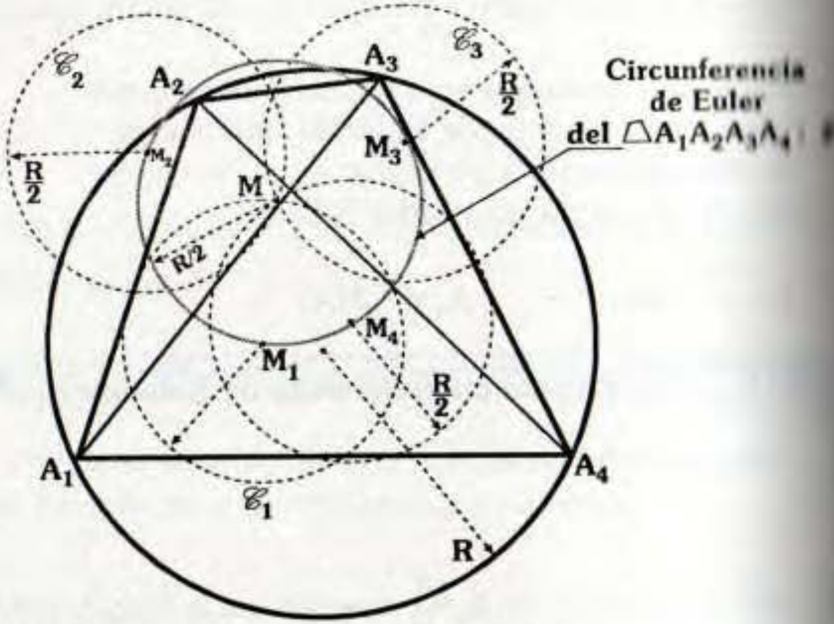
- Dado el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ inscrito en una circunferencia de radio R, las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ son concurrentes en un punto el cual es centro de una circunferencia de radio R/2 y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de los cuatro triángulos mencionados a la circunferencia.

A dicha circunferencia se le denomina circunferencia de Euler del $\triangle A_1A_2A_3A_4$.

En el gráfico:

M_1, M_2, M_3 y M_4 centros de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ las cuales son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ respectivamente.

$\mathscr{C}$: Circunferencia de Euler del $\triangle A_1A_2A_3A_4$.

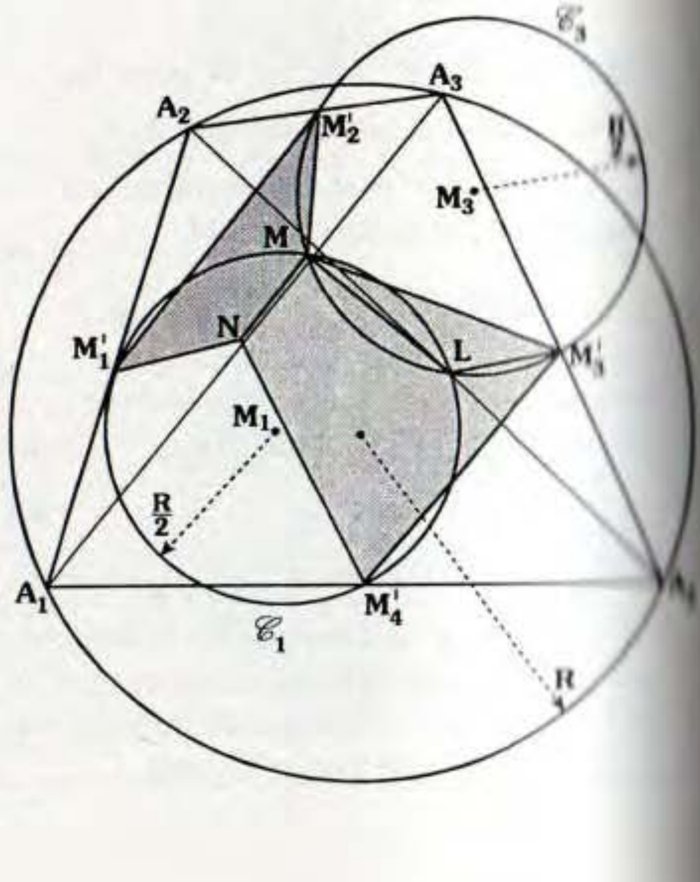


Notar : M_1, M_2, M_3 y $M_4 \subset \mathscr{C}$

Demostración:

Paso 1

- En el gráfico $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_4$ y $A_3A_4A_2$ respectivamente.
- Recordar que la circunferencia de Euler del triángulo es la circunferencia circunscrita al triángulo mediano (es decir pasa por los puntos medios de los lados del triángulo).
- Consideremos: M_1', M_2', M_3', M_4', N y L son puntos medios de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_4}$ respectivamente.



- Debido a que "L" es punto medio de $\overline{A_2A_4}$, entonces "L" pertenece a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, M es el otro punto de intersección.

- Se va a demostrar que los cuadriláteros $M'_1M'_2MN$ y $M'_3M'_4NM$ son inscriptibles, con ello se demostrará la concurrencia de las cuatro circunferencia de Euler en M.

2

Notar:

- $A_4M'_4NM'_3$, $A_4M'_4M'_1L$ y $LM'_3M'_3A_4$ son paralelogramos

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle M'_4M'_1L = x \quad$ y

  $m\measuredangle M'_3M'_2L = y$

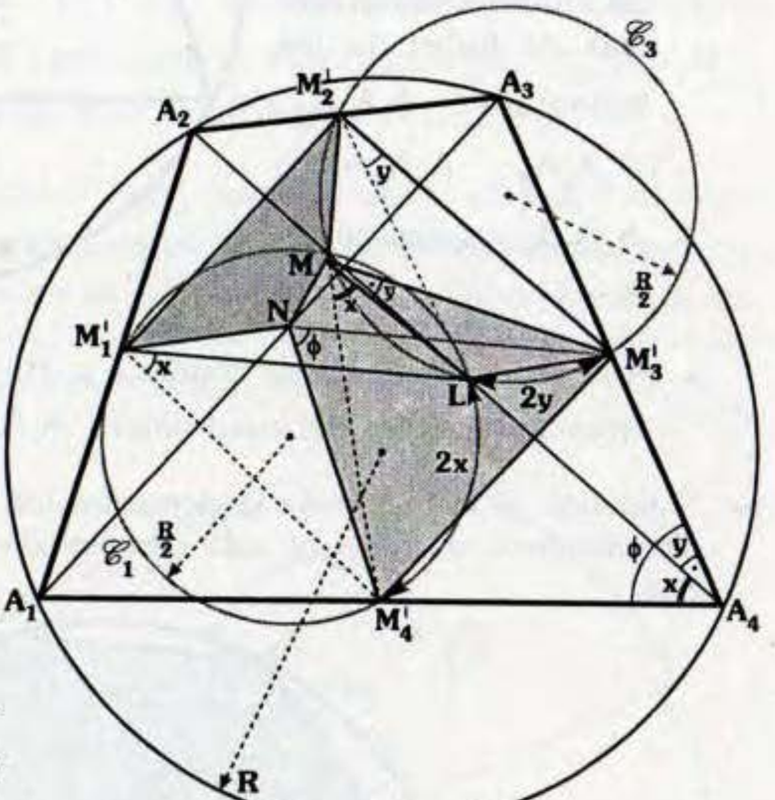
- En A_4 : $\quad x + y = \phi$

- En $\mathscr{C}'_1$ y $\mathscr{C}_3$ por ángulo inscrito:

  $m\measuredangle M'_4ML = x \quad$ y

  $m\measuredangle LMM'_3 = y$

  $\Rightarrow m\measuredangle M'_4MM'_3 = x + y = \phi$



- Luego el $\triangle M'_4NMM'_3$ es inscriptible, es decir la circunferencia circunscrita al triángulo M'_4NL contiene a M.

- En forma análoga se demuestra: $\quad m\measuredangle M'_1NM'_2 = m\measuredangle M'_2MM'_1$

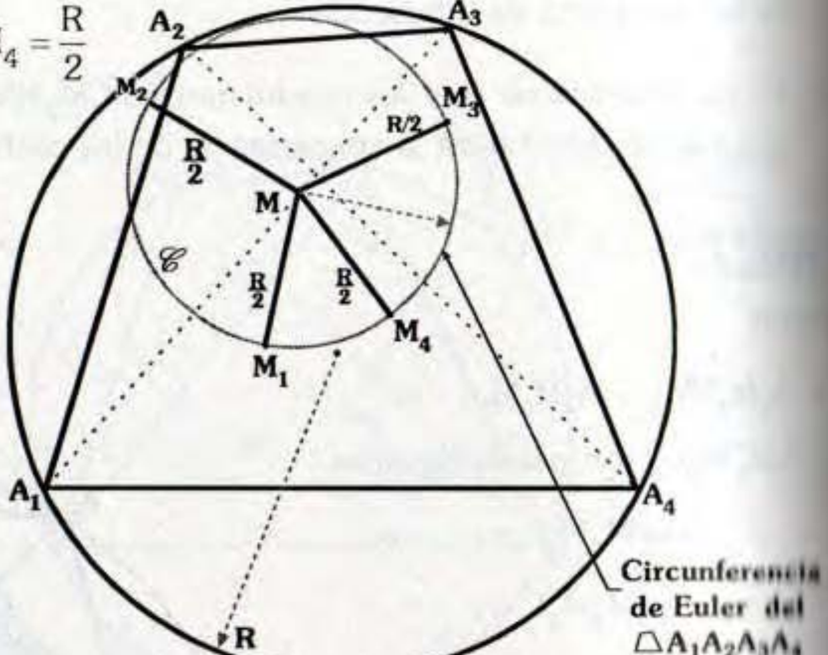
- Es decir el cuadrilátero $M'_1NMM'_2$ es inscriptible.

3

- Ya con la demostración anterior se ha demostrado que las cuatro circunferencias de Euler son concurrentes en M.

- Luego se puede observar:

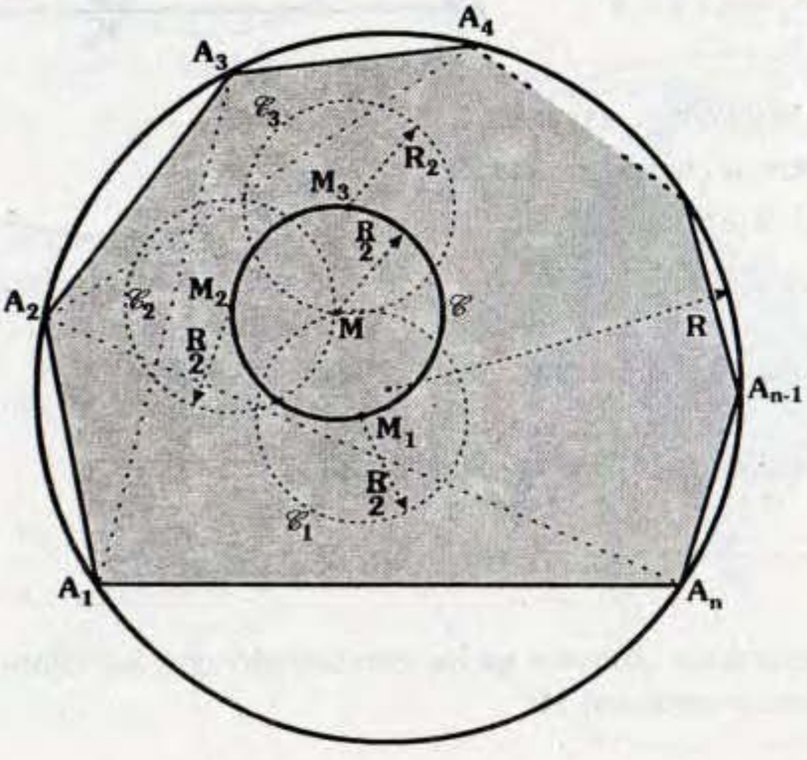
$$MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4 = \frac{R}{2}$$



- Con lo cual se demuestra que M es centro de una circunferencia que pasa por los centros M_1, M_2, M_3 y M_4 de las cuatro circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ respectivamente.

- A la circunferencia que contiene a M_1, M_2, M_3 y M_4 se le llama circunferencia de Euler del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. ($\mathscr{C}$)

➢ Siguiendo el esquema de la demostración por inducción, supongamos que la circunferencia de Euler ha sido demostrada para un polígono inscrito de "n" lados.



Del gráfico:

$\mathscr{C}_1$: Es la circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$.

$\mathscr{C}_2$: Es la circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5...A_{n-1}A_1$.

$\mathscr{C}_3$: Es la circunferencia de Euler de $A_4A_5...A_nA_1A_2$.

y así sucesivamente para las demás circunferencias (hasta $\mathscr{C}_n$).

M_1, M_2, M_3 son centros de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ respectivamente.

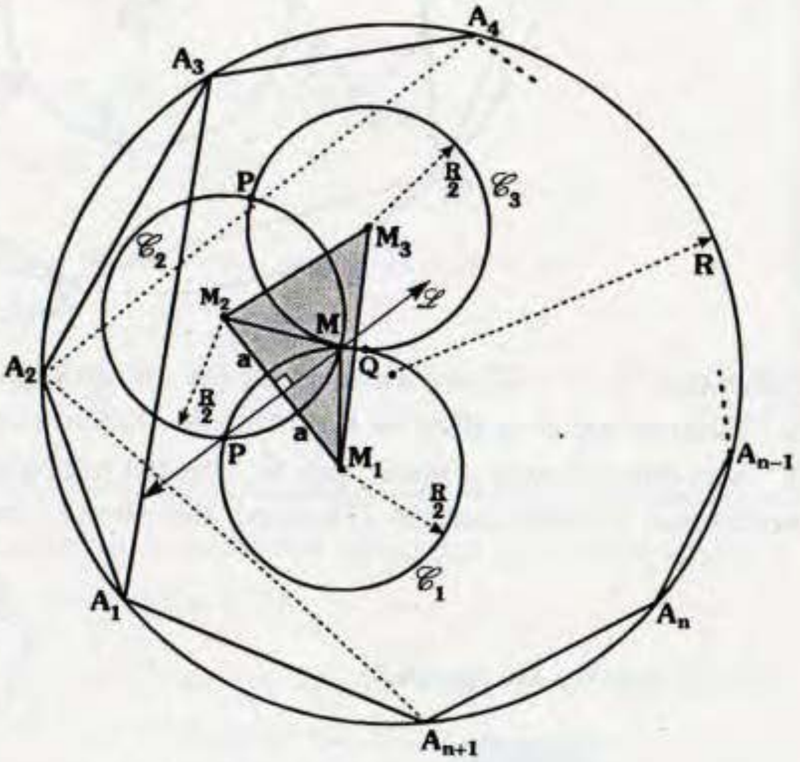
Estamos suponiendo que $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, ... $\mathscr{C}_n$ son concurrentes en M entonces M es centro de una circunferencia ($\mathscr{C}$) que contiene a los centros $(M_1, M_2, M_3...M_n)$. A $\mathscr{C}$ se denomina circunferencia de Euler del polígono $A_1, A_2, A_3, ... A_n$.

- Ahora en el gráfico anterior en el arco A_1A_n vamos a ubicar un punto tal como A_{n+1} y vamos a demostrar que las circunferencia de Euler de los polígonos de "n" lados considerados con concurrentes en un punto el cual será centro de la circunferencia de radio R/2 y contiene a los demás centros. A dicha circunferencia se le denominará circunferencia de Euler para el polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nA_{n+1}$

Bastará con demostrar que se cortan en un mismo punto tres circunferencia (cualquiera) de Euler de los polígonos de "n" lados.

Por ejemplo:

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$



$\mathscr{C}_1$: Circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4...A_nA_{n+1}$

$\mathscr{C}_2$: Circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5...A_nA_{n+1}A_1$

$\mathscr{C}_3$: Circunferencia de Euler de $A_4A_5...A_{n+1}A_1A_2$

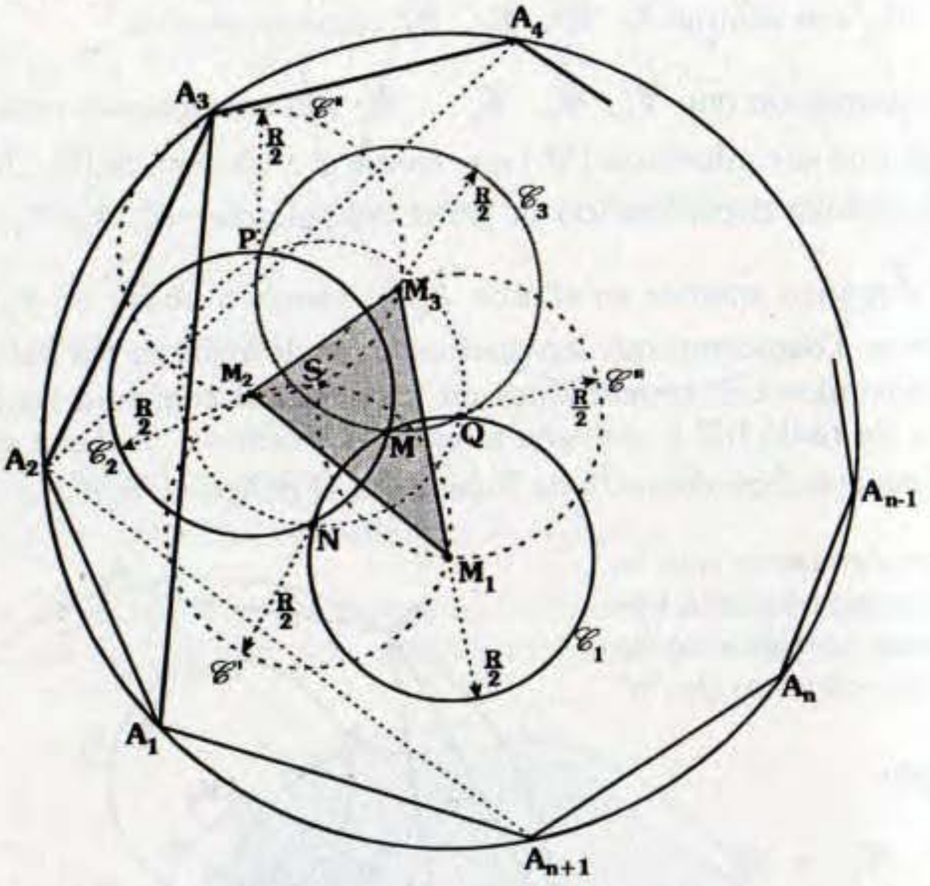
Notar que $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son congruentes y de radio R/2.

Vamos a demostrar que M es circuncentro del $\Delta M_1\ M_2\ M_3$.

Se observa $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de M_1M_2 $(M_1NM_2M$ es rombo$)$

De la suposición:

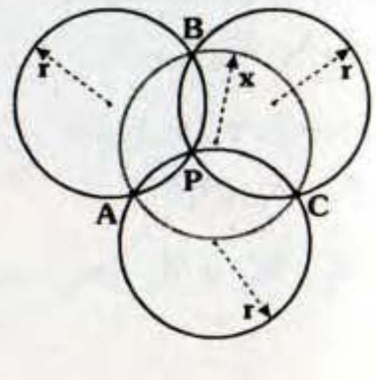
La circunferencia de Euler del polígono inscrito de "n" lados contiene a los centros de las circunferencias de Euler del polígono de $n-1$ lados y estos a su vez contienen a los centros de los polígonos de $n-2$ lados y así sucesivamente.



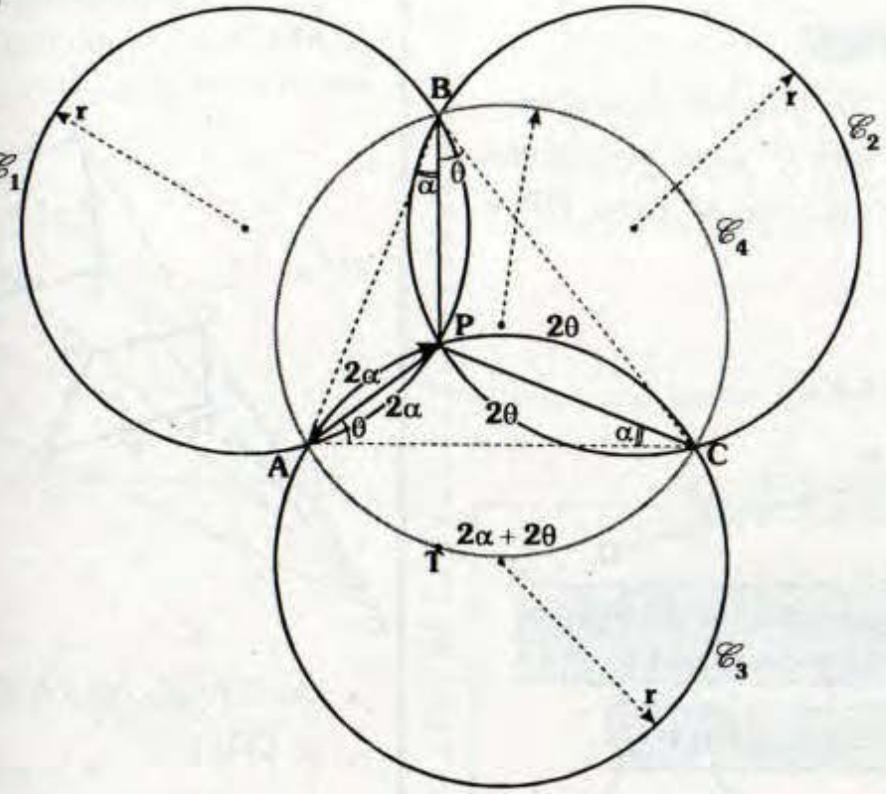
Notar que N, P y Q son centros de las circunferencias de Euler de los polígonos de $n-1$ lados, en el gráfico se han trazado dichas circunferencias tales como $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ y $\mathscr{C}'''$ son congruentes y pasan por S, nuestro problema se reduce a un teorema, el cual mostramos a continuación (Teorema del círculo medio).

En el gráfico se cumple:

$\boxed{x = r}$



Demostración:



- Se tiene $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2 \equiv \mathscr{C}_3$
- Para $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ los arcos comunes $\widehat{AP}$ miden 2α.

  $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ los arcos comunes $\widehat{PC}$ miden 2θ.
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle ABC = \alpha + \theta \;\;\Rightarrow\;\; m\measuredangle \widehat{ATC} = 2\alpha + 2\theta$
- Debido a que: $m\measuredangle \widehat{ATC} = m\widehat{APC} = 2\alpha + 2\theta$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{C}_4 \equiv \mathscr{C}_3$$

$$\therefore \quad x = r$$

En nuestro gráfico en virtud del teorema ya demostrado se tendrá que la circunferencia circunscrita al triángulo $M_1M_2M_3$ tiene radio R/2.

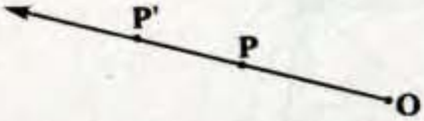
Además se observa : $MM_2 = MM_1 = \dfrac{R}{2} \Rightarrow M$ es circuncentro del $M_1M_2M_3$ con lo cual queda demostrado que cada tres circunferencias de Euler del polígono de "n" lados pasan por M, el cual será el centro de una circunferencia de radio R/2 y que pasa por M_1 , M_2 , M_3 , ... M_n , dicha circunferencia es la circunferencia de Euler del polígono inscrito de $n+1$ lados.

HOMOTECIA

HOMOTECIA DE UN PUNTO

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que P' es el homotético de P, si P' pertenece al rayo OP y $\dfrac{OP'}{OP}=k$.

Si $\dfrac{OP'}{OP}=k$ $(k\in\mathbb{R})$



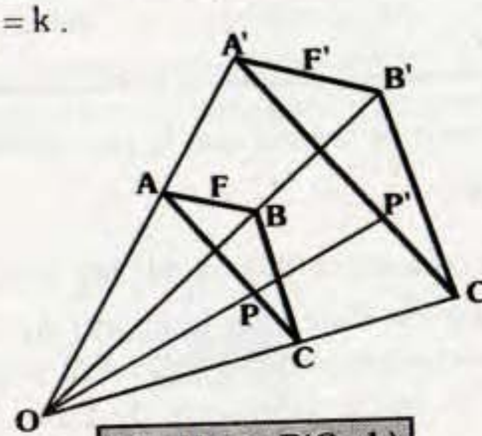
$\Rightarrow$ **P' es el homotético de P, respecto de O y de razón k**

Notación: $\boxed{P'=\text{Hom. }P(O\,;k)}$

HOMOTECIA DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que la figura F' es homotética de F, si para todo punto P' de F' le corresponde un punto P de F, tal que P' es homotético de P respecto de O.

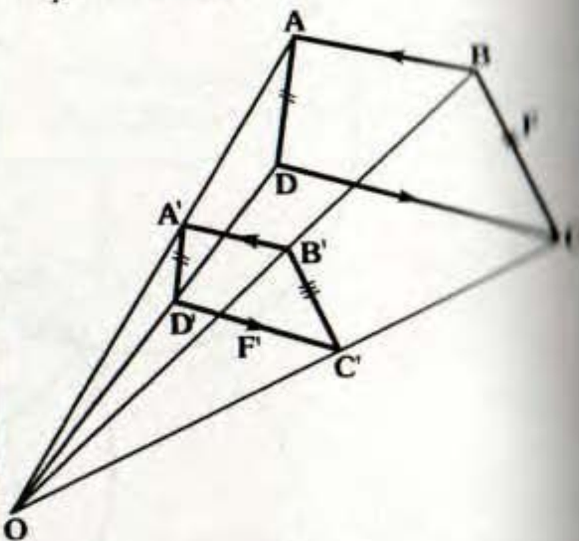
Si $\forall P'\in F'\ \exists\ P\in F$, tal que $P'\in\overrightarrow{OP}$ y $\dfrac{OP'}{OP}=k$.



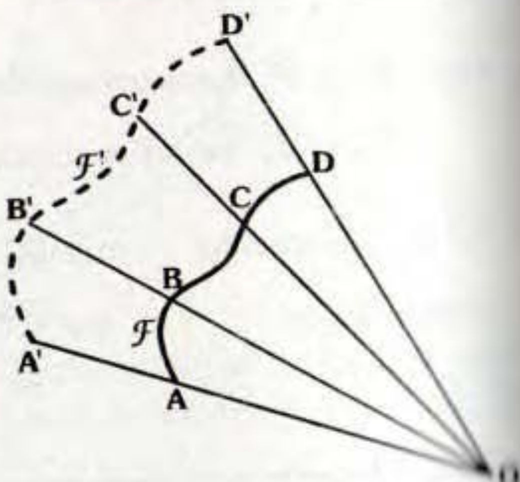
$\Rightarrow$ $\boxed{F'=\text{Hom. }F(O\,;k)}$

Observación

Si ABCD es homotético de A'B'C'D', respecto de O.



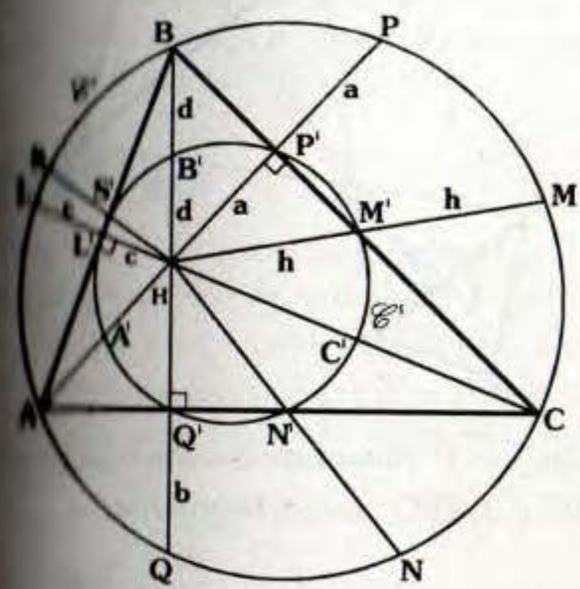
- $\overline{AD}//\overline{A'D'}$, $\overline{AB}//\overline{A'B'}$, $\overline{BC}//\overline{B'C'}$ y $\overline{CD}//\overline{C'D'}$
- $\triangle$ABCD ~ $\triangle$A'B'C'D'



Si A', B', C' y D' son puntos homotéticos de A, B, C y D respectivamente, con respecto a O.

Si seguimos ubicando los homotéticos de todos los puntos de $\mathcal{F}$, nos daremos cuenta que dichos puntos describen una curva $\mathcal{F}'$ es semejante a $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS



- H : Ortocentro de ΔABC.
- Por el teorema 8.5:
  $HP' = PP' = a$, $HQ' = QQ' = b$ y
  $HL' = LL' = c$
- Por dato :
  $HA' = AA' = c$, $HB' = BB' = d$ y
  $HC' = CC' = f$
- Como M', N' y S' son puntos medios (de la observación posterior)

$$HM' = M'M = h$$
$$HN' = N'N = i$$
$$HS' = S'S = g$$

- Se observa :

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{BH}{B'H} = \frac{CH}{C'H} = \frac{PH}{P'H} = \frac{QH}{Q'H} =$$

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{NH}{N'H} = \frac{SH}{S'H} = 2$$

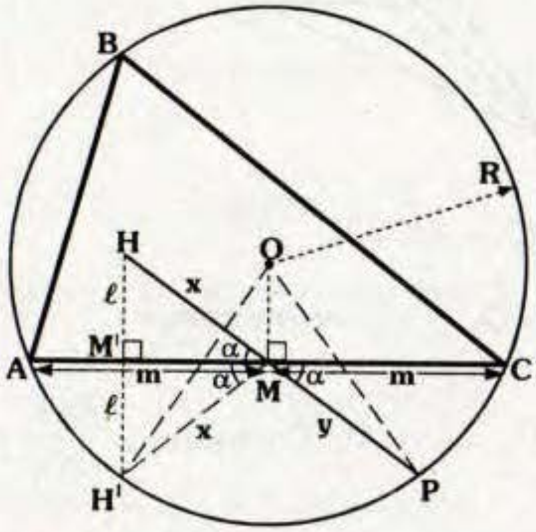
$\Rightarrow$ A', B', C', P', Q', L', M', N' y S' son homotéticos de A, B, C, P, Q, L, M, N y S respectivamente, con respecto a H, entonces A', B', C', P', Q', L', M', N' y S' describen o pertenecen a la circunferencia $\mathscr{C}_1$, cuya razón de homotecia 2.

$$\therefore \quad \mathscr{C}' = \text{Hom}\,\mathscr{C}\,(H\,;\,2)$$

Además la relación de radios de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ es 2.

Observación

Sea H: Ortocentro y AM=MC



$$\Rightarrow \quad \boxed{x = y}$$

- *Por teorema:*

$$HM' = M'H' = \ell \;\Rightarrow\; H'M = x \text{ y}$$

$$m\measuredangle HMM' = m\measuredangle M'MH' = m\measuredangle CMP = \alpha$$

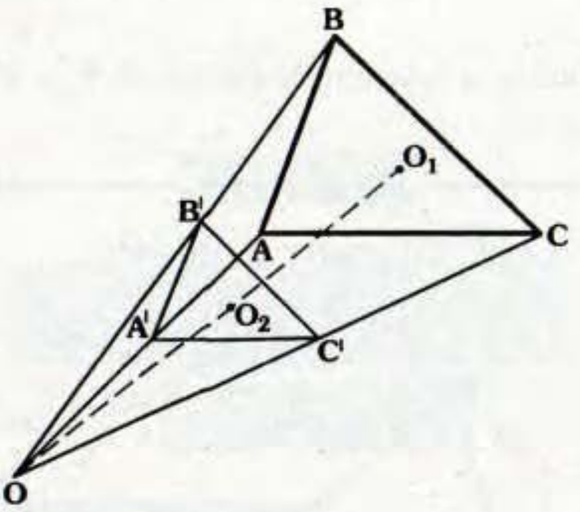
- $\Delta OMH' \cong \Delta OPM$

$$\therefore\; x = y$$

CONCLUSIONES IMPORTANTES

- Si $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{OC}{OC'} = k$

$\Rightarrow$ El ΔABC es homotético del $\Delta A'B'C'$.



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Sean O_1 y O_2 circuncentros

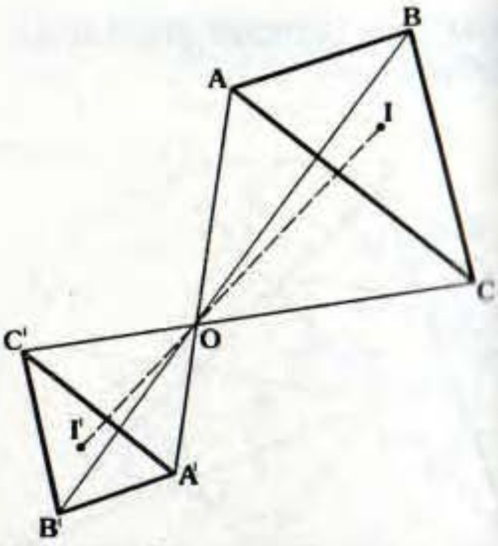
$\Rightarrow$ O_1, O_2 y O: Colineales y $\dfrac{OO_1}{OO_2} = k$

Del mismo modo podemos trabajar con los demás puntos notables.

También:

- Si $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = r$

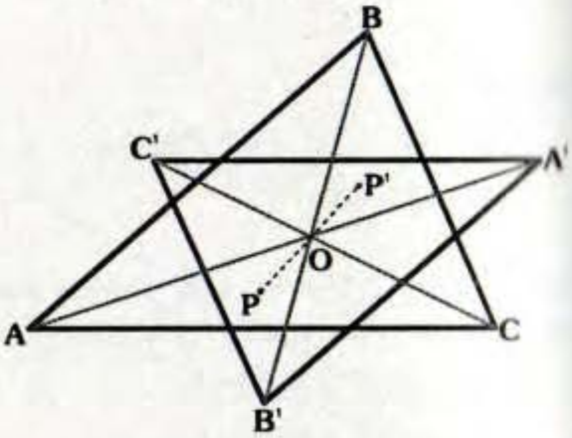
$\Rightarrow$ El $\Delta A'B'C'$ es homotético del ΔABC.



Sean I e I' incentros de los triángulos ABC y A'B'C' respectivamente.

$\Rightarrow$ I, O y I': Colineales y $\dfrac{OI'}{OI} = r$

- Si $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = k$



$\Rightarrow$ El $\Delta A'B'C'$ es homotético del ΔABC , respecto de O.

Sean P y P' puntos notables de una misma característica de los triángulos ABC y A'B'C', respectivamente.

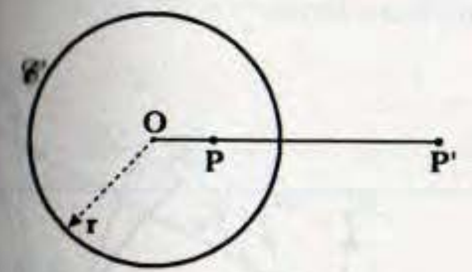
$\Rightarrow$ P, O y P' son colineales y $\dfrac{OP'}{OP} = k$

INVERSIÓN

Es una transformación geométrica anamorfica (es decir cambia la forma de la figura original), la inversión fue creada por Steiner (1 796 - 1 863).

PUNTOS INVERSOS

Sean P y P' son colineales con O, el cual es centro de una circunferencia de radio r, tal que $(OP)(OP')=r^2$, cada uno de los puntos P y P' es inverso del otro respecto de la circunferencia.



En el gráfico:

$$(OP)(OP')=r^2$$

O : Centro de inversión

$\mathscr{C}$: Circunferencia de inversión

P y P' son inversos

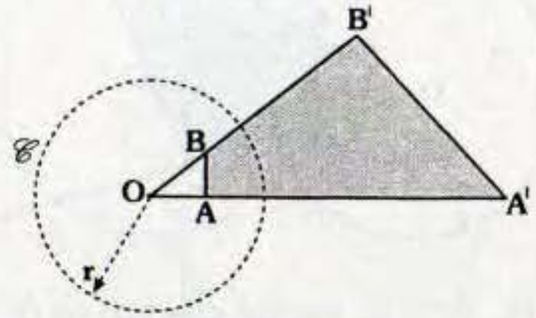
Observación

1. *Si un punto está en la circunferencia de inversión en su propio inverso.*
2. *Si un punto está en la región interior su inverso está en la parte externa.*

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE INVERSIÓN

➤ Dos puntos y sus respectivos inversos respecto a un centro de inversión son vértices de un cuadrilátero inscriptible.

Demostración:



- Sea O y $\mathscr{C}$ centro y la circunferencia de inversión.
- A y A': Puntos inversos respecto de $\mathscr{C}$.

$$\Rightarrow \quad (OA)(OA')=r^2$$

- B y B': Puntos inversos respecto de $\mathscr{C}$.

$$\Rightarrow \quad (OB)(OB')=r^2$$

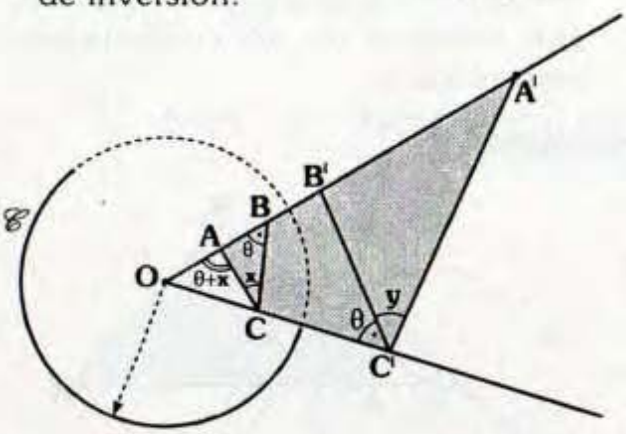
- Luego $(OA)(OA')=(OB)(OB')$
- Por recíproco del teorema de la secante el $\triangle AA'B'C'$ es inscriptible.

➤ Sean A y B dos puntos colineales con el centro de la circunferencia de inversión y sea C un punto que no esta en $\overleftrightarrow{AB}$ y sean A', B' y C' sus inversos, se cumple:

$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle A'C'B'$$

Demostración:

- Sea O y $\mathscr{C}$: Centro y circunferencia de inversión.



- A', B' y C' puntos inversos de A, B y C respectivamente.
- Por el teorema anterior :

  ⏢CBB'C' y ⏢CAA'C son inscriptibles.

$$\Rightarrow\ m\measuredangle OBC = m\measuredangle OC'B = \theta$$

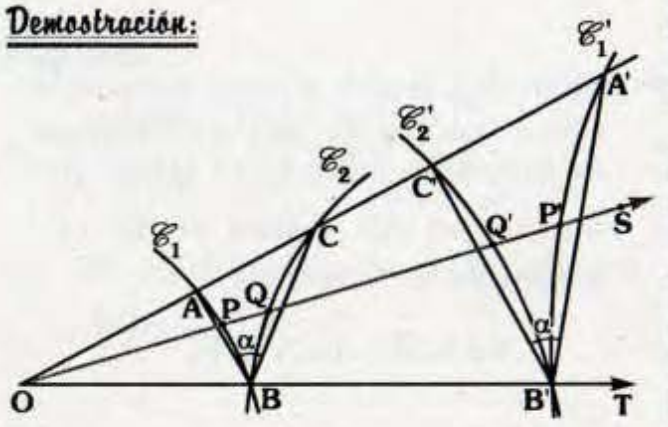
$$m\measuredangle OAC = m\measuredangle OC'A'$$

$$\Rightarrow\ \theta + x = \theta + y$$

$$\therefore\quad x = y$$

➤ Si dos curvas se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, la medida del ángulo en ese punto es el mismo que el de sus inversos.

Demostración:



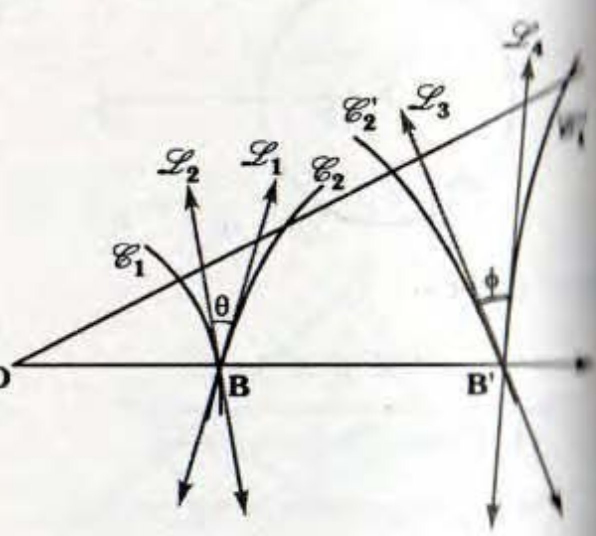
- Sea O el centro de inversión.
- A', B' y C' son inversos de A, B y C respectivamente.
- Por el teorema anterior:

$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle A'B'C'$$

- Si nos aproximamos a $\overrightarrow{OT}$ y trazamos $\overrightarrow{OS}$ (P' y Q' son inversos de P y Q).

$$\Rightarrow\quad m\measuredangle PBQ = m\measuredangle P'B'Q'$$

- En el caso límite:



- $\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$ son curvas inversas de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente.

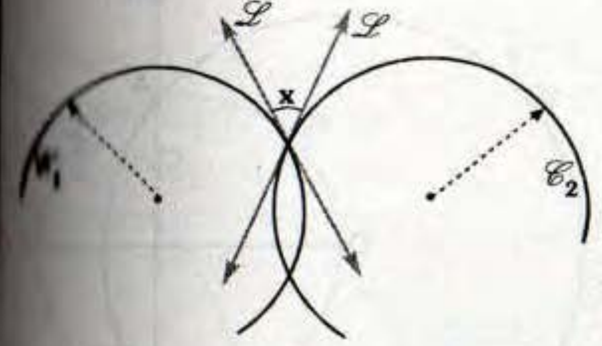
  θ : medida de ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

  ϕ : medida de ángulo entre $\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$

- Se cumple:

$$\theta = \phi$$

Observación



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

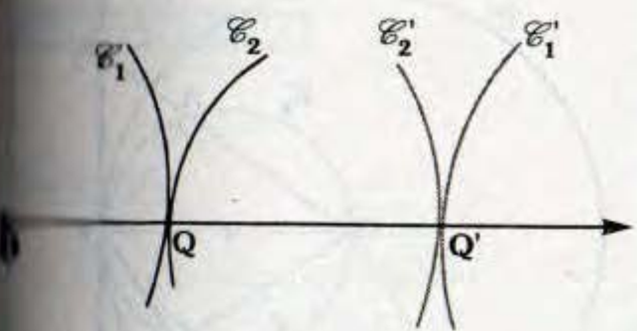
x : medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Si : $x=90^\circ$

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales

COROLARIO

Si dos curvas son tangentes sus inversas también lo son :



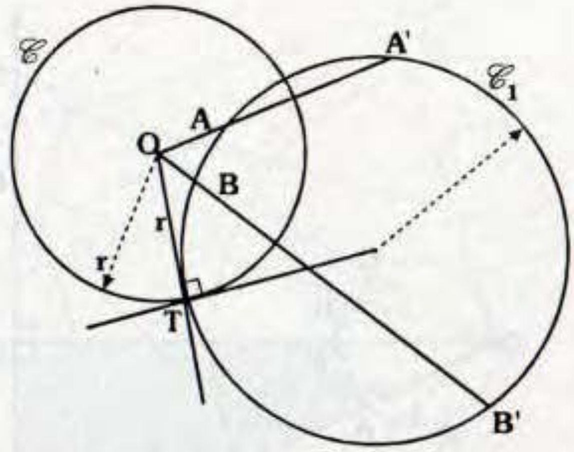
$\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$ son inversas de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respecto al centro de inversión O.

Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes en Q.

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$ son también tangente en Q' (Q' y Q son inversas)

➢ Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión.

DEMOSTRACIÓN



- Sea A y A' inversos respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$ y centro O.

  $\Rightarrow \quad (OA)(OA')=r^2$

- Por teorema de la tangente: $\overline{OT}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.

  $\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ son ortogonales

- También $(OB)(OB')=r^2 \;\Rightarrow$ B y B' son inversos.

Importante:

Dada una circunferencia entonces las siguientes figuras son sus propias inversas:

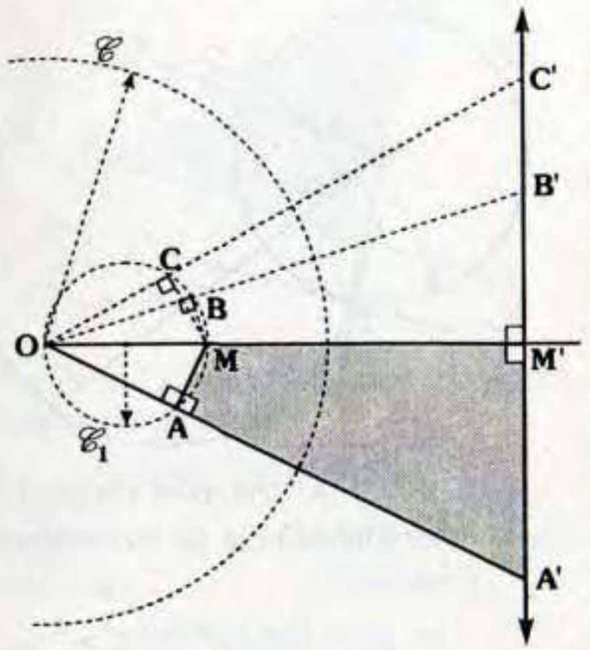
a. La circunferencia de inversión.

b. Las rectas que pasan por el centro de inversión.

c. Las circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión.

INVERSIÓN DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

➤ El inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión y recíprocamente.



Sea $\mathscr{C}$ y O la circunferencia y centro de inversión.

Se traza $\overline{OM'} \perp$ a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

Se ubica M inverso de M'

Sean A, B y C inversos de A', B' y C' sus respectivos inversos.

$\Rightarrow$ ⏢A'AMM', ⏢M'MBB' y ⏢M'MCC'

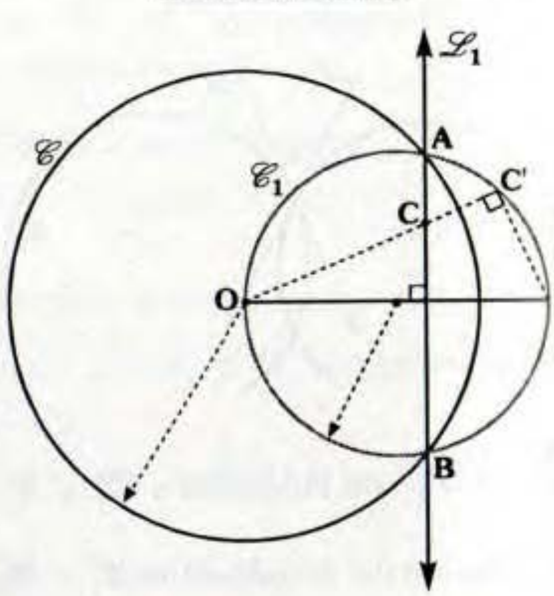
Son inscriptibles:

$\Rightarrow m\measuredangle OAM = m\measuredangle MBO = m\measuredangle MCO = 90°$

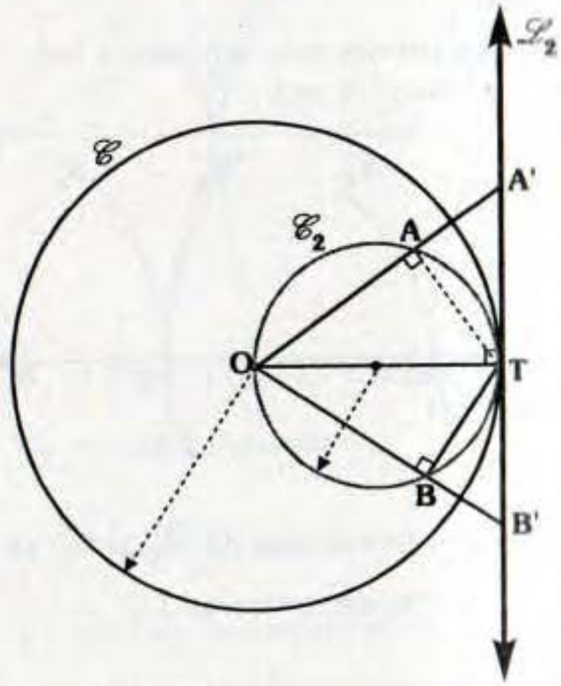
Finalmente O, A, M, B y C son concíclicos

Luego $\mathscr{C}_1$ es inverso de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ para la demostración del recíproco es análogo.

Observación



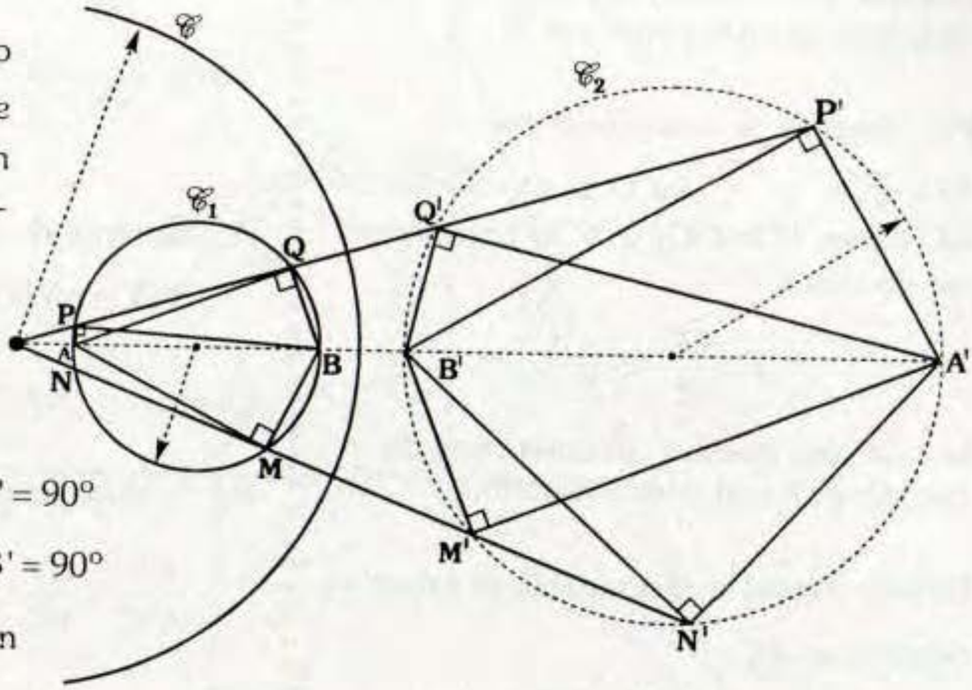
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es inverso de $\mathscr{C}_1$ y recíprocamente respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\mathscr{C}_2$ son inversos respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$.

- El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que no pasa por ese punto.

Sean O y $\mathscr{C}_1$ centro y circunferencia de inversión P' y Q' son inversos de P y Q respectivamente.



Por teorema:

$m\measuredangle APB = m\measuredangle A'P'B' = 90^o$

$m\measuredangle AQB = m\measuredangle A'Q'B' = 90^o$

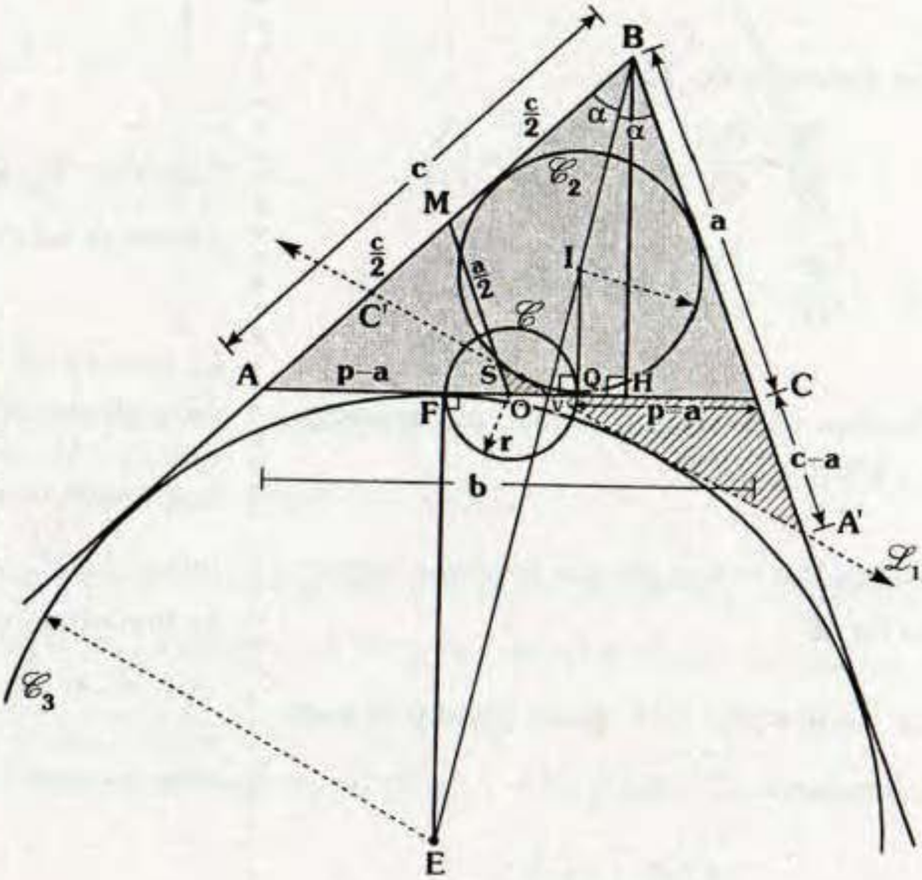
$\Rightarrow$ A'B'Q' y P' son concíclicos.

$\therefore$ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son inversas.

TEOREMAS FEUERBACH

DEMOSTRACIÓN:

La circunferencia de Euler de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias exinscritas.



En el gráfico se ha trazado $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ tangente interior a la circunferencia inscrita y exinscrita la cual paras por V.

Por teorema de circunferencia:

AF=QC= p − c, sea O punto medio de $\overline{AC}$ (notar FO=OQ) y $\mathscr{C}$ la circunferencia de radio: r

$$r=\frac{QF}{2}=\frac{c-a}{2},$$

la cual será nuestra circunferencia de inversión y O centro de inversión.

Debido a que I es incentro y E es excentro relativo a $\overline{AC}$:

$$\Rightarrow \quad \frac{BI}{IV}=\frac{VE}{BE}$$

Por teorema de Tales:

$$\frac{BI}{IV}=\frac{QH}{QV} \quad y \quad \frac{VE}{BE}=\frac{FV}{FH}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{QH}{QV}=\frac{FV}{FH}, \text{ luego F, V, Q y H .}$$

Forman cuaterna armónica, por teorema
$\Rightarrow (OV)(OC)=r^2$.

Luego V y H son puntos inversos respecto de $\mathscr{C}$.

Se ha trazado $\overline{OM}$ (base media) la cual interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en S:

$$\Rightarrow \Delta OSV \sim \Delta CA'V$$

Por teorema de la bisectriz:

$$\frac{VC}{VA}=\frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad VC=\frac{ab}{a+c}$$

$$OV=\frac{b}{2}-\frac{ab}{a+c}=\frac{b}{2}\,\frac{(c-a)}{(a+c)}$$

Por teorema de circunferencia :

$$\Delta ABC\cong\Delta A'BC' \quad \Rightarrow \quad BA'=c$$

Luego: $\quad A'C=c-a$

Por la semejanza de OSV y CA'V :

$$\frac{OS}{A'C}=\frac{OV}{VC} \quad \Rightarrow \quad OS=\frac{(c-a)^2}{2a}$$

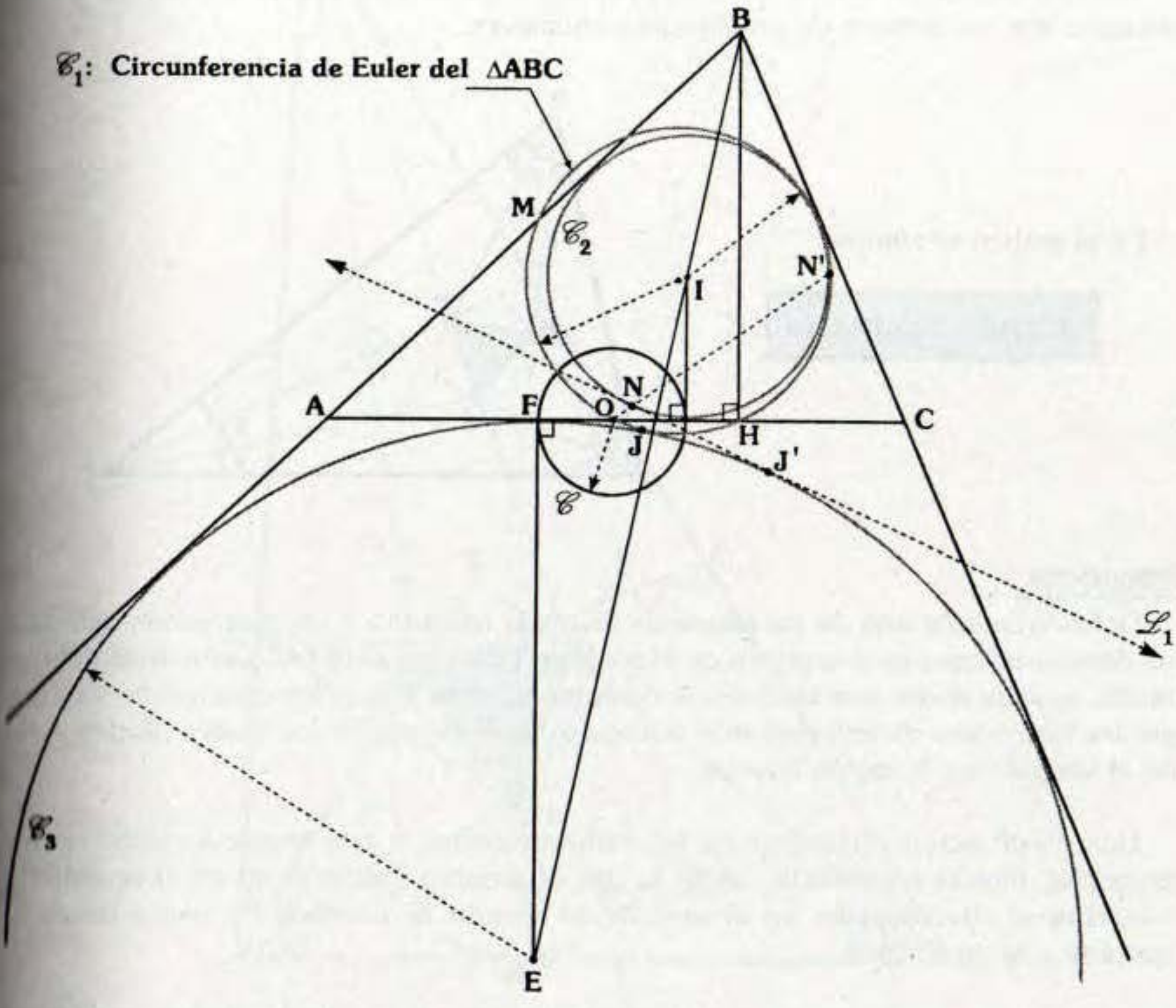
Luego : $\quad (OS)(OM)=\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=r^2$

$\Rightarrow$ S y M son puntos inversos

También $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son ortogonales a $\mathscr{C}$ entonces son sus propios inversos.

El inverso de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ respecto de $\mathscr{C}$ es una circunferencia que pasa por O y debido que H y M son inversos de O y S respectivamente, entonces la circunferencia inversa de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ pasa por H y M, pero esta es precisamente la circunferencia de Euler, que al ser $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ tangente a la circunferencia inscrita y exinscrita su inverso también lo será.

Luego el gráfico quedará así:



Del gráfico: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\mathscr{C}_1$ son inversos respecto de $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}_1$: Circunferencia de Euler del ΔABC.

$\mathscr{C}_1$ es tangente a las circunferencia inscrita $\mathscr{C}_2$ y a la exinscrita $\mathscr{C}_3$, en forma análoga se demuestra que $\mathscr{C}_1$ es tangente a las otras dos circunferencias exinscritas.

Notar que J y J' son puntos inversos lo mismo N y N'.

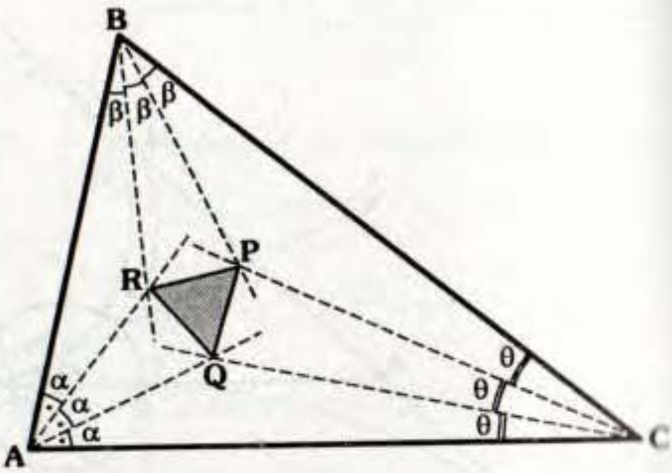
Si analizamos las circunferencias exinscritas relativas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se demuestra en forma análoga.

TEOREMA DE MORLEY

Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo son los vértices de un triángulo equilátero.

En el gráfico se cumple:

ΔPQR : Equilátero



Demostración :

Definitivamente uno de los teoremas que más apasiona a los geómetras, debido a sus demostraciones es el teorema de Morley, en esta constante búsqueda de la demostración se sabe ahora que también se determinan otros triángulos equiláteros, es decir que las trisectrices determinan más triángulos equiláteros, de los cuales Morley estudió el ubicado en la región interior.

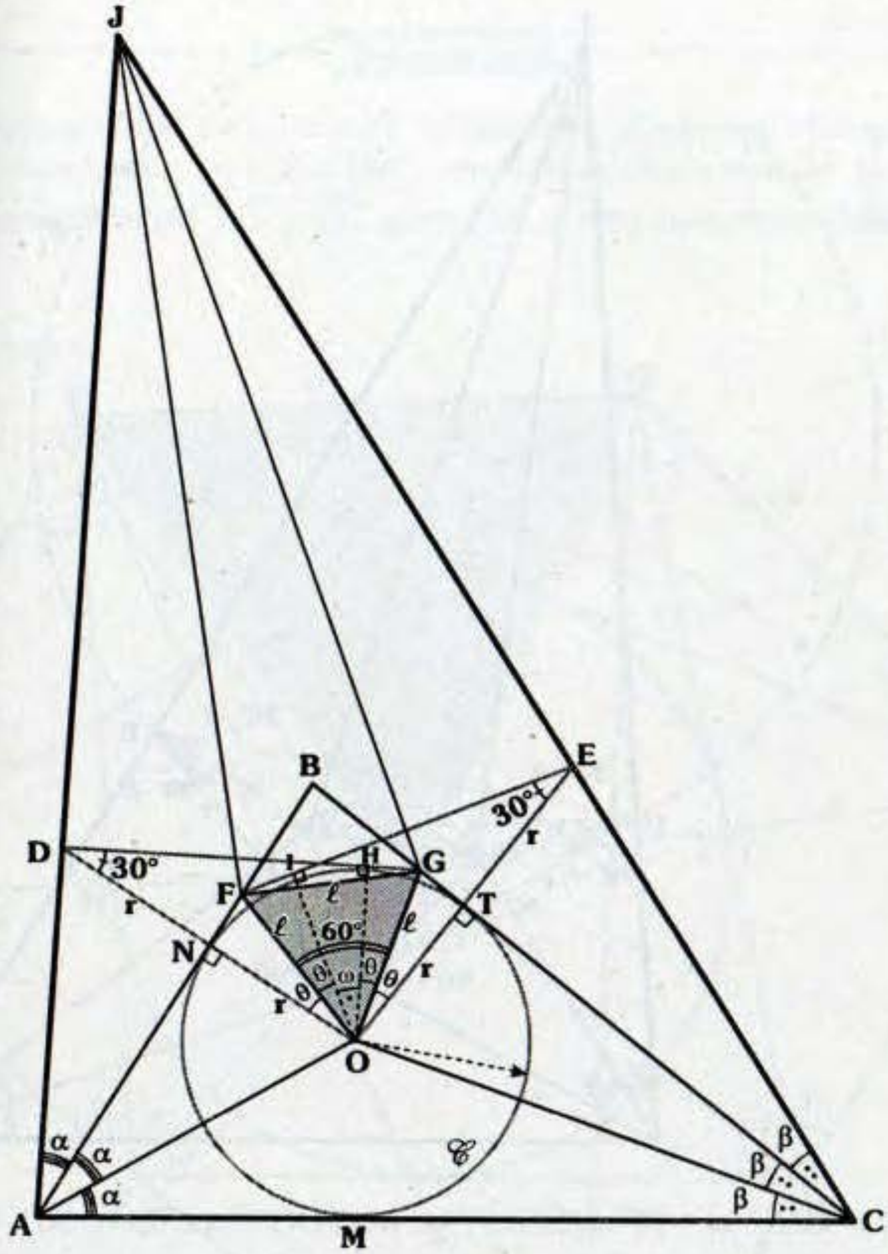
Una clasificación preliminar de las demostraciones a este teorema establece dos categorías, directa e indirecta. Aquí se usa el término indirecto no en el sentido de reducción al absurdo sino en el sentido de invertir la sucesión de pasos desde la hipótesis a la conclusión.

El gran espectro de las demostraciones han sido plasmadas en 1 993 en el libro titulado "Le Theoreme de Morley" de André Viricel.

Aquí mostramos una demostración indirecta.

Paso 1

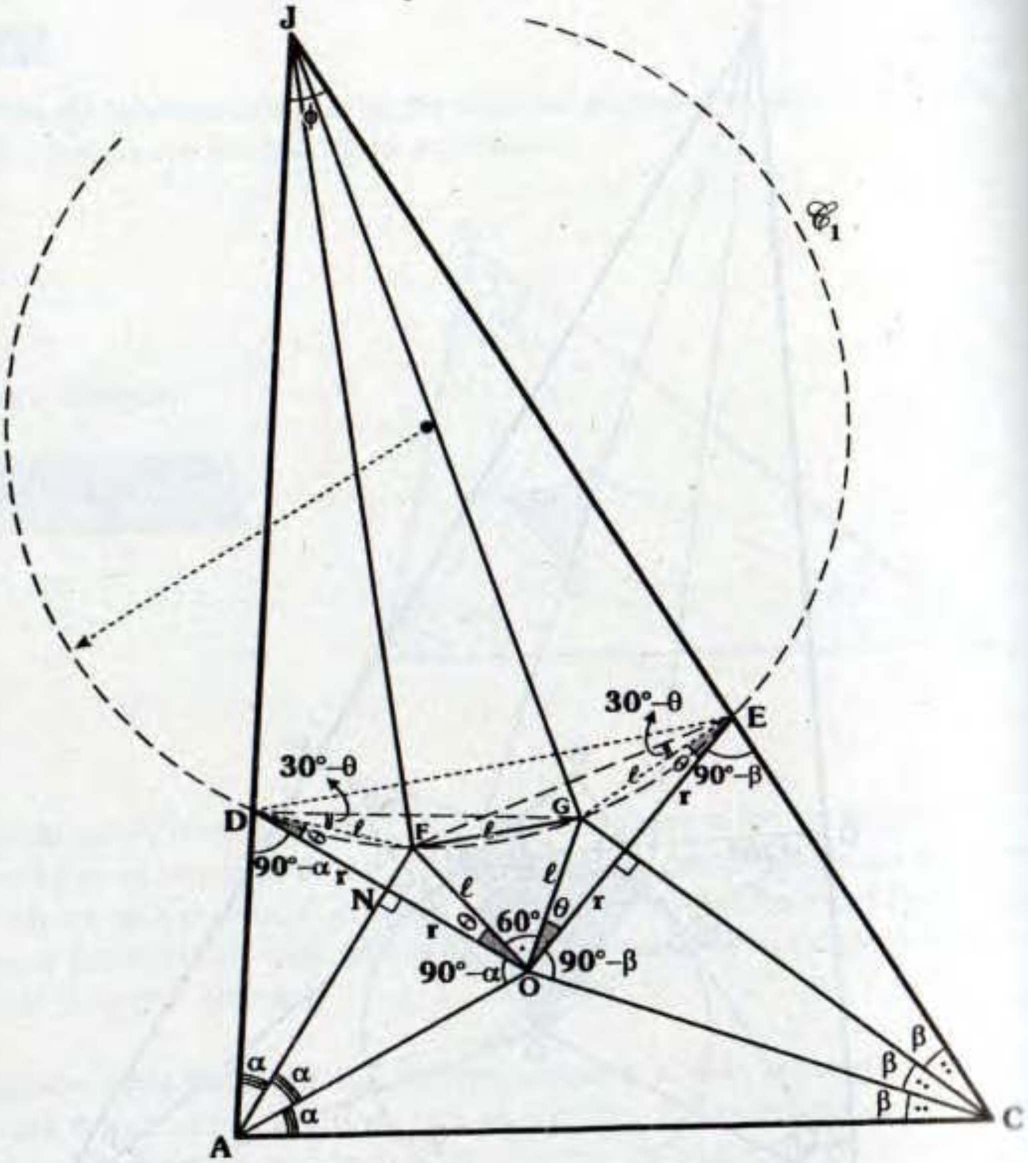
Partimos del triángulo ABC, circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio r (M, N y T : puntos de tangencia), prolongamos $\overline{OT}$ y $\overline{ON}$ hasta E y D respectivamente, tal que ON=ND=TE=r. Se ubican F en $\overline{AB}$ y G en $\overline{BC}$, tal que $\overline{FE}$ y $\overline{DG}$ son tangentes a $\mathscr{C}$ en I y H.



- $\overline{OG}$: Bisectriz $\Rightarrow$ $m\measuredangle HOG = m\measuredangle GOT = \theta$
- $\triangle OIE$: Notable $\Rightarrow$ $\omega + 2\theta = 60°$
- $\triangle DHO$: Notable $\Rightarrow$ $m\measuredangle HOD = 60°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle IOD = 2\theta$
- $\overline{OF}$: Bisectriz $\Rightarrow$ $m\measuredangle IOF = m\measuredangle FON = \theta$
- $\Delta OFN \cong \Delta OGT$ (ALA) $\Rightarrow$ $FO = OG = \ell$
- Puesto que : $m\measuredangle FOG = \theta + \omega + \theta = 60°$ $\Rightarrow$ ΔFOG: Equilátero ...(a)

Para demostrar el teorema de Morley, faltaría demostrar que $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al $\measuredangle AJC$.

Paso 2



- Trazamos $\overline{DF}$ y $\overline{GE}$ $\Rightarrow$ $DF = GE = \ell$ y $m\measuredangle FDG = m\measuredangle FEG = 30° - \theta$
- $\square$DFGE : Inscriptible, al trazar la circunferencia $\mathscr{C}_1$ se observa:

$$m\widehat{DF} = m\widehat{FG} = m\widehat{GE} = 60° - 2\theta$$

- $\triangle ACJ$: $3\alpha + 3\beta + \phi = 180°$ ...(I)
- En $\triangle$ DOEJ : $60° + 2\theta + \phi = 90° - \alpha + 90° - \beta$ ...(II)
- De (I) y (II) : $\phi = 90° - 3\theta$ $\Longrightarrow$ $\square$DGEJ es inscriptible, pues en $\triangle$DOEG

$$m\measuredangle DGE = 90° + 3\theta$$

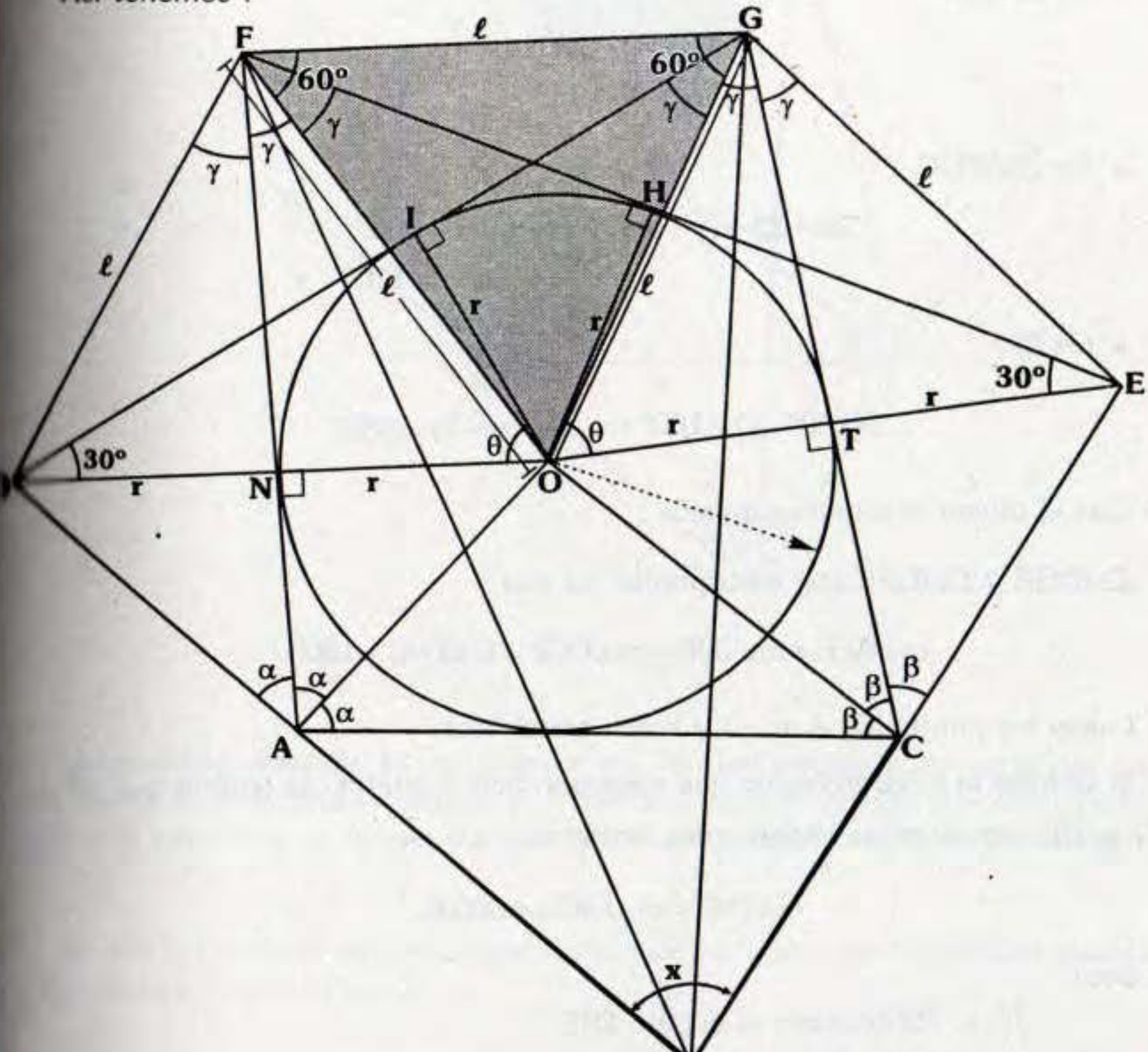
$\Rightarrow$ D,F,G,E y J son concíclicos.

$\therefore$ $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al $\measuredangle AJC$

Observación

Demostremos ahora un caso muy interesante. En forma análoga al anterior, en el cual se consideró : $3\alpha + 3\beta < 180°$ *, analicemos ahora cuando* $3\alpha + 3\beta > 180°$ *, ahora la intersección de* $\overline{AD}$ *y* $\overline{EC}$ *estará en el otro semiplano determinado por* $\overleftrightarrow{AC}$.

Así tenemos :



Se procede en forma análoga a la anterior (solo que no estamos considerando la intersección de $\overline{AN}$ *y* $\overline{CT}$*), se demuestra que el triángulo FOG es equilátero. Son los mismos pasos hasta (a), notar que se han considerado los mismos puntos. Lo que se va ha demostrar que* $\overline{JF}$ *y* $\overline{JG}$ *trisecan al* $\measuredangle AJC$.

- *Por teorema de la mediatriz :*

$$DF = FO = OG = GE = \ell$$

- $\Delta DFO \cong \Delta OGE$ *(L.L.L)* $\Rightarrow$ $m\measuredangle DFO = m\measuredangle OGE = 2\gamma$
- $\overline{FO}$ *es bisectriz del* $\measuredangle NFH$ *y* $\overline{GO}$ *es bisectriz del* $\measuredangle IGT$
- *En* ΔAJC:

$$3\alpha + 3\beta = 180° + x$$
$$3(\alpha+\beta) = 180° + x \quad ... \text{(I)}$$

- *En* $\triangle AFGC$ *:*

$$2\alpha + 2\beta + (\gamma + 60°) + (\gamma + 60°) = 360°$$
$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 120° - \gamma$$

- *En (I) :*

$$3(120° - \gamma) = 180° + x \quad \Rightarrow \quad x + 3\gamma = 180°$$

Con el último resultado tenemos :

$\triangle JDGE$ y $\triangle JDFE$ son inscriptibles, ya que :

$$m\measuredangle AFE + m\measuredangle DJE = m\measuredangle DGE + m\measuredangle DJE = 180°$$

Luego los puntos D, J, E, G y F son concíclicos.

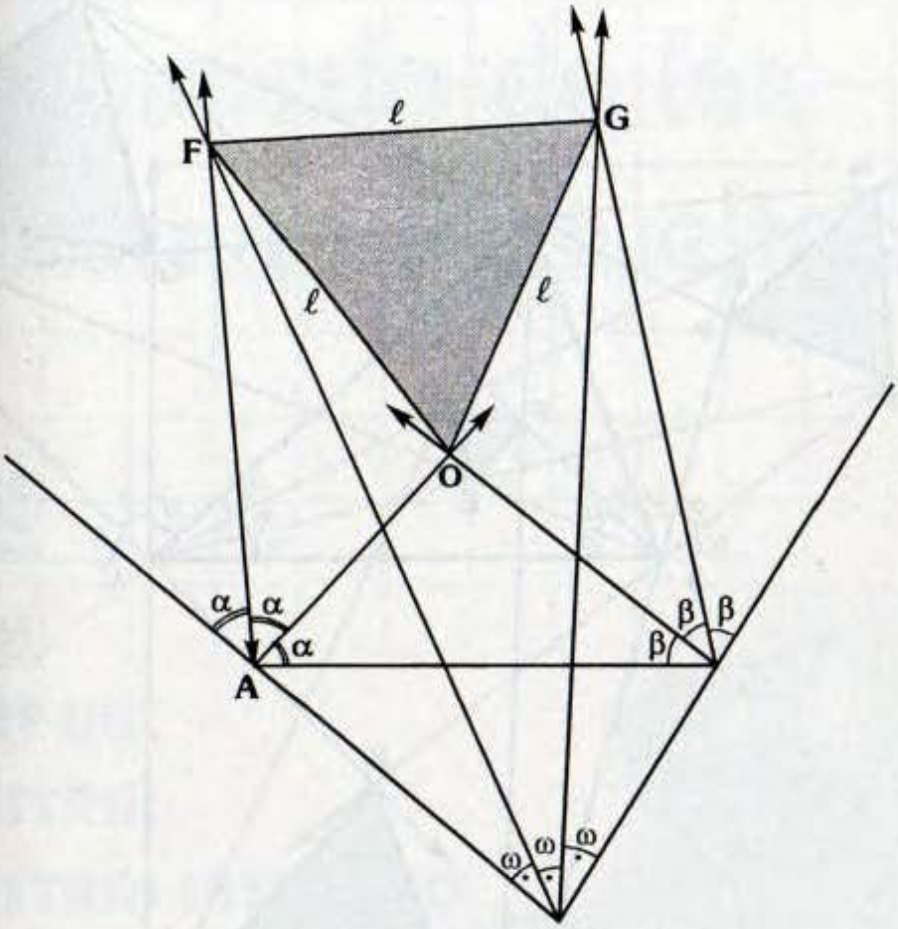
Si se traza la circunferencia que pasa por dichos puntos, se tendría que $\overline{AI}$, $\overline{FG}$ y $\overline{GE}$ son cuerdas congruentes, entonces :

$$m\measuredangle DJF = m\measuredangle FJG = m\measuredangle GJE$$

Es decir :

$\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al ángulo DJE

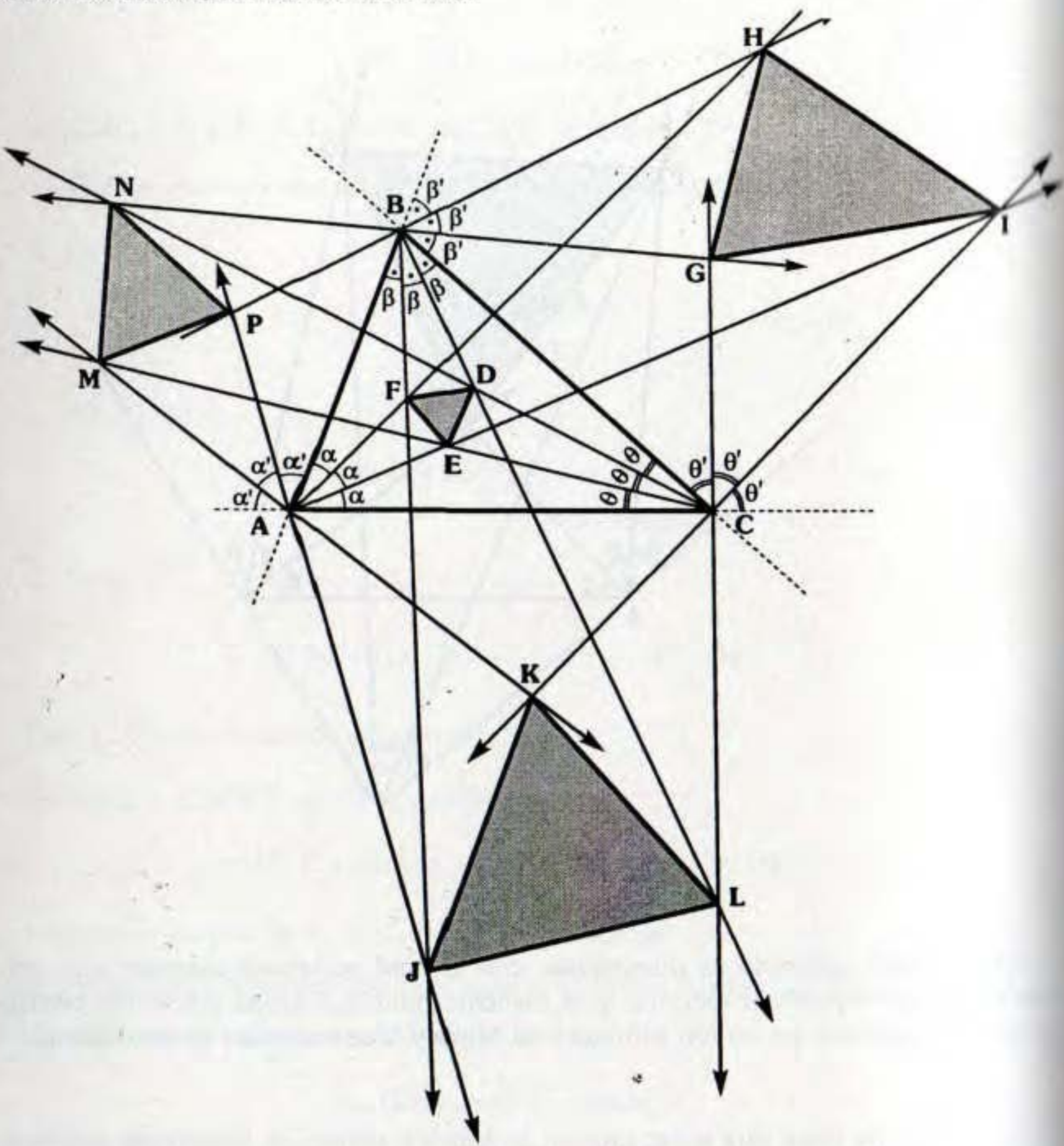
Con lo cual tendríamos el siguiente gráfico.



El resultado obtenido es interesante, con lo cual podemos asegurar que con dos partes de trisectrices externas y la trisectriz interna trazada del tercer vértice se puede encontrar un nuevo triángulo de Morley, denominado no tradicional.

El estudiante tiene que notar que no se pueden tomar las trisectrices externas e internas de cualquier modo.

De los resultados anteriores tenemos:



Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC, los triángulos DEF, GHI, JKL y MNP son equiláteros.

Otras pruebas indirectas son las de Naraniengar, Dodds y Child y la directa es la forma trigonométrica, las cuales se encuentran en las páginas indicadas en la bibliografía.

Enunciado de los Problemas Resueltos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

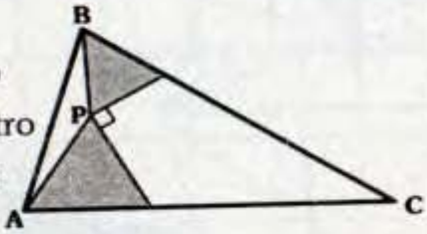
Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

Si las regiones sombreadas son regulares. ¿Qué punto notable es P del triángulo ABC?

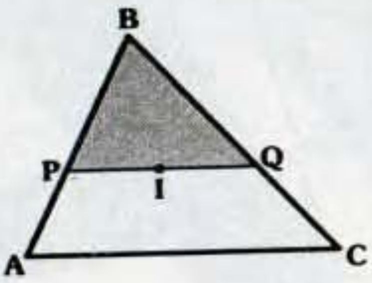
A) Incentro
B) Ortocentro
C) Circuncentro
D) Baricentro
E) Excentro



PROBLEMA Nº 2

En el gráfico AB=6, BC=8, I es incentro del triángulo ABC y $\overline{PQ}//\overline{AC}$. Calcule el perímetro de la región de la región sombreada.

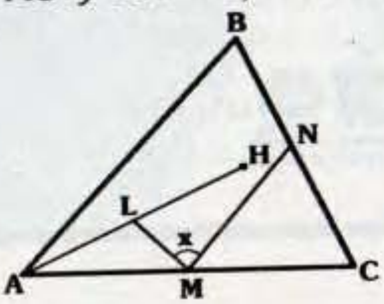
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14



PROBLEMA Nº 3

Si H es ortocentro del triángulo ABC, AL=LH, AM=MC y BN=NC, calcule x.

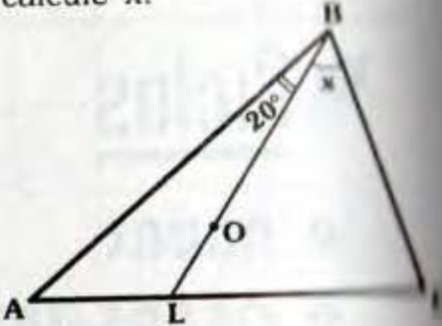
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 120°



PROBLEMA Nº 4

En el gráfico O es circuncentro de ABC, si BC=LC, calcule x.

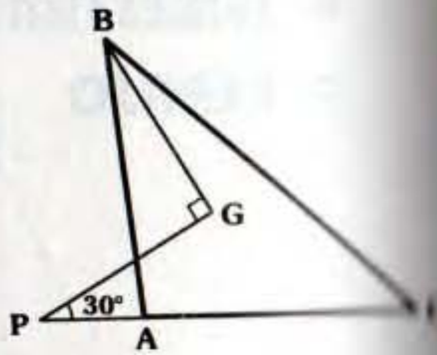
A) 55°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 75°



PROBLEMA Nº 5

Si G es baricentro de ABC y BG=3(AP)=6. Calcule AC.

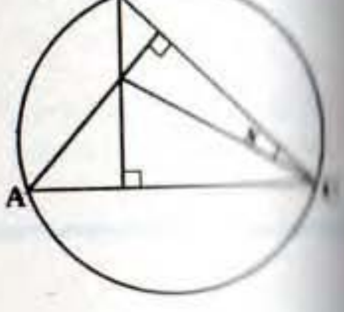
A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



PROBLEMA Nº 6

Si $m\widehat{AC}=150°$, calcule x.

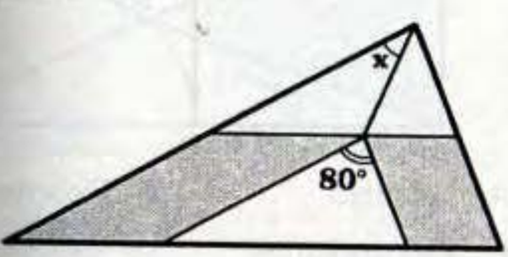
A) 10°
B) 14°
C) 15°
D) 25°
E) 30°



PROBLEMA Nº 7

En el gráfico si las regiones sombreadas son rombales, calcule x.

A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 20°
E) 10°



PROBLEMA Nº 8

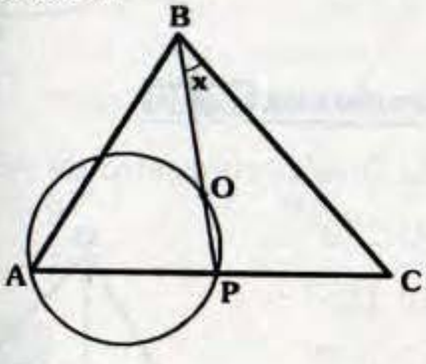
Se tiene el triángulo ABC, m∡ABC = 50°, se traza la ceviana interior BF, si M y N son los ortocentros de los triángulos ABF y BFC respectivamente, calcule m∡MFN.

A) 25° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 9

Si O es circuncentro de ABC, AP=BO y mOP = 40°, calcule x.

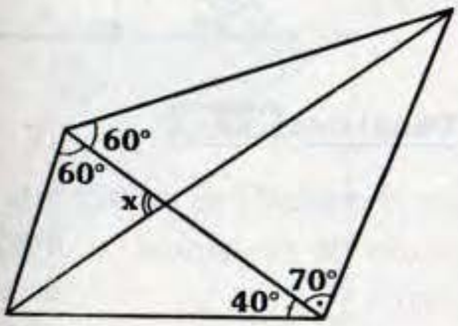
A) 28°
B) 22°
C) 25°
D) 30°
E) 37°



PROBLEMA Nº 10

Calcule x.

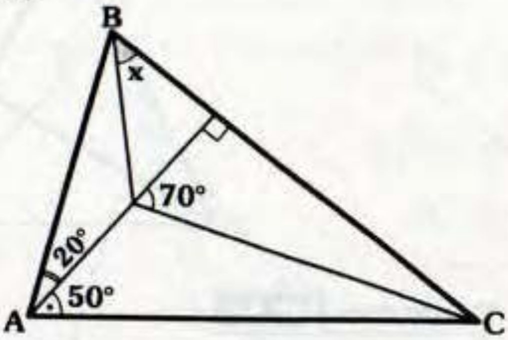
A) 70°
B) 80°
C) 90°
D) 100°
E) 120°



PROBLEMA Nº 11

Calcule x.

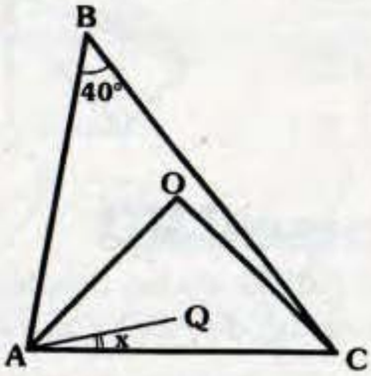
A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



PROBLEMA Nº 12

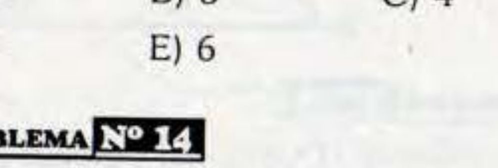
Si O y Q son circuncentros de ABC y AOC respectivamente, calcule x.

A) 4°
B) 6°
C) 8°
D) 10°
E) 12°



PROBLEMA Nº 13

Si G es baricentro de ABC, MG=GN y AN=2(NC)=8, calcule BG.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, si AB=BC e I es incentro de ABH, calcule IC/AC.

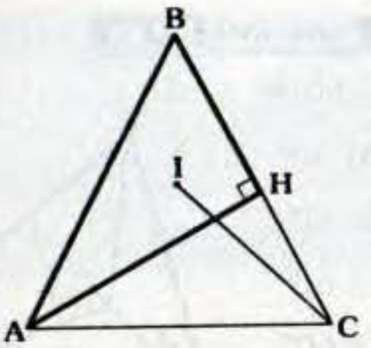
A) 1

B) 1/2

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}/2$

E) 1/3



PROBLEMA Nº 15

Si ABCD es un cuadrado, calcule x.

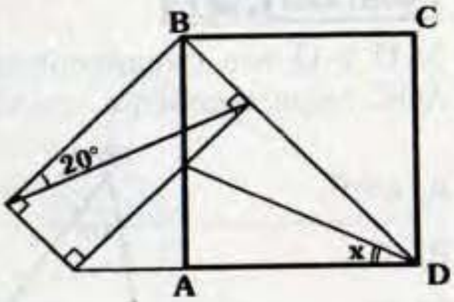
A) 25°

B) 24°

C) 23°

D) 22°

E) 21°



PROBLEMA Nº 16

Si ABCD es un paralelogramo y C es excentro de ABD, calcule m∡ABD.

A) 45° B) 60° C) 70° D) 80° E) 90°

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico H es ortocentro de ABC, si AN=NH=BM=MC, calcule x.

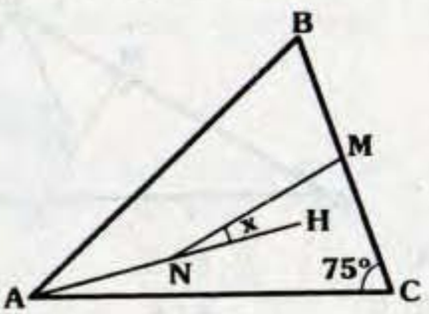
A) 10°

B) 11°

C) 12°

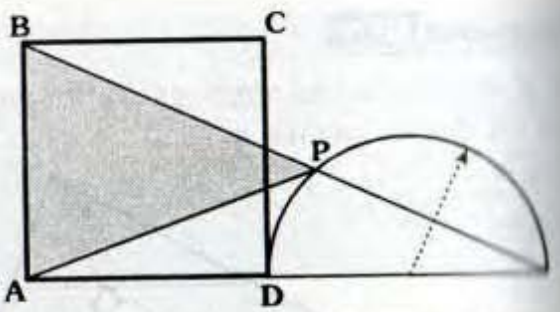
D) 14°

E) 15°



PROBLEMA Nº 18

En el gráfico, ¿Qué punto notable es, el centro del cuadrado ABCD, del triángulo ABP?



A) Incentro B) Excentro

C) Circuncentro D) Ortocentro

E) Baricentro

PROBLEMA Nº 19

Si H es ortocentro de ABC y BC=12, calcule PQ.

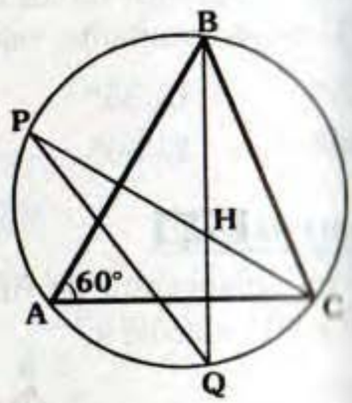
A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14



PROBLEMA Nº 20

Si O es circuncentro de ABC, calcule x.

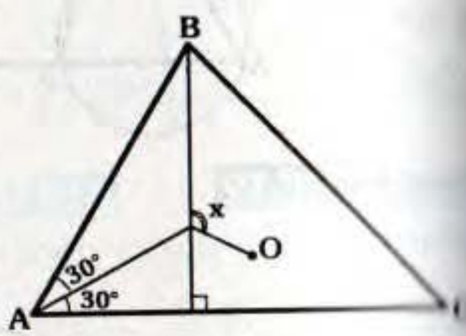
A) 120°

B) 115°

C) 105°

D) 100°

E) 90°



PROBLEMA Nº 21

En el gráfico I es incentro de ABC y H es punto de tangencia, si $\overline{IP} // \overline{AC}$, calcule $m\widehat{MP}$.

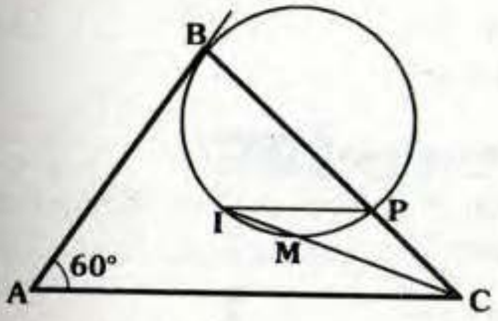
A) 30°

B) 40°

C) 45°

D) 50°

E) 60°



PROBLEMA Nº 22

Si G es baricentro de ABC, BM = 5(MG) = 5, calcule AQ + PC .

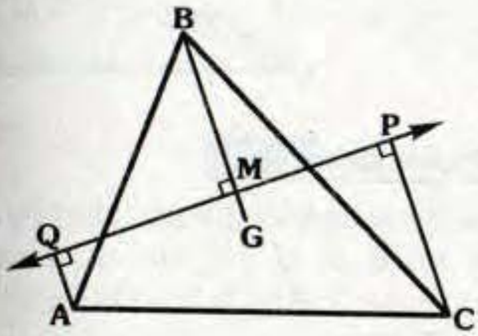
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



PROBLEMA Nº 23

Se tiene el triángulo ABC, cuyo ortocentro es H, si L, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$ respectivamente, calcule m∡NML .

A) 45° B) 60° C) 90°

D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 24

Si ABCD es un cuadrado, Q es punto de tangencia e I es incentro de BPC. Calcule x.

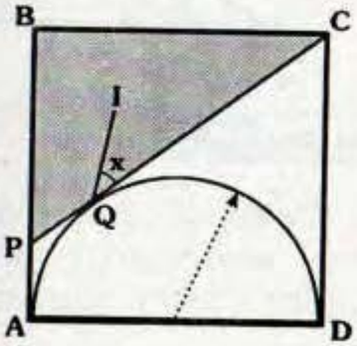
A) 15°

B) 30°

C) 37°

D) 45°

E) 53°



PROBLEMA Nº 25

En el gráfico O es circuncentro de ABC, si m∡BAC − m∡BCA = 20°, calcule x.

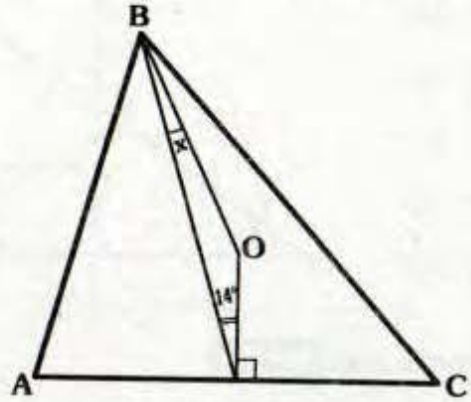
A) 2°

B) 4°

C) 6°

D) 8°

E) 10°



PROBLEMA Nº 26

Si E es excentro de ABC y BM = 6, calcule EC.

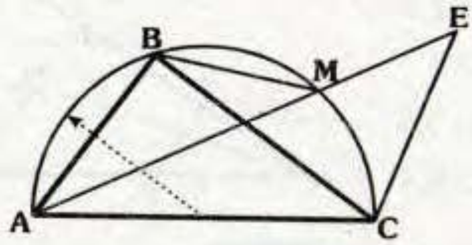
A) $6\sqrt{2}$

B) 6

C) $8\sqrt{2}$

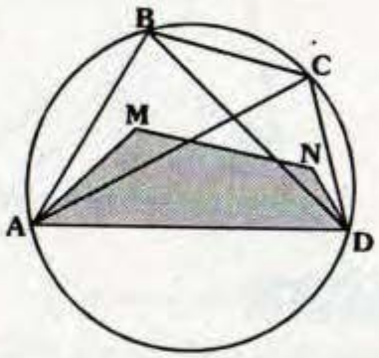
D) 8

E) 10



PROBLEMA Nº 27

En el gráfico M y N son ortocentros de ABD y ACD respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es AMND?



A) Rombo B) Inscriptible

C) Paralelogramo D) Trapecio

E) Bicentrico

PROBLEMA Nº 28

Si O es circuncentro y ortocentro de PBC y ABC respectivamente, calcule x.

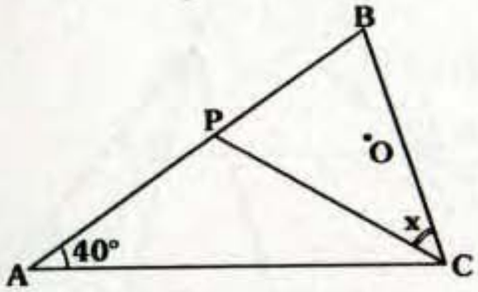
A) 20°

B) 34°

C) 36°

D) 38°

E) 40°



PROBLEMA Nº 29

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y ON=NH, calcule AO/NL.

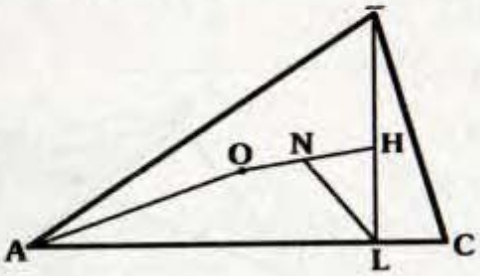
A) 2

B) 1,5

C) 1

D) 0,5

E) 0,4



PROBLEMA Nº 30

Si O es circuncentro, H es ortocentro y AC=12, calcule OB.

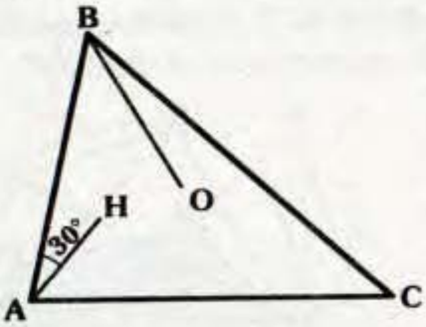
A) $2\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{3}$

C) $4\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{3}$

E) $6\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 31

Dado un triángulo ABC, si m∡ABC = 53°, calcule la razón entre la distancia del ortocentro a $\overline{AB}$ y la distancia del circuncentro a $\overline{BC}$.

A) 4/3 B) 4/5 C) 5/3

D) 6/5 E) 4/5

PROBLEMA Nº 32

En el gráfico, si O es circuncentro y I es incentro, calcule x.

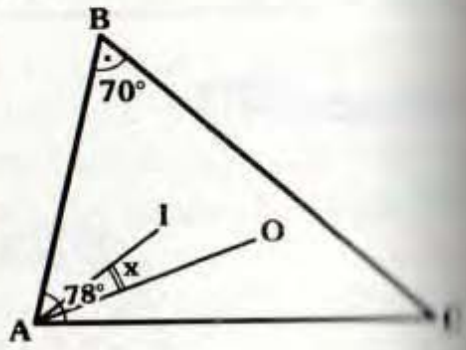
A) 18°

B) 19°

C) 20°

D) 21°

E) 22°



PROBLEMA Nº 33

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si O e I son el circuncentro e incentro de ABC y m∡OIC = 90°, calcule m∡BAC.

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 34

Si $\overline{IF} \parallel \overline{AC}$, I es incentro de ABC, FB= [illegible] y la distancia de I al ortocentro del triángulo ABC es $3\sqrt{2}$. Calcule AF.

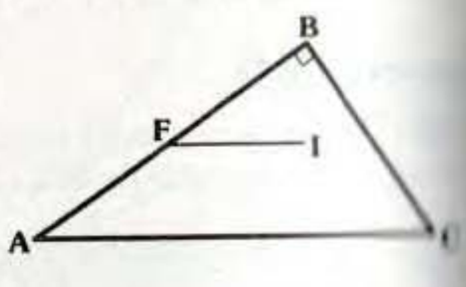
A) 1

B) 2

C) 3

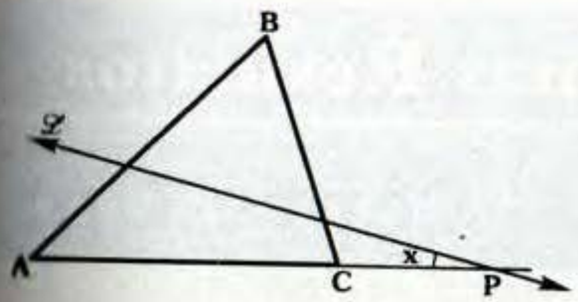
D) 4

E) 5



PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler y H es ortocentro de ABC, si AP=3(BH)=3(CP), calcule x.

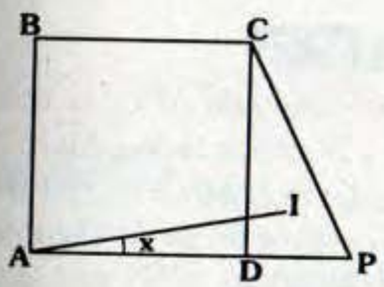


A) 14°　　B) 15°　　C) 37°/2

D) 53°/2　　E) 30°

PROBLEMA Nº 36

Si ABCD es un cuadrado, CP=13, DP=5 y I es incentro de CDP.

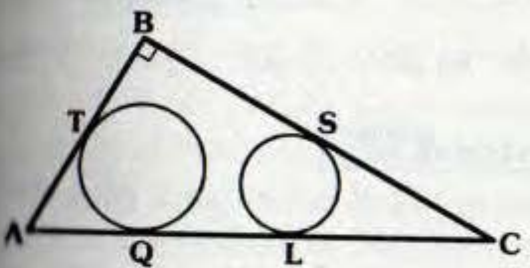


A) 6°　　B) 7°　　C) 8°

D) 9°　　E) 10°

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico T, S, L y Q son puntos de tangencia, QL=4 y TB+BS=10, calcule el inradio del triángulo ABC.

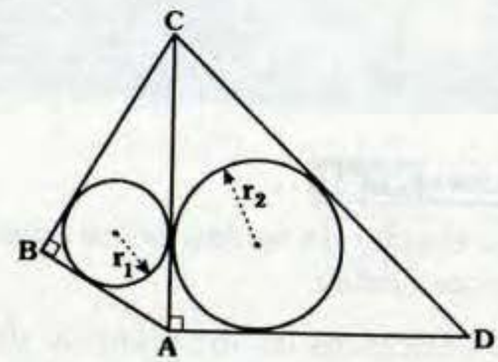


A) 0,5　　B) 1　　C) 1,5

D) 2　　E) 3

PROBLEMA Nº 38

Si AB+BC=CD y AD=18, calcule r_1+r_2.



A) 7　　B) 8　　C) 9

D) 10　　E) 11

PROBLEMA Nº 39

Si AB=MD, CD=AM y BC=6, calcule el inradio de AMD.

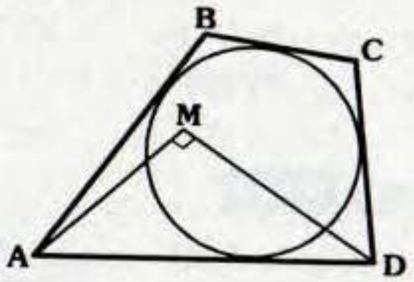
A) 3

B) 4

C) 5

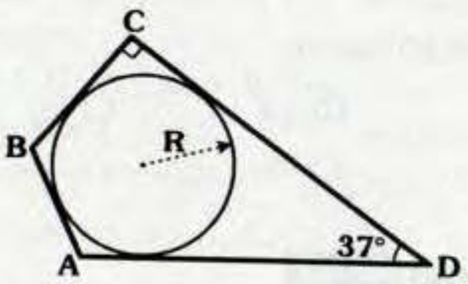
D) 6

E) 7



PROBLEMA Nº 40

Si AB=5, BC=6 y AD=15, calcule el inradio del ABCD.



A) 3　　B) 4　　C) 5

D) 6　　E) 7

Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 41

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo órtico.

II. El incentro de un triángulo pertenece a su región interior.

III. Si la recta de Euler de un triángulo pasa por un vértice, entonces el triángulo es isósceles.

A) VFV B) VFF C) FVF
D) FVV E) FFF

PROBLEMA Nº 42

En un triángulo ABC recto en A, donde AB=8u, se traza la mediana $\overline{BD}$ de manera que :

$$m\measuredangle ABD = 45 + \frac{1}{2} m\measuredangle BCA$$

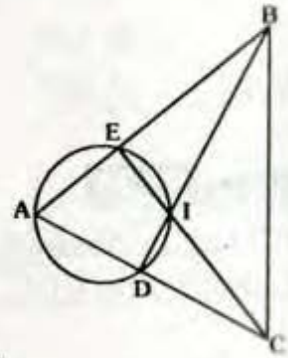
Calcule BC (en u).

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 36

PROBLEMA Nº 43

En la figura mostrada, el punto I es el incentro del triángulo ABC. Entonces, la $m\measuredangle BAC$ es:

A) 30°
B) 20°
C) 60°
D) 45°
E) 15°



PROBLEMA Nº 44

Se tiene un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que la $m\measuredangle AMN = 2m\measuredangle BAN = 90°$, si AB=BC y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo BMN es r, entonces NC es :

A) r B) 2r C) $\frac{3}{2}$r D) 3r E) 4r

PROBLEMA Nº 45

Sea el punto O exterior al triangulo ABC y relativo al lado $\overline{BC}$. Si O equidista de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ y $m\measuredangle OBC = 55°$, $m\measuredangle OAC = 26°$. Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 56° B) 58° C) 60° D) 62° E) 54°

PROBLEMA Nº 46

En un triángulo acutángulo DRA, O es ortocentro y C circuncentro. Halle la $m\measuredangle ORC$, si :

$$m\measuredangle ODC + m\measuredangle OAC = 38°$$

A) 36° B) 38° C) 48° D) 35° E) 48°

PROBLEMA Nº 47

En un triángulo ABC (AB=BC) se traza la mediana AM y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\measuredangle AHC = 90°$. Si $m\measuredangle MAC = m\measuredangle BCH$ y MH=a, halle AM.

A) 2a B) 3a/2 C) 4a/3
D) 4a E) 6a

PROBLEMA Nº 48

En un triángulo rectángulo los catetos suman 32 cm, si la menor mediana mide 12 cm. Halle la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (en cm).

A) 3 B) 4 C) 5 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

PROBLEMA Nº 49

En un ΔABC de incentro I, la $m\measuredangle ACB = 60°$. Se inscribe una circunferencia en el triángulo BIC tangente a $\overline{CI}$, $\overline{IB}$ y $\overline{CB}$ en los puntos M, N y P respectivamente. Si la $m\measuredangle BAC = m\measuredangle NMP$. Calcule la $m\measuredangle CAB$.

A) 85° B) 81° C) 80°
D) 72° E) 60°

PROBLEMA Nº 50

En un triángulo ABC recto B, se traza la ceviana $\overline{BM}$ $(M \in \overline{AC})$. La circunferencia inscrita al triángulo ABM es tangente al lado $\overline{BM}$ en el punto P y la circunferencia inscrita al triángulo BMC es tangente al segmento PM en el punto Q. Si $BP - QM = \ell$, entonces la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC es :

A) $\frac{\ell}{3}$ B) $\frac{2\ell}{5}$ C) $\frac{\ell}{5}$ D) $\frac{3\ell}{5}$ E) ℓ

PROBLEMA Nº 51

En un cuadrilátero ABCD :

$$AB=CB=BD \quad , \quad m\measuredangle BAD = 3\alpha \ ,$$

$$m\measuredangle BCD = 2\alpha \quad y \quad \frac{m\measuredangle ADC}{m\measuredangle ABC} = \frac{3}{2}$$

Halle $m\measuredangle D - m\measuredangle B$.

A) 10° B) 30° C) 45° D) 60° E) 72°

PROBLEMA Nº 52

En un triángulo acutángulo ABC, las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren en H. Por este punto se traza la paralela a $\overline{FD}$, que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{FE}$, $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$, en los puntos M, N, P y Q respectivamente. Si FN=a y DP=b. Calcule MQ.

A) $2(a+2b)$ B) $2a+b$
C) $2(a+b)$ D) $a+2b$
E) $2a+3b$

PROBLEMA Nº 53

En un triángulo ABC está inscrita la circunferencia de centro O y se ubica otra circunferencia menor, tangente al lado $\overline{AC}$ en P y al lado $\overline{BC}$ en Q y a la circunferencia dada. Si la $m\measuredangle ABC = \theta$, calcular la medida del ángulo determinado por los rayos $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{PQ}$.

A) $\frac{\theta}{2}$ B) $90° - \frac{\theta}{2}$ C) θ
D) $90° - \theta$ E) $\frac{3\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 54

En un triángulo ABC recto en B de inradio r, "O" es el circuncentro e "I" el incentro. Si $m\measuredangle AIO = 90^\circ$. Calcule el perímetro del triángulo.

A) 7r B) 9r C) 12r D) 15r E) 18r

PROBLEMA Nº 55

En un triángulo isósceles, la $m\measuredangle ABC = 120^\circ$ y $AB = 12\mu$. Calcule la distancia entre el ortocentro y el baricentro.

A) $6\sqrt{3}\ \mu$ B) $8\sqrt{3}\ \mu$ C) $12\ \mu$

D) $15\ \mu$ E) $16\ \mu$

PROBLEMA Nº 56

En un triángulo ABC acutángulo, D es el circuncentro y O es el ortocentro, por B trazamos la bisectriz que es interceptada por la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en el punto E. Si la $m\measuredangle ABC = 60^\circ$ y la $m\measuredangle ODA = 12^\circ$, calcule la $m\measuredangle BED$.

A) 48° B) 36° C) 30°

D) 24° E) 18°

PROBLEMA Nº 57

En un triángulo ABC, H es ortocentro y O es circuncentro. Si $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA = \alpha$, entonces la $m\measuredangle HBO$ es :

A) $90^\circ - \alpha$ B) $\alpha/2$ C) α

D) 2α E) $60^\circ + \alpha$

PROBLEMA Nº 58

En un triángulo ABC; $m\measuredangle ABC = \beta$, I es el incentro. Calcule x.

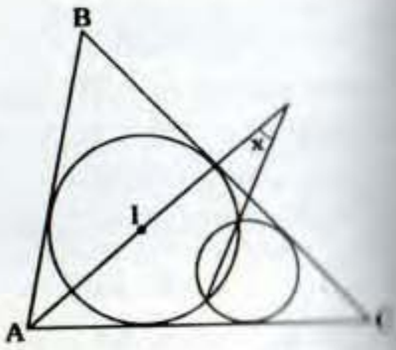
A) $\beta/4$

B) $\beta/2$

C) β

D) $90^\circ - \beta$

E) $90^\circ - \beta/2$



PROBLEMA Nº 59

En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcule la medida del ángulo que forma dicha recta de Euler y el diámetro de la circunferencia circunscrita al ΔABC que pasa por el vértice de donde parten los lados que intersecan a la recta de Euler.

A) 60° B) 75° C) 80° D) 90° E) 95°

PROBLEMA Nº 60

En un ΔABC, recto en B, se ubican los puntos E y D en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle DEC = 90^\circ$. Si la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas en el cuadrilátero ABDE y en el triángulo CDE es 10μ, calcule BD.

A) 12μ B) 15μ C) 8μ

D) 10μ E) $7{,}5\mu$

PROBLEMA Nº 61

En un triángulo acutángulo PQR, I es el incentro, O es el ortocentro y C el circuncentro. Si $m\measuredangle POR = m\measuredangle PCR$. Calcule $m\measuredangle PIR$.

A) 145° B) 130° C) 120°

D) 160° E) 135°

PROBLEMA Nº 62

En un triángulo rectángulo ABC recto en B. I es el incentro tal que : $m\measuredangle AID = 90°$ ($D \in \overline{AC}$) $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si $AB + BC = 34$, $AC = 26$. Calcule BE.

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 63

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se ubica un punto B, en el triángulo ABC se inscribe una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en D y E respectivamente, la recta DE intercepta a la semicircunferencia en los puntos F y G, calcule la $m\overset{\frown}{FG}$.

A) 60° B) 72° C) 75°
D) 90° E) 120°

PROBLEMA Nº 64

En un triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana, N es punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si $PM = 3u$ y $m\measuredangle MBC = 90°$. Halle la longitud de $\overline{AC}$.

A) 18 u B) 15 u C) 12 u
D) 10 u E) 6 u

PROBLEMA Nº 65

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$; H y T son puntos del diámetro y de la semicircunferencia respectivamente, tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante que se intersecan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que interseca a $\overline{AT}$ en E. Si $m\measuredangle CHB = 70°$. Halle $m\measuredangle AHE$.

A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 66

En un cuadrilátero convexo ABCD, $AB = BC = CD$ y además:

$$m\measuredangle ACD - m\measuredangle ACB = 60°$$

Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{AD}$ en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 72° E) 80°

PROBLEMA Nº 67

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto T.

Si: $m\measuredangle TBA = m\measuredangle TBC = 25°$,

$m\measuredangle BCT = 30°$ y $m\measuredangle CAT = 35°$

entonces la $m\measuredangle TCA$ es :

A) 25° B) 30° C) 32°
D) 35° E) 45°

PROBLEMA Nº 68

En un triángulo ABC recto en B, se ubican los puntos N y Q en la hipotenusa $\overline{AC}$, tal que $AN < AQ$. Luego se trazan $\overline{NM} \perp \overline{BC}$, $\overline{QP} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$, $M \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AB}$ y $\overline{MN} \cap \overline{PQ} = \{T\}$. Se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos APQ, NMC y NTQ cuyos radios miden r_1, r_2, r_3. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

A) $r_1 + r_2 + r_3$ B) $r_1 + r_2 - r_3$
C) $r_1 + r_3 - r_2$ D) $(r_1 + r_2 + r_3)/2$
E) $r_2 + r_3 - r_1$

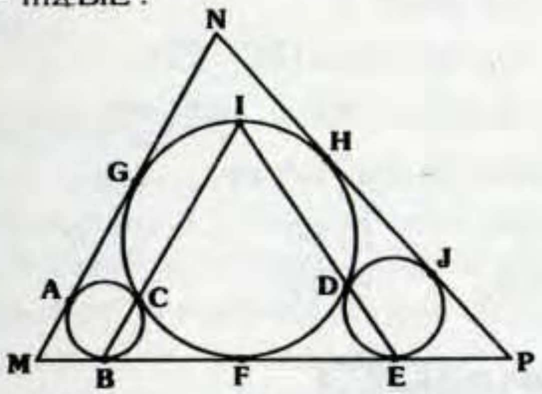
PROBLEMA Nº 69

En un triángulo ABC, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son bisectrices interiores que se interceptan en I, la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AEIF es tangente a $\overline{AE}$ en M, a $\overline{EI}$ en N y a $\overline{IF}$ en P. Si $m\measuredangle PMN = 2$, $m\measuredangle PMN$, calcule la medida del ángulo BAC.

A) 30°. B) 60° C) 45° D) 80° E) 50°

PROBLEMA Nº 70

En la figura A, B, F, E, J, H, G, C, D son puntos de tangencia. Si $m\measuredangle MNP = \phi$, hallar $m\measuredangle BIE$.



A) $15°+\dfrac{\phi}{3}$ B) $30°+\dfrac{\phi}{4}$ C) $45°+\dfrac{\phi}{4}$

D) $45°+\dfrac{\phi}{3}$ E) $45°+\dfrac{\phi}{2}$

PROBLEMA Nº 71

En un cuadrilátero ABCD, la

$m\measuredangle ABD = 2 \cdot m\measuredangle ACD = 60°$, la

$m\measuredangle ADB = 2 \cdot m\measuredangle ACB = 34°$

Halle la medida del ángulo que determinan sus diagonales.

A) 72° B) 74° C) 77°

D) 80° E) 82°

PROBLEMA Nº 72

En un paralelogramo ABCD, se traza la diagonal $\overline{BD}$ y se ubican E_1 y E_2 excentros de los triángulos BCD y ABD relativos a los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Determinar que punto notable representa D para el triángulo E_1BE_2.

A) Incentro B) Baricentro

C) Ortocentro D) Circuncentro

E) F.D.

PROBLEMA Nº 73 *2da Práctica Calificada*

Se tiene un triángulo ABC, de ortocentro H, las prolongaciones de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ cortan a la circunferencia circunscrita en F, D y E respectivamente, $\overline{AB} \cap \overline{ED} = \{M\}$, $\overline{BC} \cap \overline{DF} = \{N\}$, demostrar que M, H y N son colineales.

PROBLEMA Nº 74

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa. Los puntos I_1 y I_2 son los incentros de los triángulos ABH y BHC respectivamente. Si $AB = 3\mu$ y $BC = 4\mu$, entonces $\overline{I_1I_2}$ mide :

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 1 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 75

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I. Dado un triángulo ABC, de incentro I, para el triángulo cuyos vértices son los excentros, I es su ortocentro.

II. En los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC se ubican M, N y L respectivamente, si $\overline{MN}//\overline{AC}$, $\overline{ML}//\overline{BC}$ y $\overline{NL}//\overline{AB}$, entonces MNL es el triángulo mediano de ABC.

III. El baricentro de un triángulo, siempre se encuentra en su región interior.

A) VFV B) VVV C) VFF
D) FFF E) FVV

PROBLEMA Nº 76

En un triángulo ABC; la $m\measuredangle ACB=20$; la $m\measuredangle ABC=40$; sean :

- H el ortocentro.
- O el circuncentro del triángulo ABC.

Halle $m\measuredangle HBO$.

A) 50° B) 60° C) 70°
D) 100° E) 120°

PROBLEMA Nº 77

En un triángulo ABC acutángulo, H es el ortocentro. Si BH=AC=12u, entonces la longitud del radio de la circunferencia de Euler o circunferencia de los nueve puntos de:

A) 2u B) 3u C) 4u
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 78 *Examen Final*

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las altura $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ (H: ortocentro). Si M y N son puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule la $m\measuredangle MEN$.

A) 60° B) 75° C) 85°
D) 90° E) 94°

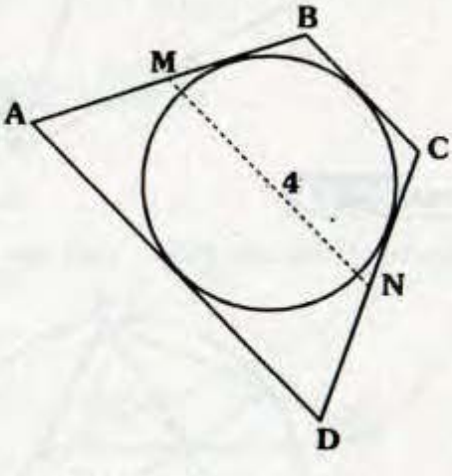
PROBLEMA Nº 79 *Examen Final*

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es :

A) $\sqrt{65}$ cm B) 12 cm
C) $\sqrt{51}$ cm D) 8 cm
E) 9 cm

PROBLEMA Nº 80

En la figura mostrada se tiene un trapecio ABCD circunscrito a una circunferencia. Sea $\overline{MN}$ la mediana del trapecio de longitud 4u. Calcule el perímetro del trapecio ABCD (en u)



A) 12 B) 13
C) 14 D) 15
E) 16

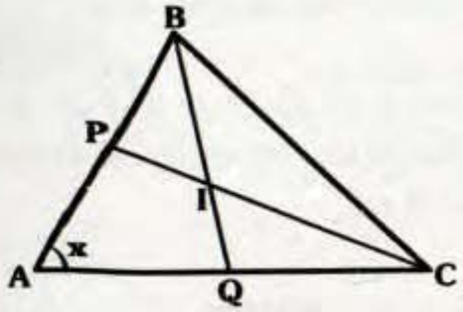
Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 81

Si BC=QC+BP e I es incentro de ABC, calcule x.

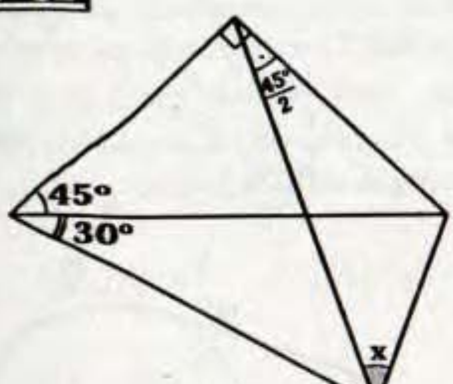
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 60°
E) 75°



PROBLEMA Nº 82

Calcule x.

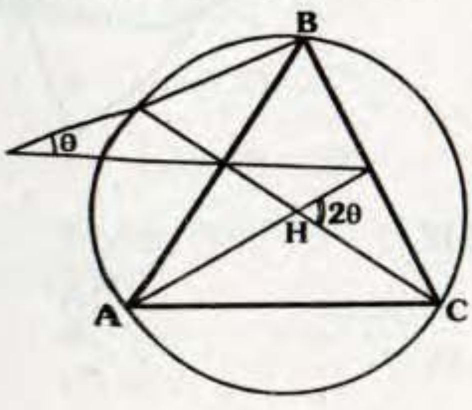
A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°



PROBLEMA Nº 83

Si H es ortocentro de ABC, calcule θ.

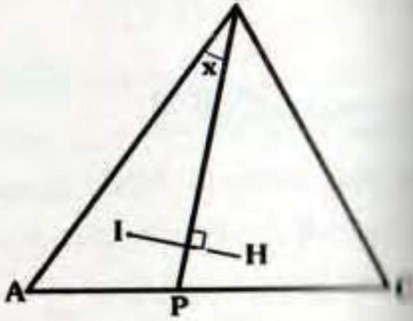
A) 30°
B) 35°
C) 36°
D) 37°
E) 42°



PROBLEMA Nº 84

Si ABC es equilátero, I es incentro de ABP y H es ortocentro de BPC, calcule x.

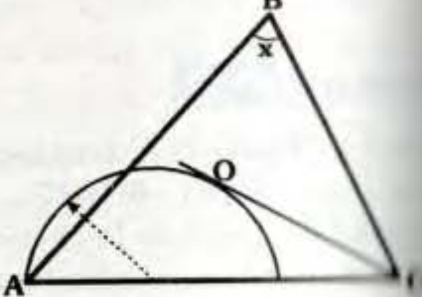
A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



PROBLEMA Nº 85

En el gráfico O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, calcule x.

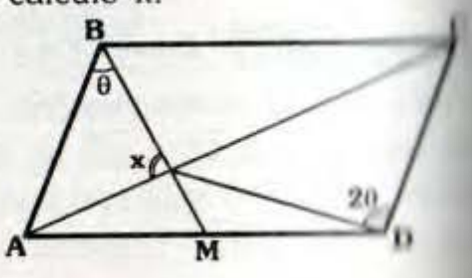
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



PROBLEMA Nº 86

Si ABCD es un paralelogramo y AM=MD, calcule x.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 87

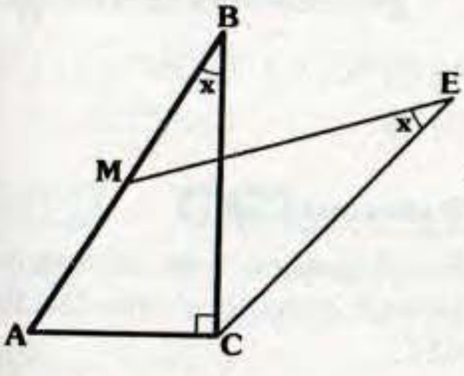
Se tiene un triángulo ABC, de inradio 4, si la distancia del incentro a la recta tangente a la circunferencia circunscrita trazada por B es 7, calcule la altura BH.

A) 11 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

PROBLEMA Nº 88

Si E es excentro de ABC y AM=MB, calcule x.

A) 14°
B) 15°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



PROBLEMA Nº 89

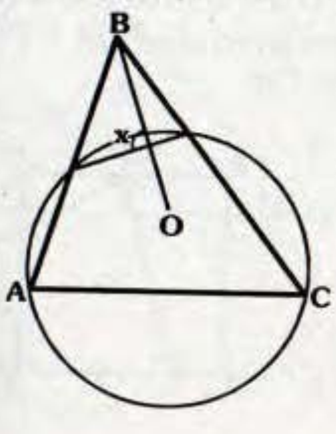
Dado un triángulo equilátero ABC, se traza la ceviana interior BD, si $AD-DC=4\sqrt{3}$, calcule la distancia entre los ortocentros de ABD y BDC.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 4

PROBLEMA Nº 90

Si O es circuncentro de ABC, calcule x.

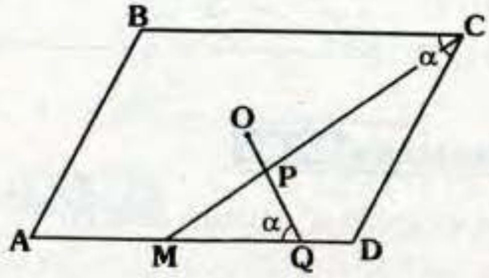
A) 60°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 91

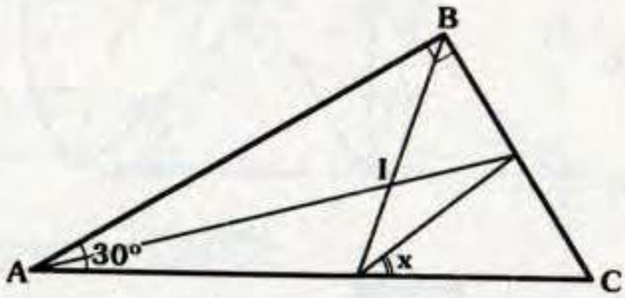
En el gráfico O es centro del paralelogramo ABCD, si AM=MQ y OP=2, calcule AB.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14



PROBLEMA Nº 92

En el gráfico I es incentro de ABC, calcule x.

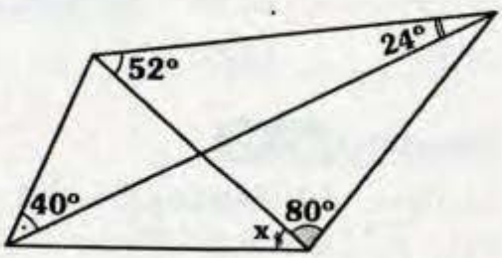


A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 93

Calcule x.

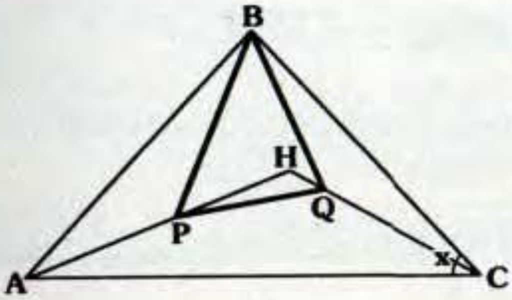
A) 50°
B) 52°
C) 54°
D) 56°
E) 60°



PROBLEMA Nº 94

Si H es ortocentro de PBQ, AP=BQ y PB=QC, calcule x.

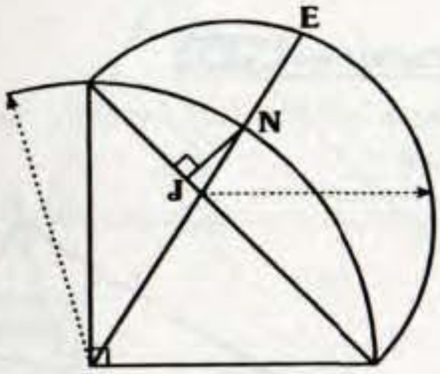
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



PROBLEMA Nº 95

En el gráfico, calcule JN/EN.

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



PROBLEMA Nº 96

Se traza la ceviana interior BN en el triángulo ABC, donde O es circuncentro de ABN, L es circuncentro de BNC y H es ortocentro de ONL, si $m\measuredangle OHL=110°$, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 35° B) 45° C) 60°
D) 70° E) 80°

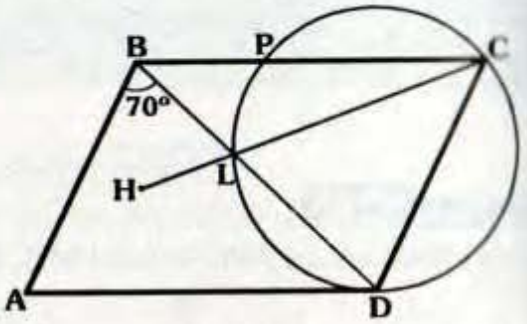
PROBLEMA Nº 97

Se tiene el triánguo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, desde el excentro E relativo a $\overline{BC}$ se traza $\overline{EH}$ pera a $\overline{BC}$ $\left(H\in\overline{BC}\right)$, si BH=4, calcule AC.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 98

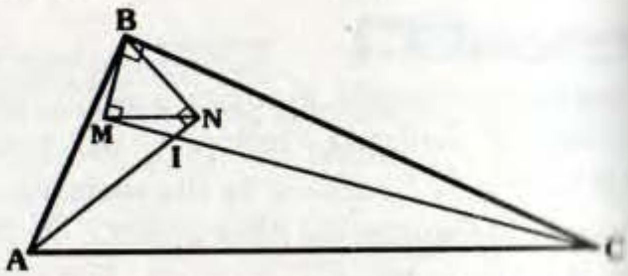
Si ABCD es un paralelogramo y H es ortocentro de ABD, calcule $m\widehat{PL}$.



A) 40° B) 38° C) 36°
D) 35° E) 32°

PROBLEMA Nº 99

En el gráfico I es incentro de ABC y MN=8, calcule el inradio del triángulo ABC.

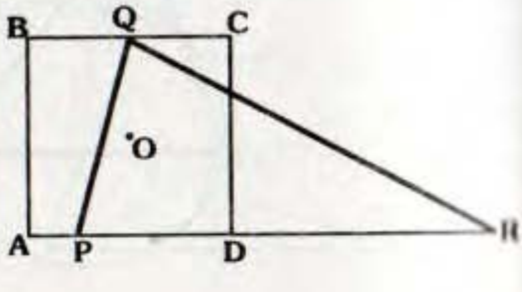


A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

PROBLEMA Nº 100

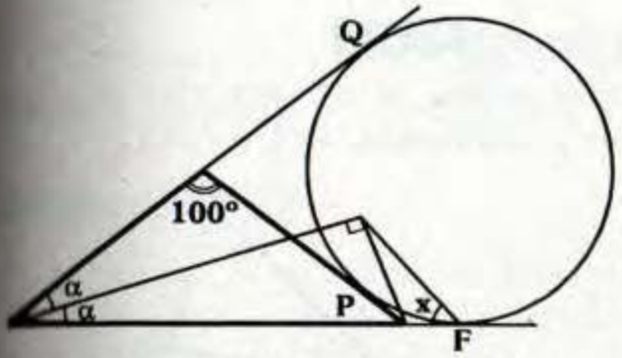
Si O es centro del cuadrado ABCD y ortocentro de PQR y PD=3(AP)=3, calcule DR.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



PROBLEMA Nº 101

Si P, Q y F son puntos de tangencia, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 75°

PROBLEMA Nº 102

O y H son el circuncentro y ortocentro del triángulo ABC respectivamente si :

$$m\measuredangle AHC = 2(m\measuredangle AOC)$$

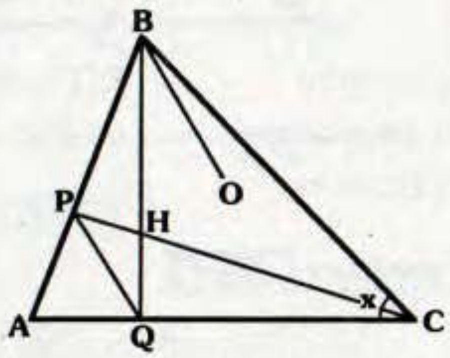
Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 32° C) 34°
D) 36° E) 38°

PROBLEMA Nº 103

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $\overline{PQ} // \overline{BO}$, calcule x.

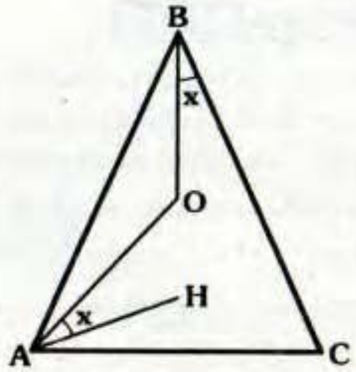
A) 15°
B) 37°/2
C) 53°/2
D) 30°
E) 45°



PROBLEMA Nº 104

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC y AB=BC, calcule x.

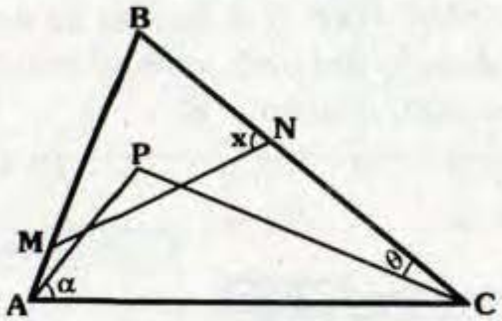
A) 45°/2
B) 53°/2
C) 37°/2
D) 15°
E) 30°



PROBLEMA Nº 105

En el gráfico P es el ortocentro de ABC y circuncentro de MBN, si $\alpha + \theta = 70°$, calcule x.

A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°



PROBLEMA Nº 106

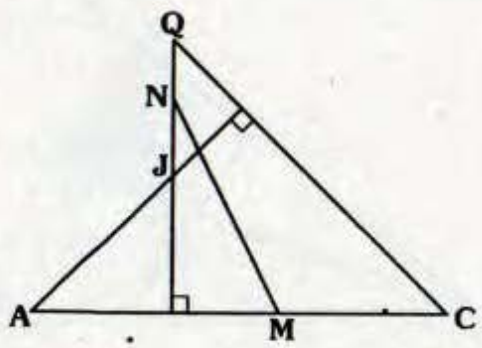
Se tiene un triángulo acutángulo ABC, si la distancia de B al ortocentro de ABC es igual a AC, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 107

Si JN=NQ=3 y AM=MC=6, calcule MN.

A) $3\sqrt{3}$
B) $5\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$
E) $5\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 108

Dado un triángulo obtusángulo ABC, obtuso en B, si la distancia de A al ortocentro de ABC es igual al circunradio del triángulo ABC, calcule m∡BAC.

A) 60º B) 53º C) 45º
D) 37º E) 30º

PROBLEMA Nº 109

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (B y C son puntos de tangencia), si m∡BAC = 60º y el inradio de ABC es r, calcule la distancia entre el incentro y el excentro relativo a $\overline{BC}$.

A) 2r B) 3r C) 4r
D) 5r E) 6r

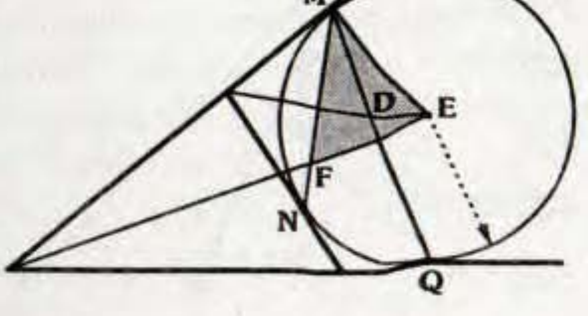
PROBLEMA Nº 110

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual se traza la altura BH, si E es el excentro de ABH relativo a $\overline{AB}$ e I es el incentro de BHC, calcule m∡EBI.

A) 90º B) 115º C) 130º
D) 135º E) 150º

PROBLEMA Nº 111

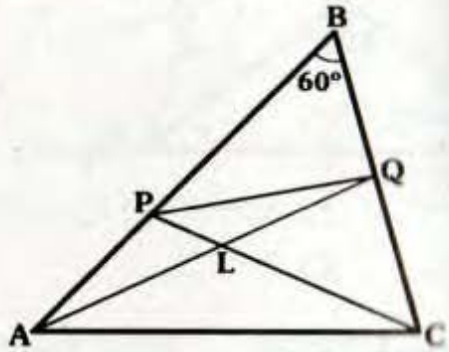
Si M, N y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es D del triángulo MFE?



A) Ortocentro B) Incentro
C) Circuncentro D) Punto de Miquel
E) Baricentro

PROBLEMA Nº 112

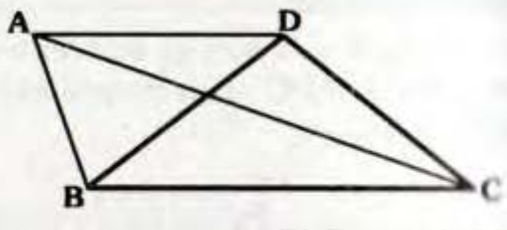
En el gráfico, si AP=PQ=QC. Indique que punto notable es L de ABC.



A) Incentro B) Ortocentro
C) Circuncntro D) Baricentro
E) Punto de Georgonne

PROBLEMA Nº 113

Si $\overline{AD} // \overline{BC}$ y D es circuncentro de ABC, ¿qué punto notable es A del triángulo BDC?



A) Incentro B) Punto de Nagel
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Excentro

PROBLEMA Nº 114

Si : $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, $m\widehat{BN} = m\widehat{NC}$ y

$m\widehat{CL} = m\widehat{LA}$

indique que punto notable es el incentro de ABC del triángulo MNL.

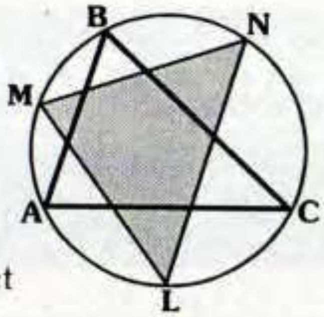
A) Incentro

B) Baricentro

C) Ortocentro

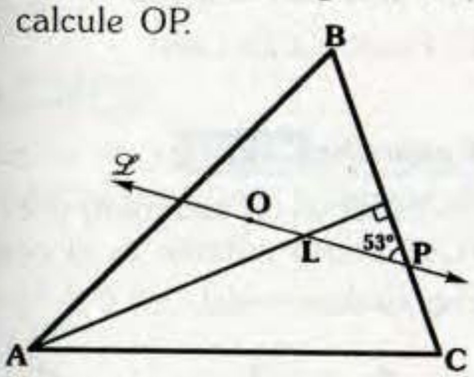
D) Circuncentro

E) Punto de Poncelet



PROBLEMA Nº 115

En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y O son la recta de Euler y el circuncentro del triángulo ABC, si AL=16, calcule OP.



A) 8

B) 10

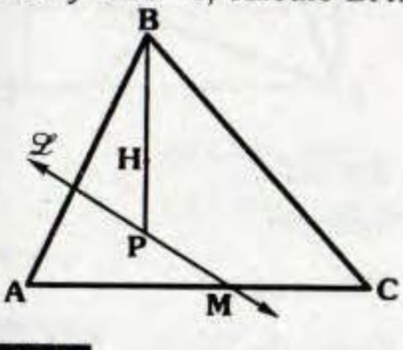
C) 12

D) 14

E) 16

PROBLEMA Nº 116

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es paralelo a la recta de Euler del triángulo ABC, H es ortocentro su ortocentro, AM=MC y PH=4, calcule BH.



A) 8

B) 6

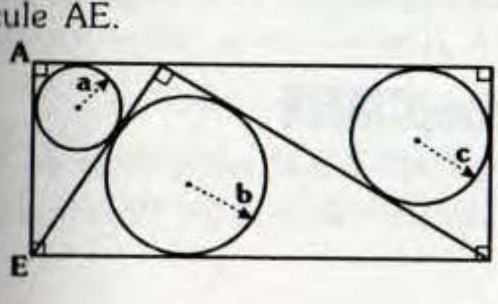
C) 4

D) 3

E) 2

PROBLEMA Nº 117

Calcule AE.



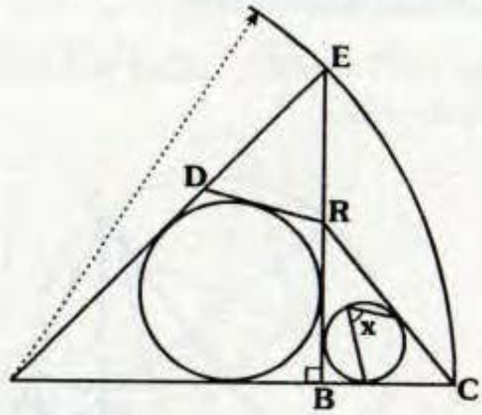
A) $a+c-b$ B) $a+b+c$

C) $2a+2c-b$ D) $2a+b+c$

E) $a+b+3c$

PROBLEMA Nº 118

Si ED=5, AD=2 y BC=3, calcule x.



A) 60°

B) 75°

C) $\frac{143°}{2}$

D) 90°

E) $\frac{127°}{2}$

PROBLEMA Nº 119

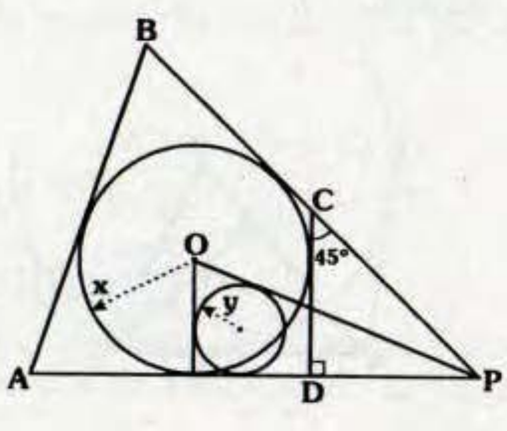
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$, si $PB=BQ=10$, calcule la suma del inradio de PBQ con el inradio del cuadrilátero APQC.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 11 E) 12

PROBLEMA Nº 120

Si AD=OP, AB=10 y BC=6, calcule $x-y$.



A) 2

B) 4

C) 5

D) 5,5

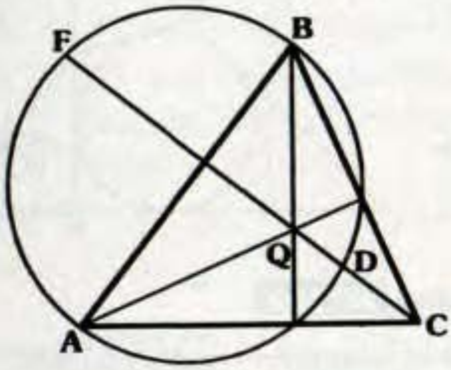
E) 6

Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 121

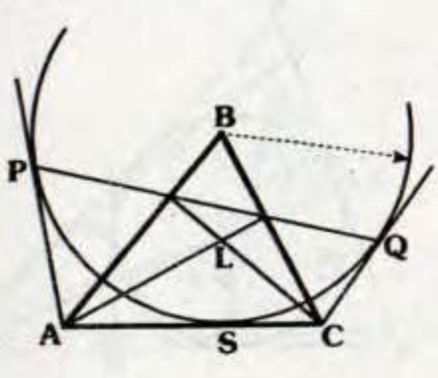
Si $m\widehat{FB} = m\widehat{BD}$. ¿Qué punto notable es Q de ABC.



A) Ortocentro
B) Baricentro
C) Circuncentro
D) Punto de Lemoine
E) Punto exmediano

PROBLEMA Nº 122

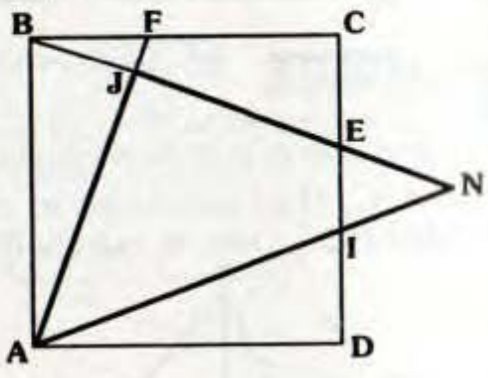
En el gráfico; P, Q y S son puntos de tangencia, indique que punto notable es L de ABC.



A) Incentro
B) Baricentro
C) Ortocentro
D) Punto exsimediano
E) Punto de Brocard

PROBLEMA Nº 123

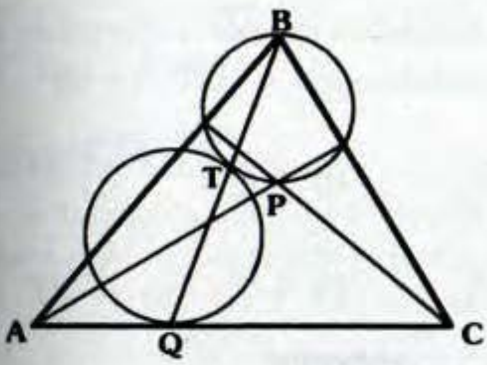
Si ABCD es un cuadrado y BF=ID=EC, ¿Qué punto notable es el centro de dicho cuadrado del ΔAJN?



A) Baricentro
B) Incentro
C) Ortocentro
D) Punto de Spieker
E) Punto de Miquel

PROBLEMA Nº 124

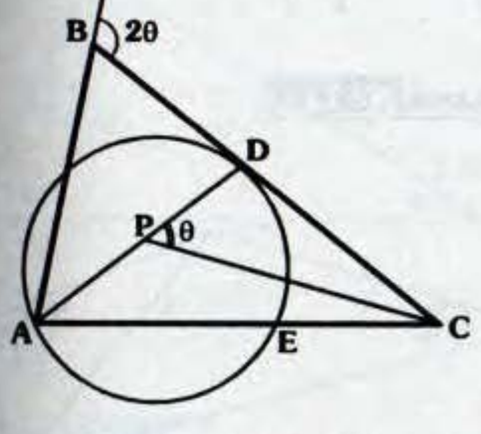
En el gráfico T y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC?



A) Incentro B) Baricentro
C) Punto de Steiner D) Circuncentro
E) Ortocentro

PROBLEMA Nº 125

Si D es punto de tangencia, AB=CD y BD=EC, indique que punto notable es P de ABC.



A) Baricentro B) Ortocentro
C) Incentro D) Circuncentro
E) Punto de Tarry

PROBLEMA Nº 126

En un triángulo ABC, las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ se cortan en L, si:

$$m\measuredangle BAP = m\measuredangle QBC\ ,$$

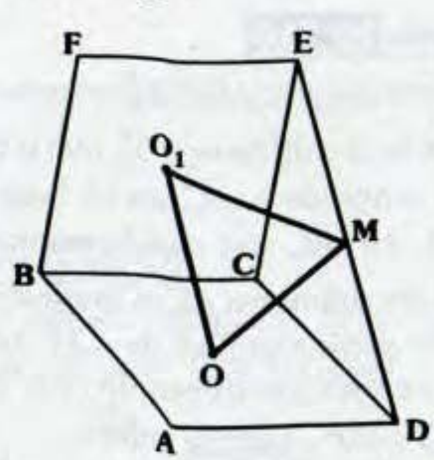
$$QP = QC \quad y \quad QLPC$$

es inscriptible, ¿Qué punto notable es L de ABC?

A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Ortocentro
E) Punto de Jerabek

PROBLEMA Nº 127

En el gráfico O y O_1 son los centros de los rombos ABCD y BCEF, si M es punto medio de $\overline{ED}$, indique que punto notable es C de OO_1M.



A) Ortocentro B) Incentro
C) Baricentro D) Circuncentro
E) Punto de Fermar

PROBLEMA Nº 128

Se tiene el triángulo ABC, de incentro I, y radio IA se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ que corta a $\overline{AB}$ en M, a $\overline{BC}$ N y $L\left(L \in \overline{NC}\right)$ y a $\overline{AC}$ en P, si $m\measuredangle BAC = 80^{\circ}$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{NP}$ y $\overline{ML}$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 129

Se tiene el segmento PQ tangente a una circunferencia de centro O en B, luego

os $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$ tangentes a dicha cir-
ncia, (A y C son puntos de tangen-
$\overline{AC}$ corta a $\overline{PO}$ en N, calcule :

$$\frac{m\measuredangle MBO}{m\measuredangle NBO}$$

B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}/2$

E) 2

EMA Nº 130

n triángulo ABC de ortocentro H,
os la circunferencia $\mathscr{C}$ que pase por
tangente a $\overline{AC}$ en C, luego ubi-
L en $\overline{AC}$ tal que la semicircun-
a de diámetro AL es tangente a $\mathscr{C}$
la prolongación de $\overline{CH}$ corta a
semicircunferencia en M, si
C = 20°, calcule $m\widehat{MH}$.

B) 20° C) 30°

E) 50°

EMA Nº 131

triángulo ABC, se trazan la altura
la ceviana interior BN, el
centro O de ABC pertenece a $\overline{BN}$,
se traza $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{AC}$
H), si AH=HO, HM=m y
A = 45°, calcule NC.

2 B) m C) 2m

/2 E) 3m

EMA Nº 132

e el triángulo ABC, de ortocentro
H=6 calcule el radio de la circun-
ia que contiene a B, H y C, tal que
la prolongación de $\overline{AB}$ corta en N a dicha circunferencia y $m\widehat{HBN} = 90°$.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 133

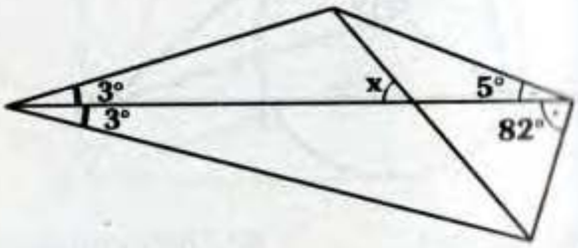
En un cuadrado ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$, el cuadrante BD de centro C corta a $\overline{DM}$ en F, luego se ubican Q en $\overline{FC}$ y H en $\overline{BC}$, si $m\measuredangle DFH = 90°$, FQ=QC y $\overline{FQ} \cap \overline{BQ} = \{O\}$, calcule FO/OH.

A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 134

Calcule x.



A) 11° B) 13° C) 15°

D) 17° E) 19°

PROBLEMA Nº 135

Se tiene el triángulo ABC, se ubican P y Q en la región interior y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, si AP=PQ=QC, $m\measuredangle BCA = 60°$, $m\measuredangle APQ = 2(m\measuredangle ACQ) = 20$ y $m\measuredangle ABC = 30° + \theta$. Calcule $m\measuredangle QBC$.

)° B) 37° C) 45°
3° E) 60°

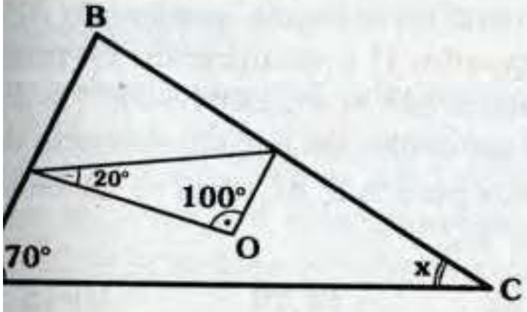
LEMA Nº 136

un triángulo ABC de ortocentro H, ican P y Q en la región exterior rela- $\overline{AB}$ y relativa a $\overline{BC}$ respectiva- e si $m\measuredangle PBA = m\measuredangle QBC = 90°$, CH, AH=BQ y AP=10, calcule

B) 18 C) 16
E) 10

LEMA Nº 137

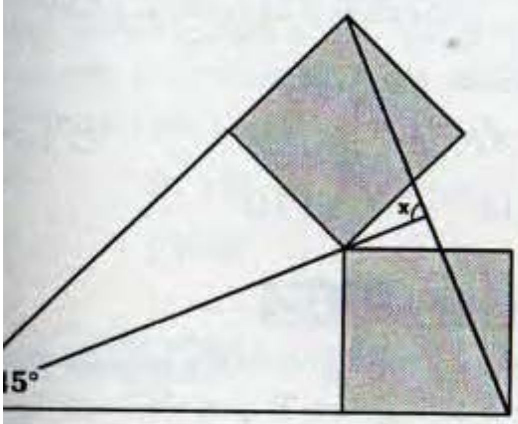
es circuncentro de ABC, calcule x.



B) 15° C) 18°
E) 30°

LEMA Nº 138

regiones sombreadas son regula- lcule x.



A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA Nº 139

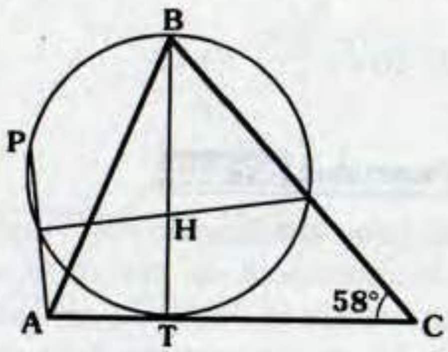
En un triángulo ABC, de baricentro G, con centro en A y radio 4 se traza una circunferencia que pasa por G, corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{AC}$ en N, si las ternas M, G, C y B, G, N son colineales, calcule BC.

A) 4 B) $4\sqrt{7}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{5}$ E) 8

PROBLEMA Nº 140

Si T es punto de tangencia y H es ortocentro de ABC, calcule $m\widehat{PB}$.

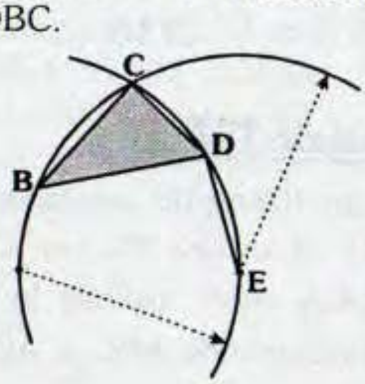
A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 66°
E) 68°



PROBLEMA Nº 141

En el gráfico BC=DE y BD=15, calcule la distancia del ortocentro al circuncentro del triángulo DBC.

A) 6
B) 6,5
C) 7
D) 7,5
E) 8



PROBLEMA Nº 142

Se tiene el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, sean M y O' puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, si la distancia entre las proyecciones de M y O sobre $\overline{BC}$, es la mitad del circunradio de ABC, calcule $m\measuredangle HMO'$.

A) 30° B) 37° C) 53°/2
D) 37°/2 E) 45°

PROBLEMA Nº 143

Dado un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, además O, es circuncentro de AHC, si $OO_1 = 18$, calcule BH.

A) 9 B) $9\sqrt{2}$ C) 16
D) $16\sqrt{3}$ E) 18

PROBLEMA Nº 144

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se ubica el ortocentro H de ABC y se traza el diámetro AD, si el perímetro de la región BHCD es 44 y la distancia de O a $\overline{AC}$ es 4, calcule la distancia de O a $\overline{AB}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 145

En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura BL, si $CL - AL = 4$ y $m\measuredangle BCA = 45°$, calcule la distancia del circuncentro de ABC a $\overline{AC}$.

A) 0,5 B) 1 C) 2
D) 2,5 E) 4

PROBLEMA Nº 146

Dado un triángulo ABC, de circuncentro O y ortocentro H, se traza la altura BL, si BH=HL y $\overline{OH} // \overline{BC}$, calcule $m\measuredangle ABL$.

A) 15 B) $\dfrac{37°}{2}$ C) 30°
D) $\dfrac{53°}{2}$ E) 45°

PROBLEMA Nº 147

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, trazamos la altura AM, si $m\measuredangle BHM = 37°$, la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos a $\overline{AC}$ es 5 y BH=4, calcule AC.

A) 22 B) 20 C) 18
D) 16 E) 14

PROBLEMA Nº 148

En un triángulo ABC cuyo ortocentro es H y excentro relativo a $\overline{BC}$ es E, si:

$$m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle ABC) = 80°$$

Calcule $m\measuredangle AEH$.

A) 20° B) 18° C) 16°
D) 12° E) 10°

PROBLEMA Nº 149

Dado un triángulo ABC, la recta de Euler corta a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BC}$ en Q, si la diferencia entre los perímetros de las regiones ABC y APQC es igual a PB, calcule m∡ABC.

A) 45° B) 60° C) 70°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 150

En un triángulo ABC, m∡ABC = 120°, calcule la medida del ángulo entre la recta de Euler de ABC con $\overline{BC}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 151

Se tiene el isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, donde O, G y H son el circuncentro, baricentro y ortocentro de ABC respectivamente, si OG=4 y la distancia de H a $\overline{AC}$ es 2, calcule el exradio relativo a $\overline{BC}$.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

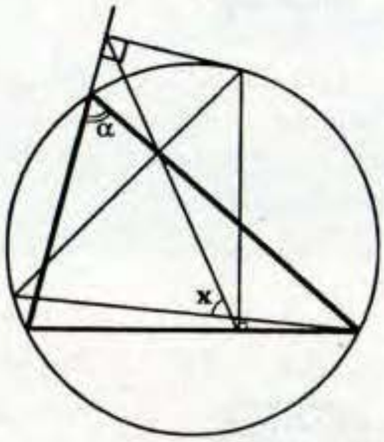
PROBLEMA Nº 152

La recta de Euler de un triángulo acutángulo ABC corta a $\overline{AC}$ en D, luego ubicamos el ortocentro H de ABC, si AD=2(BH)=2(DC), calcule m∡HDA.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 153

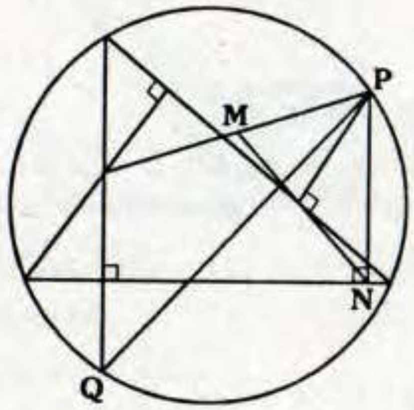
Calcule x.



A) α B) α/2 C) 2α
D) 3α/2 E) 3α

PROBLEMA Nº 154

Si PQ=24, calcule MN.



A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 155

Se tiene el triángulo ABC, donde MNL es su respectivo triángulo mediano, H es el ortocentro de ABC; O, G y O' son el ortocentro, baricentro y circuncentro de MNL respectivamente, si GO=2, calcule OH.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

OBLEMA Nº 156

el perímetro de una región triangular 8, calcule la suma de las distancias su circuncentro hacia los lados, sando que es entero.

6 B) 5 C) 4

3 E) 2

OBLEMA Nº 157

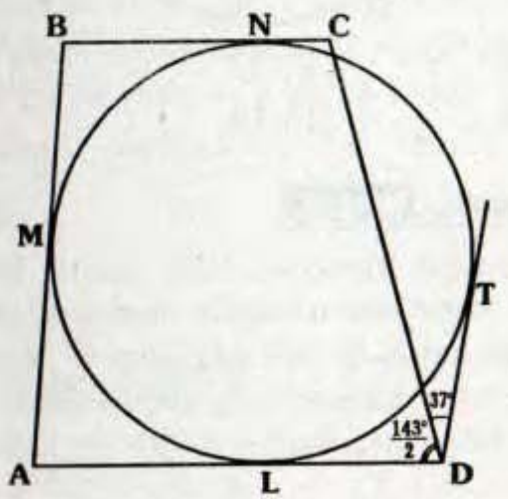
un triángulo rectángulo ABC, recto B, se trazan las bisectrices interiores y CD, si la longitud de la proyección $\overline{ED}$ sobre la $\overline{AC}$ 6, calcule el inradio ABC.

6 B) 5 C) 4,5

4 E) 3

OBLEMA Nº 158

el gráfico M, N, L y T son puntos de ngencia, si la base media del trapecio CD mide 5 y $CD=\sqrt{10}$ $(\overline{AD}//\overline{BC})$, lcule AB.



A) $10-\sqrt{10}$ B) $12-\sqrt{10}$

C) $14-\sqrt{10}$ D) $16-2\sqrt{5}$

E) $18-2\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 159

En un paralelogramo ABCD, se traza la altura BH, si los inradios de ABH y HBCD son r y R respectivamente, calcule HD.

A) R+r B) 2R+r

C) 2R−3r D) 2R−r

E) 3R−2r

PROBLEMA Nº 160

Se tiene un trapecio isósceles ABCD $(\overline{BC}//\overline{AD})$ circunscrito a una circunferencia de centro O, si la prolongación de $\overline{BO}$ corta a $\overline{AD}$ en P, tal que $AP=2(PD)$, calcule $m\measuredangle CDA$.

A) 60° B) 53°

C) 45° D) 37°

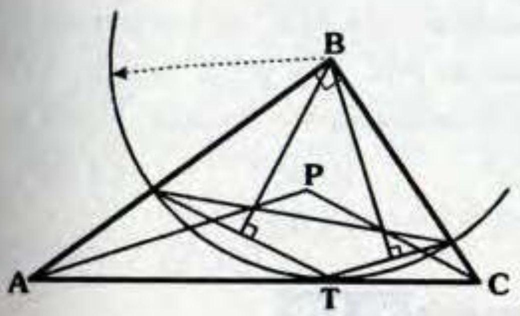
E) 30°

Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 161

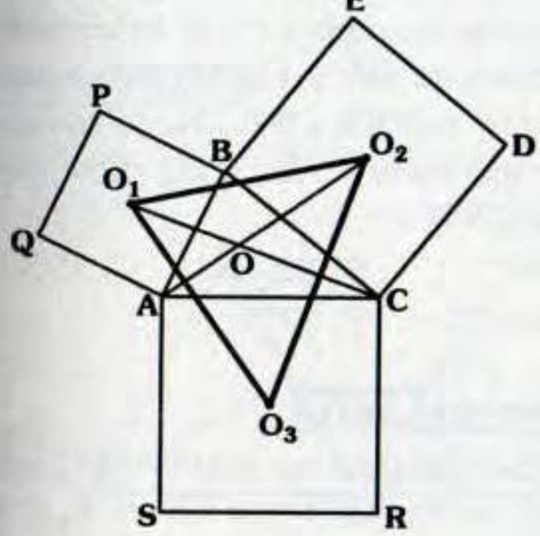
Si T es punto de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC?



A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Ortocentro
E) Punto de Nagel

PROBLEMA Nº 162

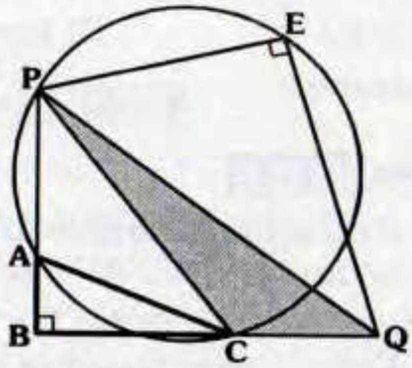
En el gráfico O_1, O_2 y O_3 son los centros de los cuadrados ABPQ, BCDE y ACRS, indique que punto notable es O del $\Delta O_1O_2O_3$.



A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Punto de Fermat
E) Circuncentro

PROBLEMA Nº 163

Si E es excentro de ABC. ¿Qué punto notable es E de PQC?

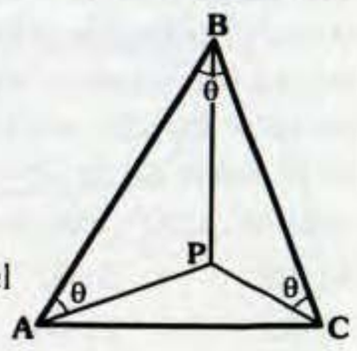


A) Circuncentro
B) Ortocentro
C) Punto de Morley
D) Punto de exmediano
E) Excentro

PROBLEMA Nº 164

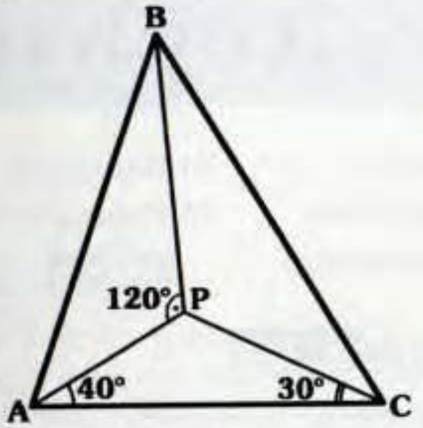
Si AC=BP, indique que punto notable es P de ABC.

A) Incentro
B) Ortocentro
C) Baricentro
D) Circuncentro
E) Punto de Miquel



PROBLEMA Nº 165

¿Qué punto notable es P de ABC? si AC = BP.



A) Punto de Brocard
B) Baricentro
C) Ortocentro
D) Incentro
E) Circuncentro

PROBLEMA Nº 166

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH y se ubican los incentros I_1 y I_2 de los ⊿s ABH y BHC respectivamente, luego se prolonga $\overline{I_1I_2}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en P, con centro en B y radio BP trazamos el arco PL, tal que $m\measuredangle HBL = 90°$, si $I_1I_2 = 5$ y $I_2P = 4$, calcule $m\measuredangle I_1LH$.

A) 8° B) 14° C) 15°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA Nº 167

Dado el triángulo ABC, de incentro I y excentro relativo a $\overline{AB}$ E, si la diferencia entre exradio relativo a AB y el inradio es el doble de la distancia de B a $\overline{IE}$ y $m\measuredangle BAC = 30°$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 168

En el triángulo ABC, de ortocentro H y $m\measuredangle BAC = 115°$, en la región exterior y relativa a $\overline{AC}$ se ubica S, de modo que $m\measuredangle HSC = m\measuredangle HBC$, calcule $m\measuredangle ASH$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 169

En un triángulo ABC, de baricentro G, las medianas AM, BN y CL miden $3\sqrt{3}$, 3 y 6 respectivamente, calcule $m\measuredangle BGL$.

A) 15° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 170

Se tiene el triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, trazamos la ceviana interior AQ luego ubicamos el incentro I de ABQ, si $m\measuredangle ICA = 40°$, calcule $m\measuredangle BQA$.

A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 171

Dado el cuadrado ABCD, de centro O, se ubican los puntos P y Q en las prolongaciones de $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle QPA = 90°$, luego trazamos $\overline{PO}$ que corta a $\overline{AB}$, si PQ=QM, calcule $m\measuredangle OPD$.

A) 60° B) 30° C) 15°
D) 45°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 172

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, si E_1 y E_2

son excentros de los Δ_s ABH y BHC relativa a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{E_1E_2}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 90°

PROBLEMA Nº 173

En un triángulo isósceles ABC, de base AC en el cual M es punto medio de $\overline{AC}$, luego ubicamos S y N en $\overline{BC}$ y $\overline{MS}$, tal que $m\measuredangle MSC = 90°$ y MN=NS, calcule la medida del ángulo entre $\overline{BN}$ y $\overline{AS}$.

A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA Nº 174

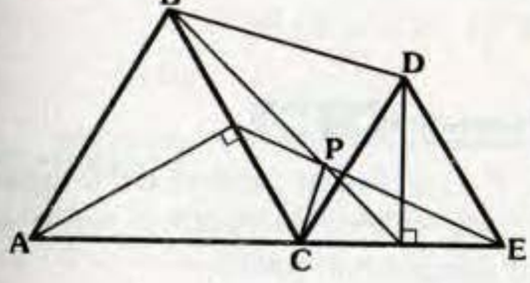
Se tiene el triángulo ABC, donde I es incentro y E es el excentro relativo a $\overline{AB}$, se traza $\overline{AP}$ perpendicular a $\overline{EB}$ $(P \in \overline{EB})$, si $\overline{AP}$ biseca a $\overline{EI}$ y la longitud de la bisectriz interior AF es 10, calcule el exradio relativo a AB.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

PROBLEMA Nº 175

Si ABC y CDE son equiláteros, calcule BD/CP.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA Nº 176

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, I_1 y I_2 son incentros de ABH y BHC, $\overleftrightarrow{I_1I_2}$ corta a la prolongación de $\overline{CA}$ en P, si AB=a, BC=b y AC=c, calcule PA.

A) $a+b-c$ B) $2a+b-c$
C) $3a+b-c$ D) $\dfrac{a(c+b)}{b-a}$
E) $\dfrac{a(c-b)}{b-a}$

PROBLEMA Nº 177

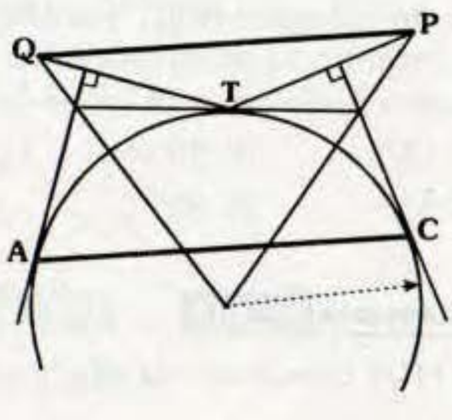
En un triángulo ABC, $\overline{BL}$ es altura, M es punto medio de $\overline{AB}$, H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $m\measuredangle BAC = 70°$ y $m\measuredangle MLO = 90°$, calcule $m\measuredangle BMH$.

A) 35° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 55°

PROBLEMA Nº 178

Si A, T y C son puntos de tangencia, calcule QP/AC.

A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5



PROBLEMA Nº 179

Exteriormente al triángulo isósceles ABC le base AC se construye el cuadrado BCDE, M es el ortocentro de ACE, si $BE=\sqrt{2}$, calcule AM.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 180

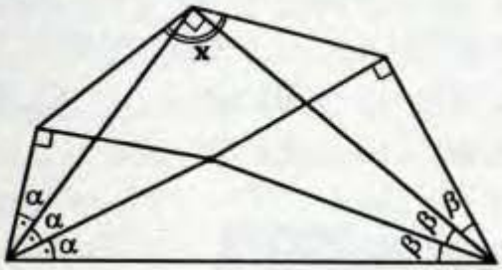
Dado un triángulo ABC, I y E son el ncentro y excentro relativo a $\overline{BC}$ respectivamente, si $AC-AB=10$ y la suma del nradio con el exradio relativo a $\overline{BC}$ de ABC es 24, calcule EI.

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

PROBLEMA Nº 181

Calcule x.

A) 150°
B) 145°
C) 140°
D) 137°
E) 135°



PROBLEMA Nº 182

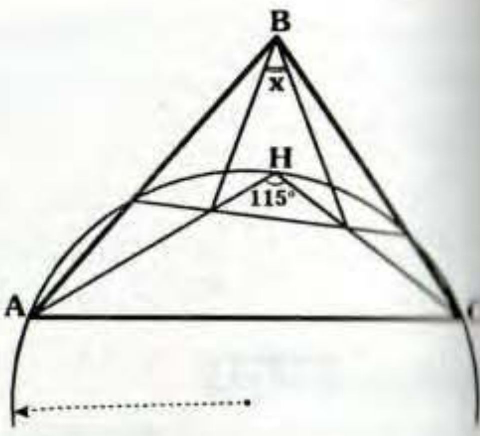
En un triángulo ABC, $m\measuredangle ABC=120°$, I es incentro O es circuncentro y E es el excentro relativo a BC, calcule $m\measuredangle IEO$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 183

Si H es ortocentro de ABC, calcule x.

A) 35°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 55°



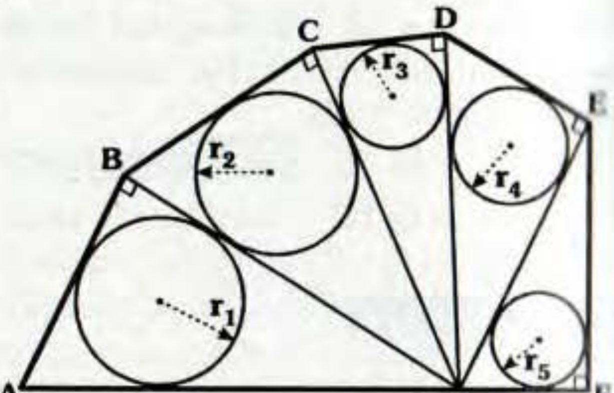
PROBLEMA Nº 184

Dado un triángulo ABC, $m\measuredangle ABC=120°$, si AB+BC=12, calcule la distancia entre su circuncentro y ortocentro.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 185

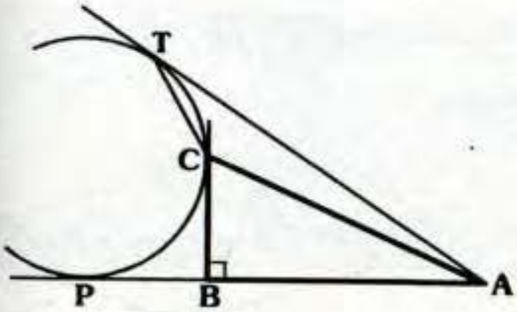
Si : $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=AH=10$
Calcule el perímetro de la región hexagonal ABCDEF.



A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

PROBLEMA Nº 186

Si P, C y T son puntos de tangencia y CT=6, calcule el máximo valor entero del inradio del ΔABC .



A) 6
B) 5
C) 4
D) 3
E) 2

PROBLEMA Nº 187

Que tipo de cuadrilátero es ABCD, si las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ACD son tangentes a $\overline{AC}$ en el mismo punto.

A) Trapecio B) Paralelogramo
C) Inscriptible D) Circunscriptible
E) Bicentrico

PROBLEMA Nº 188

Que tipo de cuadrilátero se forma al unir los centros de cuatro circunferencias tangentes exteriores dos a dos.

A) Inscriptible B) Circunscriptible
C) Trapecio D) Paralelogramo
E) Exinscriptible

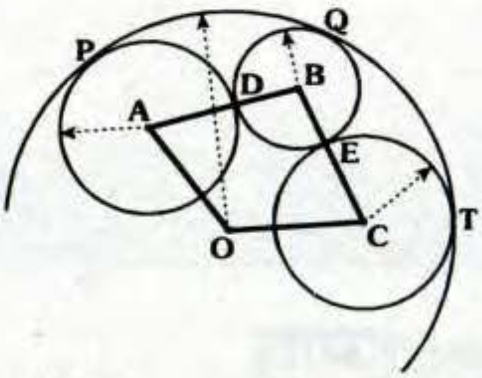
PROBLEMA Nº 189

Se tiene el cuadrilátero circunscrito E, P, F y Q pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, tal que al trazar $\overline{PQ}$ y $\overline{EF}$ forman cuatro cuadriláteros parciales circunscritos, si PQ=a, calcule EF.

A) a/2 B) 3a/2 C) 2a
D) a E) 3a

PROBLEMA Nº 190

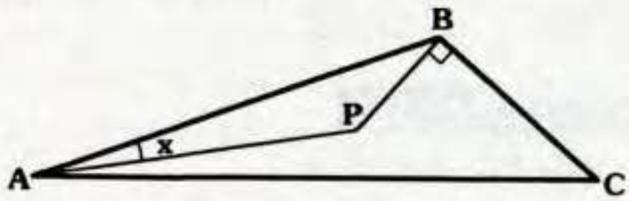
Si P, Q, T, E y D son puntos de tangencia, ¿Qué tipo de cuadrilátero es OABC?



A) Inscriptible B) Circunscriptible
C) Exinscriptible D) Bicentrico
E) Trapecio

PROBLEMA Nº 191

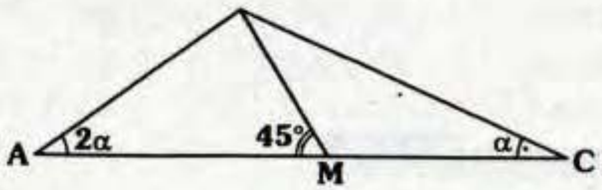
Si P es baricentro de ABC y AP=PB+BC, calcule x.



A) 10,5° B) 12° C) 14°
D) 15° E) 16,5°

PROBLEMA Nº 192

Si AM=MC, calcule α.

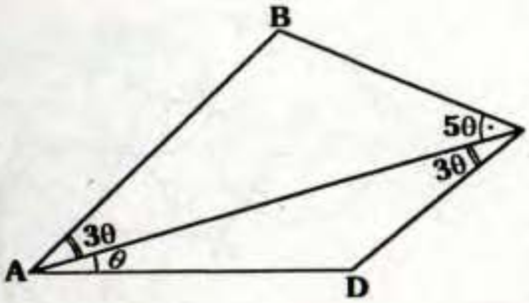


A) 14° B) 15° C) 18°
D) 30° E) $\dfrac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA Nº 193

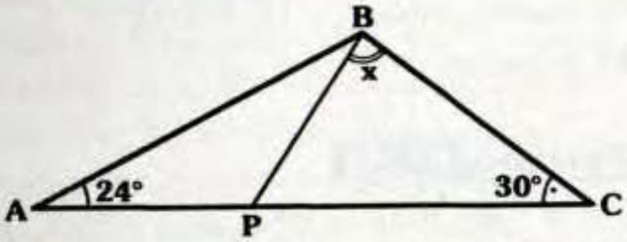
Si AB=AD, calcule θ.

A) 8°
B) 10°
C) 12°
D) 14°
E) 16°



PROBLEMA Nº 194

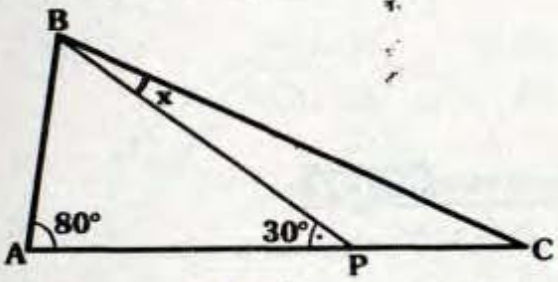
Si AB=PC, calcule x.



A) 90° B) 92° C) 96°
D) 98° E) 120°

PROBLEMA Nº 195

Si AB=PC, calcule x.

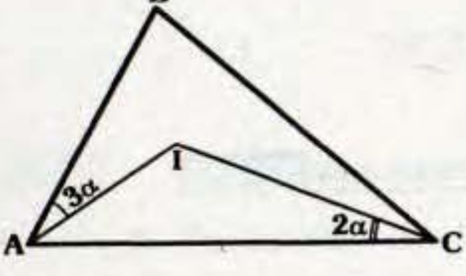


A) 20° B) 15° C) 25°
D) 10° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 196

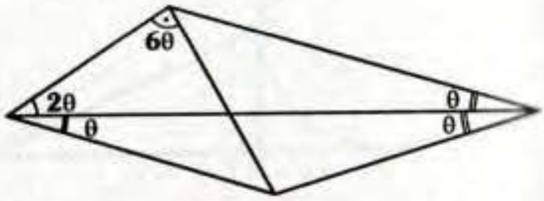
Del gráfico I es incentro de ABC, AB=IC, calcule α.

A) 20°
B) 18°
C) 16°
D) 15°
E) 10°



PROBLEMA Nº 197

Calcule θ.

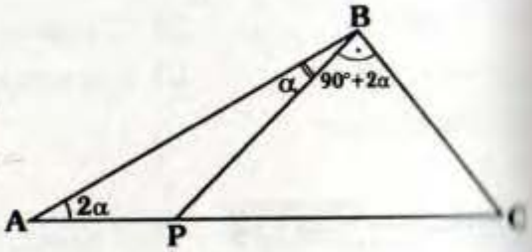


A) 15° B) 10° C) 16°
D) 18° E) 6°

PROBLEMA Nº 198

Si AB=PC, calcule α.

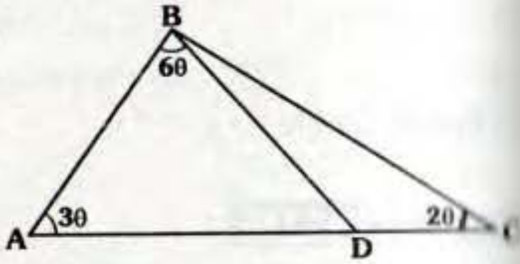
A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 11°
E) 12°



PROBLEMA Nº 199

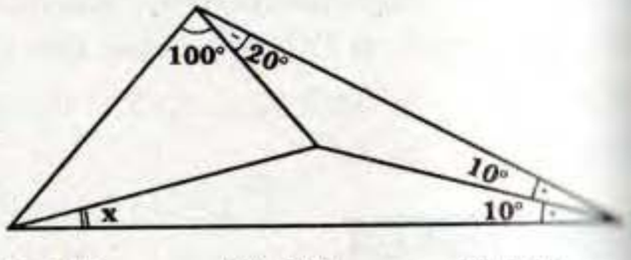
Si AD=BC, calcule θ.

A) 15°
B) 16°
C) 10°
D) 18°
E) 20°



PROBLEMA Nº 200

Calcule x.



A) 14° B) 13° C) 12°
D) 11° E) 10°

Problemas Resueltos Olímpicos

PROBLEMA Nº 201

(Olimpiada Argentina - 1997 - 3er Nivel)

Sea ABCD un paralelogramo y P en su interior tal que :

$m\measuredangle ABP = 2(m\measuredangle ADP)$ y

$m\measuredangle PCD = 2(m\measuredangle PAD)$

Demostrar AB=BP=CP

PROBLEMA Nº 202

(16º Olimpiada Colombiana - 2002)

Sea ABCD un paralelogramo y $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD, sean E y F las intersecciones de $\mathscr{C}$ con los lados BC y CD respectivamente (o sus prolongaciones). Demostrar que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathscr{C}$.

PROBLEMA Nº 203 *10º IMO - 2002*

Sea el triángulo ABC, se ubica D en el lado BC, A es equidistante del incentro de ABD y del excentro de ABC que en la bisectriz ángular de B. Demostrar CA=DC.

PROBLEMA Nº 204

(38º Olimpiada internacional - 1997 Argentina)

En un triángulo isósceles ABC(AB=BC) se traza la bisectriz interior CF, luego por el circuncentro O del triángulo ABC se traza una recta perpendicular a $\overline{CF}$ que intersecta a $\overline{BC}$ en P, por P se traza una paralela a $\overline{CF}$ que interseca a $\overline{AB}$ en R.

Demostrar que FR=BP.

PROBLEMA Nº 205 *4º Olimpiada Rusa -1996*

Sea el triángulo ABC (CA=CB), O es circuncentro, I es incentro, D es un punto en $\overline{BC}$ tal que $\overline{DO}$ es perpendicular a $\overline{BI}$. Demostrar que $\overline{DI}$ es paralelo a $\overline{CA}$.

PROBLEMA Nº 206

(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatence 2002)

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita y O circuncentro del triángulo ABC con $AC \neq BC$. La recta tangente a $\mathscr{C}$ trazada por C corta a $\overline{AB}$ en M. La recta perpendicular a $\overline{OM}$ trazada por M corta a las rectas BC y AC en P y Q respectivamente.

Demostrar que PM=MQ.

PROBLEMA Nº 207

(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatence 2002)

Sea ABC un triángulo tal que $m\measuredangle BAC = 45°$. Sean P y Q puntos interiores al triángulo ABC tal que:

$m\measuredangle ABQ = m\measuredangle QBP = m\measuredangle PBC$ y

$m\measuredangle ACQ = m\measuredangle QCP = m\measuredangle PCB$

Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados CA y AB respectivamente. Demostrar que Q es ortocentro del triángulo ADE.

PROBLEMA Nº 208

(Shariguin 1989 - problemas de planimetría - Editorial MIR. Moscú)

Demostrar que si en un triángulo un ángulo interior mide 120°, el triángulo que tiene como vértices, los pies de las bisectrices interiores, es triángulo rectángulo.

PROBLEMA Nº 209

(19° Olimpiada Iberoamericana, España 2004)

Se ubica en un plano un punto P y una circunferencia. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo APB, donde $\overline{AB}$ es diámetro de $\mathscr{C}$.

PROBLEMA Nº 210

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores en T, se ubica A en $\mathscr{C}_1$ ($A \neq T$) desde el cual se trazan las tangentes AP y AQ a $\mathscr{C}_2$ (P y Q puntos de tangencia) las cuales cortan a $\mathscr{C}_1$ en B y C respectivamente. Demostrar que el punto medio del segmento PQ es excentro del triángulo ABC.

SOLUCIONARIO

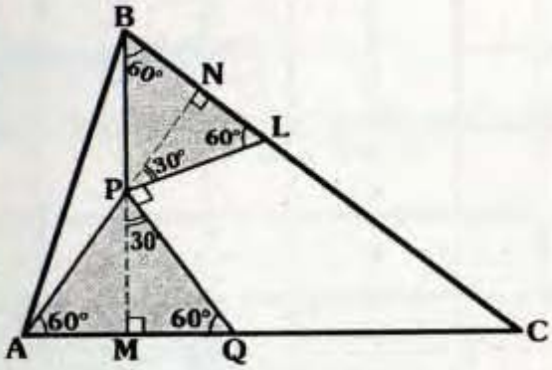
Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Solucionario Ciclo Anual

RESOLUCIÓN N° 01



- ΔBLP : Por ángulo exterior:

  $m\measuredangle LPM = 120°$

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle MPQ = 30°$

- Se nota : $m\measuredangle PMQ = 90°$

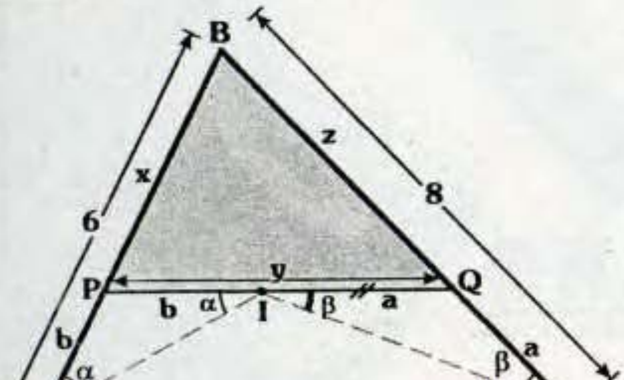
  $\Rightarrow \quad \overline{BM}$ es altura

- Del mismo modo $\overline{AN}$ es altura

  $\therefore$ **P es ortocentro del ΔABC.**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 02



- Como "I" es incentro :

  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = \alpha \quad y$

  $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = \beta$

- Por ángulos alternos internos :

  $m\measuredangle PIA = \alpha \;\; y \;\; m\measuredangle QIC = \beta$

- ΔAPI : Isósceles $\Rightarrow AP = PI = b$

- ΔIQC : Isósceles $\Rightarrow CQ = QI = a$

- $\text{Perím.}_{\Delta BQP} = x + y + z \qquad \ldots (I)$

- Se observa :

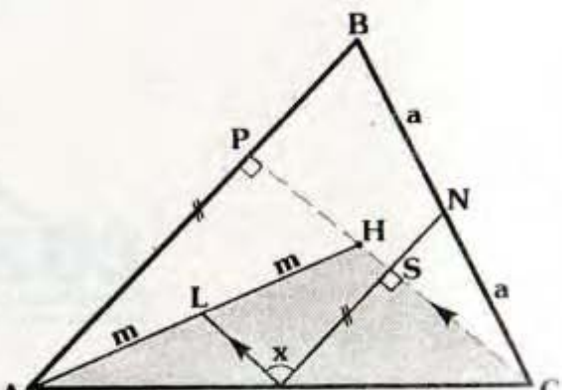
$$\begin{aligned} b + x &= 6 \\ a + z &= 8 \quad (+) \\ \hline \underbrace{a+b}_{y} + x + z &= 14 \end{aligned}$$

- En (I):

  $\therefore$ **$\text{Perím.}_{\Delta BQP} = 14$**

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN N° 03



- Como "H" es ortocentro $\Rightarrow \overline{CP}$ es altura
- $\overline{MN}$: Base media del ΔABC

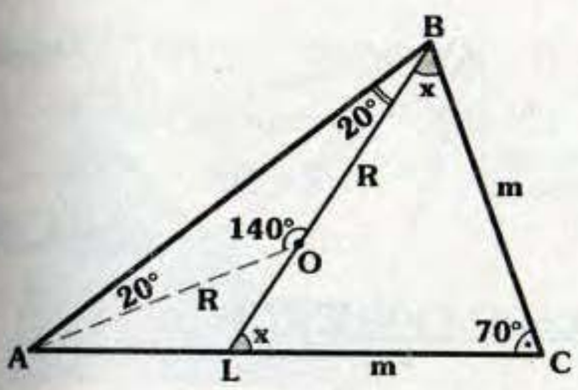
  $\Rightarrow \overline{MN} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle MSC = 90^\circ$
- $\overline{LM}$: Base media del ΔAHC

  $\Rightarrow \overline{LM} // \overline{HC}$

  $\therefore \ \mathbf{x = 90^\circ}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 04



- Como O es circuncentro

  $\Rightarrow \ AO = OB = R$

  y $m\measuredangle AOB = 140^\circ$
- Por teorema fundamental :

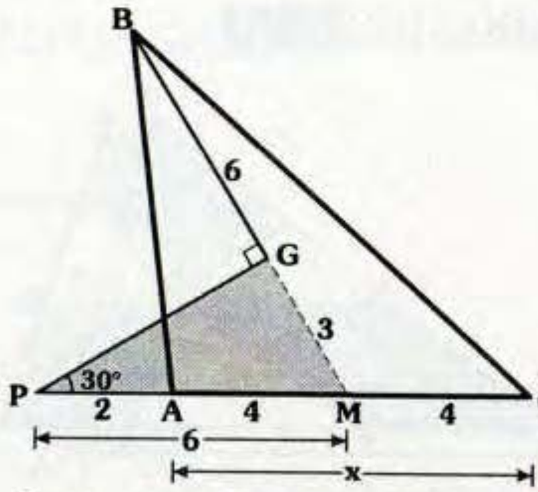
  $$m\measuredangle BCA = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$
- ΔLBC: $x + x + 70^\circ = 180^\circ$

  $\therefore \ \mathbf{x = 55^\circ}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 05

- Prolongamos $\overline{BG}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, como G es baricentro: $AM = MC$.



- Por teorema fundamental :

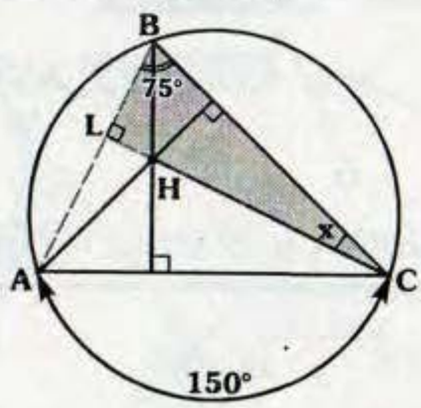
  $$GM = \frac{6}{2} = 3$$
- $\triangle PGM$:

  Notable de 30° y $60^\circ \Rightarrow PM = 6$
- $AM = 6 - 2 = 4$

  $\therefore \ \mathbf{x = 8}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 06



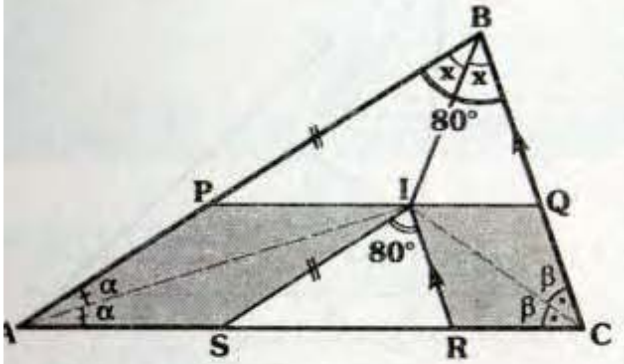
- Al trazar $\overline{AB}$, por ángulo inscrito :

  $m\measuredangle ABC = 75^\circ$
- Se observa que H es el ortocentro del $\Delta ABC \Rightarrow \overline{CL}$ es altura
- $\triangle LBC$: $x + 75^\circ = 90^\circ$

  $\therefore \ \mathbf{x = 15^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 07



Recordar que en el rombo la diagonal es parte de la bisectriz interior :

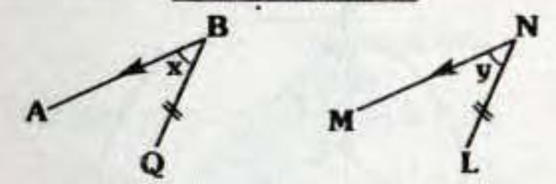
$\Rightarrow \quad m\measuredangle PAI = m\measuredangle IAS = \alpha \quad$ y

$m\measuredangle QCI = m\measuredangle ICR = \beta$

Luego : I es incentro del ΔABC

$\Rightarrow \quad m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = x$

Observación



Si $\overline{AB} // \overline{MN}$ y $\overline{BQ} // \overline{NL} \Rightarrow \boxed{x = y}$

$\overline{AB} // \overline{IS}$ y $\overline{BC} // \overline{IR}$

De la observación :

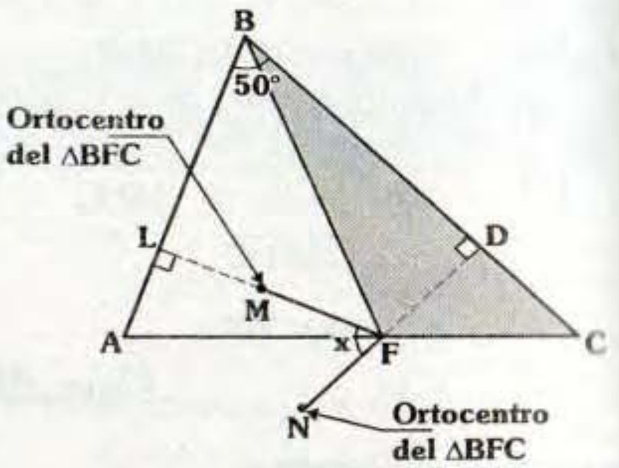
$m\measuredangle ABC = m\measuredangle SIR = 80°$

En "B" : $\quad x + x = 80°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 08

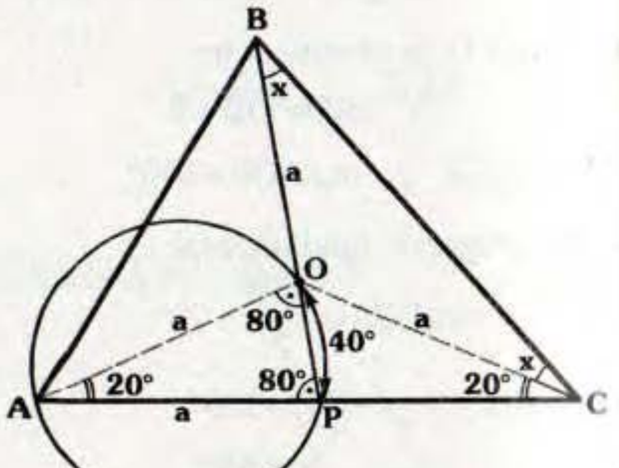


- M : Ortocentro $\Rightarrow \overline{FL}$: Altura.
- N : Ortocentro $\Rightarrow \overline{FD}$: Altura.
- ⌂LBDF : Inscriptible

$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 09



- O : Circuncentro del ΔABC

$\Rightarrow \quad AO = BO = CO = a$

- ΔAOC : Isósceles

$\Rightarrow \quad m\measuredangle OCA = 20°$

- ΔAOP : Isósceles

  $\Rightarrow\ m\measuredangle OPA = m\measuredangle AOP = 80^\circ$

- ΔBOC : Isósceles $\Rightarrow\ m\measuredangle OCB = x$

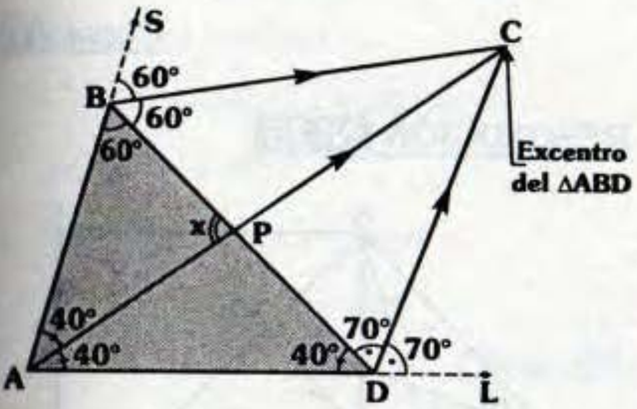
- ΔBPC: Por ángulo exterior

  $\Rightarrow\ x + x + 20^\circ = 80^\circ$

  $\therefore\ \mathbf{x = 30^\circ}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 10



- Del gráfico :

  $m\measuredangle SBC = 60^\circ$ y $m\measuredangle CDL = 70^\circ$

- $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DC}$ son bisectriz exteriores

  $\Rightarrow\ \overrightarrow{AC}$: Bisectriz del $\measuredangle BAD$

- Como:

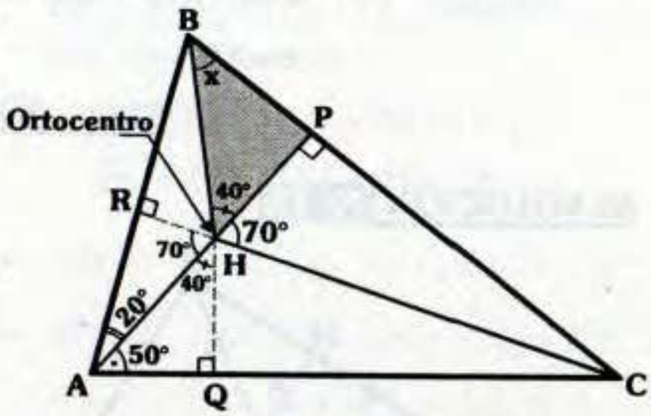
  $m\measuredangle BAD = 80^\circ \Rightarrow\ m\measuredangle CAD = 40^\circ$

- ΔAPD : $40^\circ + 40^\circ = x$

  $\therefore\ \mathbf{x = 80^\circ}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 11

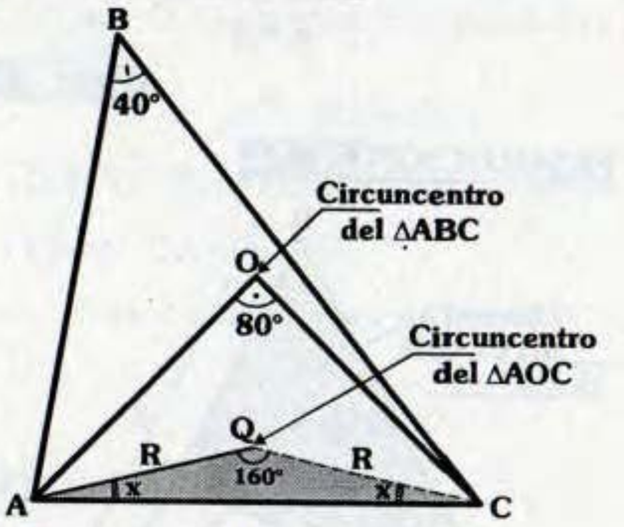


- Prolongamos $\overline{CH}$ hasta que corte a $\overline{AB}$ en R, con lo cual nos damos cuenta que $\overline{CR}$ es altura $\Rightarrow$ H es ortocentro del ΔABC.
- Por el criterio principal: $\overline{BQ}$ es altura.
- En $\triangle HPB$: $x + 40^\circ = 90^\circ$

  $\therefore\ \mathbf{x = 50^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 12



- Por teorema fundamental :

  ΔABC: $m\measuredangle AOC = 2(40^\circ) = 80^\circ$

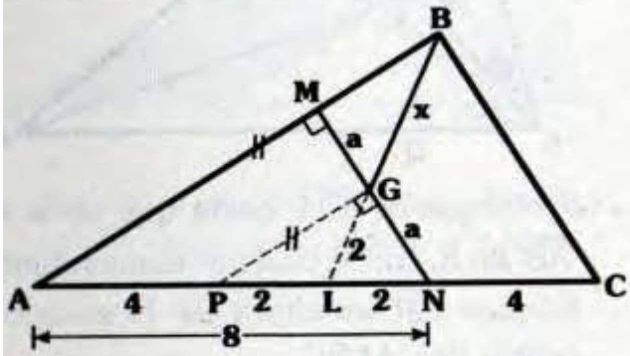
  ΔAOC: $m\measuredangle AQC = 2(80^\circ) = 160^\circ$

- ΔAQC :
  Isósceles $\Rightarrow$ $x+x+160^{\circ}=180^{\circ}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=10^{\circ}}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 13

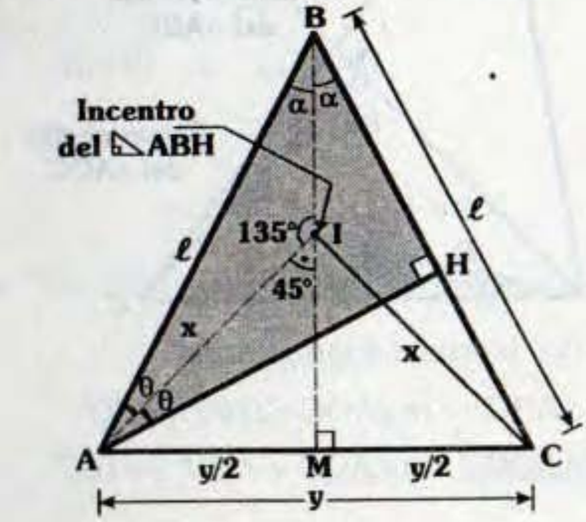


- Al prolongar $\overline{BG}$, $\overline{BL}$ es mediana
  $\Rightarrow$ $AL=LC=6$
- $\overline{GP}$: Base media ◺AMN
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PGN=90^{\circ}$ y $AP=PN=4$
- ◺PGN : Como $PN=LN$ $\Rightarrow$ $GL=2$
- Por teorema fundamental : $x=2(GL)$

  $\therefore$ $\mathbf{x=4}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 14



- I : Incentro $\Rightarrow$ $\overline{BI}$ bisectriz y

$$m\measuredangle AIB=90^{\circ}+\frac{90^{\circ}}{2}=135^{\circ}$$

(Teorema Fundamental)

- Como el ΔABC es isósceles

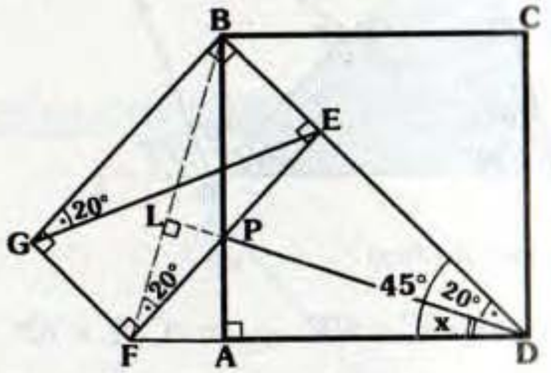
$$\Rightarrow \quad AM=MC=\frac{y}{2} \quad y \quad AI=x$$

- ◺AMI : Notable $\Rightarrow$ $x=\dfrac{y\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 15

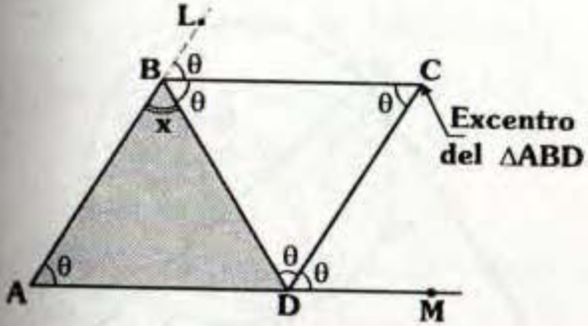


- BEFG : Rectángulo
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BFE=m\measuredangle BGE=20^{\circ}$
- P : Ortocentro del ΔFBD
  $\Rightarrow$ $\overline{DL}$ es altura
- ABCD: Cuadrado $\Rightarrow$ $m\measuredangle BDA=45^{\circ}$
- En "D" : $x+20^{\circ}=45^{\circ}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=25^{\circ}}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 16



- Como ABCD es un paralelogramo :

  $m\measuredangle LBC = m\measuredangle BAD = m\measuredangle BCD = \theta$

- C es excentro del ΔABD

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle LBC = m\measuredangle CBD = \theta$

- En forma análoga :

  $m\measuredangle MDC = m\measuredangle CDB = \theta$

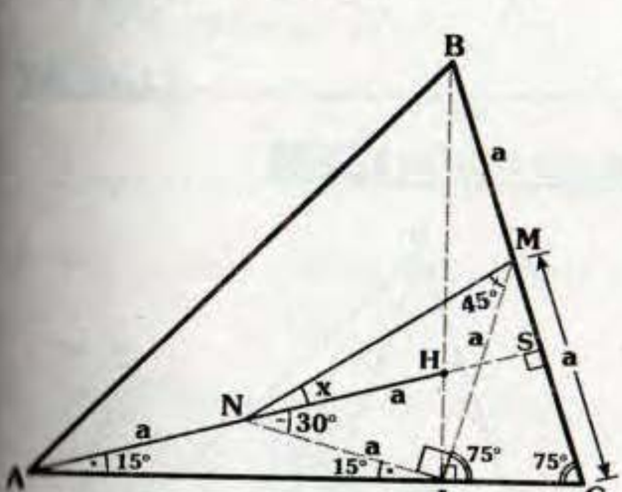
- $\Delta CBD : \theta = 60°$

- En "B" : $\theta + \theta + x = 180°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 60°}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 17



- Como H es ortocentro : $\overline{AS}$ y $\overline{BL}$ son alturas.

- ◺ASC : $m\measuredangle SAC = 15°$

- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en :

  ◺AHL : $AN = NH = NL = a$

  ◺BLC : $BM = MC = ML = a$

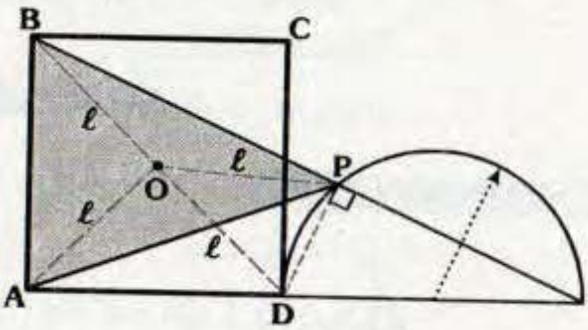
- ΔANL: Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle ALN = 15°$

- ΔNLM: Notable $\Rightarrow x + 30° = 45°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 15°}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 18



- Como O es centro del cuadrado ABCD

  $\Rightarrow \quad AO = BO = DO = \ell$

- ◺BPD: Teorema de la ◺ $\Rightarrow OP = \ell$

- Como $OA = OB = OP$

  $\therefore$ **O es circuncentro del ΔABP**

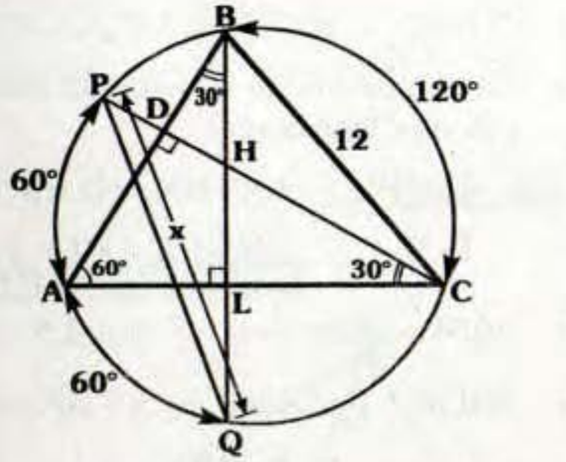
Clave C

RESOLUCIÓN N° 19

- $\overline{BL}$ y $\overline{CD}$ son alturas

- Por ángulo inscrito : $m\widehat{BC} = 120°$

- ◺ABL : $m\measuredangle ABL = 30°$



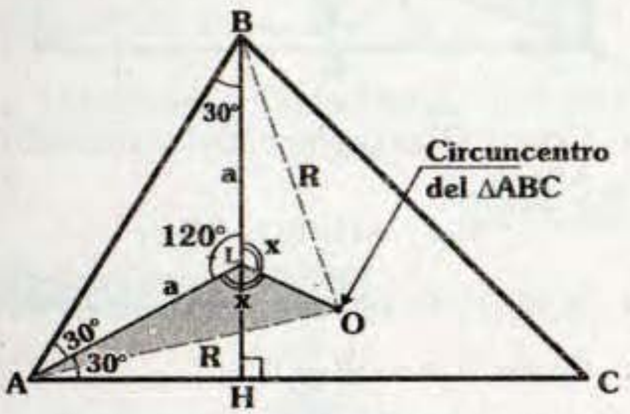
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{AQ} = 60°$
  $m\widehat{AP} = 60°$
- Como :

  $m\widehat{BC} = m\widehat{PQ} = 120° \Rightarrow PQ = QC$

  $\therefore$ **x = 12**

Clave D

RESOLUCIÓN N° 20

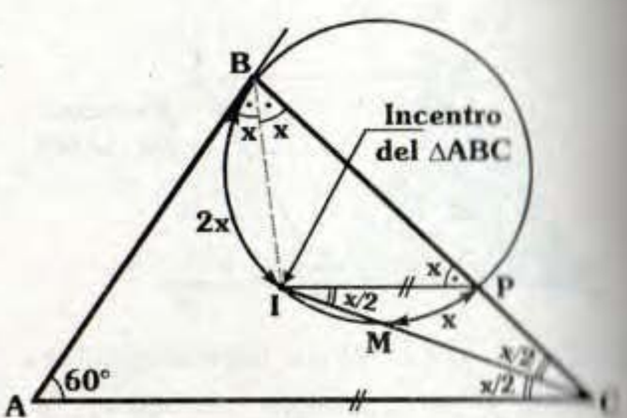


- ΔABH : $m\measuredangle ABH = 30°$
- ΔABL : Isósceles $\Rightarrow$ AL=LB=a
- $\Delta ALO \cong \Delta BOL$ (L.L.L.)
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ALO = x$
- En "L" : $x+x+120°=360°$

  $\therefore$ **x = 120°**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 21



- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle PIM = x/2$
- $\overline{IP} // \overline{AC}$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle ICA = x/2$

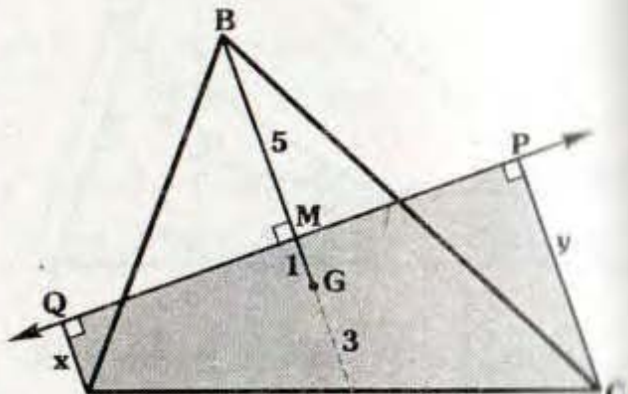
  (ángulos alternos internos)
- Como I es incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle BCI = x/2$
- Por ángulos correspondientes :

  $m\measuredangle IPB = x$
- Por ángulo semiincrito : $m\measuredangle ABI = x$
- I : Incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = x$
- ΔABC: $60°+2x+x=180°$

  $\therefore$ **x = 40°**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 22



- Prolongamos $\overline{BG}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en N, entonces AN=NC=m.
- Por teorema fundamental :

$$GN=\frac{6}{2}=3$$

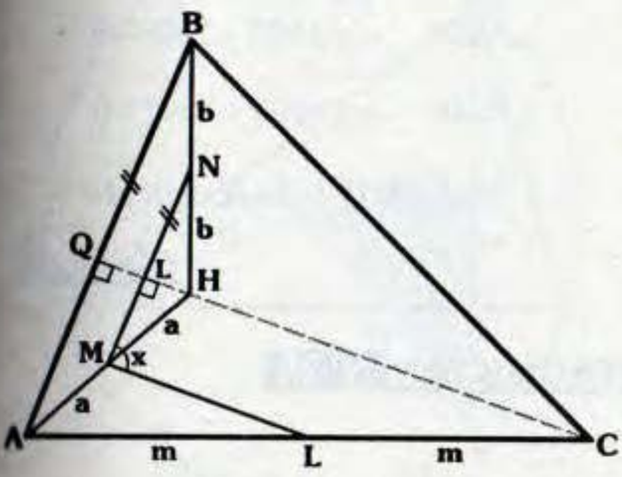
- $\overline{MN}$ es base media del trapecio AQPC :

$$\frac{x+y}{2}=4$$

$$\therefore\ \mathbf{x+y=8}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 23



- Como H es ortocentro : $\overline{CQ}$ es altura
- $\overline{MN}$: Base media del ΔABH

$$\Rightarrow\ \overline{CL}\perp\overline{MN}$$

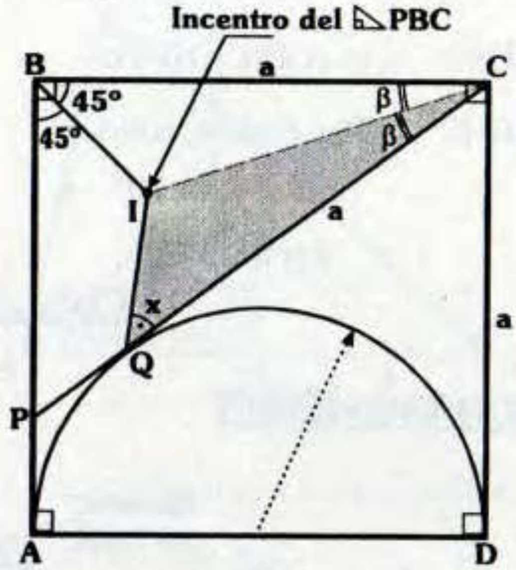
- $\overline{ML}$: Base media del ΔAHC

$$\Rightarrow\ \overline{ML}\,//\,\overline{CH}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90^o}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 24



- Como I es incentro :

$$m\measuredangle PBI=m\measuredangle IBC=45^\circ$$

$$m\measuredangle BCI=m\measuredangle ICQ$$

- Como $\overline{CQ}$ y $\overline{CD}$ son tangentes

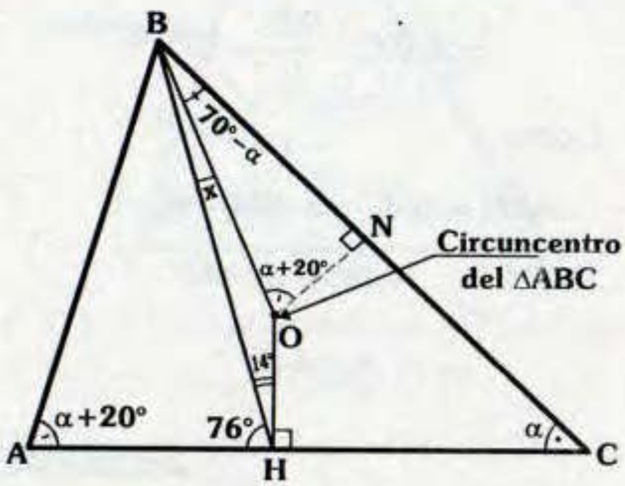
$$\Rightarrow\ CQ=CD=a$$

- $\Delta BCI\cong\Delta QCI$ (L.A.L.)

$$\therefore\ \mathbf{x=45^o}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 25



- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle BON = m\measuredangle BAC = \alpha + 20^\circ$$

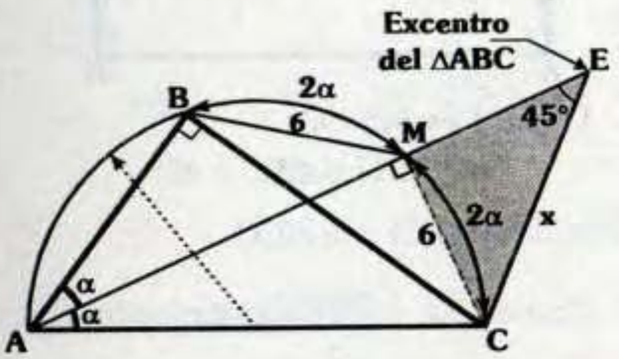
- ΔBNO : $m\measuredangle OBN = 70^\circ - \alpha$
- ΔBHC : Por ángulo exterior

$$\Rightarrow \quad 76^\circ = \alpha + x + 70^\circ - \alpha$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 26



- Por teorema :

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle AMC = 90^\circ$$

- E : Excentro del $\triangle ABC$:

$$\Rightarrow m\measuredangle BAE = m\measuredangle EAC = \alpha$$

- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AEC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

- Como :

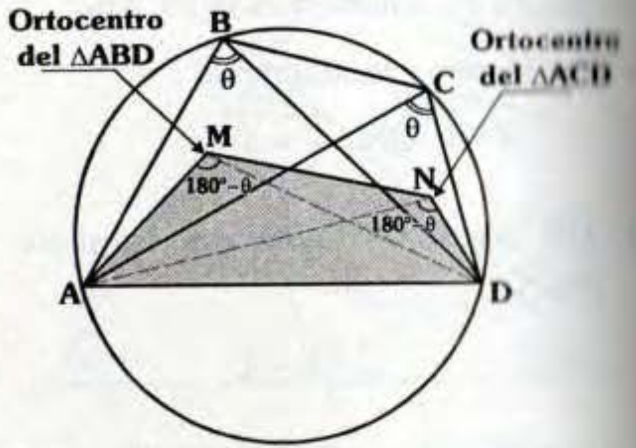
$$m\overset{\frown}{BM} = m\overset{\frown}{MC} \Rightarrow BM = MC = 6$$

- $\triangle EMC$: Notable de 45°

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 27



- Por ángulo inscrito :

$$m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACD = \theta$$

- Como M y N son ortocentros, por teorema fundamental :

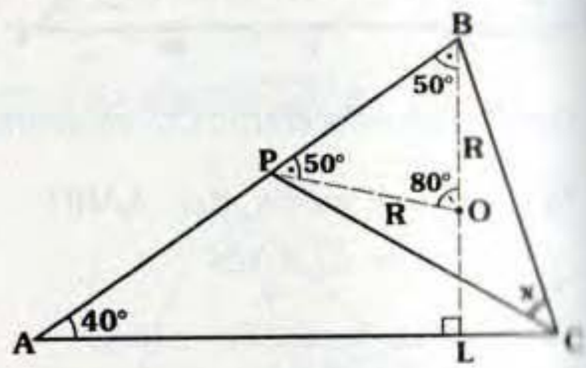
$$\Delta ABD: \quad m\measuredangle AMD = 180^\circ - \theta$$

$$\Delta ACD: \quad m\measuredangle AND = 180^\circ - \theta$$

$$\therefore \quad \square \mathbf{AMND : Inscriptible}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 28



- O : Ortocentro del ΔABC

$\Rightarrow \overline{BL}$ es altura y en $\triangle ALB$:

$$m\measuredangle ABL = 50^\circ$$

- O : Circuncentro del ΔPBC

  $\Rightarrow \quad BO = OP = R$

- ΔPBO: Isósceles

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BPO = 50^\circ$ y

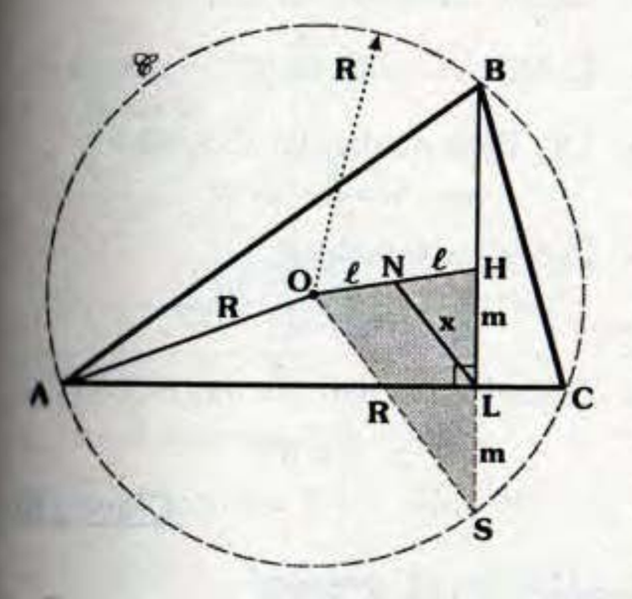
  $m\measuredangle BOP = 80^\circ$

- Por teorema fundamental de circuncentro en ΔPBC :

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{80^o}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 29



- Se observa que R es el circunradio del :

  $\Delta ABC \Rightarrow OS = R$

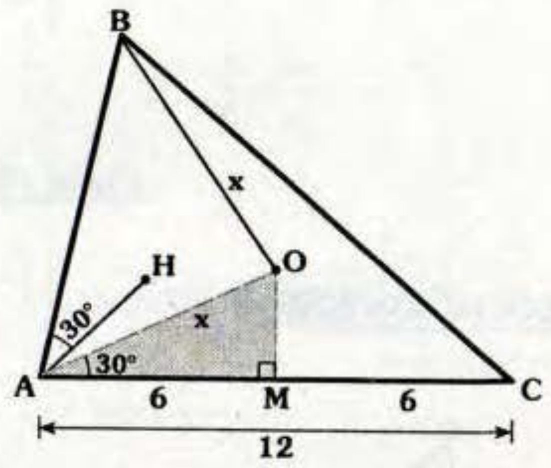
- Teorema 9.5. : $HL = LS = m$

- $\overline{NL}$: Base media del ΔOHS

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{R}{x} = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 30



- O : Circuncentro $\Rightarrow OA = OB = x$

- Por el teorema 9.4 :

  $m\measuredangle OAC = m\measuredangle HAB = 30^\circ$ y

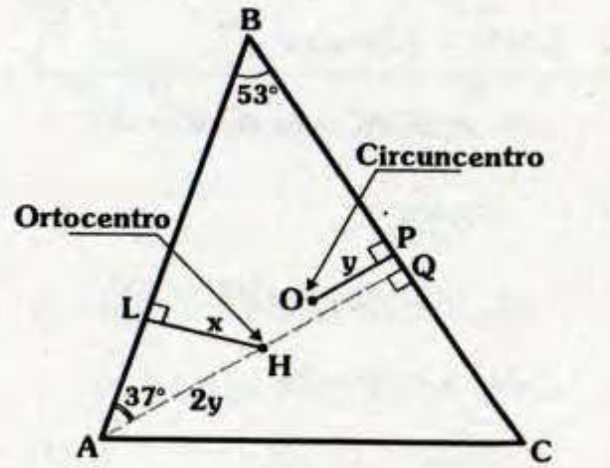
  $AM = MC = 6$

- $\triangle OMA$: Notable 30° y 60°

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4\sqrt{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 31



- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AQ}$ es altura

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BAQ = 37^\circ$

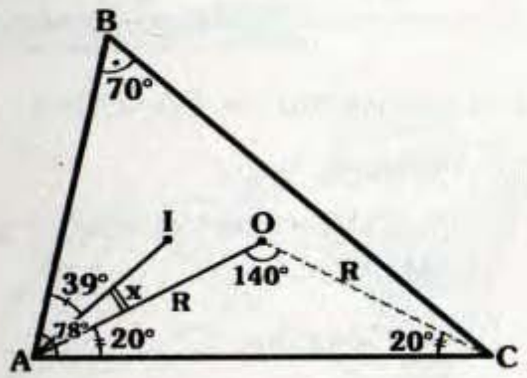
- Por el teorema 9.6: $AH = 2(OP) = 2y$

- $\triangle$ALH : Notable $\Rightarrow \dfrac{x}{2y}=\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{6}{5}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 32



- Como O es circuncentro por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AOC=140^\circ$$

- ΔAOC : Isósceles

$$\Rightarrow\ m\measuredangle OAC=m\measuredangle OAC=20^\circ$$

- I : Incentro

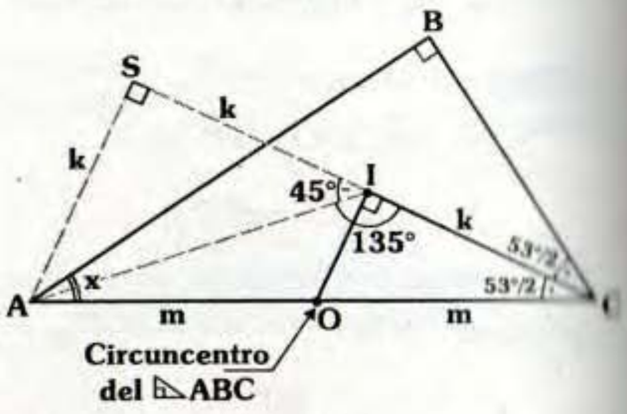
$$\Rightarrow\ m\measuredangle BAI=m\measuredangle IAC=39^\circ$$

$$\Rightarrow\ x+20^\circ=39^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=19^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 33



- Por teorema fundamental :

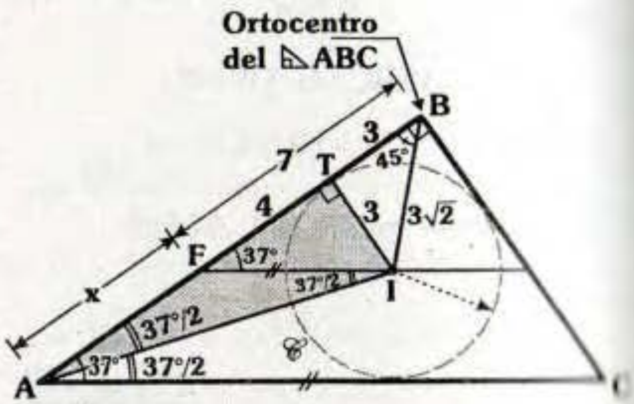
$$m\measuredangle AIC=90^\circ+\frac{90^\circ}{2}=135^\circ$$

- Luego, trazamos $\overline{AS}\perp\overleftrightarrow{CI}$.
- $\triangle$ASI : Notable de 45° $\Rightarrow$ AS = SI = k
- $\overline{OI}$: Base media del $\triangle$ASC
  $\Rightarrow$ SI=IC=53°/2
- $\triangle$ASC : Notable
  $\Rightarrow$ m∡ACS=53°/2
- Como I es incentro $\Rightarrow$ m∡BCI=53°/2

$$\therefore\ \mathbf{x=37^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 34

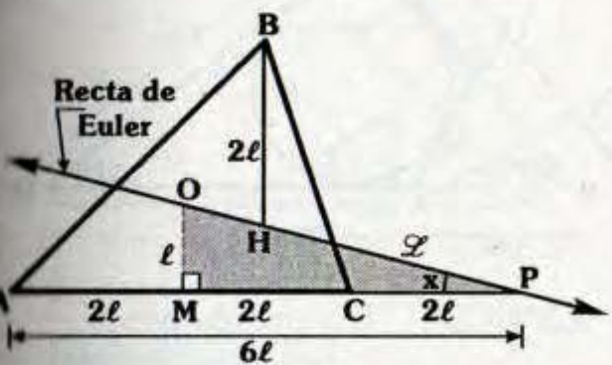


- Al trazar la circunferencia inscrita :
  $IT = BT = 3$
- $\triangle$FTI : Notable $\Rightarrow m\measuredangle TFI = 37^\circ$
- Como $\overline{AC} // \overline{FI} \Rightarrow m\measuredangle BAC = 37^\circ$
- I : Incentro
  $\Rightarrow m\measuredangle BAI = m\measuredangle IAC = 37^\circ/2$
- $\triangle$ATI : Notable de $37^\circ/2 \Rightarrow AT = 9$

$\therefore$ **x = 5**

Clave E

RESOLUCIÓN N° 35



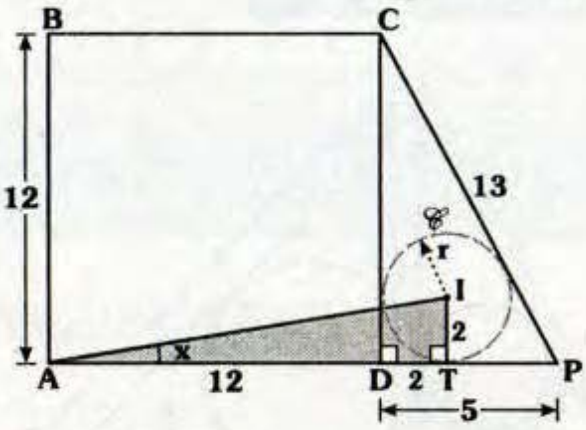
- Por el teorema 9.6: $OM = \ell$
- Por el teorema 9.4: $AM = MC = 2\ell$
- $\triangle$OMP : Notable: $MP = 4(OM)$

$\therefore$ **x = 14**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 36

- $\triangle$CDP : $(CD)^2 = 13^2 - 5^2$
  $\Rightarrow CD = 12$
- $\triangle$CDP : Teorema de Poncelet
  $\Rightarrow 5 + 12 = 13 + 2r \Rightarrow r = 2$

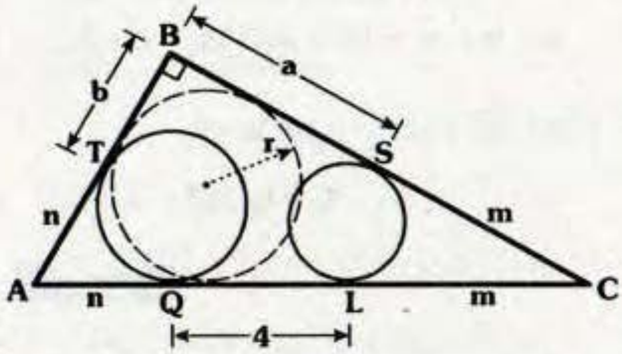


- Por teorema :
  $DT = TI = 2$
- $\triangle$ATI : Notable : $AT = 7(IT)$

$\therefore$ **x = 8°**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 37

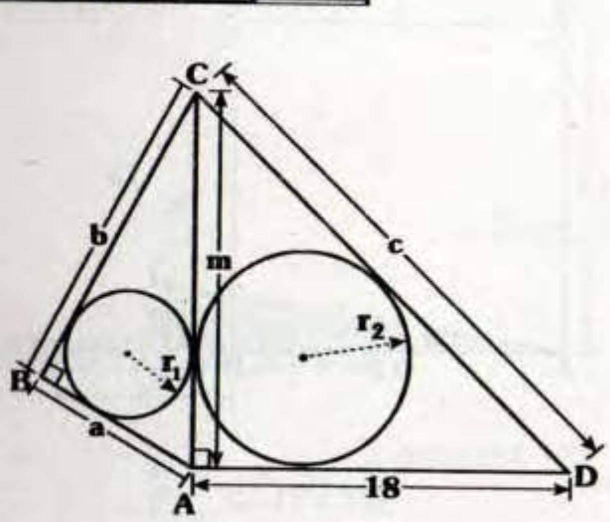


- Por teorema:
  $AT = AQ = n$ y $CS = CL = m$
- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet
  $\Rightarrow b + \cancel{n} + a + \cancel{m} = \cancel{m} + \cancel{n} + 4 + 2r$
- Pero : $a + b = 10$ (dato)
  $\Rightarrow 10 = 4 + 2r$

$\therefore$ **r = 3**

Clave E

RESOLUCIÓN N° 38



- ◺ABC : Teorema de Poncelet :

$$a+b=m+2r_1 \quad \ldots (I)$$

- ◺CAD : Teorema de Poncelet :

$$m+18=c+2r_2 \quad \ldots (II)$$

- (I) + (II) :

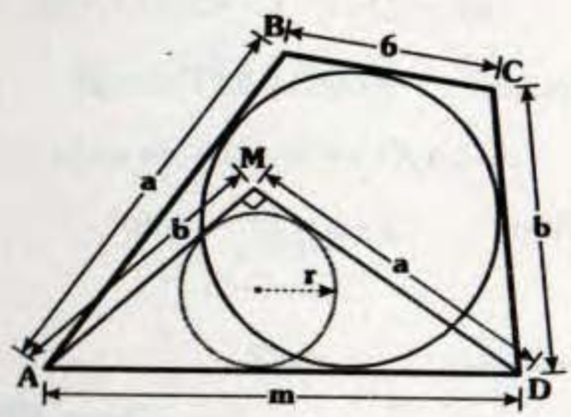
$$a+b+\cancel{m}+18=\cancel{m}+2r_1+c+2r_2$$

- Pero del dato : $a+b=c$

$$\therefore \quad \mathbf{r_1+r_2=9}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 39



- ⏢ABCD : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow \; a+b=6+m \quad \ldots (I)$$

- ◺AMD: Teorema de Poncelet

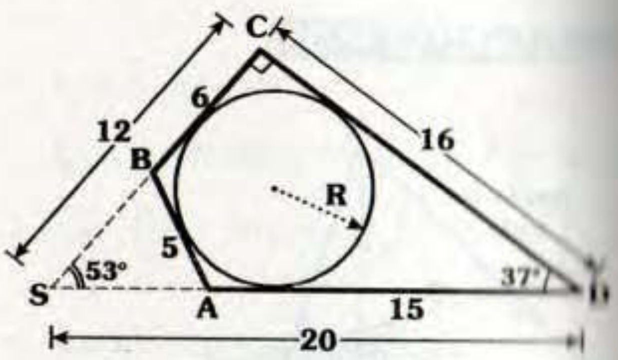
$$\Rightarrow \; a+b=m+2r \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II) : $6+m=m+2r$

$$\therefore \quad \mathbf{r=3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 40



- ⏢ABCD : Teorema de pitot

$$\Rightarrow \; CD+5=6+15$$

$$\Rightarrow \quad CD=16$$

- Prolongamos $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$ hasta que se corten en "S".
- ◺SCD : es notable de 37° y 53°

$$\Rightarrow \; SC=12 \quad y \quad SD=20$$

- ◺SCD : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \; 12+16=20+2R$$

$$\therefore \quad \mathbf{R=4}$$

Clave B

Solucionario

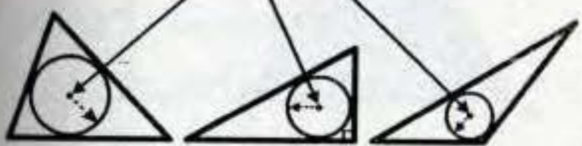
Ciclo Cepre-Uni

RESOLUCIÓN N° 41

I. **Proposición Falsa**

Por teorema el baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo mediano. (Ver teorema 11.2).

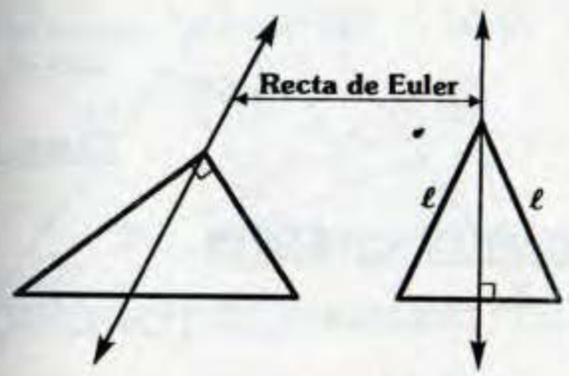
II. **Proposición Verdadera**



Se nota que el incentro siempre es un punto interior al triángulo.

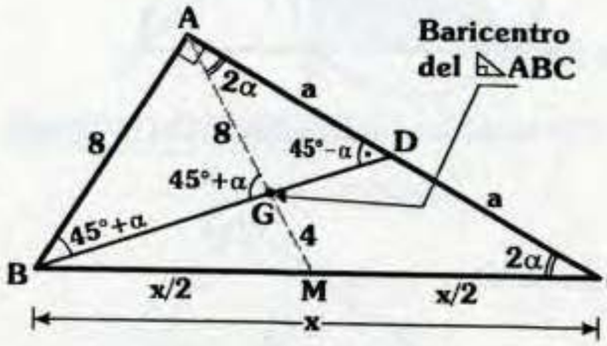
III. **Proposición Falsa**

La recta de Euler pasa por un vértice en los triángulos isósceles y rectángulo.



Clave C

RESOLUCIÓN N° 42



- Trazamos la mediana AM.
- ◺: $BM=MC=AM=x/2$
- ΔAMC : Isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle MAC=2\alpha$
- Se observa :

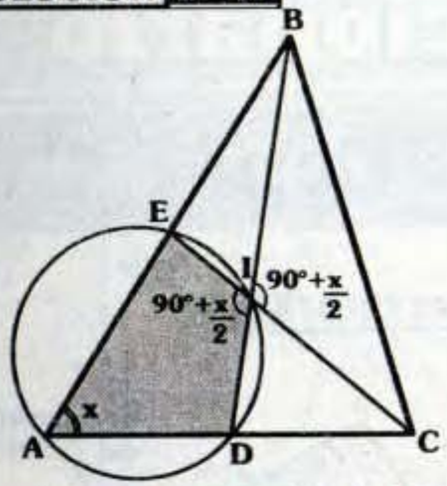
  $m\measuredangle AGB=2\alpha+45°-\alpha=45°+\alpha$
- ΔABG : Isósceles $\Rightarrow AG=8$
- G : Baricentro del ◺ABC

  $$\Rightarrow \quad GM=\frac{8}{2}=4$$
- Pero : $\dfrac{x}{2}=12$

  $$\therefore \quad \mathbf{x=24}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 43



Por teorema fundamental del incentro:

$$m\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

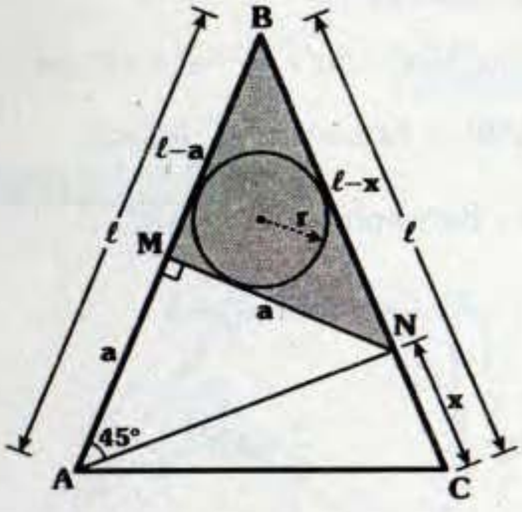
⏢AEID : Inscrito

$$\Rightarrow \quad x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 44



◺AMN : Notable de 45°

$$\Rightarrow \quad AM = MN = a$$

- Por diferencia :

$$BN = \ell - x \quad y \quad BM = \ell - a$$

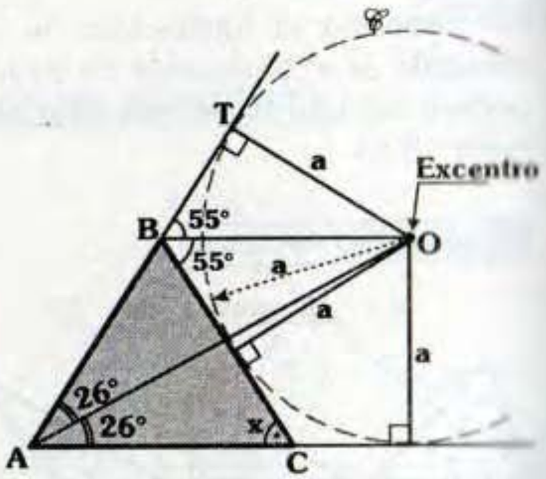
- ◺BMN : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \quad \ell - a + a = \ell - x + 2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2r}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 45



- Con centro en O y radio "a", trazamos la circunferencia 𝒞.
- Notamos que O es excentro, se cumple :

$$m\measuredangle CAO = m\measuredangle BAO = 26^\circ \quad y$$
$$m\measuredangle TBO = m\measuredangle OBC = 55^\circ$$

- ΔABC : $52^\circ + x = 110^\circ$

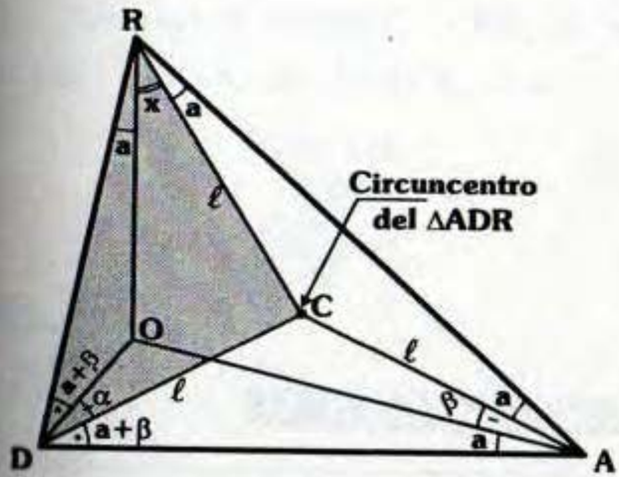
$$\therefore \quad \mathbf{x = 58^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 46

- C : Circuncentro $\Rightarrow$ DC=RC=AC=ℓ
- ΔRCA : Isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CRA = m\measuredangle CAR = a$$



- Por el teorema 9.4 :

  $m\measuredangle ORD = a \quad y \quad m\measuredangle OAD = a$

- ΔDCA : Isósceles

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle CDA = a+\beta$

- Por el teorema 9.4: $m\measuredangle RDO = a+\beta$

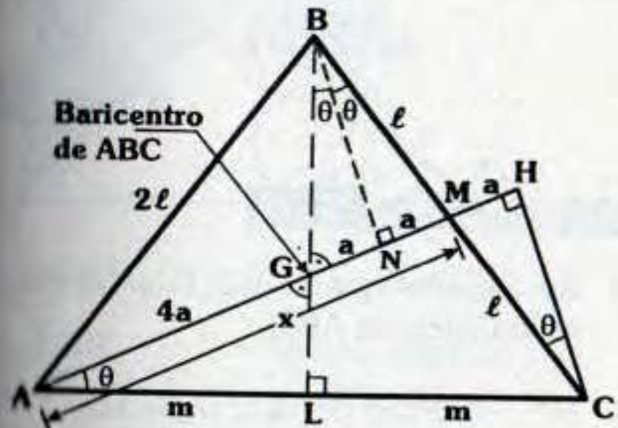
- ΔCDR : Isósceles

  $\Rightarrow \quad a+x = a+\underbrace{\beta+\alpha}_{38^\circ}$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 38^\circ}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 47



- Trazamos $\overline{BN} \perp \overline{AM}$

- $\Delta BNM \cong \Delta MHC$ (ALA)

  $\Rightarrow \quad MN=a \quad y \quad m\measuredangle MBN = \theta$

- Se observa que $\overline{BN}$ es altura y bisectriz

  $\Rightarrow \quad GN=NM=a$

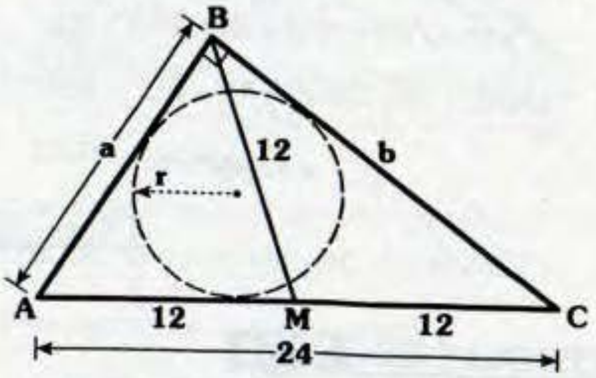
- G : Baricentro de ABC

  $\Rightarrow \quad AG=2(2a)=4a$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 6a}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 48



- Sabemos que la mediana de menor longitud es la mediana relativa a la hipotenusa.

- $\triangle$: $AM=MC=12 \quad \Rightarrow \quad AC=24$

- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

  $\Rightarrow \quad \underbrace{a+b}_{32\ (\text{dato})} = 24+2r$

  $\therefore \quad \mathbf{r = 4}$

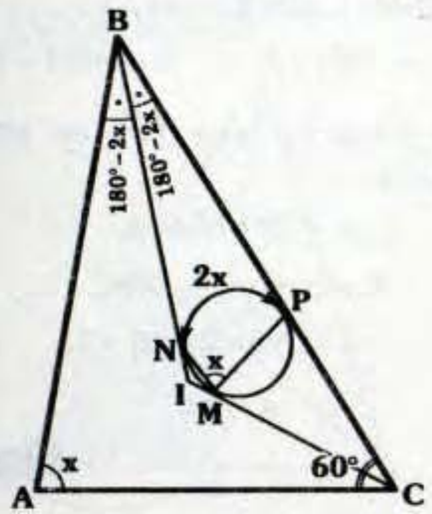
Clave B

RESOLUCIÓN N° 49

- Por ángulo inscrito : $m\overset{\frown}{NP} = 2x$

- $m\measuredangle NBP + 2x = 180^\circ$ (teorema de circunferencia)

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle NBP = 180^\circ - 2x$



- I : Incentro

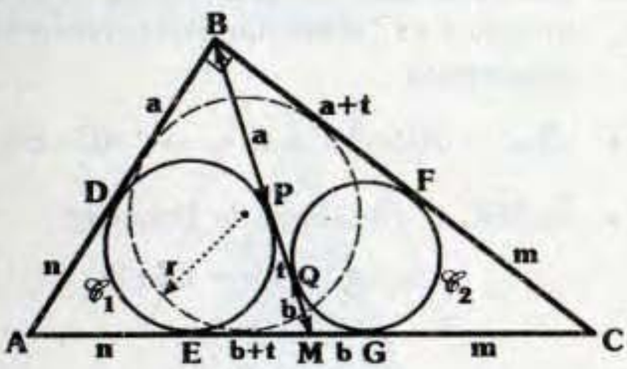
  $\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 180° - 2x$

- ΔABC : $x + 360° - 4x + 60° = 180°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 80°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 50



- Por tangentes :

  En $\mathscr{C}_1$: BD=a , AD=AE=n y
  MP=ME=b+t

  En $\mathscr{C}_2$: BF=a+t , MG=b y
  CF=CG=m

- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

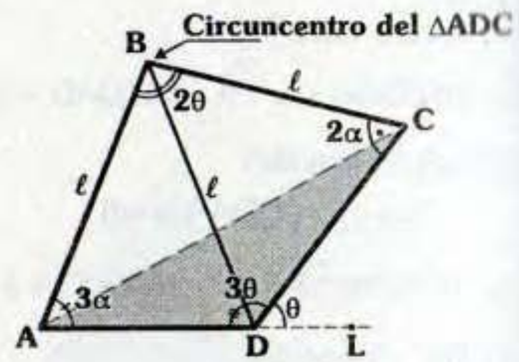
  $\Rightarrow a+\cancel{n}+a+\cancel{t}+\cancel{m}=\cancel{n}+b+\cancel{t}+\cancel{m}+2r$

$$2\underbrace{(a-b)}_{\ell} = 2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{r = \ell}$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 51



- Como $AB = BD = BC = \ell$:

  $\Rightarrow$ B: Circuncentro de ADC

- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle CDL = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

- En "D" : $3\theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 45°$

$$\therefore \quad \mathbf{3\theta - 2\theta = 45°}$$

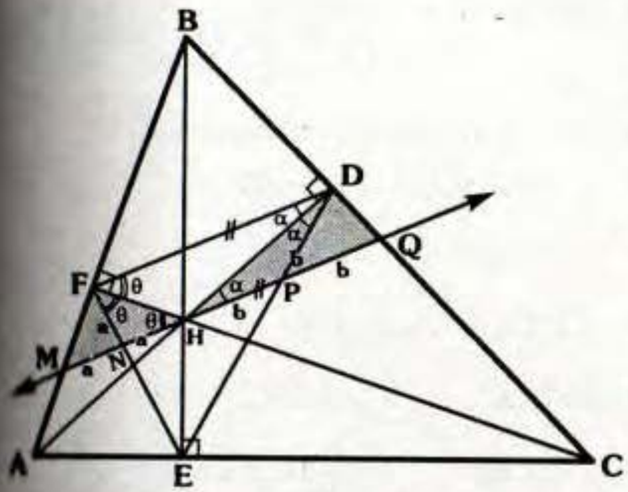
Clave C

RESOLUCIÓN N° 52

- Se observa que el ΔEFD es el triángulo órtico de ABC.

- H : Incentro del ΔEFD (Teorema 11.6)

  $\Rightarrow m\measuredangle DFH = m\measuredangle EFH = \theta$ y
  $m\measuredangle FDH = m\measuredangle EDH = \alpha$



- Por ángulos alternos :

  $m\measuredangle FHM=\theta$ y $m\measuredangle DHQ=\alpha$

- Por el teorema $\triangle$:

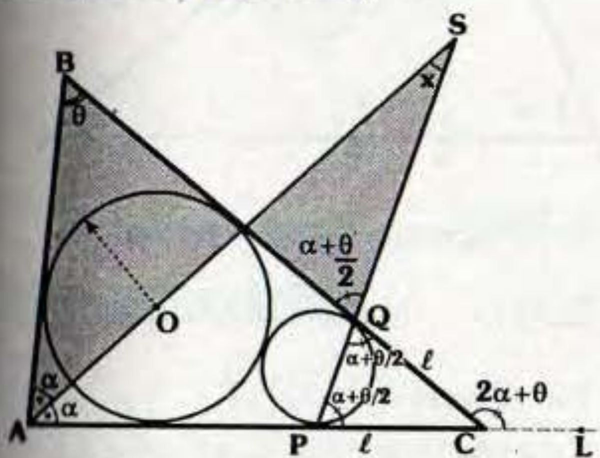
  ΔFMH : $MN=NH=a$

  ΔHDQ : $HP=PQ=b$

  $\therefore$ $\mathbf{MQ=2(a+b)}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 53



- Se sabe : $m\measuredangle BAO=m\measuredangle CAO=\alpha$
- ΔABC : Por ángulo exterior

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BCL=2\alpha+\theta$

- ΔPQC : Isósceles

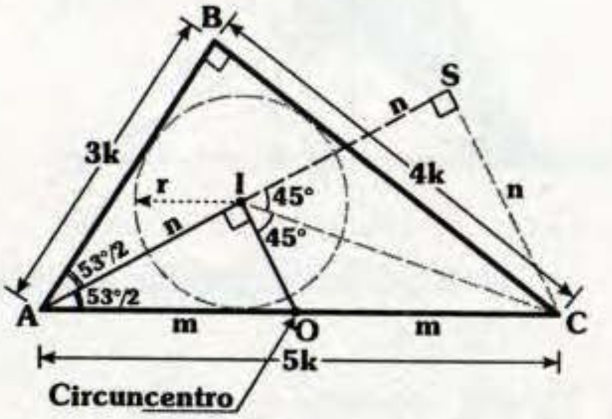
  $\Rightarrow m\measuredangle PQC=m\measuredangle QPC=\alpha+\dfrac{\theta}{2}$

- $\bowtie$: $\alpha+\theta=x+\alpha+\dfrac{\theta}{2}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=\dfrac{\theta}{2}}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 54



- Sabemos que el punto medio O de $\overline{AC}$ es el circuncentro del $\triangle ABC$.
- Por teorema fundamental :

  $m\measuredangle AIC=90^\circ+\dfrac{90^\circ}{2}\Rightarrow m\measuredangle OIC=45^\circ$

- Luego prolongamos $\overline{AI}$ hasta S, tal que: $m\measuredangle ISC=90^\circ$
- $\overline{OI}$: Base media del $\triangle ASC$

  $\Rightarrow$ $AI=IS=n$

- $\triangle ISC$: Notable $\Rightarrow$ $IS=SC=n$
- $\triangle ASC$: Notable $\Rightarrow m\measuredangle SAC=\dfrac{53^\circ}{2}$
- $\triangle ABC$: Notable

  $\Rightarrow AB=3k$, $BC=4k$ y $AC=5k$

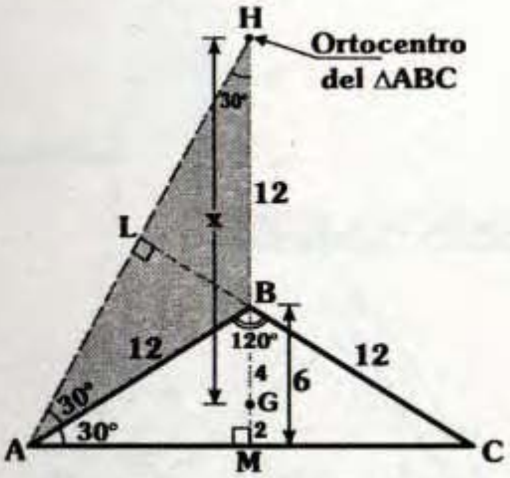
- Teorema de Poncelet :

  $3k+4k=5k+2r \Rightarrow k=r$

  $\therefore$ $\mathbf{Perím._{\triangle ABC}=12r}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 55



Como el triángulo es isósceles

$\Rightarrow$ H, B y G son colineales, además $\overline{HG} \perp \overline{AC}$.

$\triangle$ABM : Notable $\Rightarrow$ BM=6

G : Baricentro $\Rightarrow$ BG = 2(GM) = 4

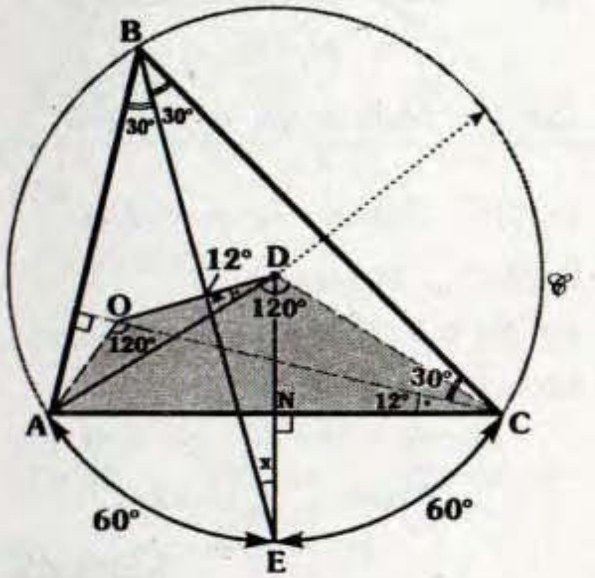
H : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AL}$ es altura

ΔABH: Isósceles $\Rightarrow$ BH=12

$\therefore$ **x = 16**

Clave E

RESOLUCIÓN N° 56



- Sabemos :

$$m\widehat{AE} = m\widehat{EC} = 60°$$

- Por teoremas fundamentales :

$$m\measuredangle AOC = 180° - 60° = 120° \quad y$$

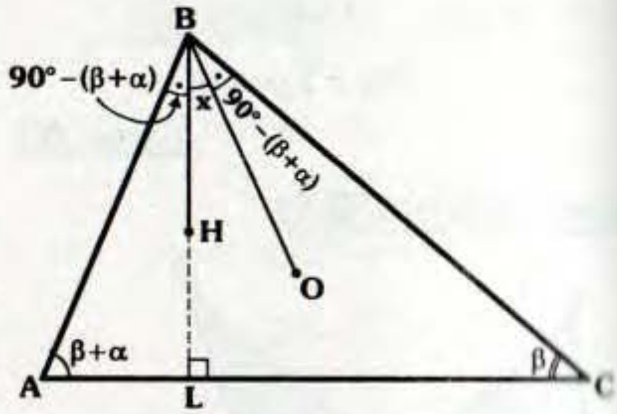
$$m\measuredangle ADC = 2(60°) = 120°$$

- $\triangle$AODC:Inscriptible $\Rightarrow$ m$\measuredangle$OCA = 12°
- $\triangle$BLC : m$\measuredangle$BCL = 30°
- $\triangleright$BCNE : 30° + 42° + x = 90°

$\therefore$ **x = 18°**

Clave E

RESOLUCIÓN N° 57



- H: Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{BL}$ es altura.
- $\triangle$ALB : m$\measuredangle$ABL = 90° − (β + α)
- Por el teorema 9.1:

$$m\measuredangle OBC = m\measuredangle ABL = 90° - (\beta + \alpha)$$

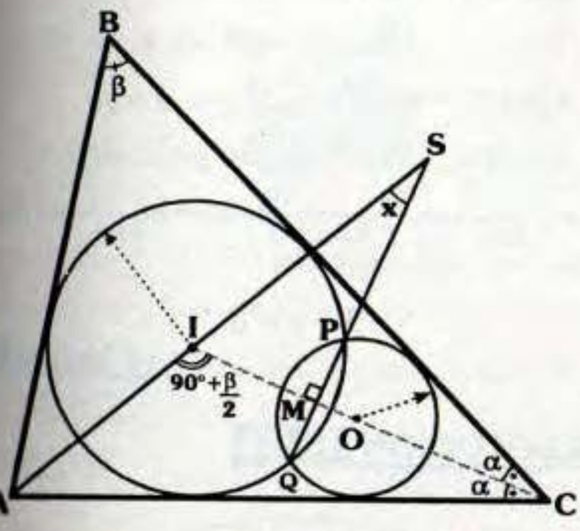
- $\triangle$BLC:

$$x + 90° - (\beta + \alpha) + \beta = 90°$$

$\therefore$ **x = α**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 58



- Del gráfico : $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = \alpha$
- $m\measuredangle AIC = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$ (*teorema fundamental*)
- Por teorema de circunferencia :

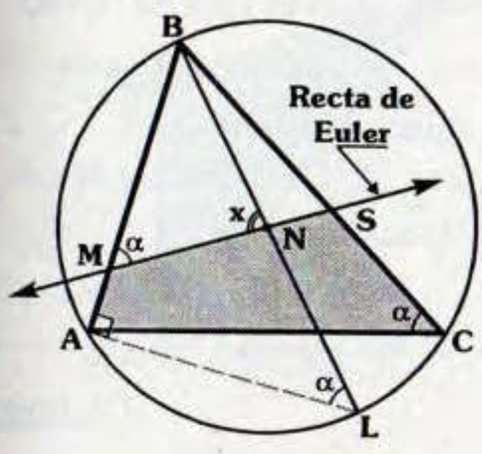
  $\overline{PQ} \perp \overline{OI}$

- $\triangle$SMI : $90^\circ + \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ + x$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\beta}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 59



- $\overline{BL}$: Diámetro $\Rightarrow m\measuredangle BAL = 90^\circ$
- $\triangle$AMSC: Inscriptible

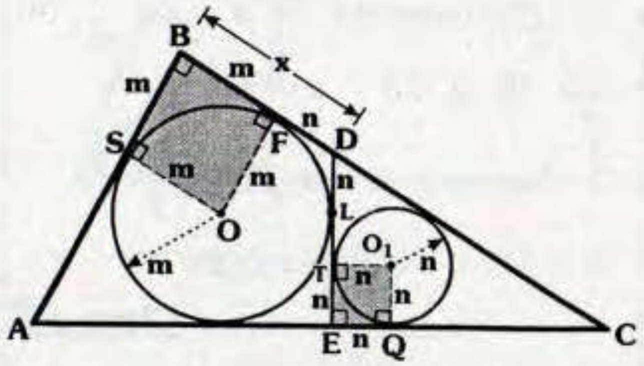
  $\Rightarrow m\measuredangle SCA = m\measuredangle SMB = \alpha$

- Por ángulo inscrito $\Rightarrow m\measuredangle BLA = \alpha$
- $\triangle$AMNL : Inscriptible

$$\therefore \ \mathbf{x = 90^o}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 60



- OSBF y O_1TEQ : Cuadrados

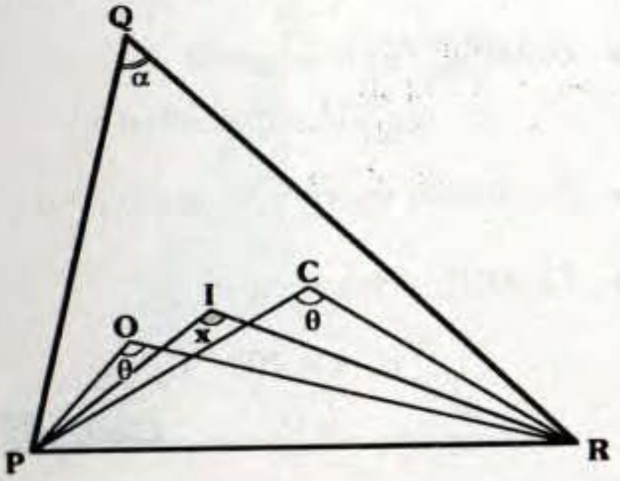
  $\Rightarrow$ BF=m y TE=n

- Por teorema : DL=TE=n
- DF=DL=n
- Se observa : x = m + n
- Por dato : m+n=10

$$\therefore \ \mathbf{x = 10}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 61



- O : Ortocentro

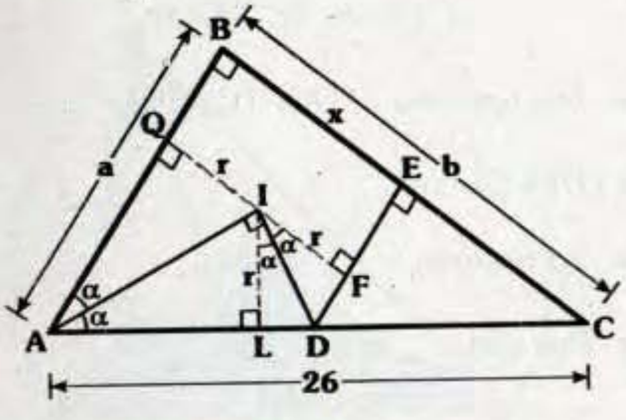
$$\Rightarrow \quad \theta+\alpha=180° \quad \dots \text{(I)}$$

- C : Circuncentro $\Rightarrow \theta = 2\alpha \quad \dots$ (II)
- De (I) y (II) : $\alpha=60°$
- I : Incentro $\Rightarrow \quad x=90°+\dfrac{60°}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=120°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 62



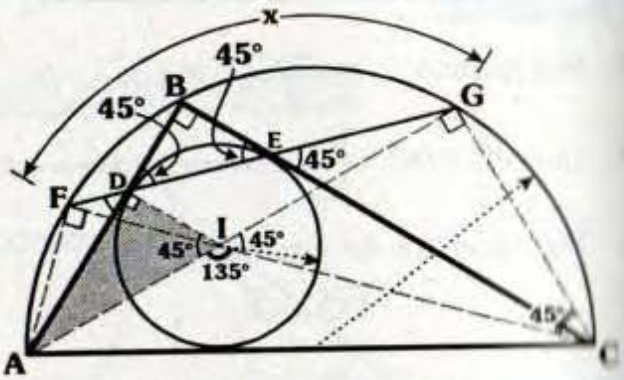
- Como I es incentro, entonces :
  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = \alpha$ e $IL = IQ = r$ (inradio)
- $\triangle$AID : $m\measuredangle LID = \alpha$
- $\triangle$AQI : $m\measuredangle AIF = 90°+\alpha$
- ID : Bisectriz del $\measuredangle LIF \Rightarrow IF=r$
- QBEF : Rectángulo $\Rightarrow x=2r$
- $\triangle$ABC : Teorema de poncelet

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a+b}_{34\ \text{(dato)}} = 26+2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 63



- Sea I : Incentro de ABC.
- Por teorema : $m\measuredangle AIC = 90°+\dfrac{90°}{2}$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AIC = 135°$$

- $\triangle$AFDI : inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle FDA = m\measuredangle FIA = 45°$$

- Como $\quad m\measuredangle FIA + m\measuredangle AIC = 180°$

$\Rightarrow$ F, I y C son colineales

- En forma análoga :

$\Rightarrow$ A, I y G son colineales

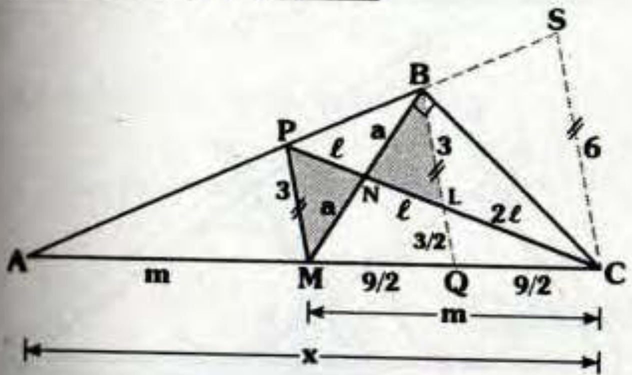
- Por ángulo inscrito :

$$m\overset{\frown}{FG} = 2(m\measuredangle FCG)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=90°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 64



- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta S, tal que $\overline{CS} // \overline{MP}$.
- $\overline{PM}$:Base media de $\Delta ASC \Rightarrow SC = 6$
- Trazamos $\overline{BL} // \overline{PM}$
- $\Delta MNP \cong \Delta BNL$ (ALA)

  $\Rightarrow PN = NL = \ell$ y $BL = 3$
- $\overline{BL}$: Base media de PSC

  $\Rightarrow PL = LC = 2\ell$
- L : Baricentro de MBC

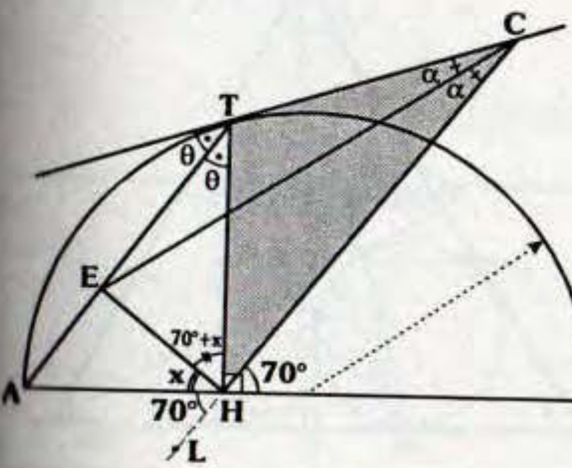
  $\Rightarrow LQ = 3/2$ y

  $MQ = QC = 9/2$

$\therefore$ **x = 18**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 65



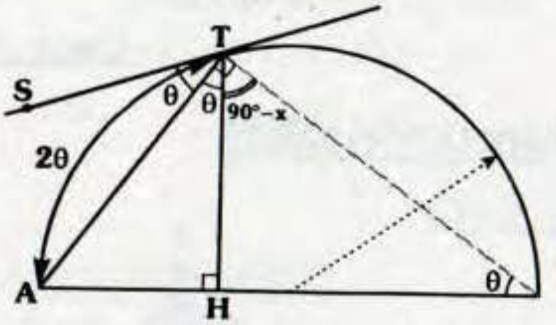
- De la observación $\overline{TA}$ es bisectriz exterior de ΔTCH.
- E : Excentro del ΔTCH

  $\Rightarrow \overline{HE}$: Bisectriz exterior
- $m\measuredangle LHE = m\measuredangle THE = 70° + x$
- $x + 70° + x = 90°$

$\therefore$ **x = 10°**

Clave B

Observación

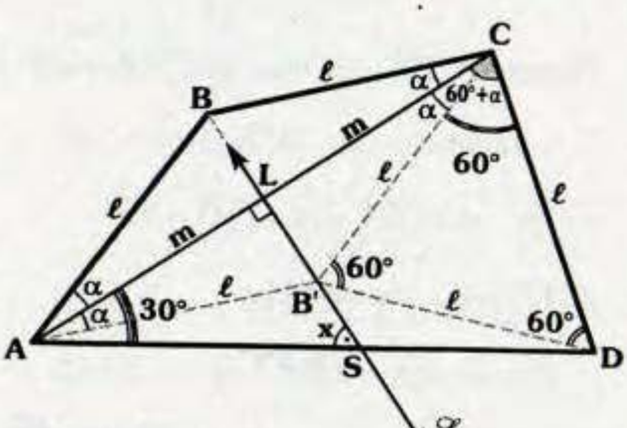


- *Por ángulo inscrito* : $m\widehat{AT} = 2\theta$
- *Por ángulo semiinscrito* :

  $m\measuredangle STA = \theta$

$\therefore$ $\mathbf{m\measuredangle STA = m\measuredangle ATH = \theta}$

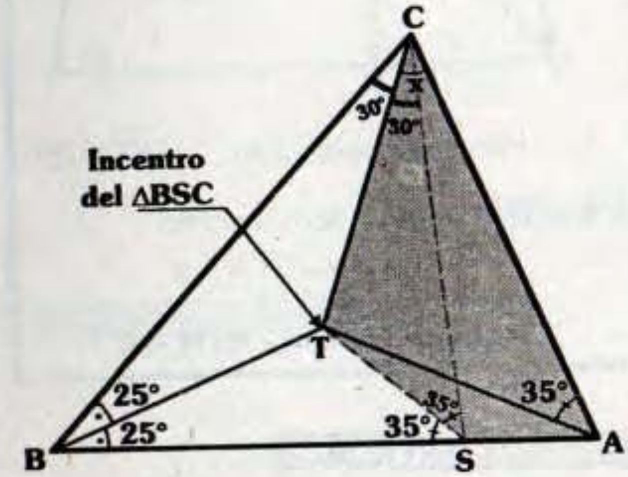
RESOLUCIÓN N° 66



- Se ubica B' en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tal que
$$m\measuredangle ACB' = \alpha$$
- $\Delta ABC \cong \Delta AB'C \Rightarrow AB' = B'C = \ell$
- $\Delta CB'D$: Equilátero
$$\Rightarrow m\measuredangle CB'D = 60^\circ \text{ y } B'D = \ell$$
- B': Circuncentro de ACD
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CAD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$
- $\triangle$ALS : $30^\circ + x = 90^\circ$
$$\therefore \; \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave C

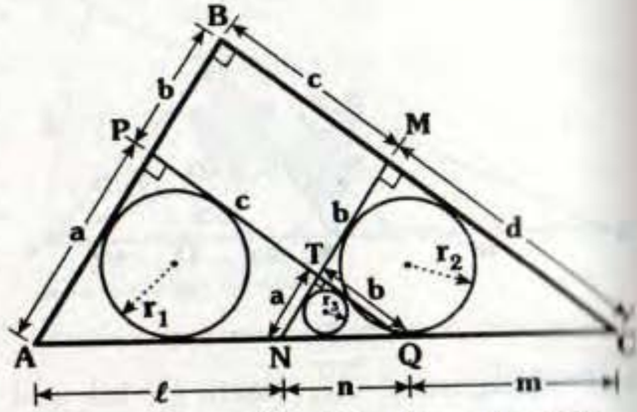
RESOLUCIÓN N° 67



- Trazamos $\overline{CS}$, tal que $m\measuredangle TCS = 30^\circ$
- T: Incentro de BCS
$$\Rightarrow \; m\measuredangle CST = m\measuredangle TSB = 35^\circ$$
- $\square$CTSA : Inscriptible
$$\therefore \; \mathbf{x = 35^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 68



- Sea "x" inradio del triángulo ABC.
- Por el teorema de Poncelet

$\triangle$APQ: $a + c + \cancel{t} = \ell + \cancel{n} + 2r_1$

$\triangle$NMC: $\cancel{a} + b + d = m + n + 2r_2$ $\quad(+)$

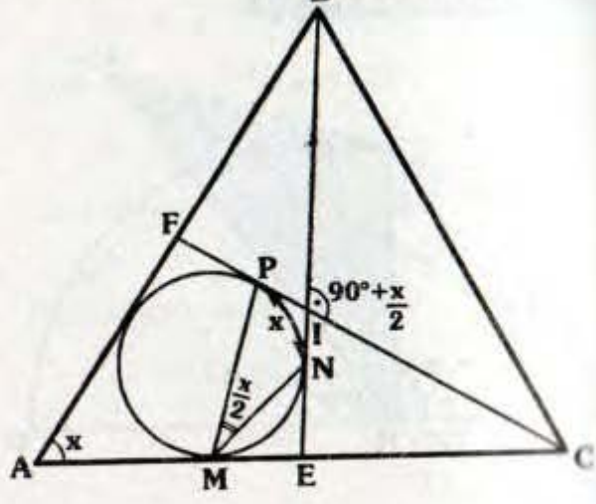
$\triangle$TNQ: $\cancel{n} + 2r_3 = \cancel{\ell} + \cancel{t}$

$$a + b + c + d = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell \quad \ldots (I)$$

- En $\triangle$ABC: Por t. de Poncelet.
$$a + b + c + d = \ell + n + m + 2x \quad \ldots (II)$$
- Reemplazando (II) en (I) :
$$\ell + m + n + 2x = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell$$
$$\therefore \; \mathbf{x = r_1 + r_2 - r_3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 69



- Por teorema fundamental de incentro:

$$m\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

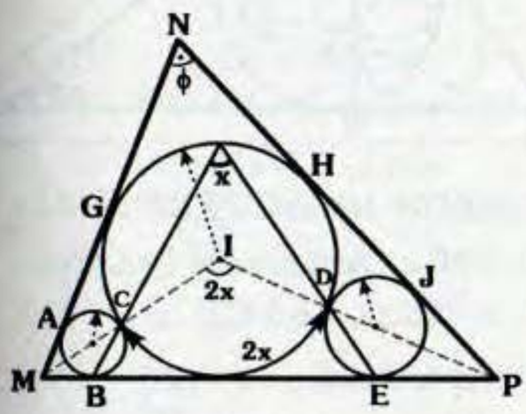
- $m\widehat{NP} = x$ (*ángulo inscrito*).

- Por teorema: $x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 180^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 70



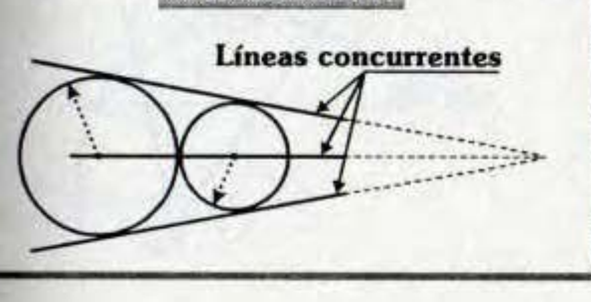
- Se ubica el incentro I del ΔABC.
- De la observación :

  M, C e I son colineales lo mismo que P, D e I.
- Por ángulo central : $m\measuredangle CID = 2x$
- Por teorema fundamental : $2x = 90^\circ + \frac{\phi}{2}$

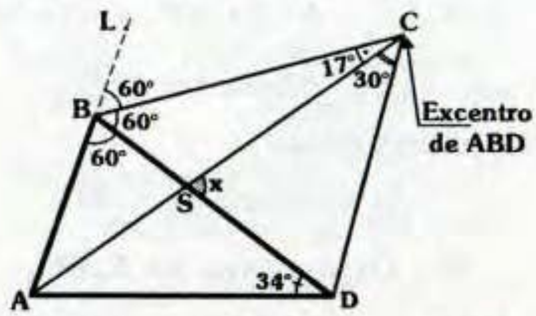
$$\therefore \quad \mathbf{x = 45^\circ + \frac{\phi}{4}}$$

Clave C

Observación



RESOLUCIÓN N° 71



- Como : $m\measuredangle BDA = 2(m\measuredangle BCA)$ y

  $m\measuredangle ABD = 2(m\measuredangle ACD)$,

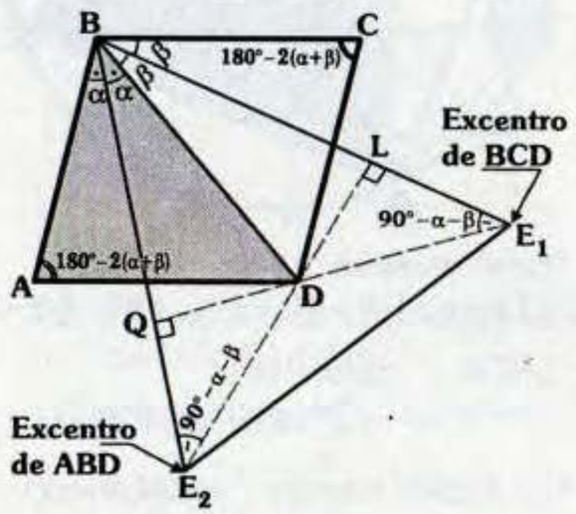
  por el criterio $\Rightarrow$ C : Excentro de ABD
- $\overline{BC}$: Bisectriz exterior de ABD

  $\Rightarrow m\measuredangle LBC = m\measuredangle CBD = 60^\circ$
- ΔBSC: $x = 60^\circ + 17^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 77^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 72



- Por definición :

  $m\measuredangle ABE_2 = m\measuredangle DBE_2 = \alpha$ y

  $m\measuredangle CBE_1 = m\measuredangle E_1BD = \beta$
- $\overline{BC} /\!/ \overline{AD} \Rightarrow m\measuredangle BAD = 180^\circ - 2(\alpha+\beta)$
- ΔABC: Teorema fundamental

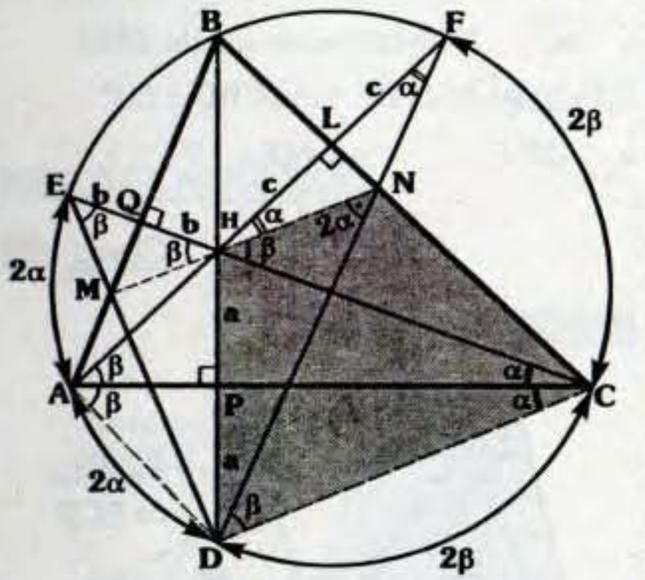
$$\Rightarrow m\measuredangle BE_2D = \frac{180^\circ - 2(\alpha+\beta)}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$$

- ΔBLE_2 :
  $m\measuredangle E_2LE_1 = \alpha + \beta + 90° - \alpha - \beta = 90°$
  $\Rightarrow \overline{E_2L}$: Altura del ΔE_1BE_2
- Del mismo modo :
  $\overline{E_1Q}$ es altura de E_1BE_2

$\therefore$ **D : Ortocentro de E_1BE_2**

Clave C

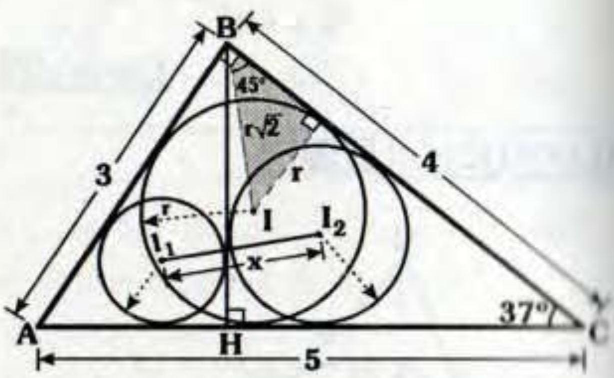
RESOLUCIÓN N° 73



- Por el teorema 9.5:
HL=LF=c ; HP=PD=a y QH=QE=b
- ΔHFN : Isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle FHN = m\measuredangle HFN = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ACD = \alpha$
- ΔDHC : Isósceles $m\measuredangle PCH = \alpha$
- $\square HNCD$: Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle NHC = m\measuredangle NDC = \beta$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle FAC = \beta$
- ΔADM : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle PAD = \beta$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle DEC = \beta$
- ΔMEH : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle EHM = \beta$
- Como $m\measuredangle EHM = m\measuredangle NHC = \beta$

$\therefore$ **M, H y N son colineales**

RESOLUCIÓN N° 74



- $\triangle ABC$: Notable de 37° $\Rightarrow$ AC = 5
- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
  $\Rightarrow 3 + 4 = 5 + 2r \Rightarrow r = 1$
- Por el teorema : $x = r\sqrt{2}$

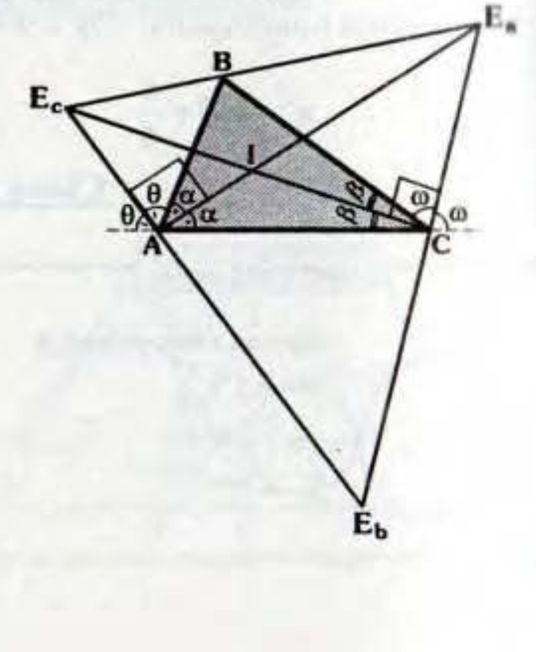
$\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{2}}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 75

I. **Proposición Verdadera**

(*Ver teorema* 11.11)

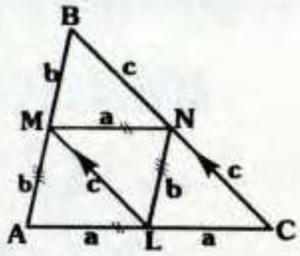


I : Incentro de ABC

E_a, E_b y E_c son excentros

$\Rightarrow$ I : Ortocentro del $\Delta\, E_a\, E_b\, E_c$

II. Proposición | Verdadera



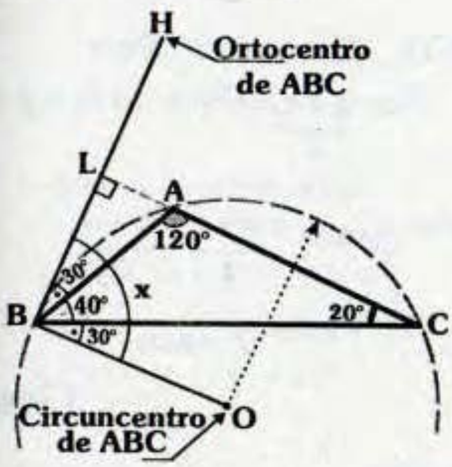
- AMNL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ MN=AL=a y NL=AM=b
- MNCL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ LC=a y NC=ML=c
- MBNL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ MB=b y BN=c
- Se observa M, N y L son puntos medios.

III. Proposición | Verdadera

Como el baricentro pertenece a la mediana por lo tanto el baricentro se encuentra en la región interior.

Clave B

RESOLUCIÓN N° 76

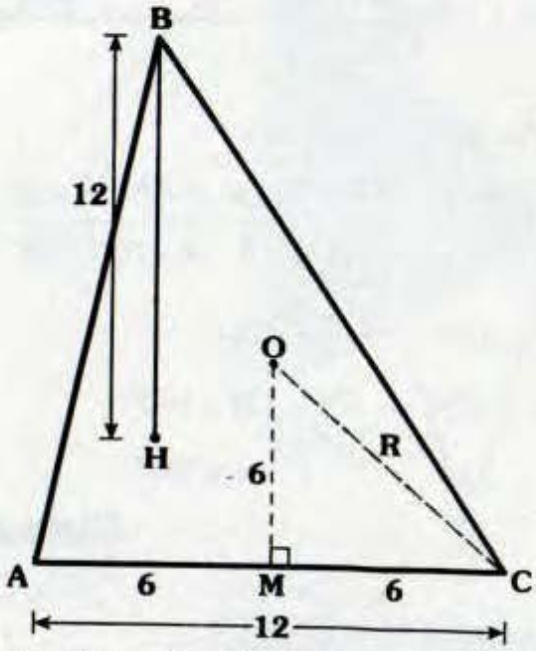


- H : ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{BL}$ es altura de ABC.
- $\triangle$ABL : $120° = 90° + m\measuredangle LBA$
  $\Rightarrow m\measuredangle LBA = 30°$
- Por el teorema 9.4:
  $m\measuredangle CBO = m\measuredangle HBA = 30°$

$\therefore\ \mathbf{x = 100°}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 77

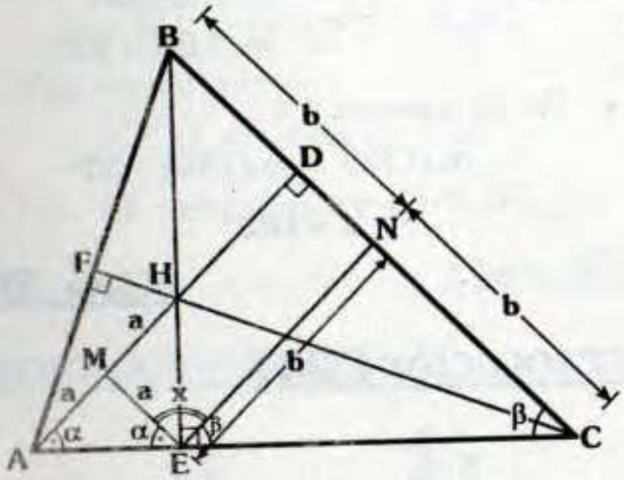


- Sea "r" radio de la circunferencia de los 9 puntos del ΔABC,
  R circunradio y O circuncentro
- Por teoema : $r = \dfrac{R}{2}$
- Por teorema 9.6 :
  $OM = \dfrac{BH}{2} \Rightarrow OM=6$
- $\triangle$OMC : Notable $\Rightarrow R=6\sqrt{2}$

$\therefore\ \mathbf{r = 3\sqrt{2}}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 78



- Por el teorema $\triangle$:

  $\triangle$AEH : EM=a y $m\measuredangle MEA = \alpha$

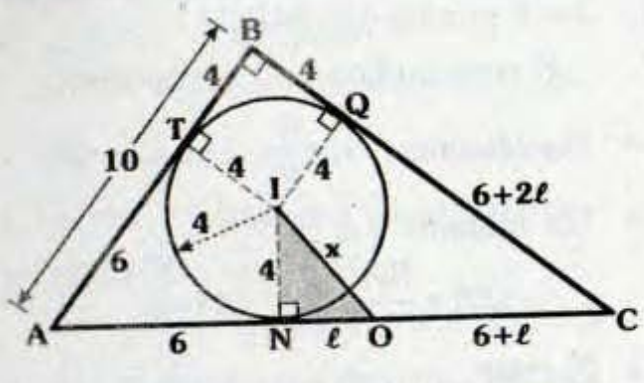
  $\triangle$BEC : EN=b y $m\measuredangle NEC = \beta$

- $\triangle$ADC : $\alpha + \beta = 90°$
- En "E" : $\alpha + x + \beta = 180°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 90°}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 79



- Se observa, BTIQ : Cuadrado
- Por tangentes : AT=AN=6
- O : Circuncentro $\Rightarrow$ $AO = OC = 6 + \ell$
- Por tangentes : $CN = CQ = 2\ell + 6$
- $\triangle$ABC :

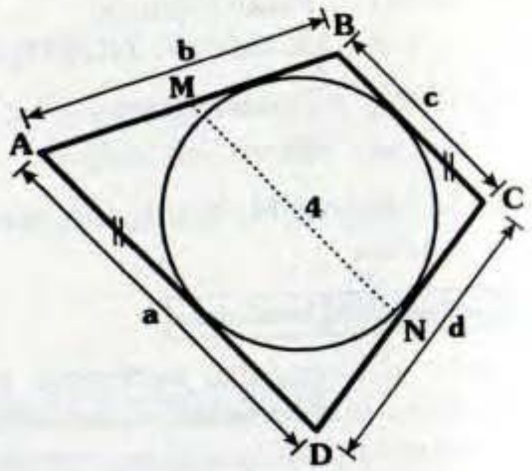
  $10^2 + (10 + 2\ell)^2 = (12 + 2\ell)^2 \Rightarrow \ell = 7$

- $\triangle$INO : $x^2 = 4^2 + 7^2$

  $\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{65}}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 80



- $\overline{MN}$: Base media

  $\Rightarrow \ 4 = \dfrac{a + c}{2} \ \Rightarrow \ a + c = 8$

- ABCD : Teorema de Pitot

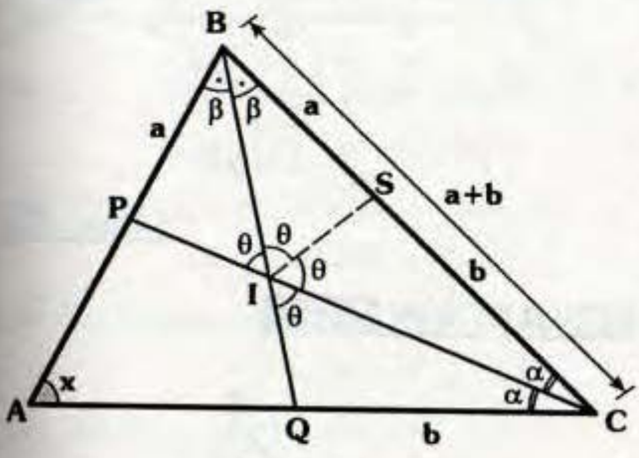
  $\Rightarrow \underbrace{a + c}_{8} = b + d \ \Rightarrow \ b + d = 8$

- $\text{Perím.}_{\triangle ABCD} = \underbrace{a + c}_{8} + \underbrace{b + d}_{8}$

  $\therefore$ $\mathbf{Perím._{\triangle ABCD} = 16}$

Clave

RESOLUCIÓN N° 81



- Ubicamos S en $\overline{BC}$, tal que :

$$SC = b \Rightarrow BS = a$$

- $\Delta IQC \cong \Delta ISC$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle QIC = m\measuredangle SIC = \theta$$

- $\Delta PBI \cong \Delta BSI$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle BIP = m\measuredangle BIS = \theta$$

- En "I" :

$$\theta + \theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 60°$$

- Por teorema fundamental :

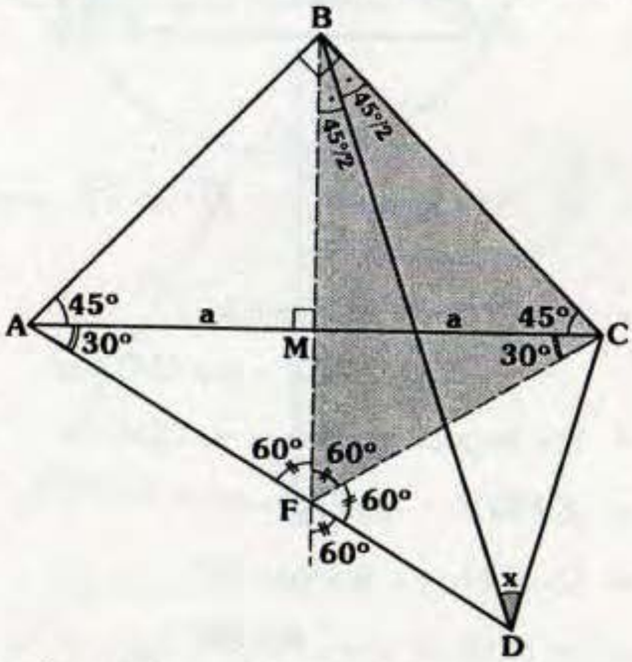
$$m\measuredangle BIC = 120° = 90° + \frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 82

- Ubicamos F en $\overline{AD}$, tal que $\overline{BF} \perp \overline{AC}$.



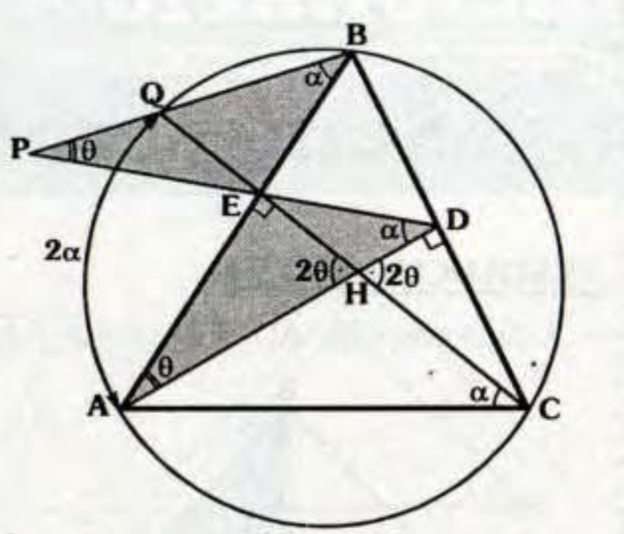
- $\triangle$ABC : AM=MC=a
- ΔAFC : $\overline{FM}$ es altura y mediana $\Rightarrow$ $\overline{FM}$ es bisectriz.
- ΔBFC : $\overline{BD}$ es bisectriz interior y $\overline{FD}$ es bisectriz exterior.
- D : Excentro del ΔBFC.
- Finalmente por teorema fundamental de excentro :

$$x = \frac{60°}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 83

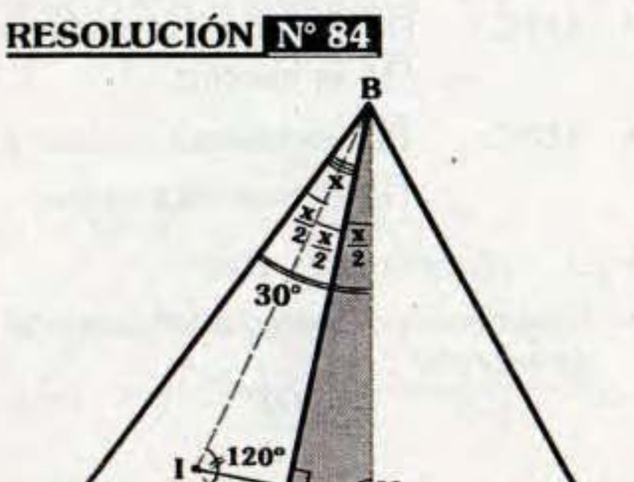


- H : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas.
- $\triangle$AEDC : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle ACE = m\measuredangle ADE = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle QBA = \alpha$
- $\bowtie$PBDA : $m\measuredangle EAD = \theta$
- $\triangle$AEH: $\theta + 2\theta = 90°$

$\therefore\ \boldsymbol{\theta = 30°}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 84

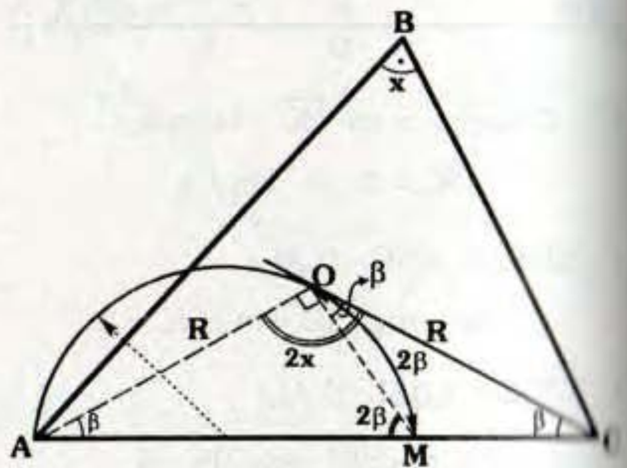


- I : Incentro del ΔABP
  $\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBP = \dfrac{x}{2}$ y
  $m\measuredangle BIP = 90° + \dfrac{60°}{2} = 120°$
- $\triangle$IBCP : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle ICP =$
- En $\bowtie$MBLC : $m\measuredangle MBH = \dfrac{x}{2}$
- $\triangle$ABL : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} = 30°$

$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 85



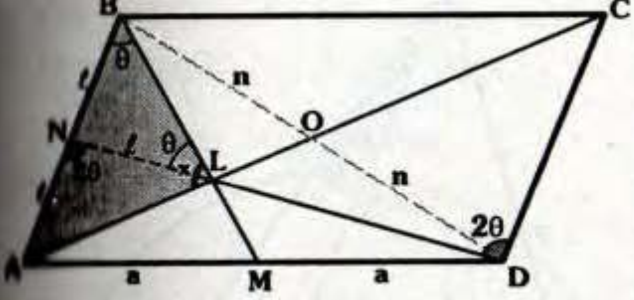
- O : Circuncentro
  $\Rightarrow AO = OC = R$ y $m\measuredangle AOC = 2x$
- Por ángulo inscrito : $m\overset{\frown}{OM} = 2\beta$
- Por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle MOC = \beta$
- En $\triangle$AOM : $\beta + 2\beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$
- $2x = 90° + 30°$

$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 86

- O : Centro de ABCD $\Rightarrow$ BO=OD=n

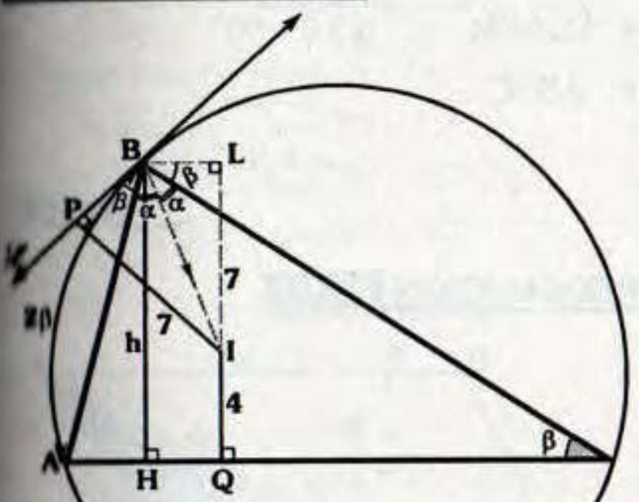


- L : Baricentro del ΔABD
  $\Rightarrow$ $\overline{DN}$ es mediana
- Por ángulos alternos internos
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle LNA = 2\theta$
- Se observa que el ΔNBL es isósceles
  $\Rightarrow$ NL = ℓ
- ΔABL : AN=NB=NL= ℓ

$\therefore$ **x = 90º**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 87

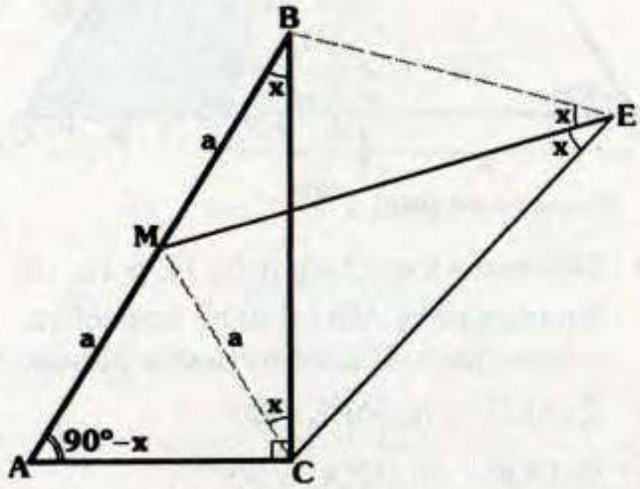


- IQ=4 (*inradio*)
- $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \alpha$
- Por ángulo semiinscrito :
  $m\measuredangle PBA = m\measuredangle BCA = \beta$
- Se observa $\overline{BL} /\!/ \overline{AC}$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle LBC=\beta$ (ángulo alternos internos).
- $\overrightarrow{BI}$: Bisectriz del $\measuredangle PBL$ $\Rightarrow$ IP=IL=7
- Finalmente HBLQ es un rectángulo

$\therefore$ **h = 11**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 88



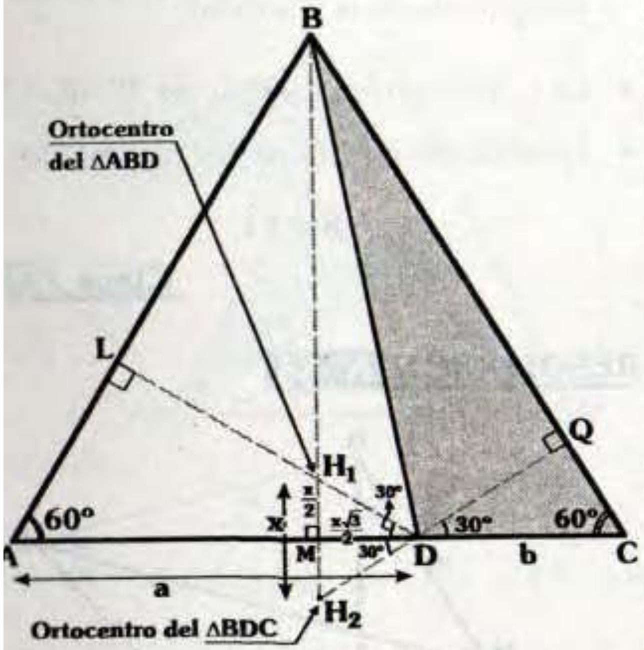
- $\triangle$ACB : $m\measuredangle BAC = 90° - x$
- Trazamos $\overline{CM}$, en el $\triangle$ACB por el teorema $\triangle$:
  CM=a $\Rightarrow$ $m\measuredangle MCB = x$
  (ΔCBM : *Isósceles*)
- Como $m\measuredangle MBC = m\measuredangle MEC = x$, al trazar $\overline{EB}$ el $\triangle$MBEC es inscriptible
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle MCB = m\measuredangle MEB = x$
- Finalmente, por teorema fundamental :

$$2x = 90° - \left(\frac{90° - x}{2}\right)$$

$\therefore$ **x = 30º**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 89



- Ubicamos los ortocentros H_1 y H_2 de los triángulos ABD y BDC respectivamente, para lo cual trazamos alturas.
- $\triangle$ALD : $m\measuredangle ADL = 30°$
- $\triangle$DQC : $m\measuredangle QDC = 30°$
- $\overline{DM}$ es altura del triángulo equilátero H_1H_2D :

$$\Rightarrow \quad H_1M = MH_2 = \frac{x}{2}$$

- $\triangle H_1MD$:

$$\text{Notable} \Rightarrow \ MD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

- Sabemos : AM=MD

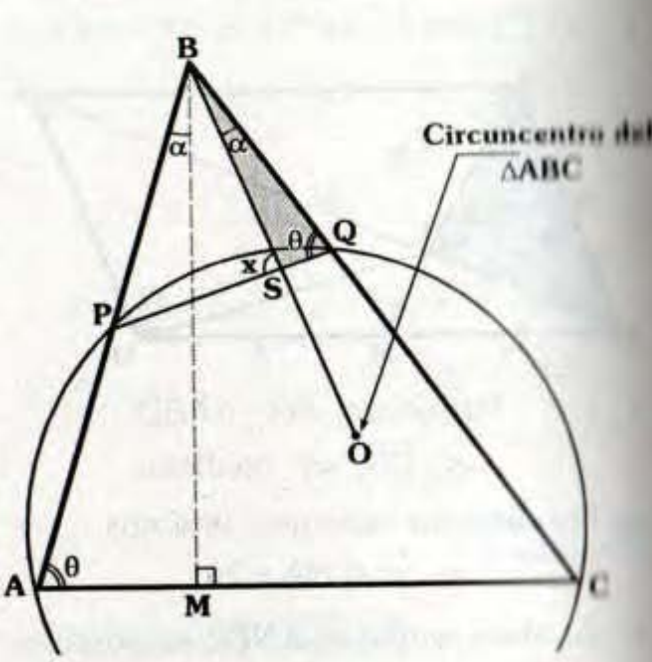
$$\Rightarrow \quad a - \frac{x\sqrt{3}}{2} = b + \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a-b}_{4\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 90



- $\square$APQC : Inscrito

$$\Rightarrow m\measuredangle PAC = m\measuredangle PQB = \theta$$

- Al trazar la altura BM en el $\triangle$ABC, por el teorema 9.4:

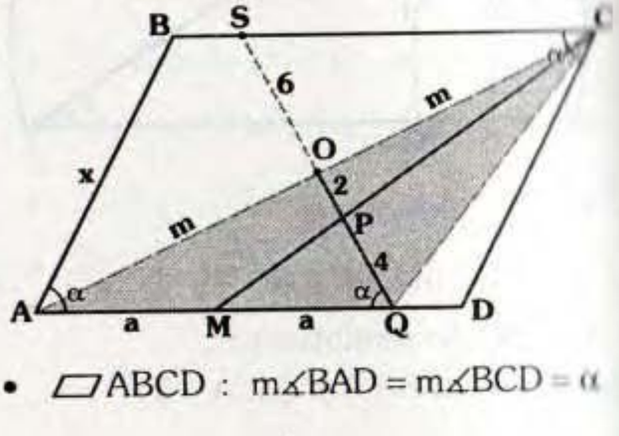
$$m\measuredangle ABM = m\measuredangle OBC = \alpha$$

- $\triangle$ABM : $\alpha + \theta = 90°$
- $\triangle$BSQ : $x = \alpha + \theta$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 91



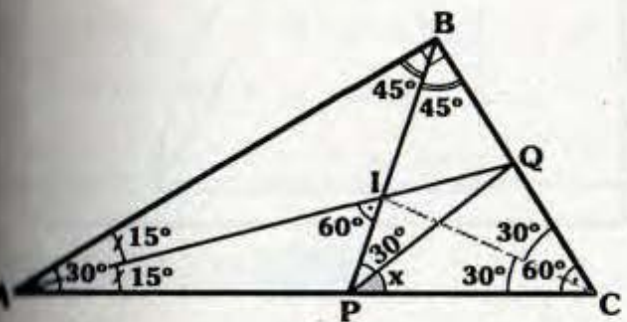
- $\square$ABCD : $m\measuredangle BAD = m\measuredangle BCD = \alpha$

- O : Centro del ▱ABCD
  $\Rightarrow O \in \overline{AC}$, $AO=OC=m$ y $QO=OS$
- $\overline{CM}$ y $\overline{QO}$ son medianas del ΔAQC
  $\Rightarrow$ P es baricentro del ΔAQC.
- Por teorema fundamental :
  $PQ=2(OP)=4$
- Pero $QO=OS \Rightarrow SQ=12$
- Se observa que ABSQ es un trapecio isósceles

$\therefore$ $\mathbf{x=12}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 92

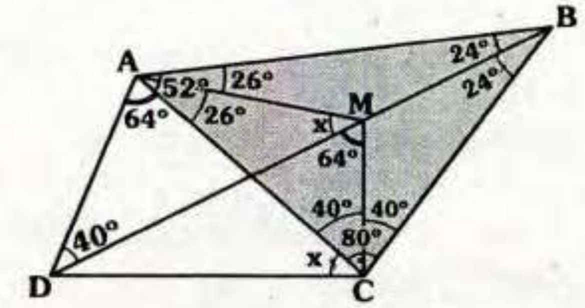


- Como I es incentro :
  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = 15°$;
  $m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 45°$ y
  $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = 30°$
- ΔABI : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle AIP = 60°$
- ⌂PIQC : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle ICQ = m\measuredangle IPQ = 30°$
- ΔAPI : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow 15° + 60° = 30° + x$

$\therefore$ $\mathbf{x=45°}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 93

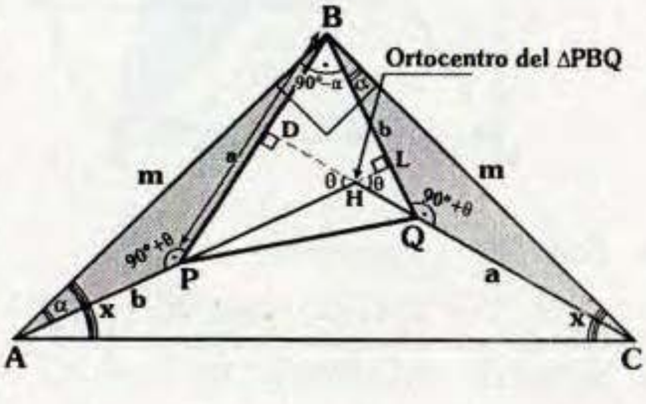


- Se traza $\overline{CM}$ tal que :
  $m\measuredangle ACM = m\measuredangle MCB = 40°$
- ⌂AMCD inscriptible :
  $\Rightarrow m\measuredangle AMD = x$; y
  $m\measuredangle DMC = 64°$
- En ΔCMB : $m\measuredangle MBC = 24°$
- M es incentro del ΔABC .
- ΔAMB : Por ángulo exterior.
  $x = 24° + 26°$

$\therefore$ $\mathbf{x=50°}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 94



- H es ortocentro del ΔPBQ

$\Rightarrow$ $\overline{PL}$ y $\overline{QD}$ son alturas

- Por ángulo en los triángulos DHP y HLQ:

$\Rightarrow$ $m\measuredangle DPA = 90° + \theta$ y
$m\measuredangle LQC = 90° + \theta$

- $\Delta ABP \cong \Delta BQC$ (LAL)

$\Rightarrow$ $AB = BC = m$ y
$m\measuredangle BAP = m\measuredangle QBC = \alpha$

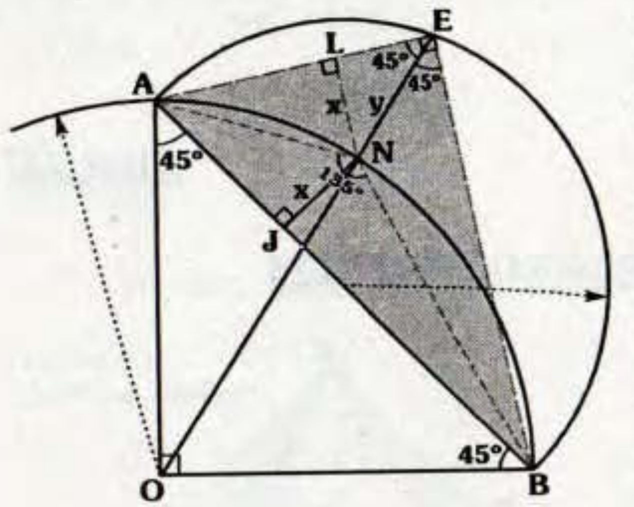
- $\triangle ALB$:
$m\measuredangle ABL = 90° - \alpha \Rightarrow m\measuredangle ABC = 90°$

- $\triangle ABC$: $x + x = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 95



- $\square AEBO$: Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle AEO = m\measuredangle OEB = 45°$

- Sabemos : $m\measuredangle ANB = 135°$

- $\triangle EBA$: $\overline{EN}$ es bisectriz interior y

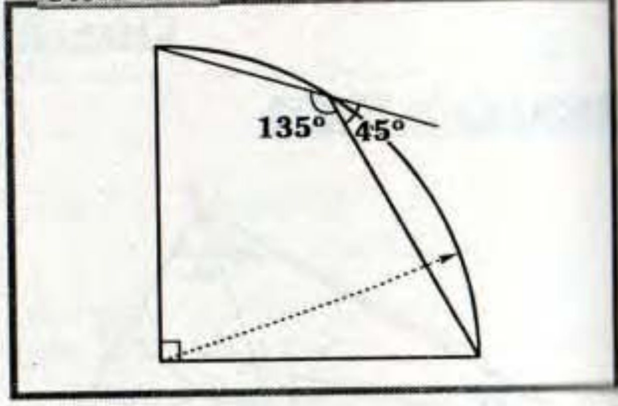
$$m\measuredangle ANB = 90° + \frac{90°}{2}$$

Entonces por el criterio 8.3 N es incentro del $\triangle EBA$, además x es el inradio.

- $\triangle ENL$: Notable de 45°.

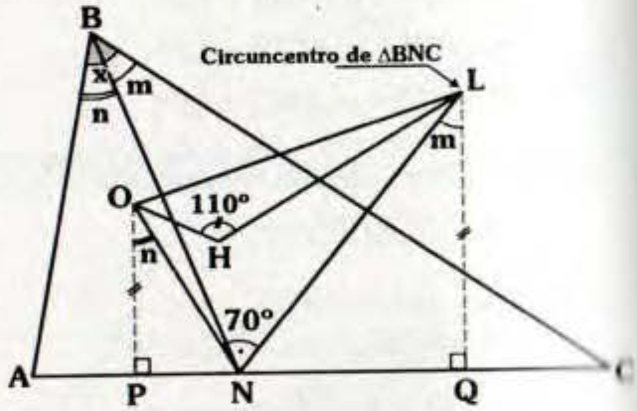
$$\therefore \ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

Recordar:



Clave

RESOLUCIÓN N° 96



- Se observa : $x = m + n$

- Por el teorema 7.4 en los triángulos ABN y BNC :

$m\measuredangle PON = n$ y $m\measuredangle NLQ = m$

- Por teorema fundamental en ΔONL :

$$m\measuredangle ONL = 70°$$

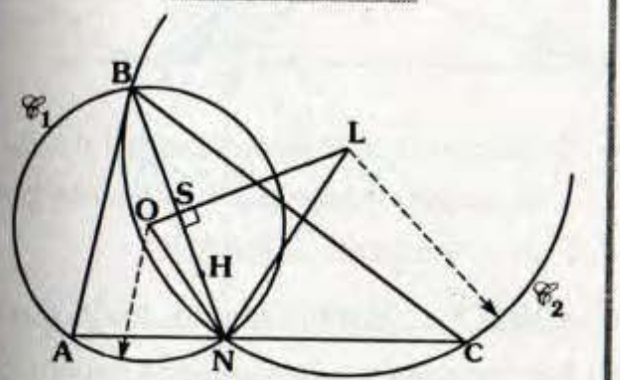
- Como $\overline{OP} // \overline{LQ}$, por propiedad :

$$m + n = 70°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 70°}$$

Clave D

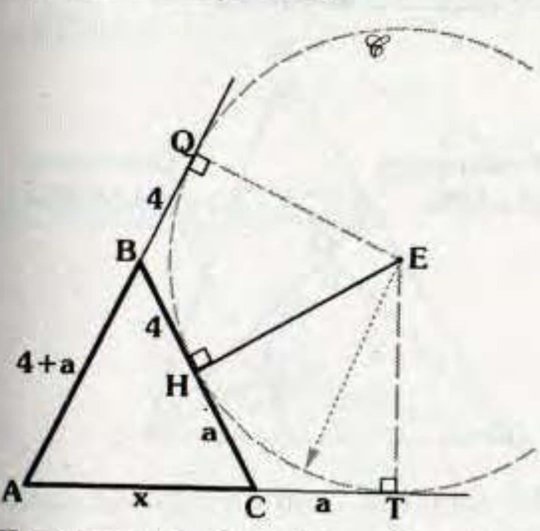
Observación



Al trazar $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, por teorema de circunferencias secantes : $\overline{BN} \perp \overline{OL}$

$\Rightarrow$ El ortocentro H pertenece a $\overline{SN}$

RESOLUCIÓN N° 97



- Trazamos la circunferencia exinscrita $\mathscr{C}$.
- Sabemos :

$$BQ = BH = 4 \quad y \quad HC = CT = a$$

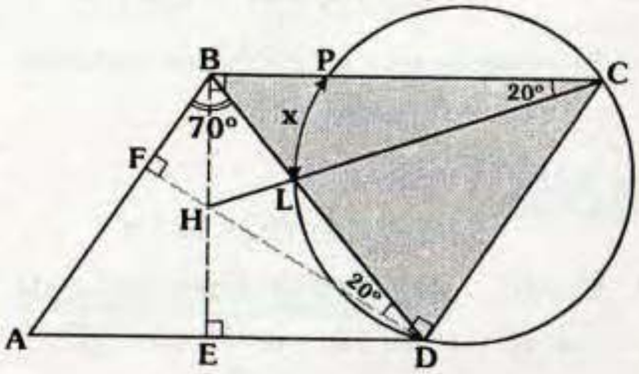
- Pero, $AB = BC \ \Rightarrow \ AB = 4 + a$
- Por tangentes : $AQ = AT$

$$\Rightarrow 4 + a + 4 = x + a$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 98



- Trazamos las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$.
- $\triangle BFD$: $m\measuredangle BDF = 20°$
- Como ABCD es un paralelogramo

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle EBC = m\measuredangle FDC = 90°$$

- $\square HBCD$: Inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BCH = 20°$$

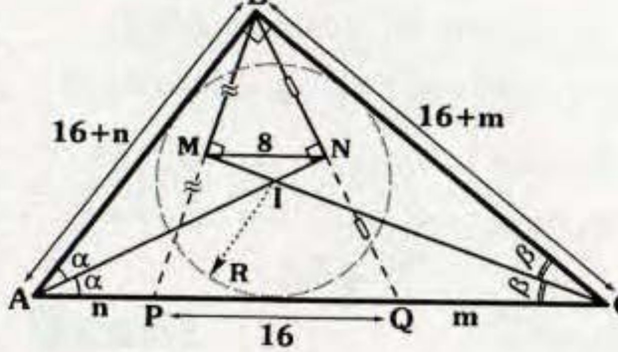
- Luego, por ángulo inscrito :

$$x = 2(m\measuredangle PCL)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 99

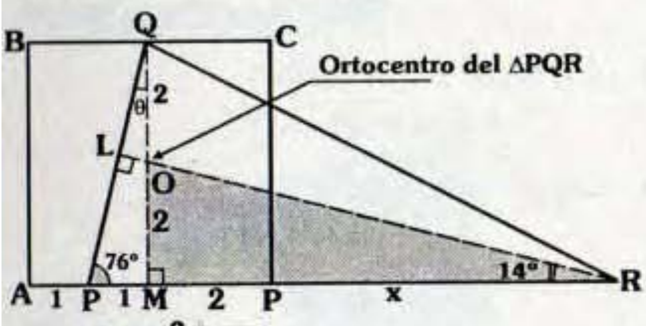


- En $\triangle ABC$: $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ son bisectrices.
- $\overline{CM}$ es altura y bisectriz del ΔPBC
$\Rightarrow BM = MP$
- $\overline{AN}$ es altura y bisectriz $\Rightarrow \overline{AN}$ es mediana.
- $\overline{MN}$: Base media del ΔPBQ
$\Rightarrow PQ = 16$
- Se observa que el ΔPBQ es isósceles
$\Rightarrow BC = PC = 16 + m$
- ΔABQ : Isósceles
$\Rightarrow AB = AQ = 16 + n$
- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
$\Rightarrow 16 + n + 16 + m = n + 16 + m + 2R$

$$\therefore\ \mathbf{R = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 100

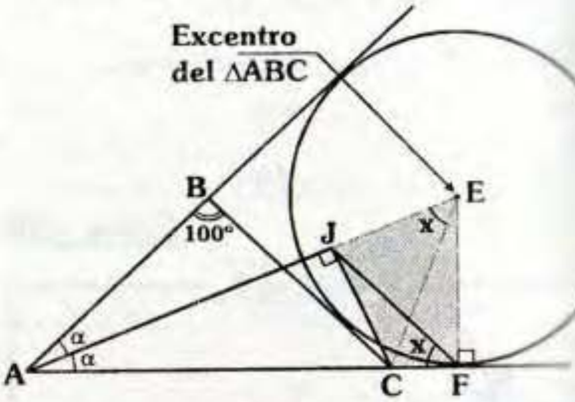


- O : Ortocentro del ΔPQR
$\Rightarrow \overline{QM}$ y $\overline{RL}$ son alturas
- O : Centro del cuadrado ABCD
$\Rightarrow AM = MD = 2$ y $QO = OM = 2$
- $\triangle QMP$: Notable $\Rightarrow \theta = 14°$
- $\triangle OMR$: Notable $\Rightarrow 2 + x = 8$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 101



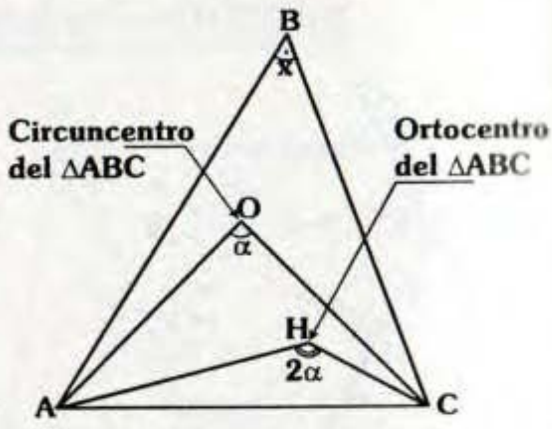
- Se nota que la intersección (E) de $\overrightarrow{AJ}$ y la perpendicular a $\overline{AF}$, trazada por F es el excentro del ΔABC.
- ⌂EJCF : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle JEC = x$
- Por teorema fundamental de excentro:

$$x = \frac{100°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 102



- Por teorema fundamental de circuncentro :

$$\alpha = 2x \qquad \dots (I)$$

- Por teorema fundamental de ortocentro :

$$2\alpha + x = 180° \qquad \dots (II)$$

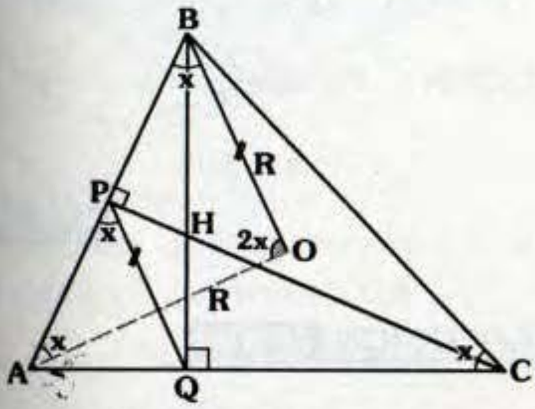
- Reemplazando (I) en (II) :

$$2(2x)+x=180^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=36^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 103

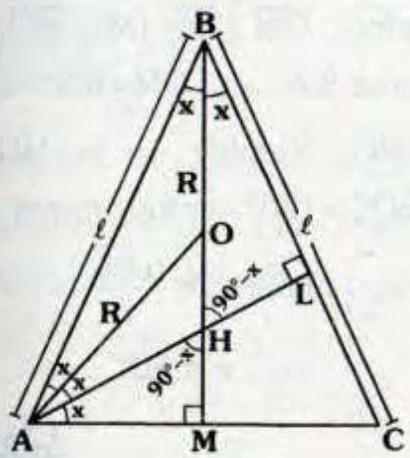


- H : Ortocentro del ΔABC
  $\Rightarrow$ $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas
- $\triangle$PBCQ : Inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle PBO=x$
- O : Circuncentro
  $\Rightarrow$ $BO=AO=R$ y $m\measuredangle BOA=2x$
- ΔBOA : $x+x+2x=180^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x=45^\circ}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 104

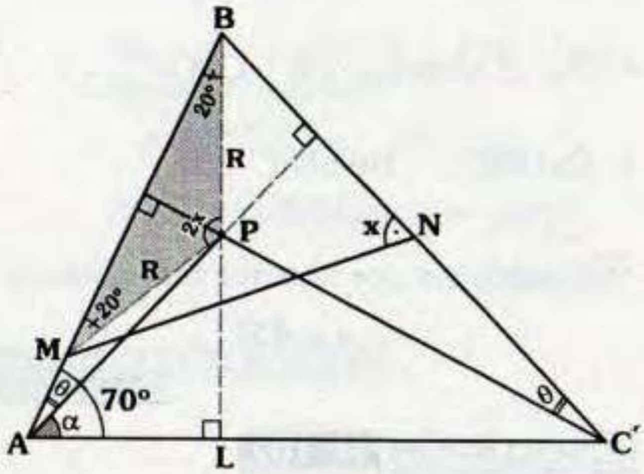


- B, O, H y M son colineales (*teorema* 12.6)
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABO=x$
- Se observa $m\measuredangle HAM=x$
- O : Circuncentro
  $\Rightarrow$ $AO=OB=R$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAO=x$
- $\triangle$ABM : $x+3x=90^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{45^\circ}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 105

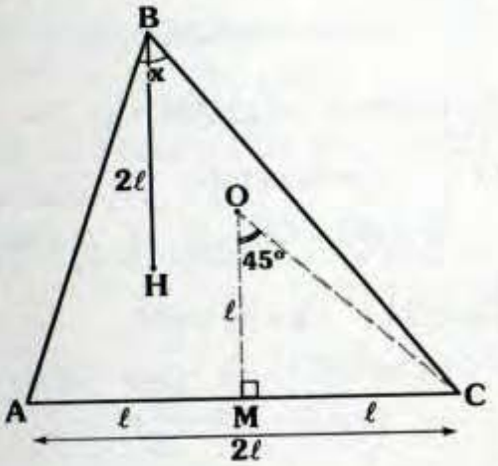


- Como P es ortocentro del ΔABC
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAP=m\measuredangle BCP=\theta$
- Pero, $\alpha+\theta=70^\circ$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABL=20^\circ$
- Como P es circuncentro del ΔMBN
  $\Rightarrow$ $PM=PB=R$ y $m\measuredangle BPM=2x$
- ΔMBP : $20^\circ+20^\circ+2x=180^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x=70^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 106

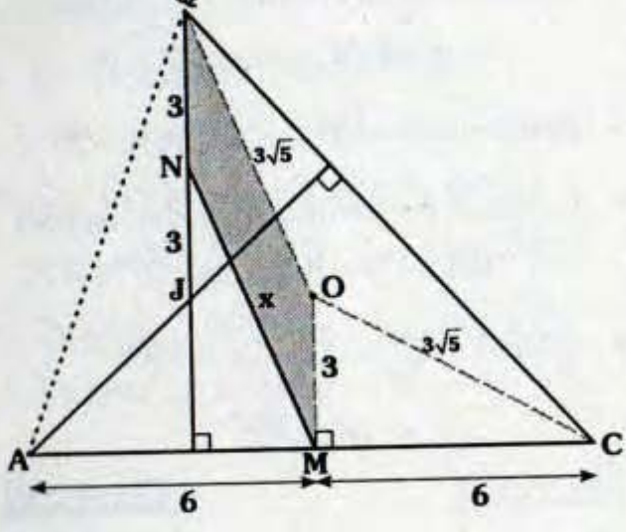


- Se ubica el circuncentro O del ΔABC.
- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por el teorema 9.4 : $AM=MC=\ell$
- Por el teorema 9.6 : $OM=\dfrac{2\ell}{2}=\ell$
- $\triangle OMC$: Notable
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle MOC=45°$
- Finalmente por teorema fundamental:

$$\therefore \; \mathbf{x=45°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 107

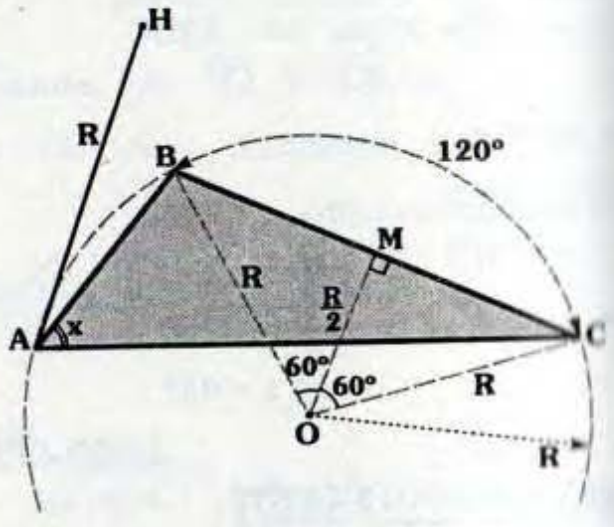


- Al trazar $\overline{AQ}$, se observa que J es ortocentro del ΔAQC.
- Luego ubicamos el circuncentro O y trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$.
- Por teorema (9.6) : OM=3
- $OC=OQ=3\sqrt{5}$ *(circunradio)*
- QOMN : Paralelogramo

$$\therefore \; \mathbf{x=3\sqrt{5}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 108

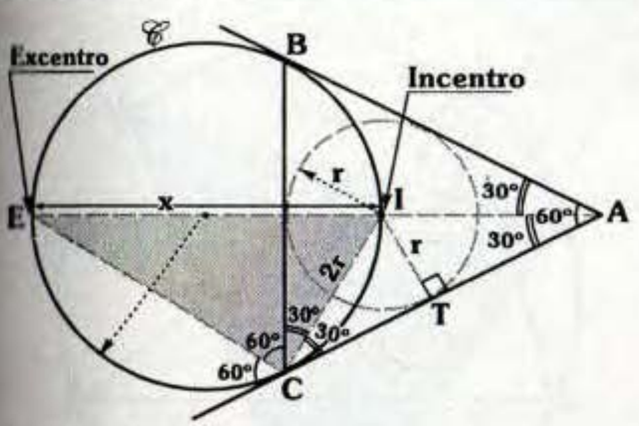


- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ $(M \in \overline{BC})$, por el teorema 9.6 $\Rightarrow$ OM=R/2.
- $\triangle OMC$: Notable $\Rightarrow m\measuredangle MOC=60°$
- $m\measuredangle BOC=120°$, entonces por ángulo inscrito: $m\measuredangle BAC=\dfrac{m\widehat{BC}}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 109

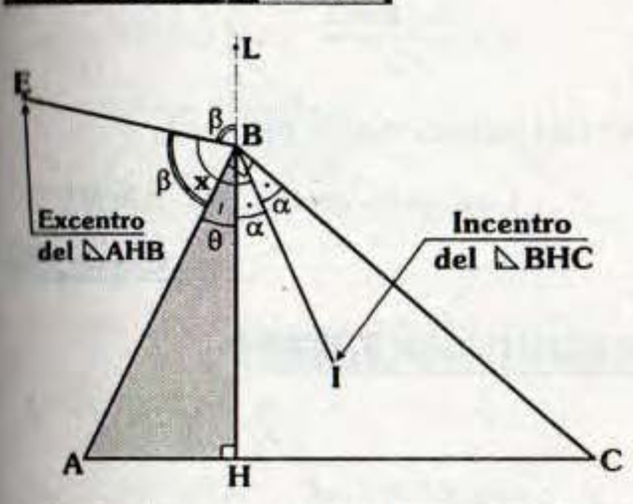


- Por el teorema 9.1 :
  Sabemos que el incentro I y el excentro E pertenecen a $\mathscr{C}$.
- ◺ITC : Notable $\Rightarrow$ CI=2r
- ◺ECI : Notable

$$\therefore \ \mathbf{x = 4r}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 110



- I : Incentro $\Rightarrow$ m∡HBI= m∡IBC = α
- E: Excentro $\Rightarrow$ m∡LBE= m∡EBA = β
- m∡ABC= $90° = \theta + \alpha + \alpha$
- En "B" : $180° = \theta + \beta + \beta$ (+)

$$270° = 2\theta + 2\alpha + 2\beta$$

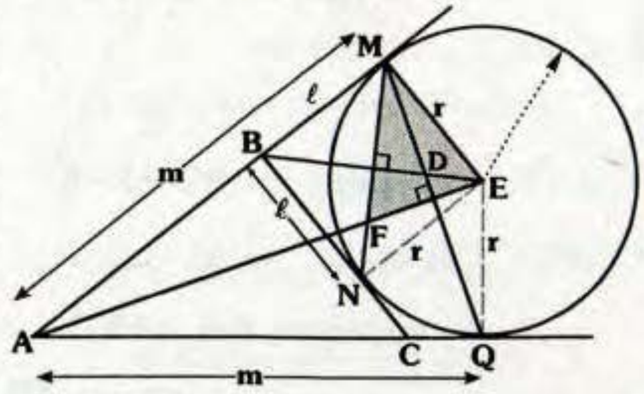
$$\Rightarrow \theta + \alpha + \beta = 135°$$

- Se observa : $\alpha + \beta + \theta = x$

$$\therefore \ \mathbf{x = 135°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 111

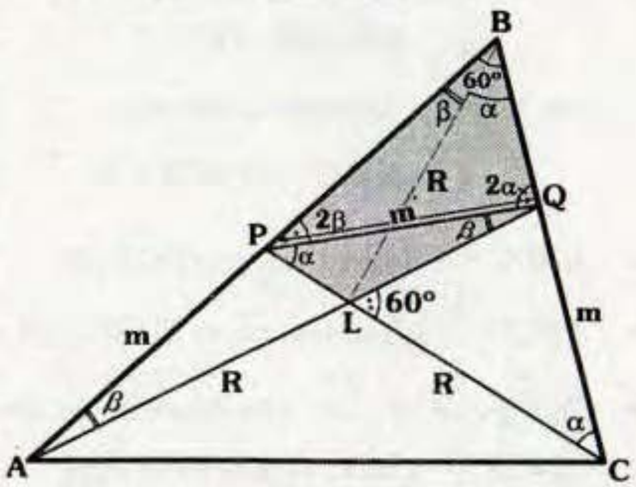


- Por teorema de circunferencia :
  AM = AQ = m y BM = BN = ℓ
- Se observa que BMEN y AMEQ son trapezoides simétricos
  $\Rightarrow \overline{AE} \perp \overline{MQ}$ y $\overline{BE} \perp \overline{MN}$

$\therefore$ **D es ortocentro del ΔMEF**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 112



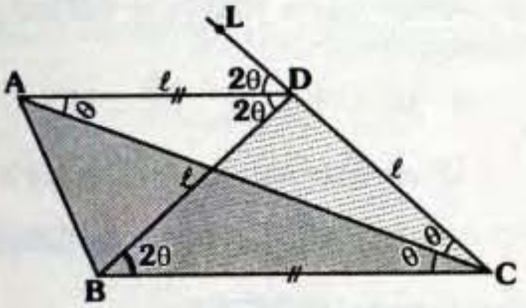
- ΔAPQ y ΔPQC : son isósceles
  $\Rightarrow$ m∡PAQ = m∡PQA = β
  y m∡LBC = m∡LCB = α

- ΔBPQ : $2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$
  $\Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$
- Por ángulo exterior del ΔPQL
  $\Rightarrow m\measuredangle QLC = 60^\circ$
- $\triangle PBQL$: Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle PBL=\beta$ y $m\measuredangle LBQ=\alpha$
- ΔABL : Isósceles $\Rightarrow AL=LB=R$
- ΔBLC : Isósceles $\Rightarrow BL=LC=R$

$\therefore$ **L circuncentro del ΔABC**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 113

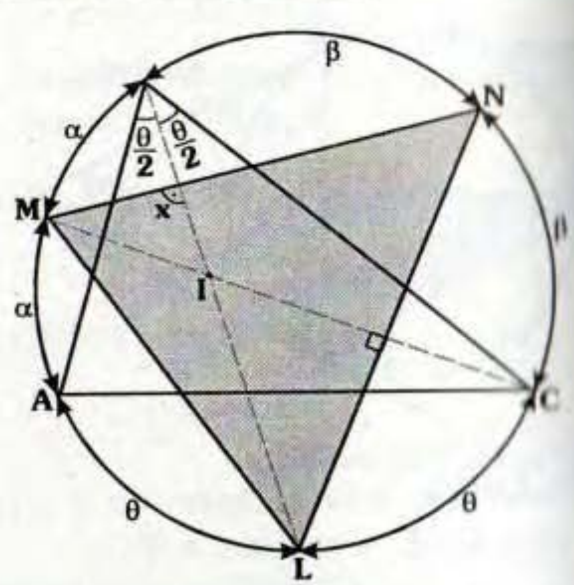


- D : Circuncentro del ΔABC
  $\Rightarrow DA=DB=DC=\ell$
- Por ángulos alternos internos
  $\Rightarrow m\measuredangle DAC=m\measuredangle ACB = \theta$
- ΔADC : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DCA=\theta$
- ΔBCD : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DBC=2\theta$
- Como $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DA}$ son bisectrices de $\measuredangle DCB$ y $\measuredangle BDL$ respectivamente.

$\therefore$ **A : Excentro del ΔBDC**

Clave E

RESOLUCIÓN N° 114

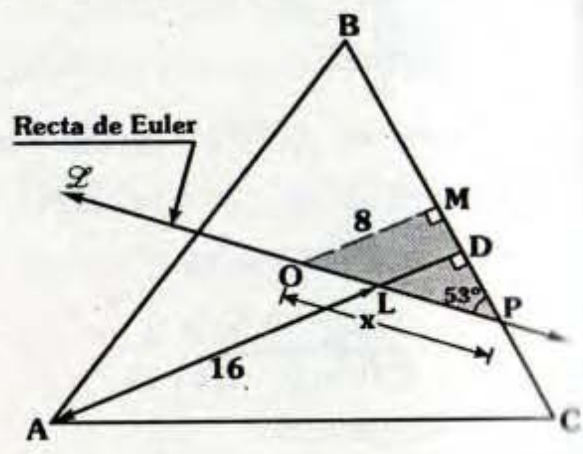


- Se nota B, I y L son colineales
- $\alpha + \alpha + \beta + \beta + \theta + \theta = 360^\circ$
  $\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180^\circ$
- Por ángulo interior :
  $$x = \frac{\alpha + \theta + \beta}{2} \Rightarrow x = 90^\circ$$
- Del mismo modo $\overline{MC} \perp \overline{LN}$

$\therefore$ **I es ortocentro del ΔMNL**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 115



- Sabemos que la recta de Euler ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$) contiene al ortocentro, lo mismo que dicho ortocentro pertenece a $\overline{AD}$, entonces L es ortocentro.

- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$, por el teorema 9.6:

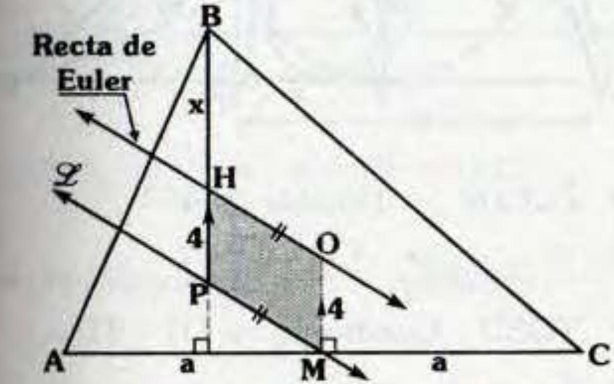
$$OM = \frac{16}{2} = 8$$

- $\triangle$OMP : Notable de 37° y 53°

$$\therefore \ \mathbf{x = 10}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 116



- Sea O el circuncentro del ΔABC.

- Por el teorema 9.4 : $\overline{OM} \perp \overline{AC}$

- ▱PHOM : Paralelogramo

$$\Rightarrow \ OM = 4$$

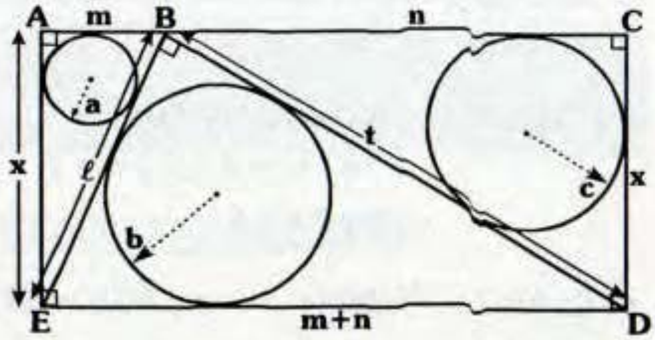
- Finalmente por teorema 9.6 :

$$x = 2(4)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 117



- Por el teorema de Poncelet :

$$\triangle ABE: \ \cancel{m} + x = \cancel{\ell} + 2a$$

$$\triangle BCD: \ \cancel{n} + x = \cancel{t} + 2c \qquad (+)$$

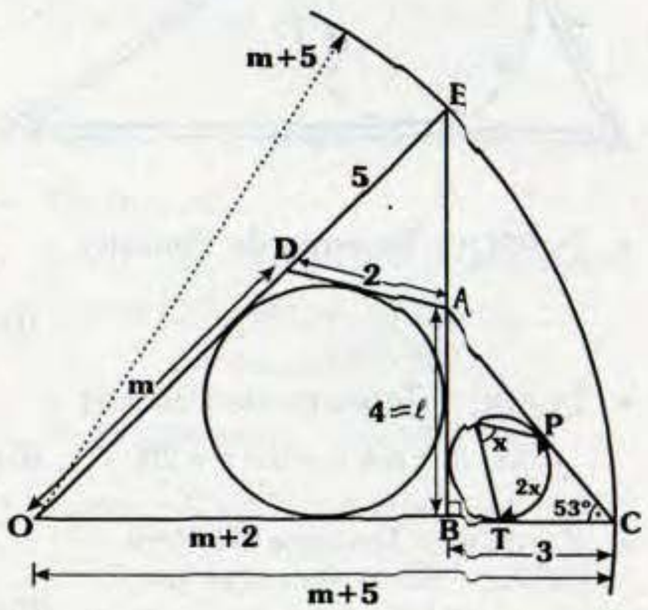
$$\triangle BDE: \ \cancel{\ell} + \cancel{t} = \cancel{m} + \cancel{n} + 2b$$

$$2x = 2a + 2c + 2b$$

$$\therefore \ \mathbf{x = a + b + c}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 118



Por ángulo inscrito : $m\widehat{PT} = 2x$

Sea OD=m, entonces el radio del arco es m+5 $\Rightarrow$ OB=m+2

- $\triangle$ODAB : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow \; m+2+2 = m+\ell$$
$$\Rightarrow \; \ell = 4$$

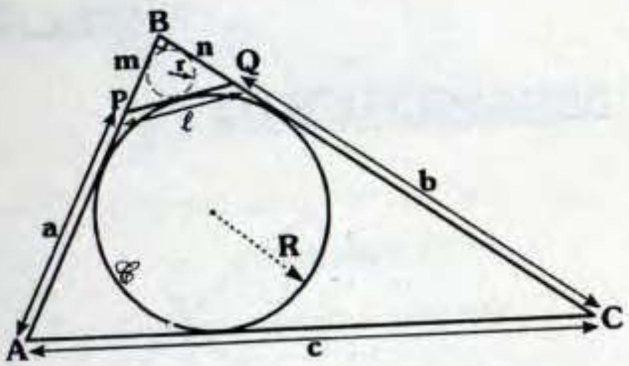
- $\triangle$ABC : Notable $\Rightarrow m\measuredangle ACB = 53°$
- Por teorema de circunferencia :

$$2x + 53° = 180°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \frac{127°}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 119



- $\triangle$PBQ : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \; m+n = \ell + 2r \quad \ldots(I)$$

- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \; m+a+n+b = c+2R \quad \ldots(II)$$

- $\triangle$APQC : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow \; c+\ell = a+b \quad \ldots(III)$$

- (I)+(II)+(III) :

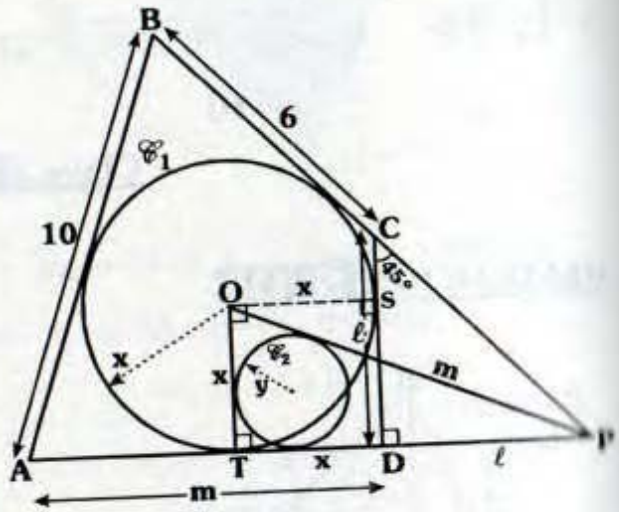
$$2(m+n) = 2(R+r)$$

- Pero $m+n=10$ (*dato*)

$$\therefore \; \mathbf{R+r=10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 120



- $\triangle$CDP : Notable de 45°

$$\Rightarrow \; CD = DP = \ell$$

- TOSD : Cuadrado $\Rightarrow$ OT = TD = x
- $\triangle$ABCD : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow \; 10+\ell = 6+m \quad \ldots(I)$$

- $\triangle$OTP : Teorema de Poncelet

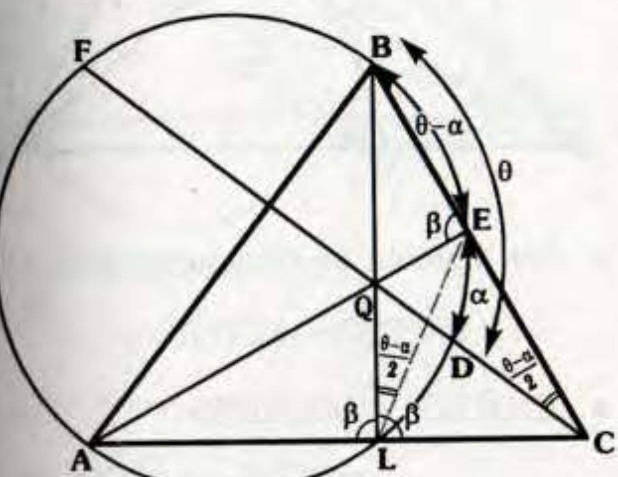
$$\Rightarrow \; x+x+\ell = m+2y \quad \ldots(II)$$

- (I) − (II) : $10-2x = 6-2y$

$$\therefore \; \mathbf{x-y=2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 121



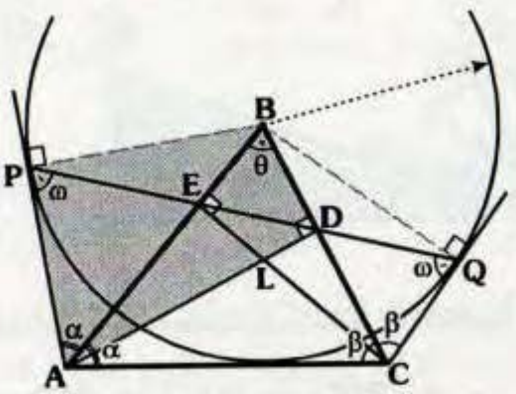
- Sea $m\widehat{ED} = \alpha \Rightarrow m\widehat{BE} = \theta - \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BLE = \dfrac{\theta - \alpha}{2}$
- Por ángulo exterior : $m\measuredangle BCF = \dfrac{\theta - \alpha}{2}$
- Luego el ⏢LQEC es inscriptible

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle QLC = m\measuredangle QEB = \beta$
- En "L" : $\beta + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 90°$
- Finalmente $\overline{AE}$ y $\overline{BL}$ son alturas

  $\therefore$ **Q es ortocentro del ΔABC**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 122



- Por teoremas en la circunferencia :

  $\overline{BP} \perp \overline{PA}$, $\quad \overline{BQ} \perp \overline{QC}$,

  $m\measuredangle PAB = m\measuredangle BAC = \alpha$,

  $m\measuredangle ACB = m\measuredangle BCQ = \beta \quad$ y

  $m\measuredangle APQ = m\measuredangle PQC = \omega$
- ⏢APQC:

  $\omega + \omega + \alpha + \alpha + \beta + \beta = 360°$

  $\Rightarrow \quad \omega + \alpha + \beta = 180° \quad \ldots \text{(I)}$
- ΔABC: $\quad \theta + \alpha + \beta = 180° \quad \ldots \text{(II)}$
- De (I) y (II) :

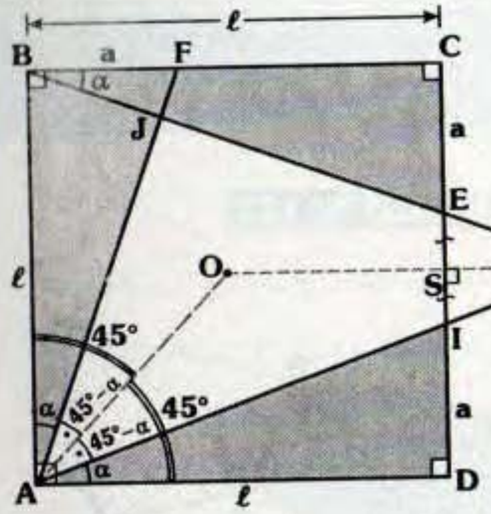
  $\omega = \theta$, con lo cual nos damos cuenta que el ⏢APBD es inscriptible :

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle ADB = 90°$
- Análogamente : $\quad m\measuredangle CEB = 90°$
- Luego $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas del ΔABC

  $\therefore$ **L es ortocentro del ΔABC**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 123



- $\triangle ABF \cong \triangle BCE \cong \triangle ADI$ (LAL)

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAF = m\measuredangle EBC = m\measuredangle IAD = \alpha$

- Como O : Centro

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAO = m\measuredangle OAD = 45°$

  Con lo cual se observa que $\overline{AO}$: bisectriz interior del ΔAJN.

- ΔIEN, se traza la altura NS, con lo cual se observa :

  $m\measuredangle SNE = m\measuredangle SNI = \alpha$

- Luego ΔIEN :

  isósceles $\Rightarrow$ ES=SI

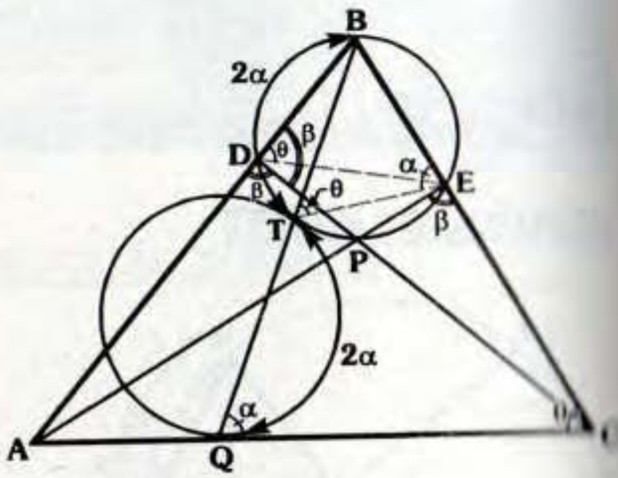
- Como CS=SD :

  $\Rightarrow$ O, S y N colineales

$\therefore$ **O es incentro del ΔAJN**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 124



- Por teorema de circunferencia :

  $m\measuredangle TQC = m\measuredangle TEB = \alpha$

- $\triangle QTEC$: Inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BTE = m\measuredangle ECQ = \theta$

- $m\measuredangle BDE = \theta$ (*Por inscrito*)

- $\triangle ADEC$: Inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ADC = m\measuredangle AEC = \beta$

- $\triangle DBEP$: Inscrito

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PDB = m\measuredangle PEC = \beta$

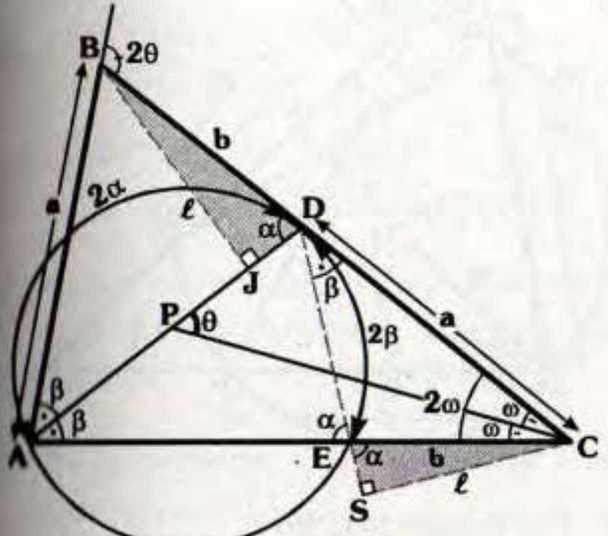
- En "D" : $\beta + \beta = 180°$

  $\Rightarrow$ $\beta = 90°$, con lo cual $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas.

$\therefore$ **P es ortocentro del ΔABC**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 125



- Por ángulo inscrito :

  $m\widehat{DE} = 2\beta \quad y \quad m\widehat{AD} = 2\alpha$

- Por ángulo semiinscrito :

  $m\measuredangle ADB = \beta \;\; y \;\; m\measuredangle EDC = \beta$

- Trazamos $\overline{BI} \perp \overline{AD} \;\; y \;\; \overline{CS} \perp \overleftrightarrow{DE}$
- $\Delta BID \cong \Delta ESC \;\; (ALA) \Rightarrow BJ = SC = \ell$
- $\Delta ABJ \cong \Delta DSC \;\; (LLL)$

  $\Rightarrow \; m\measuredangle BAJ = m\measuredangle SDC = \beta$

- Por ángulo exterior :

  $\Delta APC: \;\; \beta + \omega = \theta$

  $\Delta ABC: \;\; 2\beta + m\measuredangle ACB = 2\theta$

  $\Rightarrow \;\; m\measuredangle ACB = 2\omega$

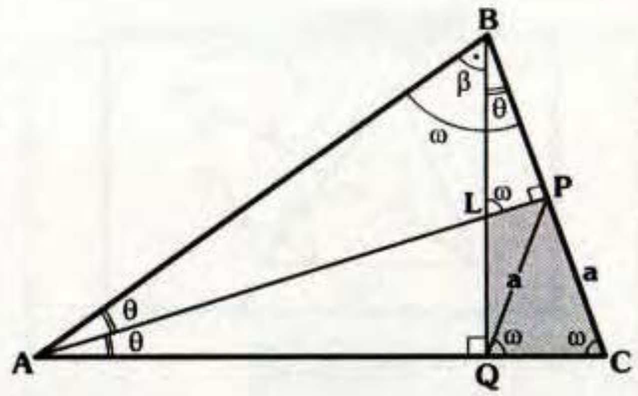
  $\therefore$ **P : Incentro de ABC**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 126

- En "B" : $\omega = \beta + \theta$
- ΔABL : Por ángulo exterior :

  $m\measuredangle BLP = \beta + \theta = \omega$



- $\triangle$PLQC : Inscriptible (*dato*)

  $\Rightarrow \;\; m\measuredangle PCQ = \omega$

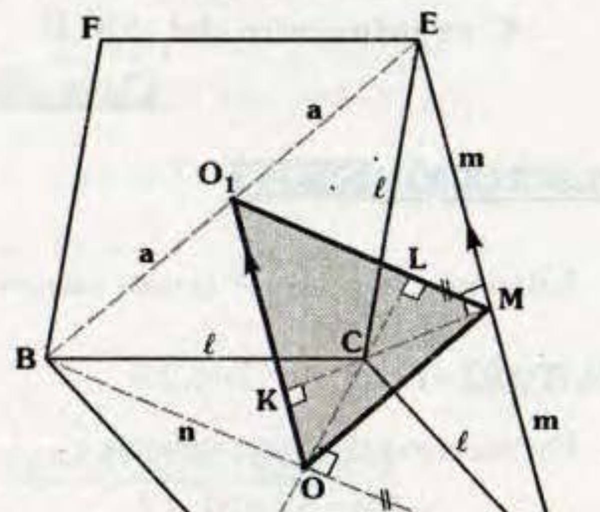
- ΔPQC : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle PQC = \omega$
- $\triangle$ABPQ : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle PAQ = \theta$
- Luego, se nota que $\overline{AP}$ es bisectriz del triángulo isósceles ABC $\Rightarrow \overline{AP}$ es altura.
- $\triangle$QLPC : Inscriptible

  $\Rightarrow \;\; m\measuredangle LQA = 90°$

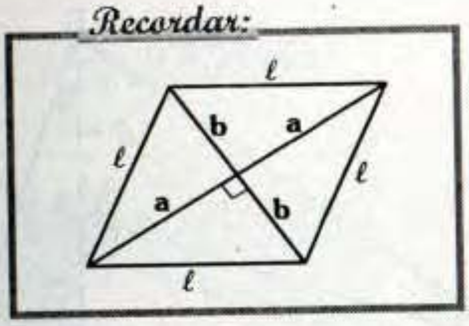
  $\therefore$ **L es ortocentro del ΔABC**

Clave D

RESOLUCIÓN N° 127



Recordar:



- ABCD : Rombo
  $\Rightarrow$ BO=OD=n y m∡COD=90°
- BCEF : Rombo
  $\Rightarrow$ $BO_1=O_1E=a$
- $\overline{MO_1}$: Base media del ΔBED
  $\Rightarrow$ $\overline{MO_1} \parallel \overline{BD}$
- Entonces al prolongar $\overline{OC}$, nos damos cuenta que $\overline{OL}$ es altura.
- ΔCED : Isósceles $\Rightarrow$ m∡CME=90°
- $\overline{OO_1}$: Base media del ΔBED
  $\Rightarrow$ $\overline{OO_1} \parallel \overline{ED}$
- Luego al prolongar $\overline{MC}$, nos daremos cuenta que $\overline{MK}$ es altura.

∴ **C es ortocentro del ΔBED**

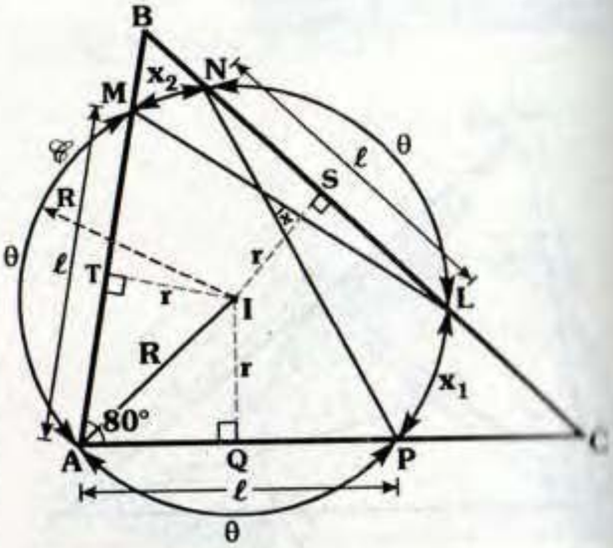
Clave A

RESOLUCIÓN N° 128

- Sabemos : $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ *(ángulo interior)*
- $IT = IQ = IS = r$ (r : *Inradio*)
- Por teorema de circunferencia :

$$AM = AP = NL = \ell$$

$$\Rightarrow m\widehat{AM} = m\widehat{AP} = m\widehat{NL} = \theta$$



- Por ángulo inscrito :

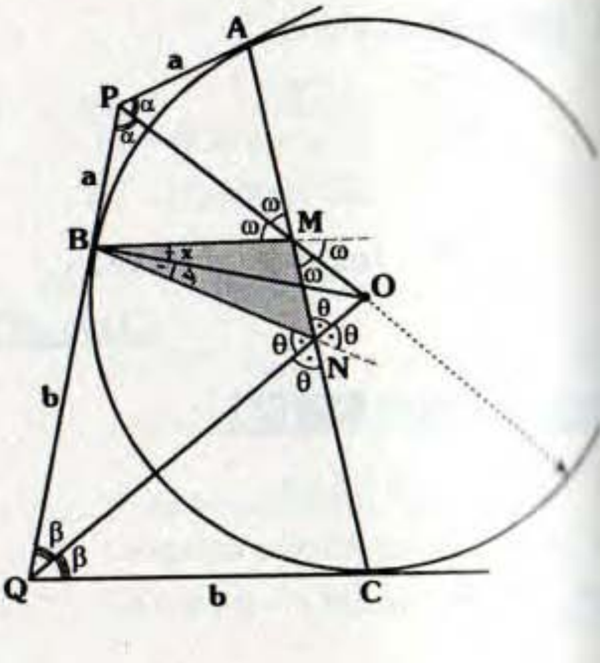
$$\theta + x_1 + x_2 = 160° \quad \text{(I)}$$

- En $\mathscr{C}$: $\theta + \theta + x_1 + x_2 + \theta = 360°$ ... (II)
- De (I) y (II) : $x_1 + x_2 = 60°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 129



- Por teorema de circunferencia :

$$m\measuredangle APO = m\measuredangle OPB = \alpha$$
$$m\measuredangle BQO = m\measuredangle OQC = \beta$$
$$PA = PB = a \quad y \quad QB = QC = b$$

- $\Delta BPM \cong \Delta PAM$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BMP = m\measuredangle PMA = \omega$$

- Al prolongar $\overline{BM}$, nos damos cuenta que $\overline{MO}$ es bisectriz exterior del ΔBMN.

- Análogamente, $\overline{NO}$ es bisectriz exterior del ΔBMN.

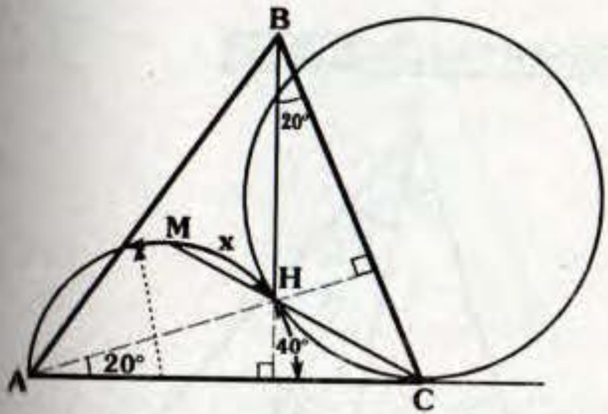
- Luego O es excentro del ΔMBN

$$\Rightarrow \quad x = y$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 130



- H : Ortocentro

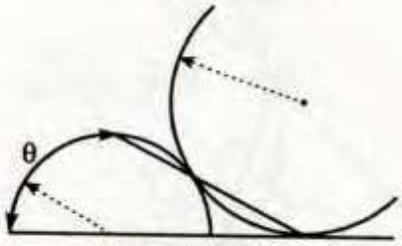
$$\Rightarrow m\measuredangle HAC = m\measuredangle HBC = 20°$$

- Por ángulo inscrito : $\quad m\widehat{HL} = 40°$
- De la observación : $\quad x + 40° = 90°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$$

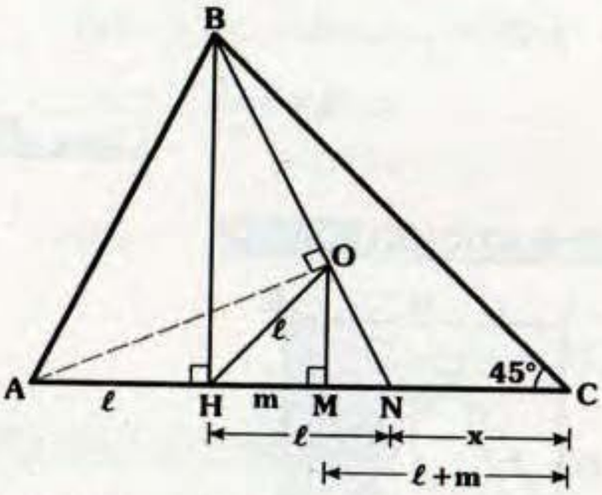
Clave E

Observación



$$\boxed{\theta = 90°}$$

RESOLUCIÓN N° 131



- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle BDA = 2(45°) = 90°$$

- $\triangle AON$: Por el teorema

$$\Rightarrow HN = HA = HO = \ell$$

- $AM = MC = \ell + m$ (*teorema* 9.4.)

- $HC = m + \ell + m = \ell + x$

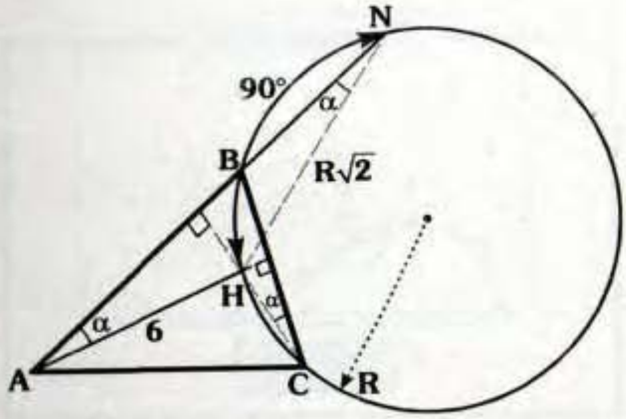
$$\therefore \quad \mathbf{x = 2m}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 132

- Como H : Ortocentro

$$\Rightarrow m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \alpha$$

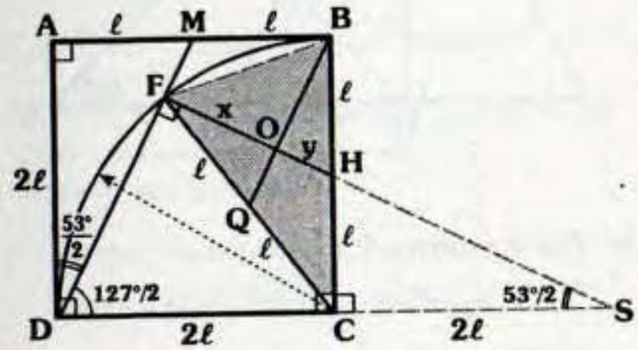


- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BNH=\alpha$
- Como $m\widehat{HBN}=90^\circ \Rightarrow HN=R\sqrt{2}$
- AHN : Isósceles $\Rightarrow 6=R\sqrt{2}$

$$\therefore\ \mathbf{R=3\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 133

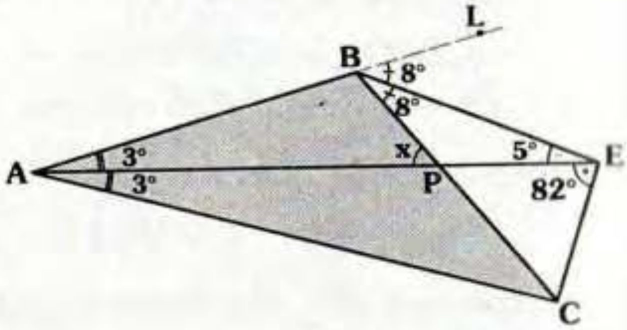


- $\triangle$ADM : Notable $\Rightarrow m\measuredangle ADM=\dfrac{53^\circ}{2}$
- Prolongamos $\overline{DC}$ y $\overline{FH}$ hasta que se corten en S.
- Por el teorema recíproco $\triangle$: $SC=2\ell$
- $\triangle$HCS : Notable de $53^\circ/2 \Rightarrow HC=\ell$
- O : Baricentro del $\triangle BCF$, por teorema fundamental :

$$\therefore\ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\mathbf{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 134



- Se observa que $\overrightarrow{AE}$ bisectriz interior del $\triangle ABC$, además:

$$m\measuredangle BEC=90^\circ-3^\circ$$

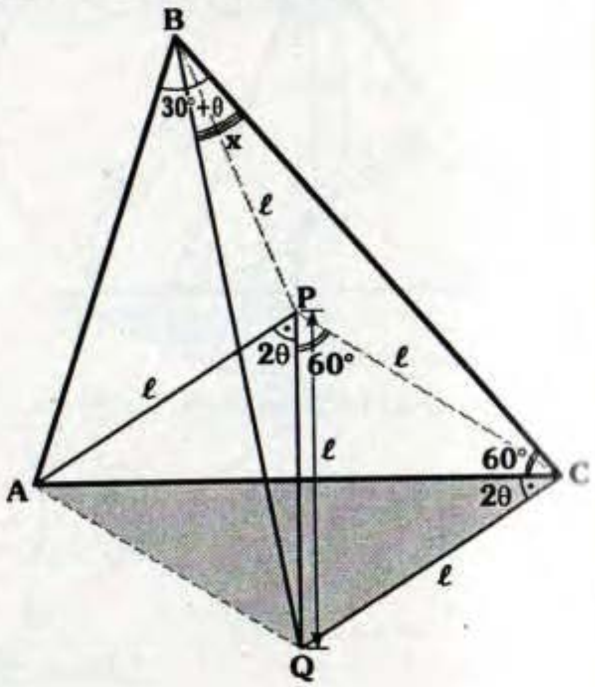
$\Rightarrow$ E: Excentro del $\triangle ABC$ (*criterio* 8.9)

- $\overrightarrow{BE}$: Bisectriz exterior del $\triangle ABC$ $\Rightarrow m\measuredangle EBC=8^\circ$
- $\triangle BPE$: $x=8^\circ+5^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{x=13^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 135



- Trazamos $\overline{AQ}$, luego por el criterio 8.14:

  $\Rightarrow$ P es circuncentro del ΔAQC

  $\Rightarrow PC=\ell$

- Se nota que el ΔQPC es equilátero

  $\Rightarrow m\measuredangle QPC = 60°$

- Por el criterio 8.13. P es circuncentro del : $\Delta ABC \Rightarrow BP=\ell$

- Como $PQ=PC=PB=\ell$

  $\Rightarrow$ P circuncentro del ΔBQC

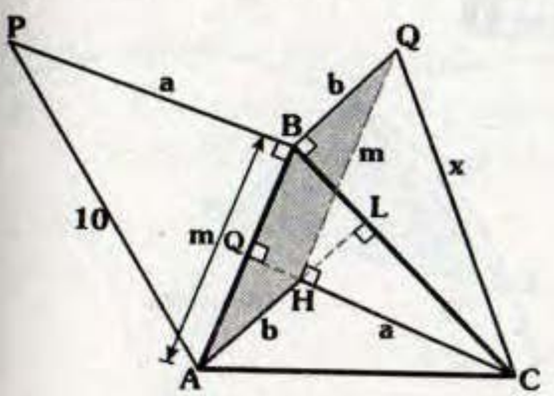
- Finalmente por teorema fundamentalmente :

$$x=\frac{60°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 136



- H : ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y $\overline{CQ}$ son alturas.

- Se observa que $AH=BQ=b$ y $\overline{AH}//\overline{BQ}$

  $\Rightarrow$ ABQH es un paralelogramo

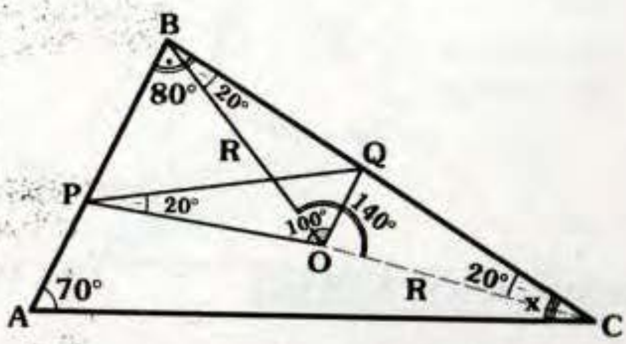
  $\Rightarrow QH=AB=m$

- $\triangle ABP \cong \triangle QHC$ (LAL)

  $\therefore\ \mathbf{x=10}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 137



- O :Circuncentro $\Rightarrow BO=OC=R$

  $m\measuredangle BOC = 2(70°) = 140°$

  $\Rightarrow m\measuredangle OBC = 20°$

- $\square$PBQO : Inscriptible

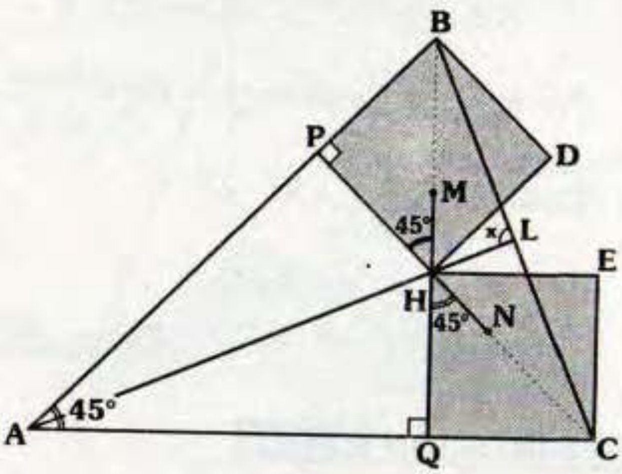
  $\Rightarrow m\measuredangle PBQ = 80°$

- ΔABC : $70°+80°+x=180°$

  $\therefore\ \mathbf{x=30°}$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 138



- $\square$APHQ : Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle PHM=m\measuredangle PAQ=45°$

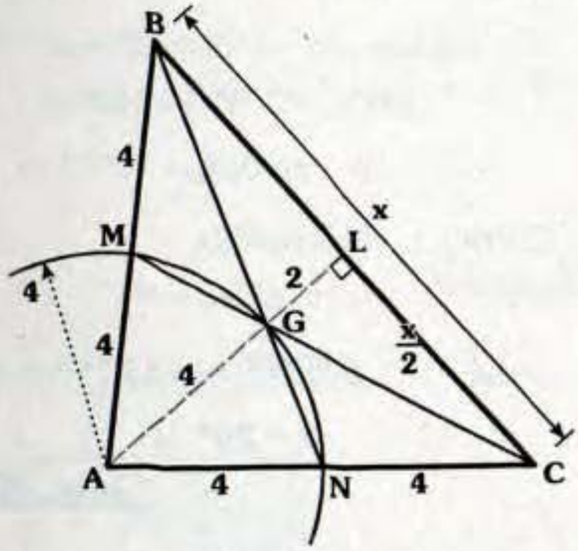
- Como BPHD es un cuadrado, al prolongar $\overline{HM}$ llega al punto B.

- Analogamente la prolongación de $\overline{HN}$ llega a C.
- Se observa que $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas del ΔABC.

$$\therefore\ \mathbf{x = 90^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 139



- Como G es baricentro:

$$AM = MB = 4 \quad y \quad AN = NC = 4$$

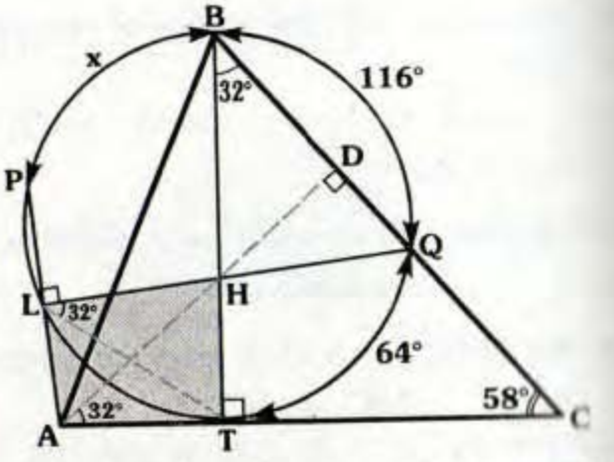
- Por teorema fundamental: $GL = \dfrac{4}{2} = 2$
- $\triangle ALC$: $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 8^2 - 6^2$

$$\therefore\ \mathbf{x = 4\sqrt{7}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 140

- H: Ortocetro $\Rightarrow \overline{BT}$ y $\overline{AD}$ son alturas.
- $\triangle BTC$: $m\measuredangle TBC = 32^\circ$,
  $\triangle ADC$: $m\measuredangle DAC = 32^\circ$



- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle QLT = 32^\circ$
- $\triangle ALHT$:. Inscriptible

$$\Rightarrow\ m\measuredangle PLH = 90^\circ$$

- Por ángulo inscrito : $m\widehat{PBQ} = 180^\circ$

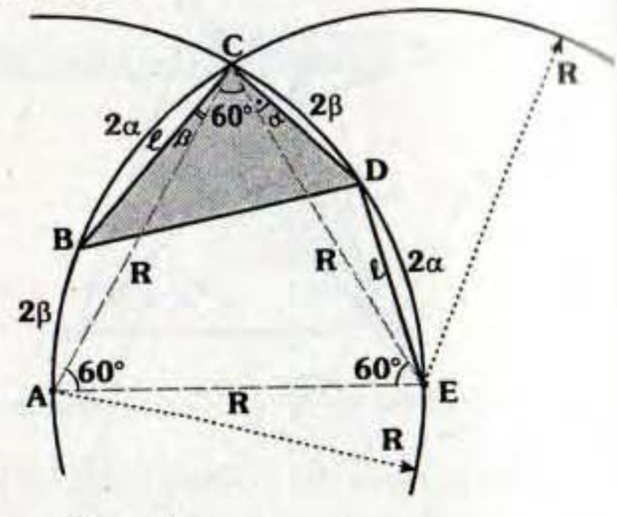
$$\Rightarrow\ x + 116^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 64^\circ}$$

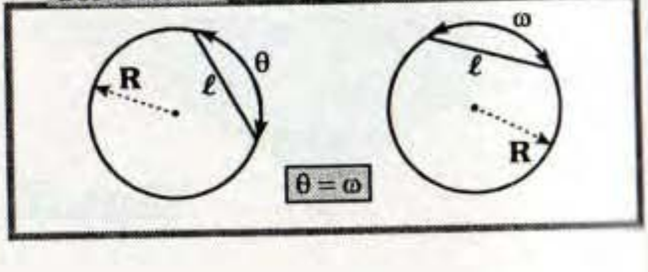
Clave C

RESOLUCIÓN N° 141

Paso 1

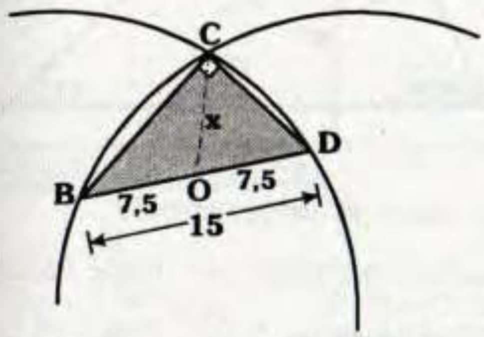


Recordar:



- Se observa que el ΔACE es equilátero.
- Como : $ED = BC = \ell$
  $\Rightarrow \; m\widehat{ED} = m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Luego, $m\widehat{CD} = m\widehat{AB} = 2\beta$
  (ya que $m\widehat{EC} = m\widehat{AC} = 60°$)
- Se nota : $m\widehat{CE} = 60° = 2\alpha + 2\beta$
  $\Rightarrow \; \alpha + \beta = 30°$
- Entonces el ΔBCD es rectángulo.

Paso 2



- Como ΔBCD : Rectángulo
  $\Rightarrow$ C es su ortocentro y el punto medio de $\overline{BD}$ (O) es su circuncentro.
- Luego por el teorema:

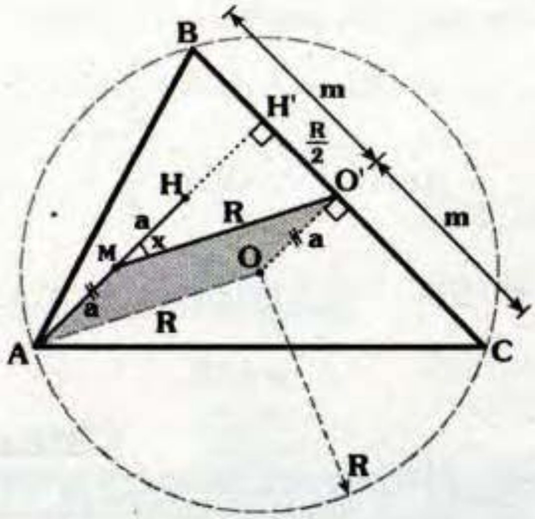
$$\therefore \; \mathbf{x = 7,5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 142

- Como H es ortocentro
  $\Rightarrow$ A ; H y H' son colineales.
- Por el teorema 9.4. : $\overline{OO'} \perp \overline{BC}$

$$\Rightarrow \; OO' = \frac{AH}{2} = a$$

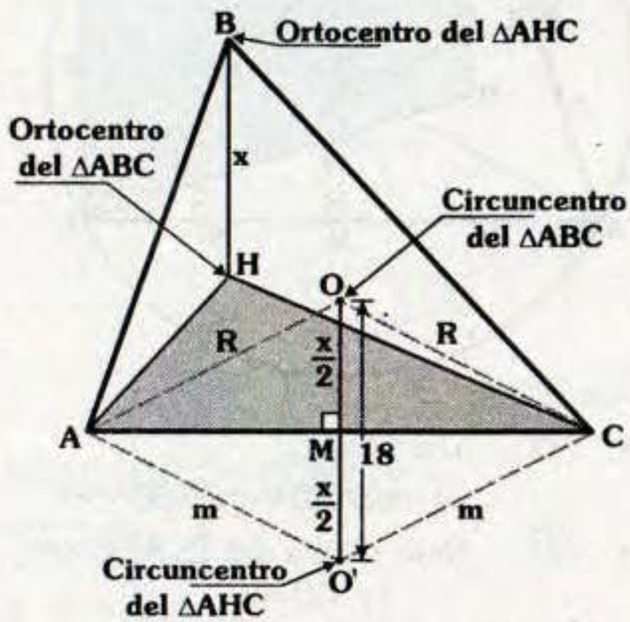


- Luego AMO'O es un paralelogramo (ya que $OO'AM = a$ y $\overline{OO'} // \overline{AM}$)
  $\Rightarrow \; MO' = R$
- $\triangle MH'O$: Notable de 30° y 60°

$$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 143



- Se observa $AOCO_1$ es un trapezoide simétrico $\Rightarrow \; \overline{AC} \perp \overline{OO_1}$

Por el teorema 9,6 :

$\Delta ABC: \quad OM=\dfrac{x}{2}$

$\Delta AHC: \quad O_1M=\dfrac{x}{2}$

Se nota : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}=18$

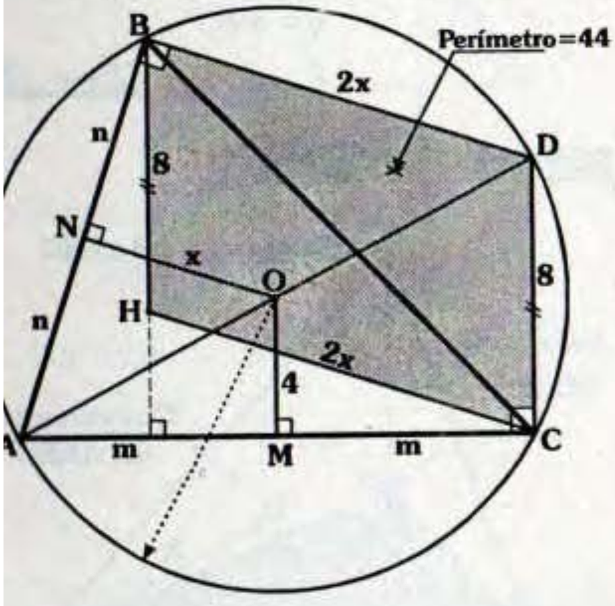
$\therefore\ \mathbf{x=18}$

Clave E

Nota

Se concluye que $AOCO_1$ *es un rombo.*

RESOLUCIÓN N° 144

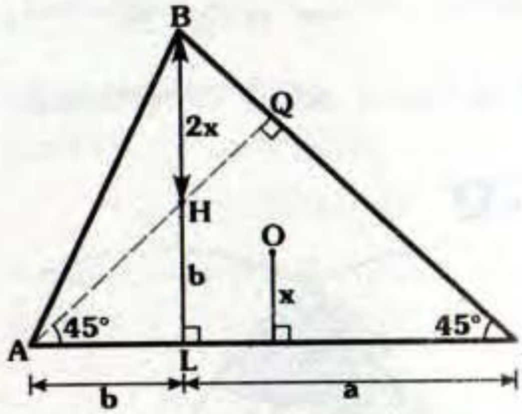


- $\overline{AD}$: Diámetro
  $\Rightarrow m\measuredangle ABD=m\measuredangle ACD=90^\circ$
- $\overline{OM}$: Base media del ⊿ADC
  $\Rightarrow CD=8$
- $\overline{ON}$: Base media del ⊿ABD
  $\Rightarrow BD=2x$
- Por el teorema 9.6: $BH=8$
- Se nota : BHCD es un paralelogramo
  $\Rightarrow CH=2x$
- Perím. $_{ABCH}=44=8+2x+8+2x$

$\therefore\ \mathbf{x=7}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 145

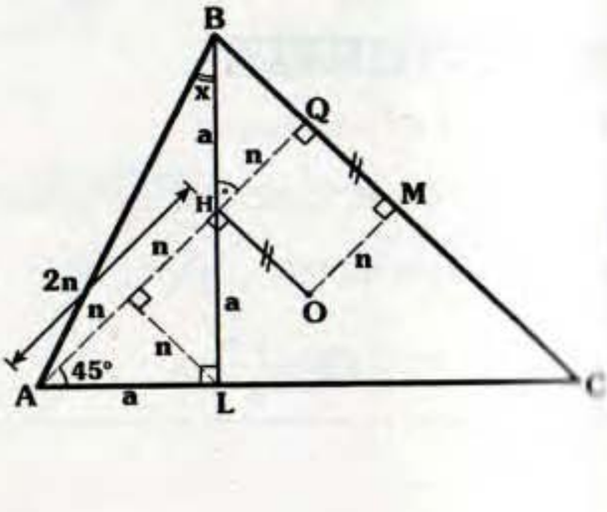


- Se ubica el ortocentro H.
- ⊿ALH notable $\Rightarrow HL=AL=b$
- Por el teorema 9.6: $BH=2x$
- ⊿BLC; notable $\Rightarrow 2x+b=a$
- Dato $a-b=4$

$\therefore\ \mathbf{x=2}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 146

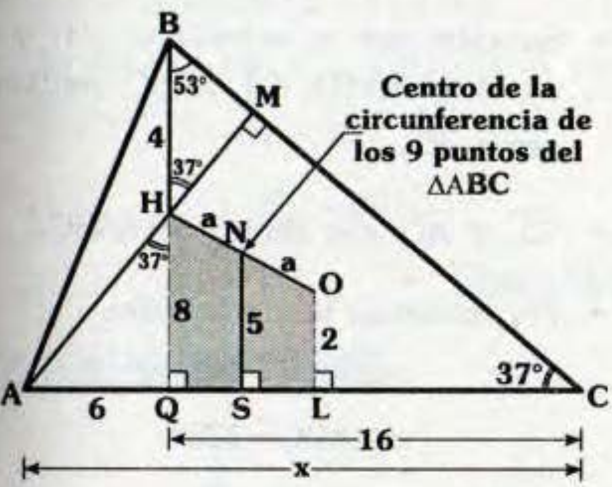


- Se traza la altura $\overline{AQ}$ y $\overline{OM} \perp \overline{BC}$.
- HQMO : Rectángulo $\Rightarrow$ OM=HQ=n
- Por el teorema 9.6: AH=2n
- Luego trazamos $\overline{LN} \perp \overline{AH}$
  $\Rightarrow \Delta BQH \cong \Delta LNH$ (ALA) $\Rightarrow$ NH = n
- AN=NH=NL=n
- ◺ANL : Notable $\Rightarrow m\measuredangle NAL = 45^\circ$
- ◺AHL : Notable $\Rightarrow AL = a$
- ◺ALB : Notable

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{53^\circ}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 147



- Trazamos la altura BQ y $\overline{OL} = \frac{4}{2} = 2$
- Por el teorema 9.6 : $OL = \frac{4}{2} = 2$
- $\overline{NS}$: Base media del trapecio HOLQ

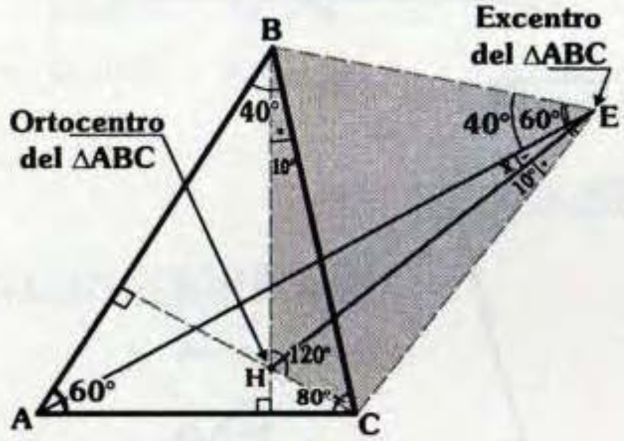
$$\Rightarrow \ 5 = \frac{HQ+2}{2} \ \Rightarrow \ HQ = 8$$

- ◺AHQ : Notable $\Rightarrow$ AQ=6
- ◺BQC : Notable $\Rightarrow$ QC=16

$$\therefore \ \mathbf{x = 22}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 148



- Por teoremas fundamentales :

$$m\measuredangle BHC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \ ,$$

$$m\measuredangle BEC = 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 60^\circ \ \text{ y}$$

$$m\measuredangle BEA = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

- ⌂BHCE : Inscriptible
  $\Rightarrow \ m\measuredangle HEC = 10^\circ$
- En "E" : $60^\circ = 40^\circ + x + 10^\circ$

$$\therefore \ \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave E

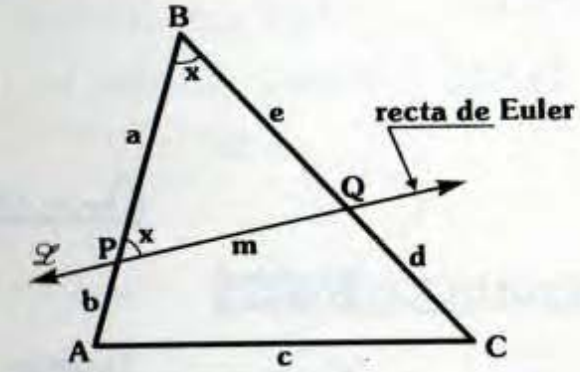
RESOLUCIÓN N° 149

Paso 1

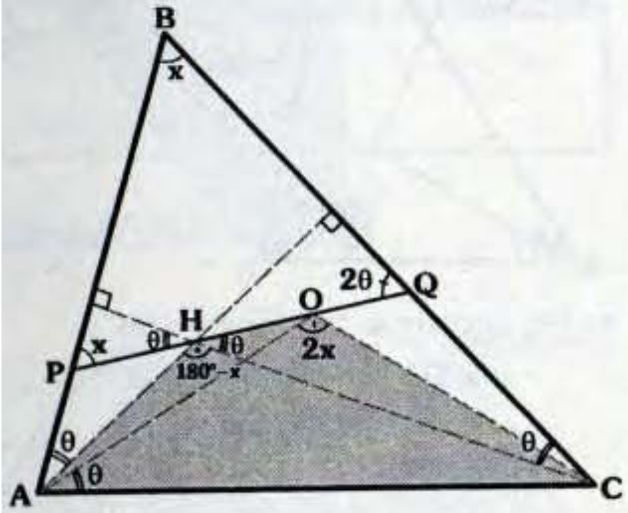
- Del dato :

$$(a+b+c+d+e)-(b+c+d+m) = a$$

$$\Rightarrow \ e = m \ \Rightarrow \ m\measuredangle BPQ = x$$



Paso 2

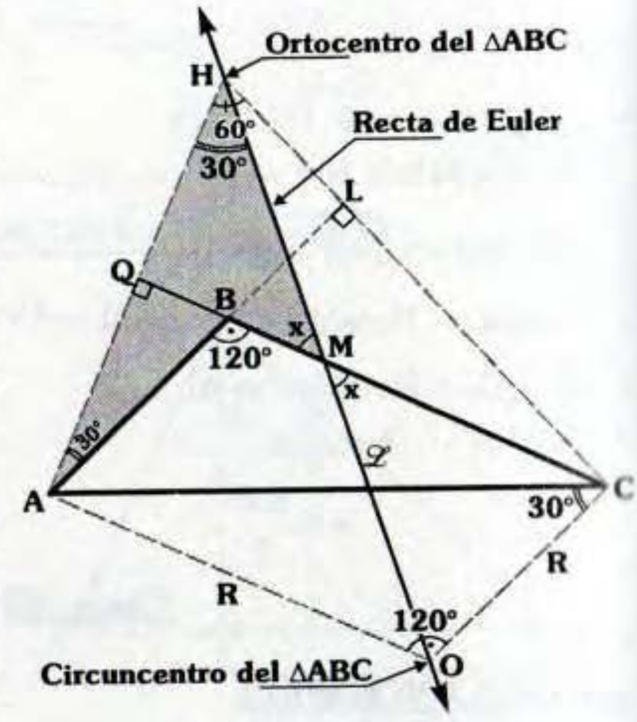


- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 180° - x$ y $m\measuredangle AOC = 2x$
- Se observa : $x + \theta = 90°$ ... (I)
- ΔPBQ : $x + x + m\measuredangle BQP = 180°$ ... (II)
- De (I) y (II) : $m\measuredangle BQP = 2\theta$
- Por el teorema 9.4 : $m\measuredangle OAC = \theta$
- ΔHQC : Por ángulo exterior
  $m\measuredangle QHC = \theta$
- $\Delta AHOC$: Inscriptible
  $\Rightarrow 180° - x = 2x$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 60°}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 150

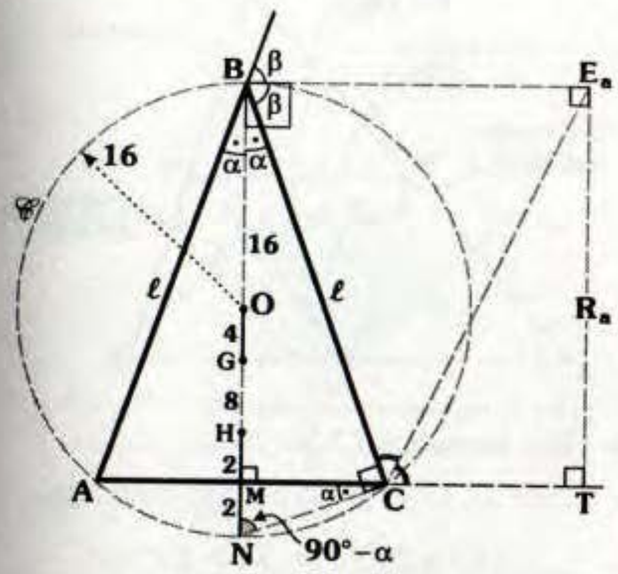


- Se sabe que el ortocentro (H) y el circuncentro (O) del ΔABC pertenecen a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- $\overline{CL}$ y $\overline{AQ}$ son alturas del ΔABC.
- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 60°$ y
  $m\measuredangle AOC = 120°$
- ΔAOC : Isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle ACO = m\measuredangle OAC = 30°$
- ⏢AHCO : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle AHO = 30°$
- En ◺HQM: $x + 30° = 90°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 60°}$

Clave

RESOLUCIÓN N° 151

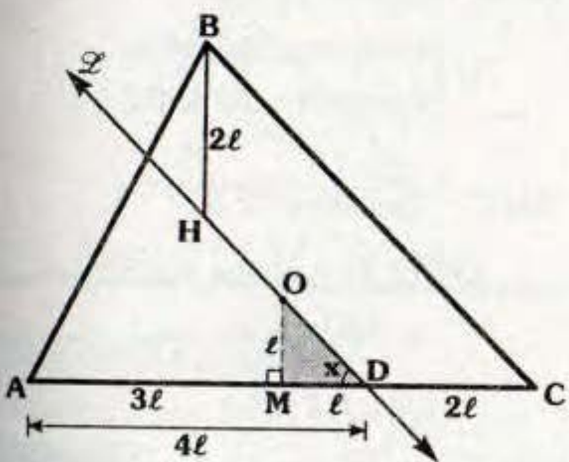


- Como el ΔABC es isósceles $\Rightarrow$ B, O, G y H son colineales.
- Por el teorema 9.5 : $HN=2$
- Por el teorema 12.6 : $GH=8$
- Se observa que el circunradio es 16.
- $BMTE_a$: Rectángulo

$$\therefore \ \mathbf{R_a = 30}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 152



- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler, el circuncentro O pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$, por el teorema 9.6.

$$OM = \frac{BH}{2} \ \Rightarrow \ OM = \ell$$

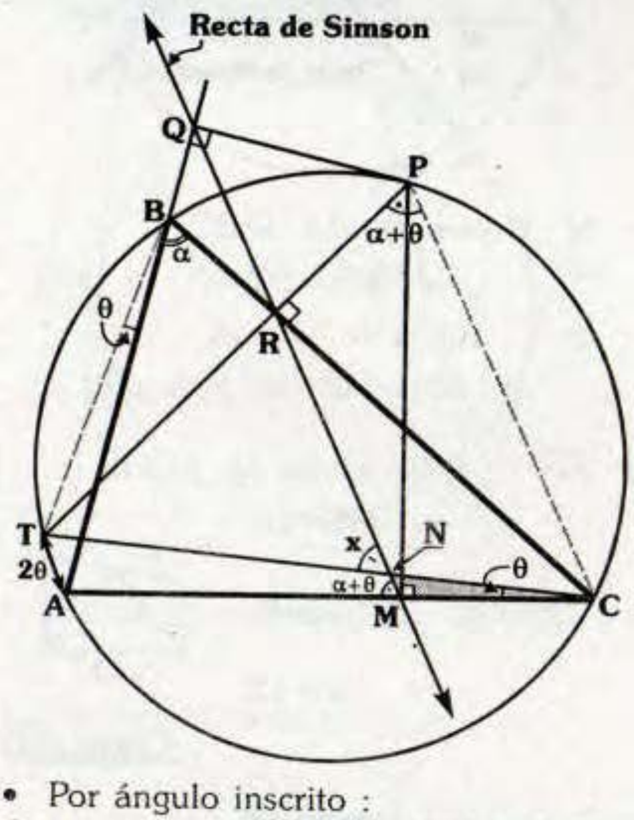
Además : $AM = MC = 3\ell \ \Rightarrow \ MD = \ell$

- $\triangle OMD$: Notable

$$\therefore \ \mathbf{x = 45^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 153



- Por ángulo inscrito :

$$m\measuredangle TBA = m\measuredangle TCA = \theta$$
$$m\measuredangle TPC = \alpha + \theta$$

- $\overleftrightarrow{QM}$: Recta de Simson $\Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{BC}$
- $\square PRMC$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle RPC = m\measuredangle RMA = \alpha + \theta$$

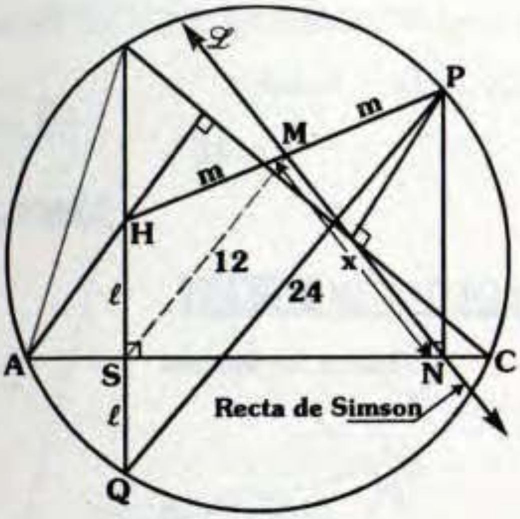
- Por ángulo exterior ΔMNC:

$$x + \theta = \alpha + \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \alpha}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 154



- H : Ortocentro del ΔABC

$$\Rightarrow \quad HS = SQ = \ell$$

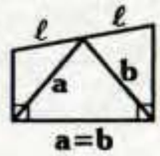
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Simson

$$\Rightarrow \quad HM = MP = m \quad \text{(ver pág. 78)}$$

- $\overline{MS}$: Base media del ΔQHP

$$\Rightarrow \quad MS = 12$$

- ⊿SHPN : Trapecio



$$\therefore \quad \mathbf{x = 12}$$

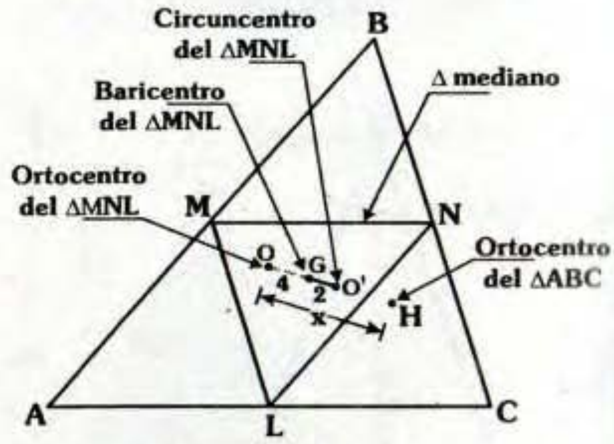
Clave B

RESOLUCIÓN N° 155

Paso 1

- ΔMNL : Teorema 12.6

$$O \begin{cases} \text{Circuncentro del } \Delta ABC. \\ \text{Ortocentro del } \Delta MNL. \end{cases}$$

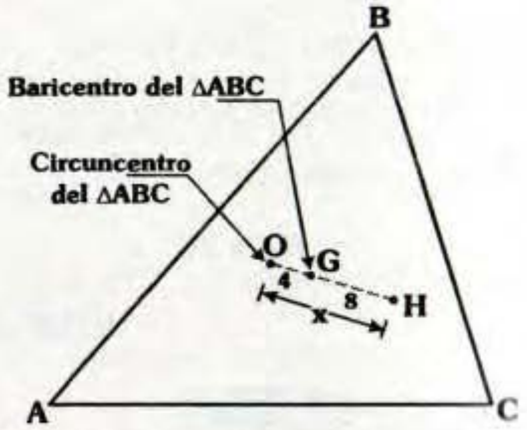


- Por teorema 11.3 :

$$\Rightarrow \quad O,\ G \text{ y } O' \text{ son colineales} \quad y$$

$$OG = 2(GO') = 4 \Rightarrow OG = 6$$

Paso 2



- Por el teorema 11.2:

$$G \begin{cases} \text{Baricentro del } \Delta ABC \\ \text{Baricentro del } \Delta MNL \end{cases}$$

- ΔABC : Teorema 12.6

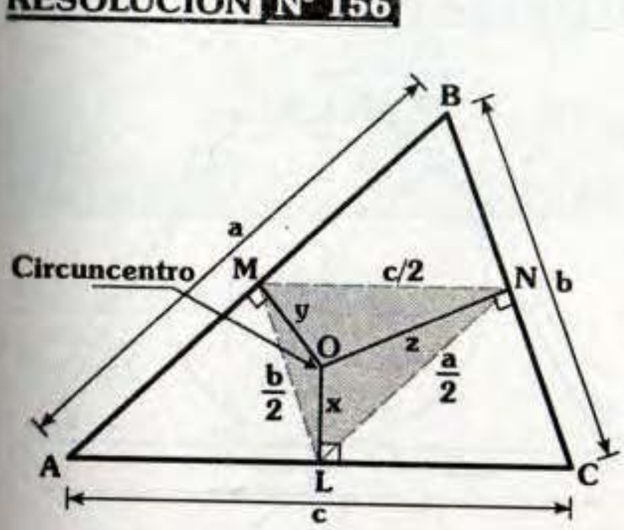
$$\Rightarrow \quad O,\ G \text{ y } H \text{ son colineales}$$

$$y \quad GH = 8$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 156



- Por el teorema 9.4 :

  M, N y L son puntos medios

  $\Rightarrow$ MNL : Triángulo mediano del triángulo ABC.

- De la observación :

  $$p_{\Delta MNL} < x+y+z < 2p_{\Delta MNL}$$

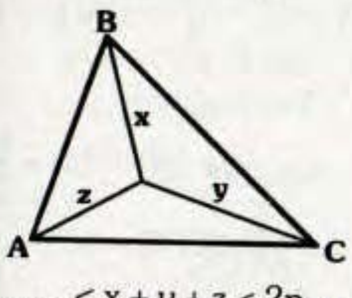
- Pero, del dato : $a+b+c=8$

  $$\Rightarrow \quad 2 < x+y+z < 4$$

  $$\therefore \quad \mathbf{(x+y+z)_{entero} = 3}$$

Clave D

Observación

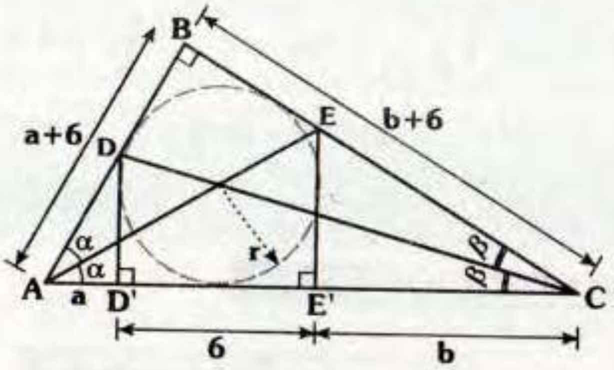


$$p_{\Delta ABC} < x+y+z < 2p_{\Delta ABC}$$

RESOLUCIÓN N° 157

- Por teorema de la bisectriz :

  $AB = AE' = a+6$ y $BC = CD' = 6+b$



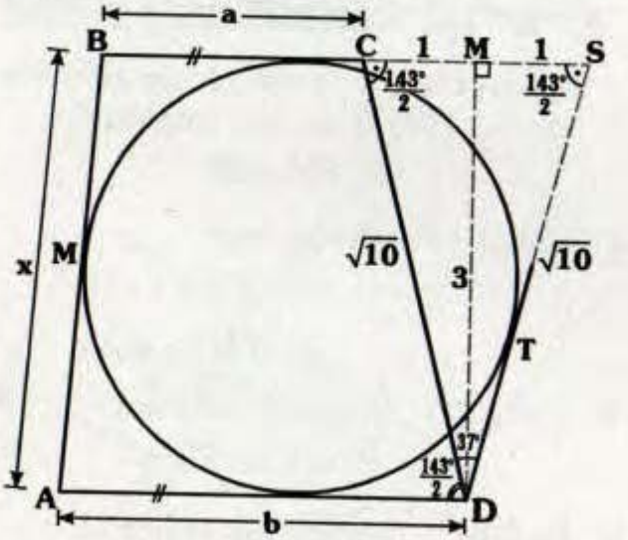
- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

  $$\Rightarrow \quad a+6+b+6 = a+6+b+2r$$

  $$\therefore \quad \mathbf{r=3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 158



- Prolongamos $\overline{DT}$ y $\overline{BC}$ hasta que se corten en S.

- Por ángulo alternos internos :

  $$m\measuredangle SCD = \frac{143°}{2}$$

- ΔSCD : Isósceles $\Rightarrow DS = \sqrt{10}$

- ΔCMD : Notable $\Rightarrow CM = MS = 1$

- $\square$ABCD : Teorema de Pitot

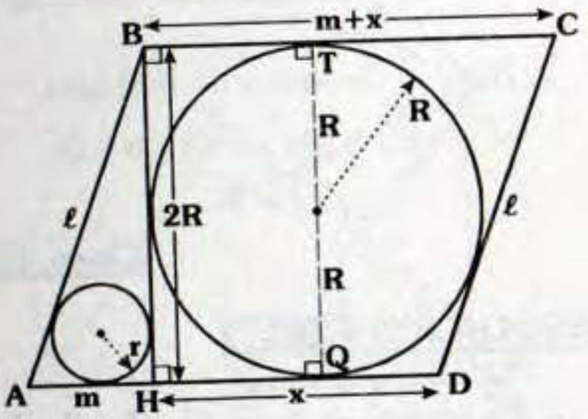
  $$\Rightarrow \quad x+\sqrt{10} = a+2+b$$

Pero, $\frac{a+b}{2}=5$ (*dato*) $\Rightarrow$ $a+b=10$

$$\therefore\ \mathbf{x=12-\sqrt{10}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 159



- Aprovechando teoremas de circunferencia, HBTQ es un rectángulo

$$\Rightarrow\ BH=2R$$

- ABCD : Paralelogramo

$$\Rightarrow\ AB=CD=\ell \quad y$$
$$BC=AD=m+x$$

- ⌂HBCD : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow\ x+m+x=2R+\ell \quad \ldots (I)$$

- ◺ABH : Teorema de Poncelet

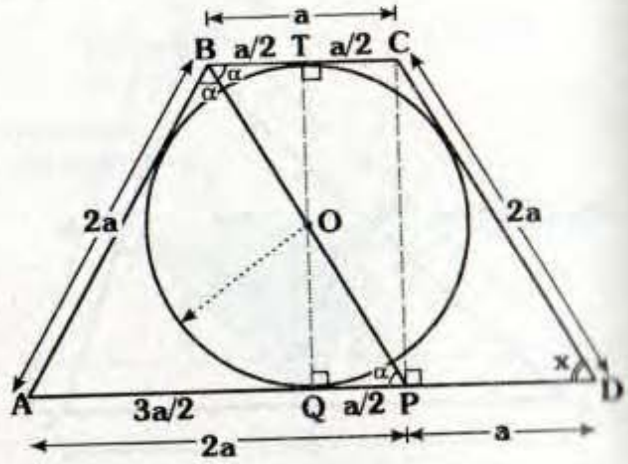
$$\Rightarrow\ 2R+m=\ell+2r \quad \ldots (II)$$

- (I) – (II) :

$$x+m+x-(2R+m)=2R+\ell-(\ell+2r)$$
$$\Rightarrow\ 2x+\cancel{m}-2R-\cancel{m}=2R+\cancel{\ell}-\cancel{\ell}-2r$$
$$2x=4R-2r$$
$$\therefore\ \mathbf{x=2R-r}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 160



- Por teoremas de circunferencia :

$$m\measuredangle ABO=m\measuredangle OBC=\alpha \quad y$$
$$m\measuredangle OTC=m\measuredangle OQP=90^\circ$$

- Por ángulos alternos internos :

$$m\measuredangle BPA=\alpha$$

- $\triangle ABP$: Isósceles $\Rightarrow$ $AB=AP=2a$

- ⌂ABCD : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow\ 2a+2a=3a+BC$$
$$\Rightarrow\ BC=a$$

- $\overline{QT}$: Eje de simetría

$$\Rightarrow\ BT=TC=\frac{a}{2}\ ;\ AQ=QC=\frac{3a}{2}$$

- QTCP : Rectángulo

(ya que $QP=TC=\frac{a}{2}$)

$$\Rightarrow\ m\measuredangle CPQ=90^\circ$$

- ◺CPD : Notable de 30° y 60°.

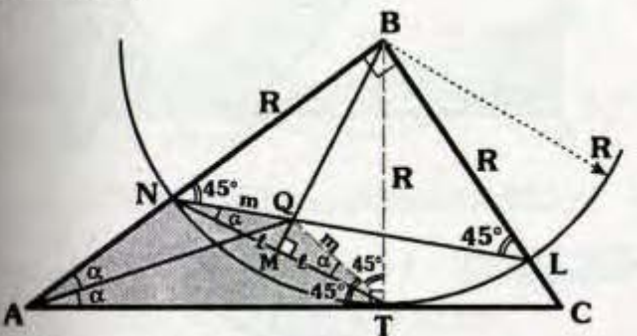
$$\therefore\ \mathbf{x=60^\circ}$$

Clave A

Solucionario
Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN N° 161

Paso 1



- ◺NBL : Isósceles $\Rightarrow$ m∡BNL=45°
- Por teorema de circunferencia :

  $NM = MT = \ell$

- ΔNQT : Isósceles

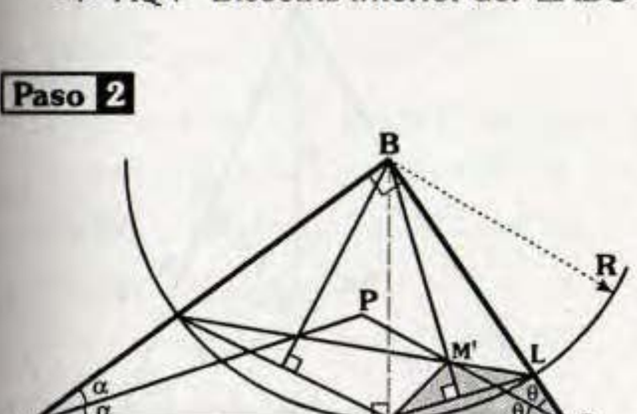
  $\Rightarrow$ m∡QNT = m∡QTN = α

- ΔBNT : Isósceles $\Rightarrow$ m∡QTB=45°
- ⏢ANQT : Inscriptible

  $\Rightarrow$ m∡NAQ = m∡QAT = α

  $\Rightarrow \overrightarrow{AQ}$: Bisectriz interior del ΔABC

Paso 2



- De igual modo, ⏢TM'LC es inscriptible

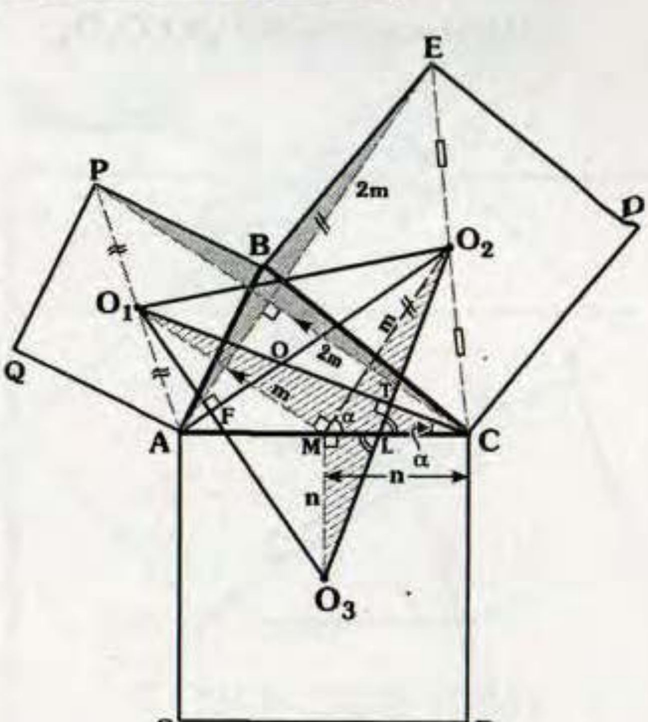
  $\Rightarrow$ m∡LCM' = m∡TCM' = θ

- $\overrightarrow{CM'}$: Bisectriz interior del ΔABC .

  ∴ **P : Incentro del ΔABC**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 162



- De la observación :

  $PC = AE = 2m$ y $\overline{AE} \perp \overline{PC}$

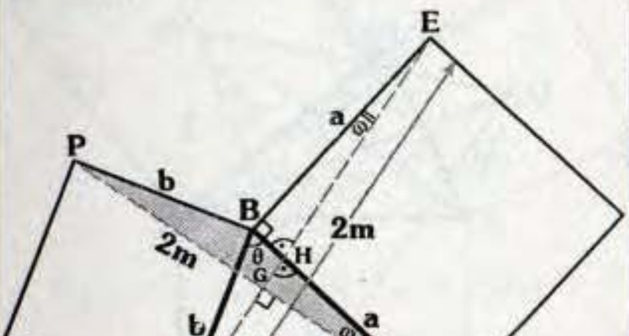
- Trazamos $\overline{O_3M} \perp \overline{AC}$, como ACRS es cuadrado $\Rightarrow O_3M = MC = n$

- $\overline{O_1M}$: Base media del ΔPAC
  $\Rightarrow \overline{O_1M} // \overline{PC}$ y $O_1M = m$
- $\overline{O_2M}$: Base media del ΔREC
  $\Rightarrow \overline{O_2M} // \overline{AE}$ y $O_2M = m$
- Por ángulos entre paralelas :
  $m\measuredangle O_1MO_2 = 90°$
- $\Delta O_2MO_3 \cong \Delta O_1MC$ (LAL)
  $\Rightarrow m\measuredangle MO_3O_2 = m\measuredangle MCO_1 = \alpha$
- $\triangle$LTC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle LTO_1 = 90°$
- Del mismo modo $m\measuredangle O_1FO_2 = 90°$

$\therefore$ **O : Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$**

Clave C

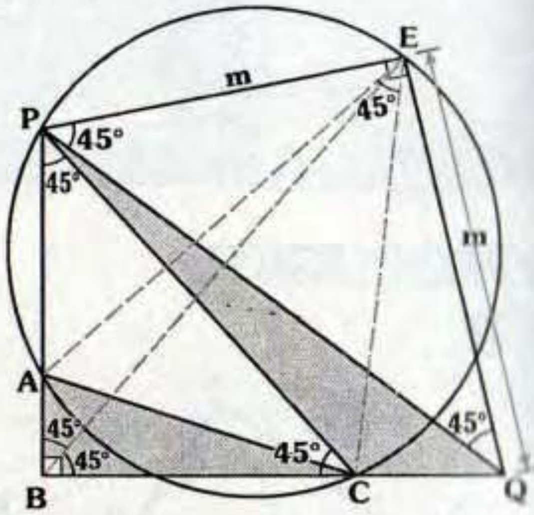
Observación



- $\Delta ABE \cong \Delta PBC$ (LAL)
  $\Rightarrow m\measuredangle PCB = m\measuredangle BEA = \omega$ y
  $PC = AE = 2m$
- ΔHGC : Por ángulo exterior
  $m\measuredangle CGA = 90°$

  $\therefore$ $\overline{AE} \perp \overline{PC}$

RESOLUCIÓN Nº 163

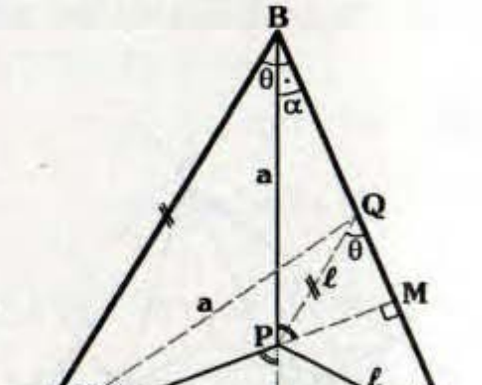


- Por Definición : $m\measuredangle EBC = 45°$
- $\triangle$BPEQ : Inscriptible
  $m\measuredangle EPQ = m\measuredangle EQP = 45°$
- Por teorema fundamental :
  $$m\measuredangle REC = 90° - \frac{90°}{2} = 45°$$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle APC = 45°$
- ΔPCQ: Por el criterio 8.15.

  $\therefore$ **E : Circuncentro del ΔPCQ**

Clave

RESOLUCIÓN Nº 164

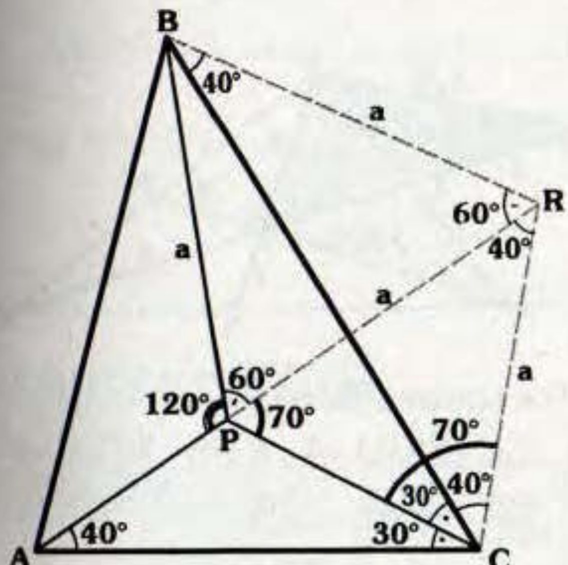


- Trazamos $\overline{PQ} // \overline{AB}$
  $\Rightarrow$ ABQP es un trapecio isósceles
  $\Rightarrow$ AQ=BP=a y
  $m\measuredangle PBQ = m\measuredangle QAP = \alpha$
- Se observa que el ΔQPC es isósceles
  $\Rightarrow$ PQ=PC=ℓ
- $\Delta APQ \equiv \Delta APU$ (LLL) $\Rightarrow m\measuredangle PAC = \alpha$
- ΔAQC: Isósceles $\Rightarrow \overline{AM}$ es altura
- Luego al prolongar $\overline{BP}$ se nota que $\overline{BL}$ es altura.

$\therefore$ **P es ortocentro de ABC**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 165



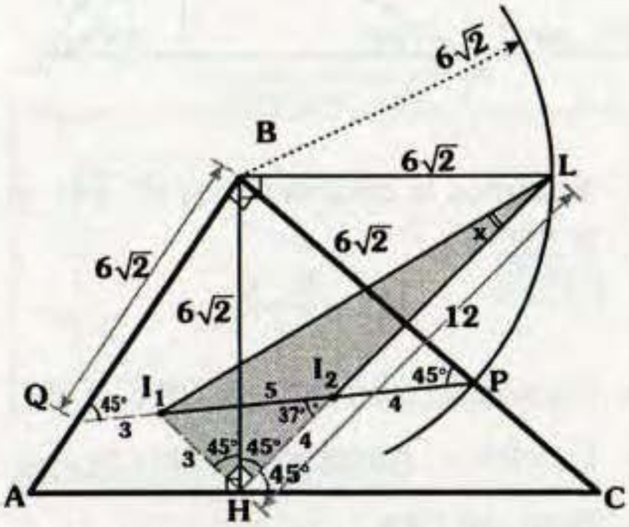
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta R, tal que : $m\measuredangle ARC = 40° \Rightarrow$ AC=CR=a
- ΔPRC : Isósceles $\Rightarrow$ PR=RC=a
- ΔPBR : Equilátero
  $\Rightarrow$ BR=a y $m\measuredangle BRP = 60°$
- ΔBRC : Isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle RBC = m\measuredangle RCB = 40°$
- Como RPC es isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle RCP = 70° \Rightarrow m\measuredangle BCP = 30°$
- Se observa que $\overline{CP}$ es bisectriz y

$$m\measuredangle APB = 120° = 90° + \frac{60°}{2}$$

$\therefore$ **P : Incentro del ΔABC (*criterio* 8.3)**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 166



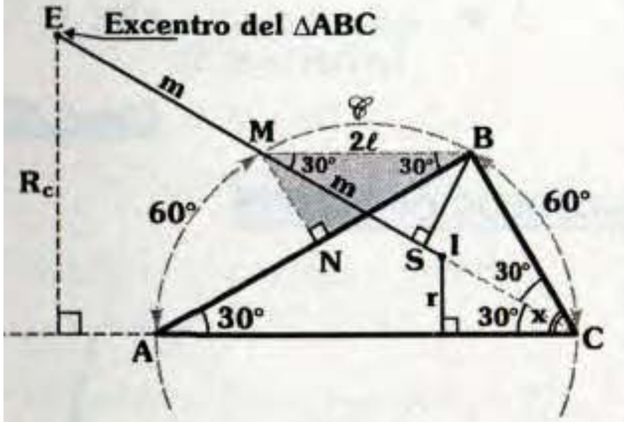
- Por el teorema 9.8. (c)
  $\Rightarrow m\measuredangle BQP = m\measuredangle BPQ = 45°$,
  QB=BH=BP ,
  $PI_2 = HI_2 = 4$ y $QI_1 = HI_1$
- $\triangle I_1HI_2$: Notable
  $\Rightarrow HI_3 = 3$ y $m\measuredangle I_1I_2H = 37°$
- $\triangle QBP$: Notable $\Rightarrow QB = BP = 5\sqrt{2}$
- Como $BH = BL = 6\sqrt{2}$, entonces $m\measuredangle BHL = 45°$
  $\Rightarrow$ H, I_2, L son colineales
- $\triangle HBL$: Notable $\Rightarrow$ HL=12

$\triangle I_1HL$: Notable

$\therefore$ **x = 14°**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 167



Trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$, por el teorema 9.7:

$$MN = \frac{R - r}{2}$$

Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BMC = 30°$

$\triangle MBS$: Notable $\Rightarrow BM = 2\ell$

Pero, del dato :

$$R - r = 2\ell \Rightarrow \frac{R - r}{2} = \ell$$

$\triangle MNB$: Notable $\Rightarrow m\measuredangle MBN = 30°$

Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ACM = 30°$

$\therefore$ **x = 60°**

Clave E

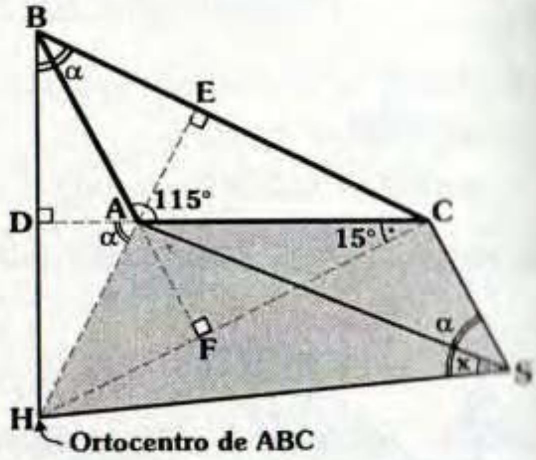
RESOLUCIÓN N° 168

Como H es ortocentro :

$\overline{AE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$ son alturas del $\triangle ABC$

$\triangle ADBE$: Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle DAH = \alpha$

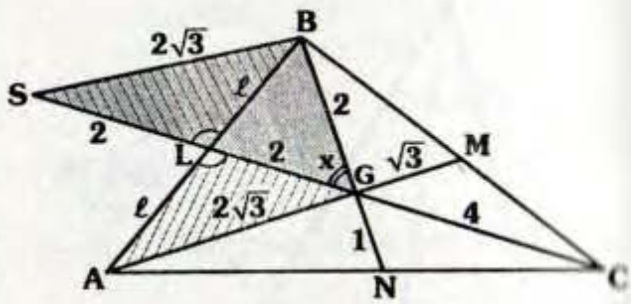


- $\triangle AFC$: $m\measuredangle ACF = 15°$
- $\triangle AHSC$: Inscriptible

$\therefore$ **x = 15°**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 169



- Por teorema de baricentro :

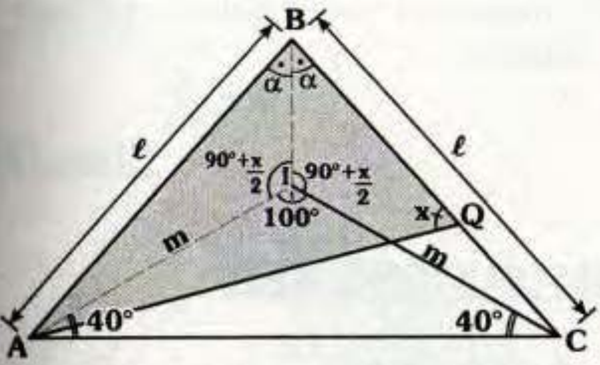
  $GC = 2(GL) = 4$; $GB = 2(GN) = 2$;

  $GA = 2(GM) = 2\sqrt{3}$
- Prolongamos $\overline{GL}$ hasta S, tal que $LS = 2$
- $\triangle LBS \cong \triangle AGL$ (LAL) $\Rightarrow SB = 2\sqrt{3}$
- $\triangle SBG$: Notable

$\therefore$ **x = 60°**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 170



- Por definición : $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \alpha$
- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AIB = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

- $\Delta ABI \cong \Delta BIC$ (LAL) $\Rightarrow$ $AI = IC = m$ y

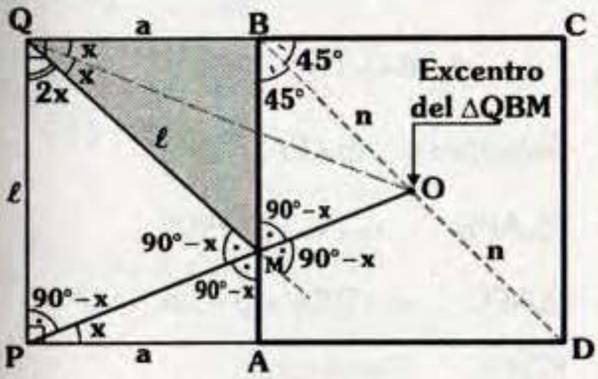
$$m\measuredangle BIC = m\measuredangle AIB = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

- ΔAIC : Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIC = 100^\circ$
- En "I" : $90^\circ + \frac{x}{2} + 100^\circ + 90^\circ + \frac{x}{2} = 360^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 80^\circ}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 171



- O : Centro

$\Rightarrow$ $BO = OD = n$ y

$m\measuredangle ABO = m\measuredangle CBO = 45^\circ$

- $\triangle PQBD$: $m\measuredangle BQO = m\measuredangle OPD = x$

(*Observación*)

- ΔPQM : Isósceles

$\Rightarrow$ $m\measuredangle QMP = 90^\circ - x$ y

$m\measuredangle PQM = 2x$

- O : Excentro del $\triangle QBM$

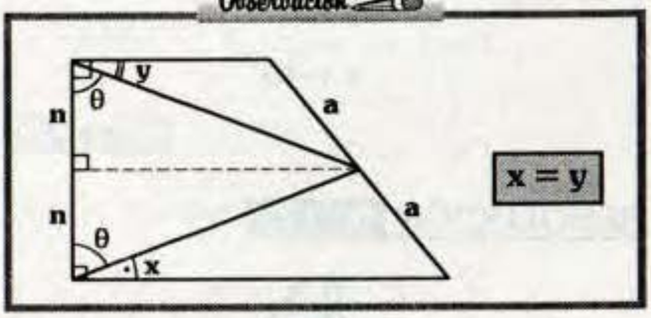
$\Rightarrow$ $\overline{QO}$: Bisectriz interior

- En "Q" : $2x + x + x = 90^\circ$

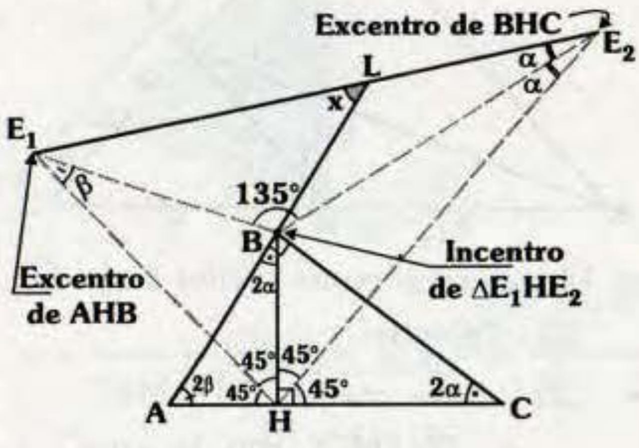
$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{45^\circ}{2}}$$

Clave D

Observación



RESOLUCIÓN N° 172



- Por definición :

$m\measuredangle AHE_1 = m\measuredangle E_1HB = 45^\circ$ y

$m\measuredangle CHE_2 = m\measuredangle E_2HB = 45^\circ$

- $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 45^\circ$

- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle BE_1H=\frac{2\beta}{2}\ \text{ y }\ m\measuredangle BE_2H=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$$

- $\measuredangle E_1HE_2B$: $m\measuredangle E_1BE_2=\alpha+90°+\beta$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle E_1BE_2=135°$$

- ΔE_1HE_2 : Se observa que $\overline{HB}$ es bisectriz interior y

$$m\measuredangle E_1BE_2=90°+\frac{90°}{2}$$

$\Rightarrow$ B : Incentro del ΔE_1HE_2

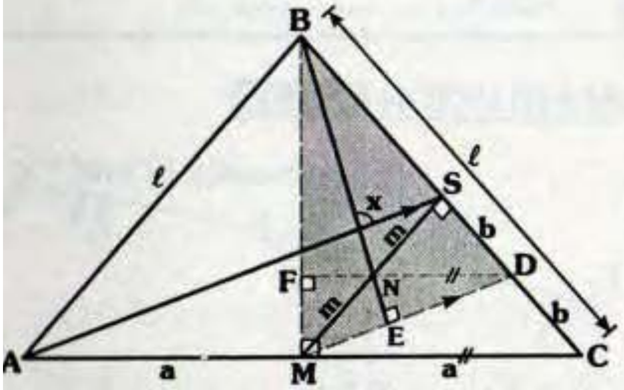
$\Rightarrow\ m\measuredangle HE_2B=m\measuredangle BE_2E_1=\alpha$

- $LBHE_2$: Inscriptible

$$\therefore\ \mathbf{x=45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 173



- Ubicamos el punto medio D de $\overline{SC}$, $SD=DC=b$.
- $\overline{DN}$: Base media del ΔMSC

$\Rightarrow\ \overline{DN}//\overline{MC}$, con lo cual $m\measuredangle DFM=90°$.

- Se observa que $\overline{DF}$ y $\overline{MS}$ son alturas del ΔBMD $\Rightarrow$ N es ortocentro

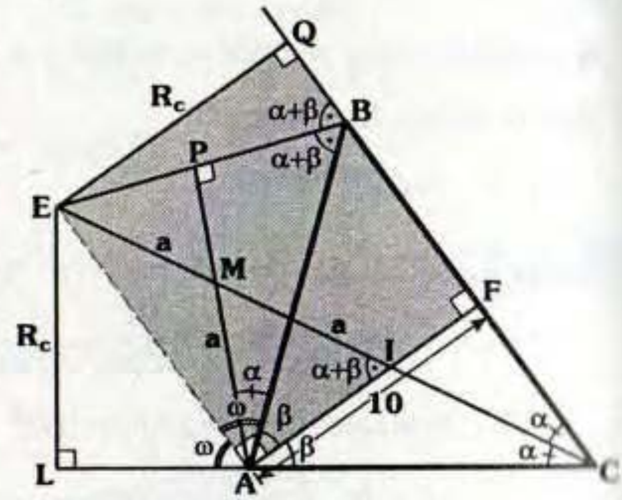
$\Rightarrow\ \overline{BE}$ es altura

- $\overline{MD}$ base del ΔASC $\Rightarrow$ $\overline{DM}//\overline{AS}$
- Finalmente por ángulos correspondientes.

$$\therefore\ \mathbf{x=90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 174



- I : Incentro

$\Rightarrow\ m\measuredangle BCI=m\measuredangle ACI=\alpha$ y
$m\measuredangle BAI=m\measuredangle CAI=\beta$

- E : Excentro

$\Rightarrow\ m\measuredangle EAL=m\measuredangle EAB=\omega$ y

$\Rightarrow\ m\measuredangle QBE=m\measuredangle EAB=\alpha+\beta$

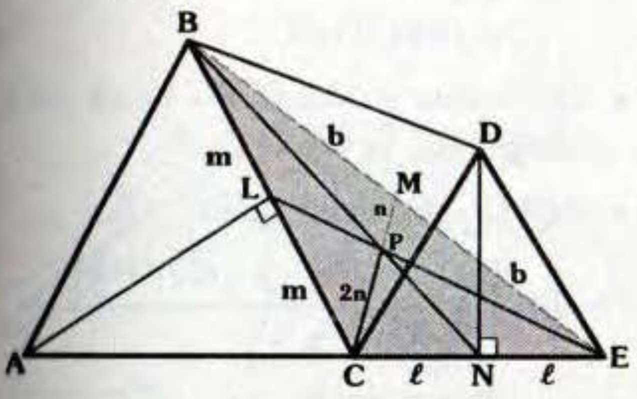
- Sabemos : $m\measuredangle EAI=90°$
- $⊿APB$: $\alpha+\alpha+\beta=90°$
- ΔAFC : $m\measuredangle BFA=\beta+2\alpha=90°$
- EQFA : Rectángulo

$$\therefore\ \mathbf{R_c=10}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 175

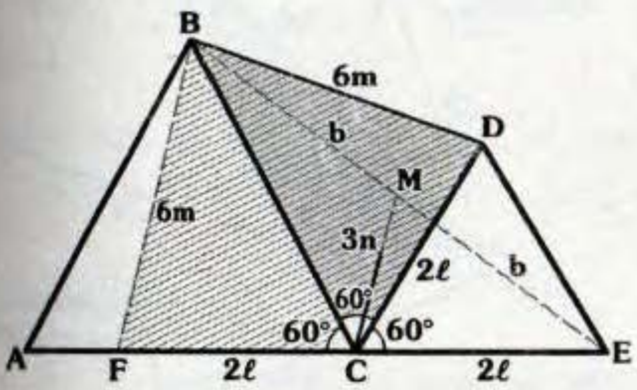
Paso 1



- $\overline{EL}$ y $\overline{BN}$ son medianas, entonces P es baricentro del $\triangle BCE$

  $\Rightarrow BM = ME = b$ y $CP = 2(PM) = 2n$

Paso 2



- Se ubica S en $\overline{AC}$ tal que $SC = 2\ell$, $\overline{CM}$: base media del $\triangle BSE$

  $\Rightarrow BS = 6m$

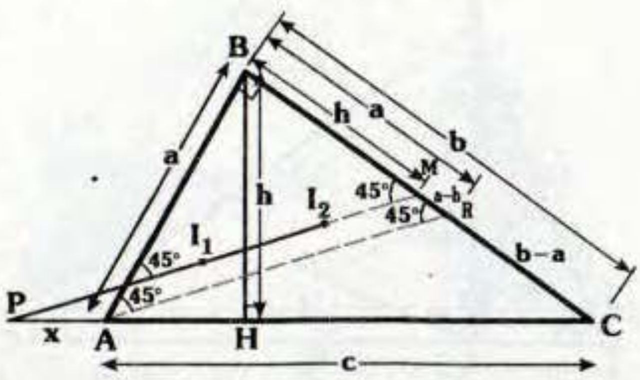
- $\triangle BSC \cong \triangle BCD$ (LAL)

  $\Rightarrow BD = BS = 6m$

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CP}} = \frac{\mathbf{6m}}{\mathbf{2m}} = \mathbf{3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 176



- Por el teorema 9.8 :

  $m\measuredangle BMP = 45°$ y $BH = BM = h$

- Trazamos $\overline{AR} // \overline{PM} \Rightarrow AB = BR = a$

- $\triangle PMC$: Teorema de Tales

$$\Rightarrow \quad \frac{a-h}{b-a} = \frac{x}{c} \qquad \text{... (I)}$$

- De la observación :

$$ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c} \qquad \text{... (II)}$$

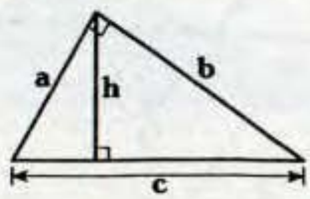
- Reemplazando (II) en (I) :

$$\frac{a - \frac{ab}{c}}{b-a} = \frac{x}{c}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a(c-b)}}{\mathbf{b-a}}$$

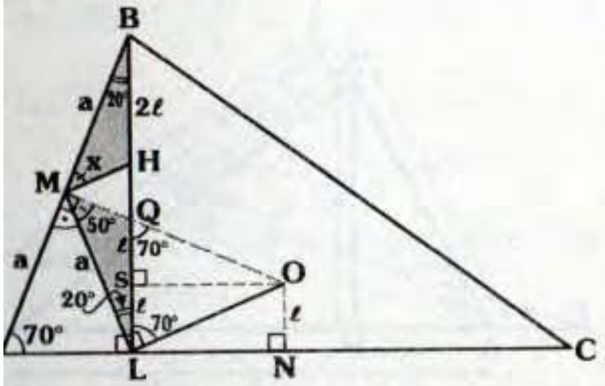
Clave E

Observación



ab = ch

RESOLUCIÓN Nº 177



Por el teorema 9.6 : BM=2(ON)=2 ℓ

Por el teorema 9.4 : m∡AMO = 90°

◺ABL: Por el teorema

⇒ ML=a ⇒ m∡MLB=20°

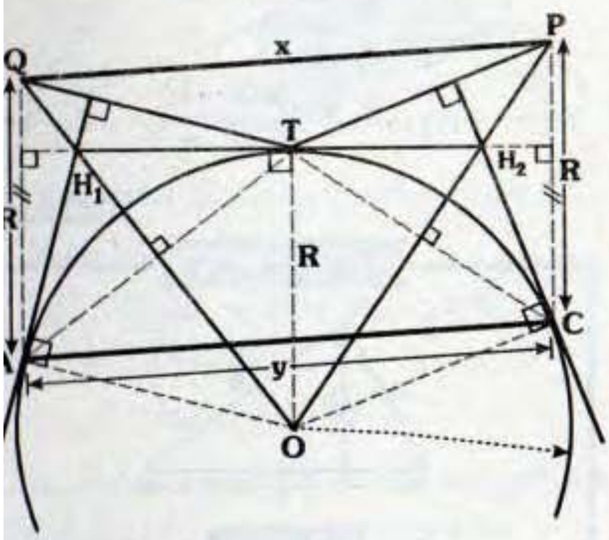
Luego, trazamos la altura OS del triángulo isósceles OQL (SLNO : rectángulo) ⇒ LS=SQ=2ℓ

ΔMHB ≅ ΔMQL (LAL)

$\therefore\ \mathbf{x=50^\circ}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 178

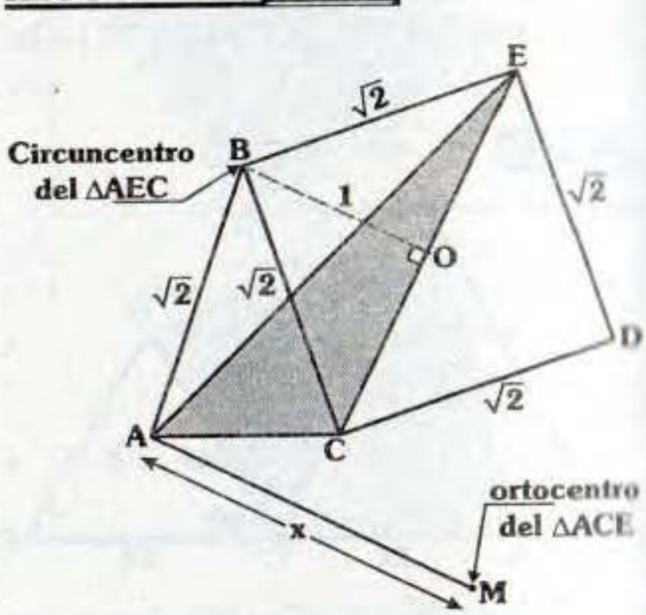


- H_1 : Ortocentro de AQT
- Se nota que : $\overline{AO}//\overline{QT}$ y $\overline{AQ}//\overline{TO}$
  ⇒ AQTO : Paralelogramo
  ⇒ AQ=TO=R
- Del mismo modo, OTPC es un paralelogramo ⇒ OT=PC=R
- AQPC : Paralelogramo
  (AQ=PC=R y $\overline{AQ}//\overline{PC}$)

$$\therefore\ \frac{x}{y}=1$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 179

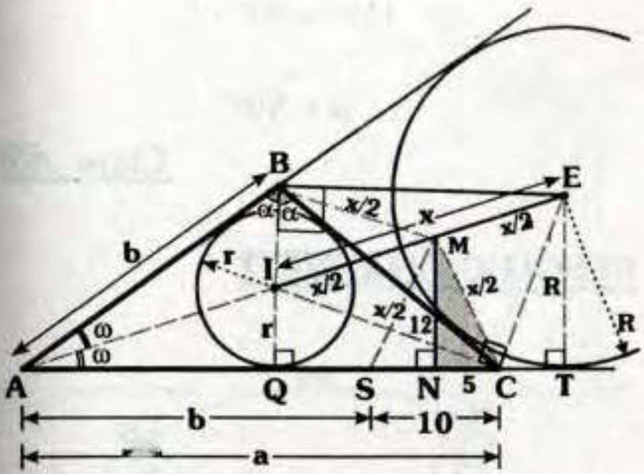


- Como AB=BC=BE= $\sqrt{2}$:
  ⇒ B : Circuncentro del ΔACE
- Por propiedad del cuadrado BO=1.
- De la observación del teorema 9.6:
  x=2(1)

$\therefore\ \mathbf{x=2}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 180



- Sabemos : A, I, E son colineales
- Por el teorema 9.3 :

  $m\measuredangle IBE = m\measuredangle ICE = 90°$
- Sea : $IM = ME = \dfrac{x}{2}$

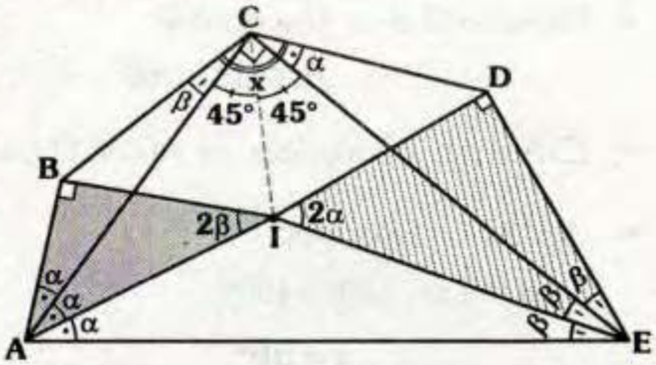
  $\Rightarrow CM = BM = \dfrac{x}{2}$ (△)
- Luego, se ubica S en $\overline{AC}$, tal que $AS=b \Rightarrow SC=10$ ($a-b=10$, *dato*).
- $\Delta ABM \cong \Delta AMS$ (LAL) $\Rightarrow SM=\dfrac{x}{2}$
- $\overline{MN}$: Base media del trapecio QIET

  $\Rightarrow MN = \dfrac{R+r}{2}$
- Pero, $R+r=24 \Rightarrow MN=12$
- ΔSMC : Isósceles $\Rightarrow SN=NC=5$
- ΔMNC : $5^2+12^2=(x/2)^2$

$\therefore$ **x = 26**

Clave A

RESOLUCIÓN N° 181



- $\triangle ACE$: $2\alpha+2\beta=90° \Rightarrow \alpha+\beta=45°$
- I : Incentro del $\triangle ACE$

  $\Rightarrow m\measuredangle ACI = m\measuredangle ECI = 45°$
- $\triangle ABI$: $m\measuredangle AIB = 2\beta$
- Como $\overrightarrow{AC}$:

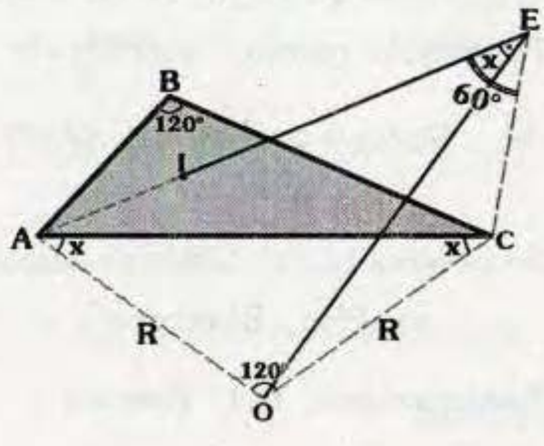
  Bisectriz y $m\measuredangle ACI = \dfrac{m\measuredangle ABI}{2}$, por el teorema $\Rightarrow$ C : Excentro del $\triangle ABI$

  $\Rightarrow m\measuredangle BCA = \beta$
- Del mismo modo, C: Excentro del $\triangle EDI \Rightarrow m\measuredangle DCE = \dfrac{m\measuredangle DIE}{2} = \alpha$
- Se observa : $x = \alpha + 90° + \beta$

$\therefore$ **x = 135°**

Clave E

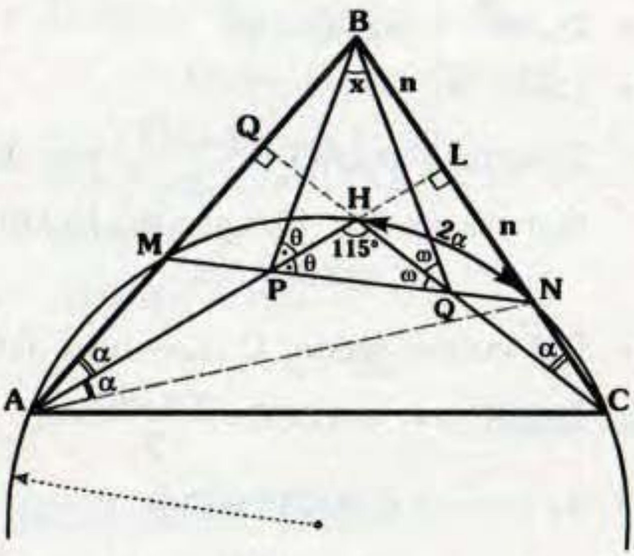
RESOLUCIÓN N° 182



- Teorema 7.4 : $m\measuredangle AOC = 120^\circ$
- Teorema 7.3 : Inscriptible $m\measuredangle AEC = 60^\circ$
- $\triangle$AECO: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle ACO = x$
- ΔAOC : Isósceles
  $\Rightarrow x + x + 120^\circ = 180^\circ$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 30^\circ}$

Clave B

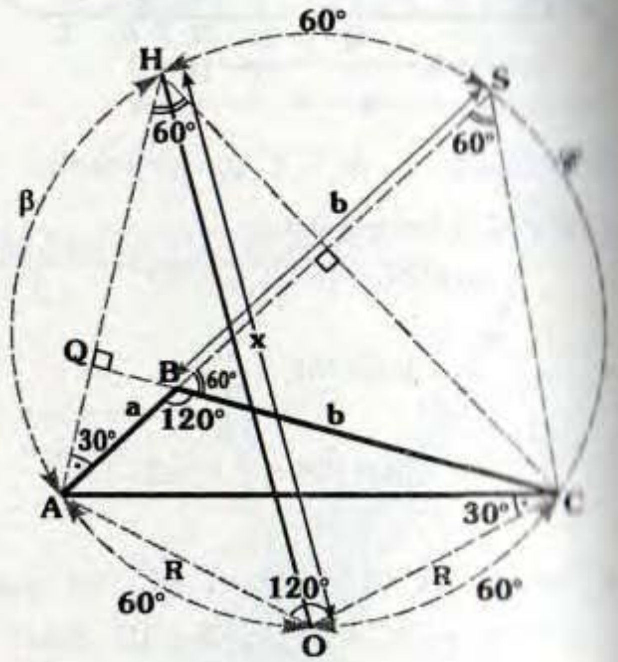
RESOLUCIÓN N° 183



- H : Ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y $\overline{CQ}$ son alturas, sabemos :
  $m\measuredangle QAH = m\measuredangle LCH = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle HAN = \alpha$
- $\overline{AL}$: Bisectriz y altura del ΔABN
  $\Rightarrow BL = LN = n$
- Se observa que el ΔPBN es isósceles
  $\Rightarrow \overline{PH}$: Bisectriz
- Analogamente, $\overline{QH}$: Bisectriz
- H : Incentro del ΔPBQ
  $\Rightarrow 115^\circ = 90^\circ + \dfrac{x}{2}$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 50^\circ}$

Clave D

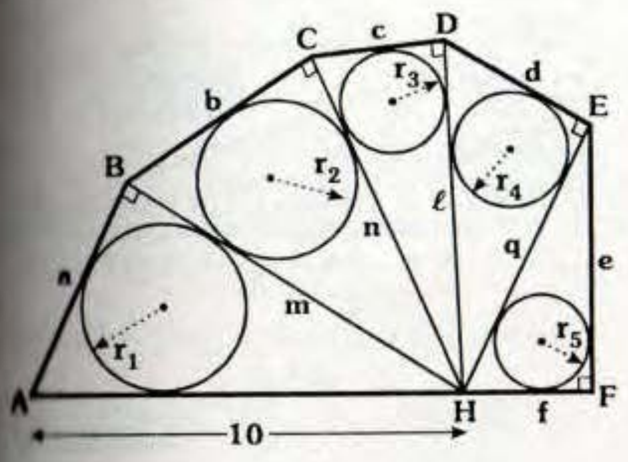
RESOLUCIÓN N° 184



- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 60^\circ$ y $m\measuredangle AOC = 120^\circ$
- $\triangle$AHCO : Inscriptible
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ASC = 60^\circ$
- ΔBSC : Equilátero $\Rightarrow BC = BS = b$
- Se observa que :
  $m\widehat{HAO} = m\widehat{SHA} = 60^\circ + \beta \Rightarrow x = a + b$
- Pero, $a + b = 12$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 12}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 185



- Piden :

$$2p_{ABCDEF} = a+b+c+d+e+f+10 \quad \ldots \text{(I)}$$

- Por el teorema de Poncelet :

$$\begin{array}{ll} \triangle ABH: & a+\cancel{m}=10+2r_1 \\ \triangle BCH: & b+\cancel{n}=\cancel{m}+2r_2 \\ \triangle CDH: & c+\cancel{\ell}=\cancel{n}+2r_3 \\ \triangle DEH: & d+\cancel{q}=\cancel{\ell}+2r_4 \\ \triangle EFH: & e+f=\cancel{q}+2r_5 \end{array} \quad (+)$$

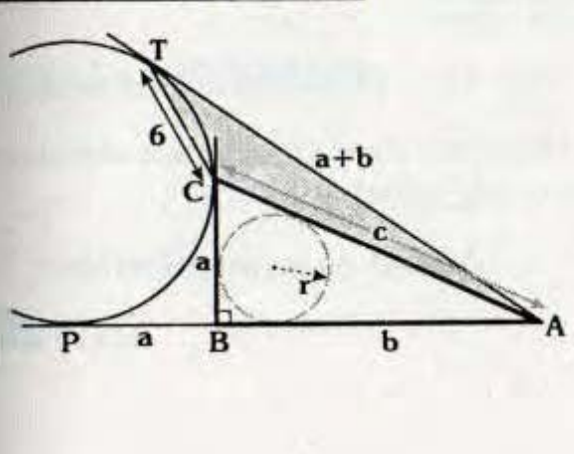
$$a+b+c+d+e+f=10+2\underbrace{(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)}_{10\ (\text{dato})} \quad \ldots \text{(II)}$$

- Reemplazando (II) en (I) :

$$\therefore\ \mathbf{2p_{ABCDEF}=40}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 186



- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow\ a+b=c+2r \quad \ldots \text{(I)}$$

- Por teorema de circunferencia :

$$BP=BC=a \ \text{ y } \ AP=AT=a+b$$

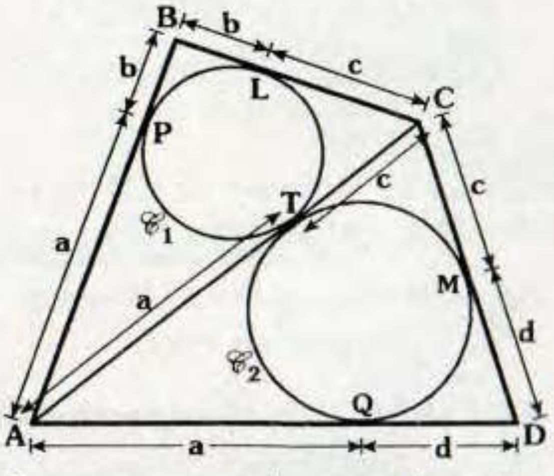
- ΔCTA: Teorema $\Rightarrow 6 > a+b-c$ ...(II)
- Reemplazando (I) en (II) :

$$6 > c+2r-c \ \Rightarrow\ 6 > 2r \ \Rightarrow\ 3 > r$$

$$\therefore\ \mathbf{r_{\text{máx. entero}}=2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 187



- Por teorema en la circunferencia :

$AP=AT=AQ=a$; $CL=CT=CM=c$;

$BP=BL=b$ y $DM=DQ=d$

- Se observa :

$AB=a+b$; $BC=b+c$; $CD=c+d$ y $DA=d+a$, entonces en el cuadrilátero ABCD :

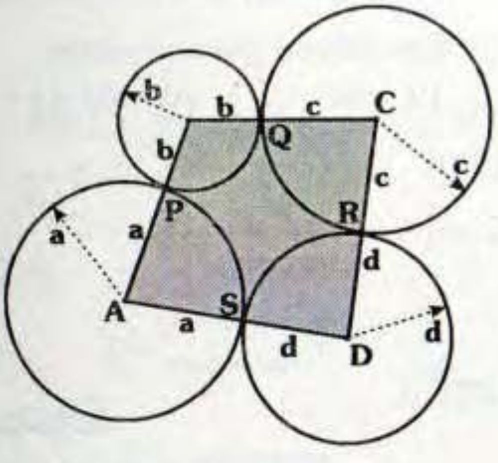
$$AB+CD=BC+AD=a+b+c+d$$

- Como el ▱ABCD, cumple con el teorema de Pitot.

∴ **ABCD es circunscriptible**

Clave D

RESOLUCIÓN N° 188



- Por circunferencia :

  AP=AS=a , BP=BQ=b

  CQ=CR=c , DR=DS=d

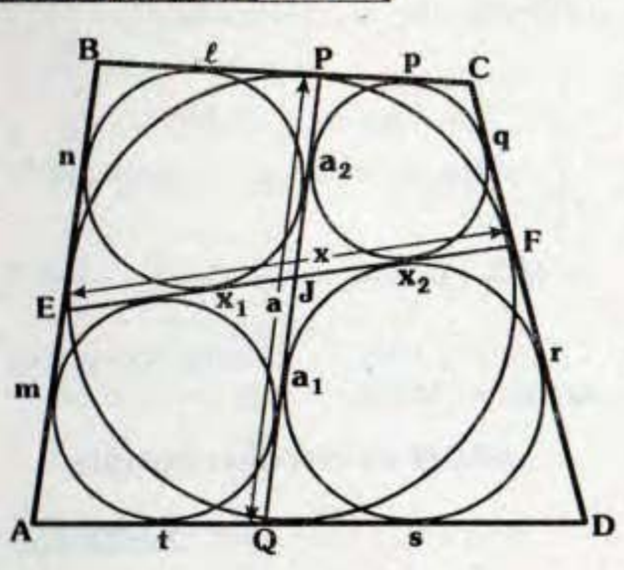
- Se observa que :
  AB=a+b, BC=b+c, CD=c+d y DA=d+a; entonces :

  AB+CD=BC+AD=a+b+c+d
  (*Teorema de Pitot*)

∴ **El ⌂ABCD es circunscriptible**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 189



- Por el teorema de Pitot :

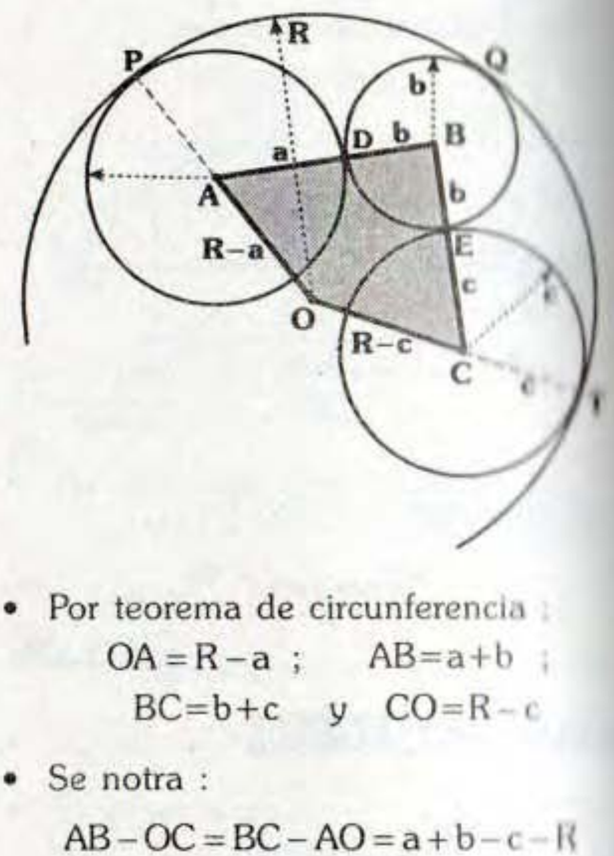
$$\begin{array}{ll} \triangle EBPJ: & n+a_2=\ell+x_1 \\ \triangle JPCF: & a_2+q=p+x_2 \\ \triangle JFDQ: & a_1+r=x_2+s \\ \triangle AEJQ: & a_1+m=x_1+t \\ \triangle ABCD: & \ell+p+s+t=m+n+q+r \end{array} \quad (+)$$

$$\underbrace{a_1+a_1+a_2+a_2}_{2a}=x_1+x_1+x_2+x_2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=a}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 190



- Por teorema de circunferencia :

  OA = R − a ; AB = a + b ;
  BC = b + c y CO = R − c

- Se notra :

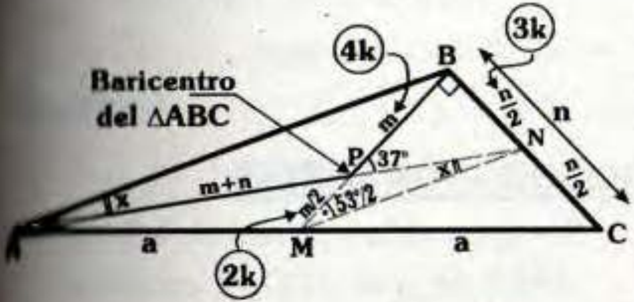
  AB − OC = BC − AO = a + b − c − R

- Finalmente por el recíproco del teorema de Steiner.

  ∴ **ABCO es exinscriptible**

Clave C

RESOLUCIÓN N° 191



- Como P es baricentro del ΔABC :

$$BN = NC = \frac{n}{2} \quad y \quad AM = MC = a$$

- $\overline{MN}$: Base media del ΔABC
  $\Rightarrow m\measuredangle ANM = x$
- Por teorema fundamental :

$$PN = \frac{m+n}{2} \quad y \quad PM = \frac{m}{2}$$

- ◺PBN : $m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

$$3m = 2n \Rightarrow m = 4k \quad y \quad n = 6k$$

- Reemplazando en el gráfico; se nota que los ◺s PBN y MBN son notables

$$\Rightarrow m\measuredangle BPN = 37^\circ \quad y \quad m\measuredangle BMN = \frac{53^\circ}{2}$$

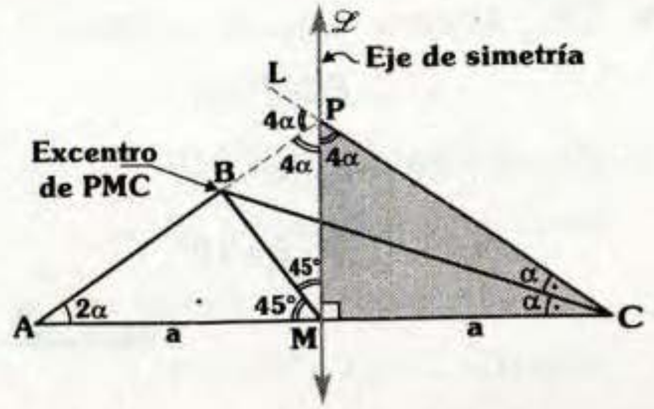
- ΔMPN : $\frac{53^\circ}{2} + x = 37^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 10,5^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 192

- Trazamos la mediatriz de $\overline{AC}$ ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$), se nota : $m\measuredangle PCA = 2\alpha$ y $m\measuredangle BMP = 45^\circ$
- ΔAPC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle LPA = 4\alpha$

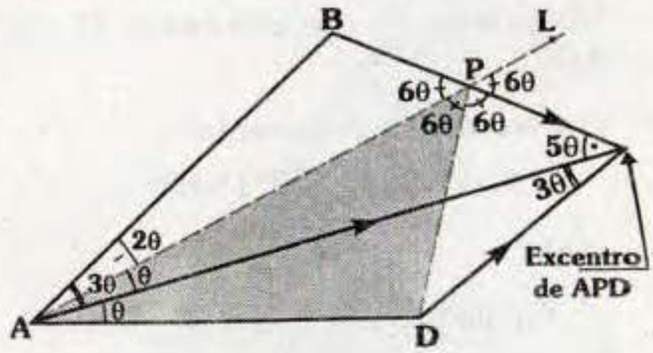


- $\overline{BM}$ y $\overline{CB}$ son bisectrices
  $\Rightarrow$ B : Excentro de PMC
  $\Rightarrow m\measuredangle BPM = 4\alpha$
- De la simetría : $m\measuredangle MPC = 4\alpha$
- En "P" : $4\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{\alpha = 15^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 193



- Ubicamos P en $\overline{BC}$, tal que:
  $m\measuredangle BAP = 2\theta$
- ΔAPC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle APB = 6\theta$
- ΔABP ≅ ΔADP (ALA) $\Rightarrow m\measuredangle APD = 6\theta$
- Se observa que $\overline{AC}$ es bisectriz interior de APD y $m\measuredangle APD = 2(m\measuredangle ACD) = 6\theta$
  $\Rightarrow$ C : Excentro de APD (*criterio* 8.5)

- $\overline{CP}$: Bisectriz exterior $\triangle APD$

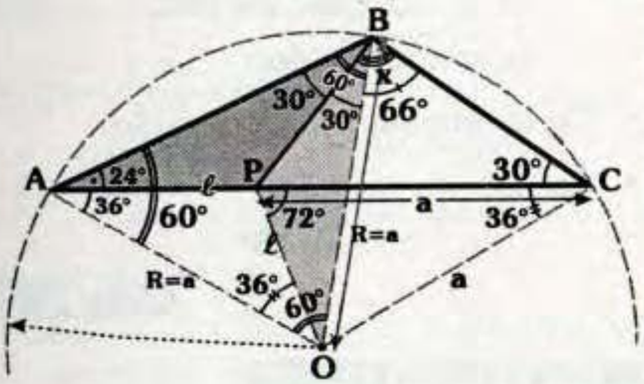
  $\Rightarrow m\measuredangle DPC = 6\theta$

- En "P" : $6\theta + 6\theta + 6\theta = 180°$

  $\therefore$ **$\theta = 10°$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 194



- Ubicamos el circuncentro O del ABC.
- Por teorema fundamental :

  $m\measuredangle AOB = 2(30°) = 60°$

- $\triangle ABO$:

  Equilátero $\Rightarrow$ $a = R$

- $\triangle AOC$:

  Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACO = 36°$

- $\triangle POC$:

  Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle CPO = 72°$

- Por ángulo exterior en $\triangle APO$:

  $72° = 36° + m\measuredangle POA \Rightarrow m\measuredangle POA = 36$

  $\Rightarrow AP = PO = \ell$

- $\triangle ABP \cong \triangle PBO$ (LLL)

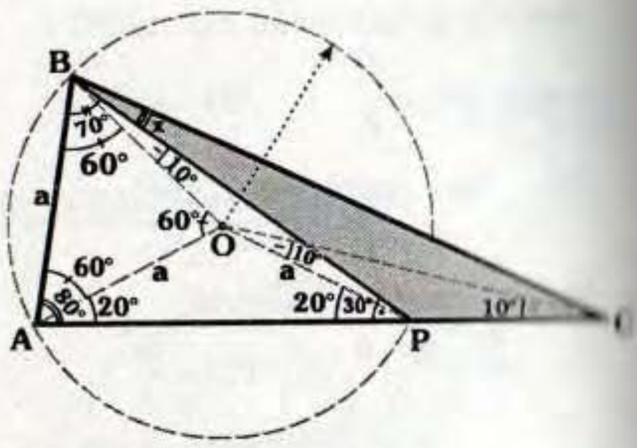
  $m\measuredangle ABP = m\measuredangle PBO = 30°$

  $\therefore$ **$x = 96°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 195

- Se ubica O en la región interior del $\triangle ABP$, tal que ABO es equilátero.



- Por el criterio 8.13: O es circuncentro del $\triangle ABP \Rightarrow OP = a$.
- $\triangle AOP$: Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle OPA = 20°$
- $\triangle OPC$: Isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle POC = m\measuredangle OCP = 10°$

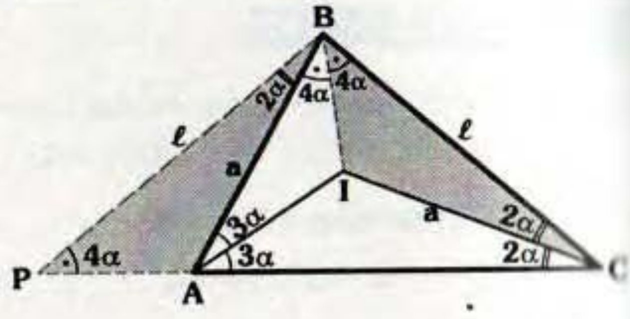
- ⏢OBCP : Inscriptible

  (ya que $m\measuredangle OCP = m\measuredangle OBP = 10°$)

  $\therefore$ **$x = 10°$**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 196



- Prolongamos $\overline{CA}$ hasta P, tal que:

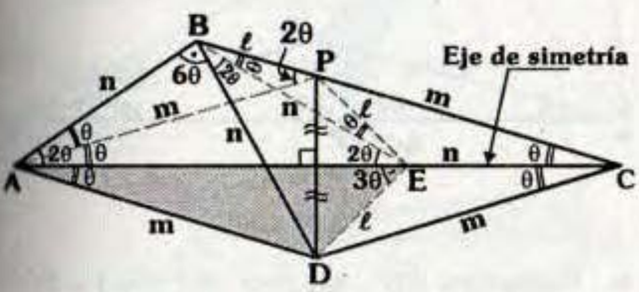
$$m\measuredangle BPC = 4\alpha$$

- ΔPBC : Isósceles $\Rightarrow PB=BC=\ell$
- $\Delta PAB \cong \Delta BIC$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle IBC=4\alpha$
- Pero, I : Incentro $\Rightarrow m\measuredangle ABI=4\alpha$
- ΔPBC : $4\alpha+10\alpha+4\alpha=180°$

$$\therefore \ \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 197



- Ubicamos P en $\overline{BC}$, tal que :

$\overline{PD} \perp \overline{AC}$ ($\overleftrightarrow{AC}$: *Mediatriz de* $\overline{PD}$)

- De la simetría $m\measuredangle PAC = \theta$
- Luego trazamos BE, tal que :

$$m\measuredangle CBE = \theta$$

- ΔBEC : Isósceles $\Rightarrow BE=EC=n$
- ΔABE : Isósceles

$$\Rightarrow AB=BE=n \ (m\measuredangle BEA = 2\theta)$$

- $\triangle ABPE$: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle BEP=\theta$
- De la simetría (P y D simétricos) :

$$m\measuredangle AED = 3\theta$$

- Como :

$$AB=BE=n$$

$$m\measuredangle ABD = 2(m\measuredangle AED) = 6\theta$$

$$\Rightarrow \text{B : Circuncentro del } \Delta ADE$$

- Por teorema fundamental :

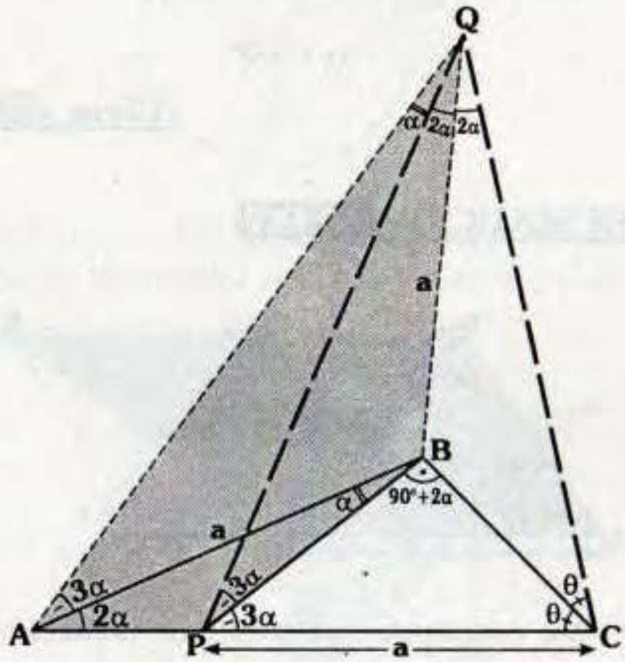
$$m\measuredangle DBE = 2(m\measuredangle EAD) = 2\theta$$

- ΔABE : $2\theta+8\theta+2\theta=180°$

$$\therefore \ \theta = \mathbf{15°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 198



- Se construye el ΔPQC, tal que B sea su incentro :

$$m\measuredangle QPB = m\measuredangle BPC = 3\alpha \quad \text{y}$$

$$m\measuredangle PCB = m\measuredangle QCB = \theta$$

Sabemos :

$$m\measuredangle PBC = 90° = \frac{m\measuredangle PQC}{2}$$

(*Teorema fundamental*)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle PQC = 4\alpha$

Como : $m\measuredangle BAP = m\measuredangle PQB = 2\alpha$, el ⏢APBQ es inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle QAB = 3\alpha$ y $m\measuredangle AQP = \alpha$

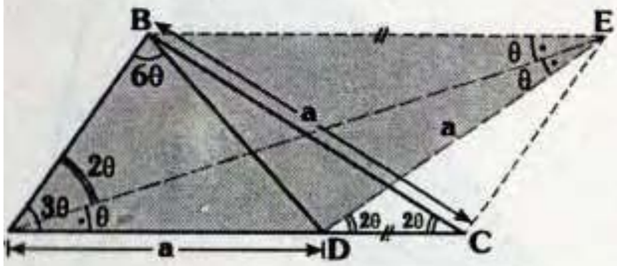
ΔAQB : Isósceles $\Rightarrow AB = BQ = a$

Finalmente se nota que el problema radica en calcular α en el ΔPQC , lo cual ya hemos desarrollado en el problema : 196.

$$\therefore \quad \alpha = 10°$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 199



Se construye el trapecio isósceles BDCE $(\overline{BE} // \overline{CD})$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle EDC = 2\theta$ y $DE = a$

ΔAED :

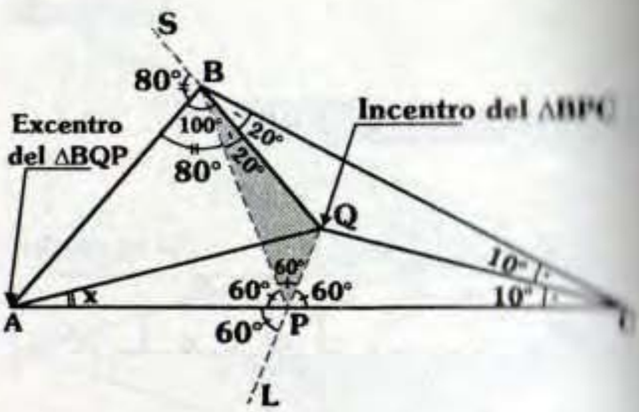
Isósceles $\Rightarrow AD = DE = a$

- $m\measuredangle BEA = \theta$ (*ángulos alternos*)
- Notamos que el ABED corresponde al gráfico del problema : 197

$$\therefore \quad \theta = 15°$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 200



- Trazamos $\overline{BP}$, tal que $m\measuredangle PBQ = 20°$
- Q : Incentro de BPC

$\Rightarrow \quad m\measuredangle CPQ = m\measuredangle BPQ = 60°$

- Prolongamos $\overline{QP}$ hasta L, se nota :

$m\measuredangle APL = 60°$

- Como $\overline{PA}$ y $\overline{BA}$ son bisectrices exteriores $\Rightarrow$ A: Excentro de BPQ
- Por teorema fundamental :

$$x = \frac{20°}{2}$$

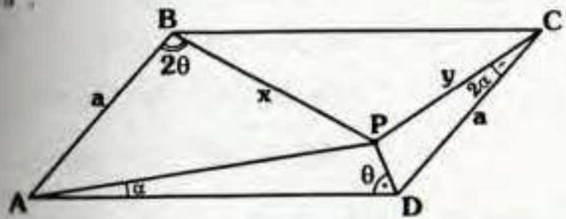
$$\therefore \quad x = 10°$$

Clave E

Solucionario Olímpicos

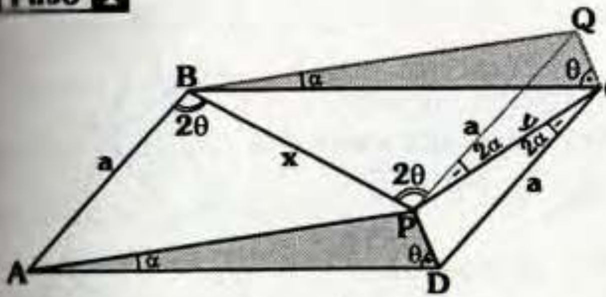
RESOLUCIÓN N° 201

Grafiquemos de acuerdo a las condiciones :



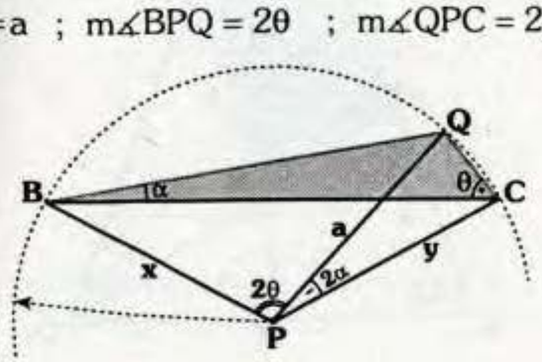
Se nos pide demostrar : $\mathbf{x=y=a}$

Paso 1



- Se traza el triángulo $AQC \cong \Delta APD$ ($AP=BQ$ y $PD=QC$).
- Se verifica $\overline{AP}//\overline{BQ}$ y $\overline{DP}//\overline{CQ}$ $\Rightarrow$ ABQP y DPQC son paralelogramos.
- Se tiene entonces :

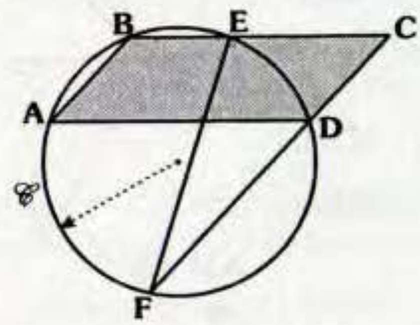
$PQ=a$; $m\measuredangle BPQ=2\theta$; $m\measuredangle QPC=2\alpha$



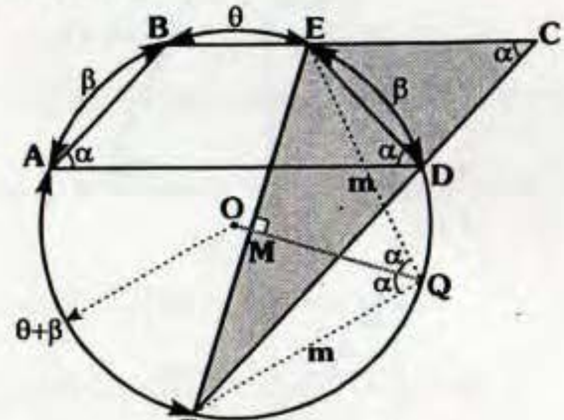
- En el denominado criterio 7.17 se analizó y demostró. (Ver pág. 34).
- P es circuncentro del ΔBQC

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x=a=y}$$

RESOLUCIÓN N° 202



Por dato : ABCD es paralelogramo nos piden demostrar que el circuncentro del ΔFEC está en $\mathscr{C}$.



- Se traza $\overline{OQ} \perp \overline{EF}$
- Por teorema :

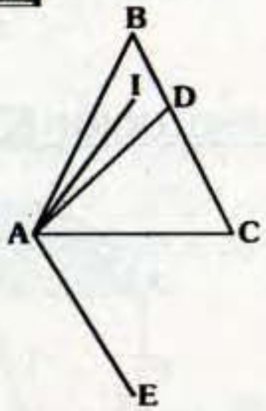
Como: $\overline{AD}//\overline{BE} \Rightarrow m\widehat{AB}=m\widehat{ED}=\beta$; y

$\overline{FD}//\overline{AB} \Rightarrow m\widehat{AF}=m\widehat{ABE}=\theta+\beta$

- Por ángulo inscrito : $\theta+\beta=2\alpha$
  $m\measuredangle FQE=2\alpha$
- Por teorema 8.14.
- Debido a que:
  $FQ=QE$ y $m\measuredangle AQE=2(m\measuredangle FCE)$
  $\Rightarrow$ Q es circuncentro del ΔAEC
  $\therefore$ $\mathbf{Q\in\mathscr{C}}$

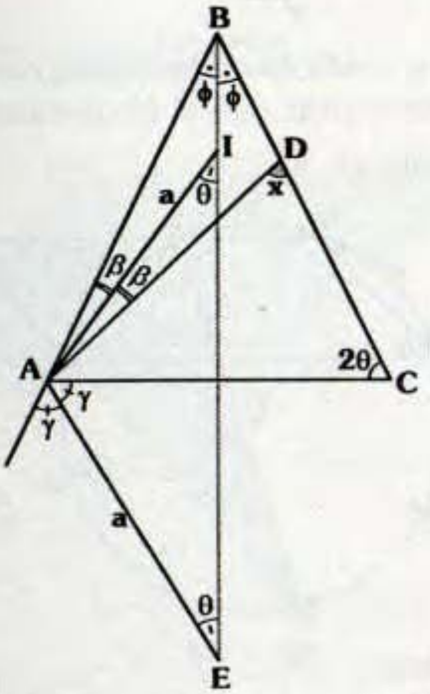
RESOLUCIÓN N° 203

Del gráfico :
I es incentro del ΔABD.
E es excentro relativo a $\overline{AC}$ del ΔABC y $AI=IE$



Piden demostrar:

AD=AC

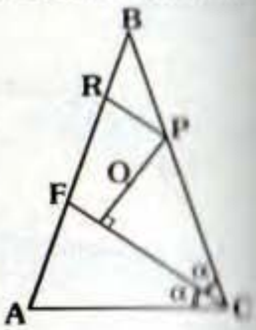


- Debido a que $\overline{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle ABD$ y $\overline{BE}$ también es bisectriz del $\measuredangle ABD$.
  $\Rightarrow$ B, I y E son colineales
- En ΔABC por teorema sobre bisectrices: $m\measuredangle ACD=2(m\measuredangle AED)$
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACD=2\theta$
- En ΔBAD: $\overline{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle BAD$
- Por dato $AI=AE$ $\Rightarrow$ ΔAIE: Isósceles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIE=m\measuredangle IEA$
- En ΔABI: $\theta=\beta+\phi$
- En ΔABD: $x=2\beta+2\phi$
  $\Rightarrow$ $x=2\theta$
  $\Rightarrow$ ΔADC es isósceles
  $\therefore$ $\mathbf{AD=AC}$

RESOLUCIÓN N° 204

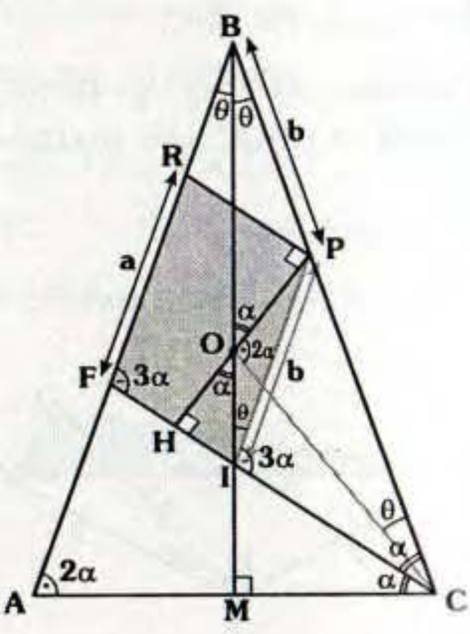
Graficando de acuerdo a las condiciones:

Del gráfico $AB=BC$,
O es circuncentro del ΔABC y $\overline{PR}//\overline{CF}$.



Piden demostrar :

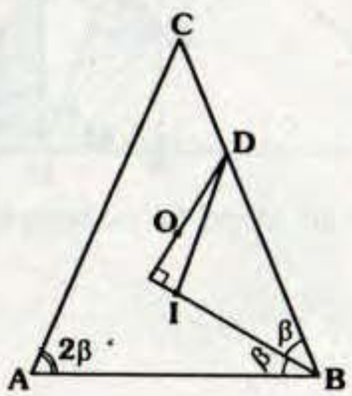
FR=BP



- Se sabe $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ por ser AB=BC, además $\overline{BO}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$.
- En $\triangle$IMC y $\triangle$IHO se tiene :
$$m\measuredangle HOI = \alpha$$
- Debido a que $m\measuredangle HOI = m\measuredangle ICP = \alpha$
$$\Rightarrow \quad \square IOPC \text{ es inscriptible}$$
- Por ser O el circuncentro :
$$OB = OC \Rightarrow m\measuredangle OCB = \theta$$
$$m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAC)$$
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BOC = 4\alpha$$
- Luego $m\measuredangle POC = 3\alpha$
- Debido a que el $\square$IOPC es inscriptible, se tendrá :
$$m\measuredangle PIO = \theta \Rightarrow \Delta APB \text{ isósceles}$$
Luego IP=BP = b.
$$m\measuredangle PIC = 3\alpha \Rightarrow \overline{IP} \parallel \overline{FR}$$
- De lo último y por ser $\overline{FI} \parallel \overline{RP}$
- Se concluye que FRPI es un paralelogramo $\Rightarrow$ a=b .

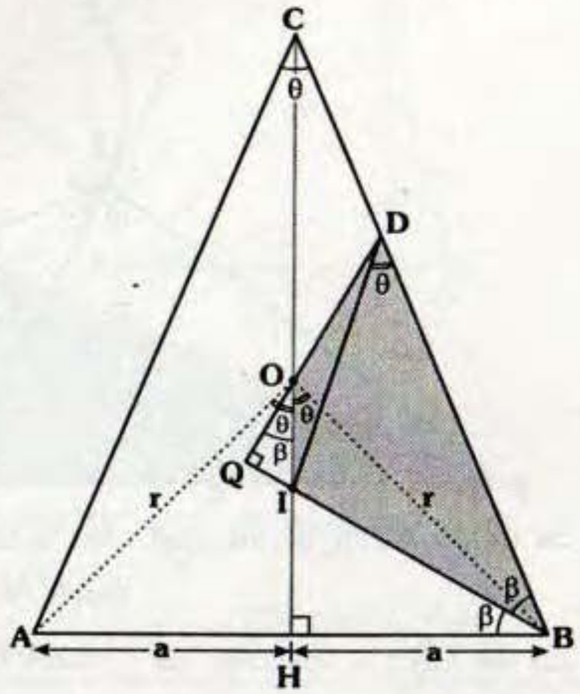
$$\therefore \ \mathbf{FR = BP}$$

RESOLUCIÓN N° 205



O e I son circuncentro e incentro del triángulo ABC respectivamente.

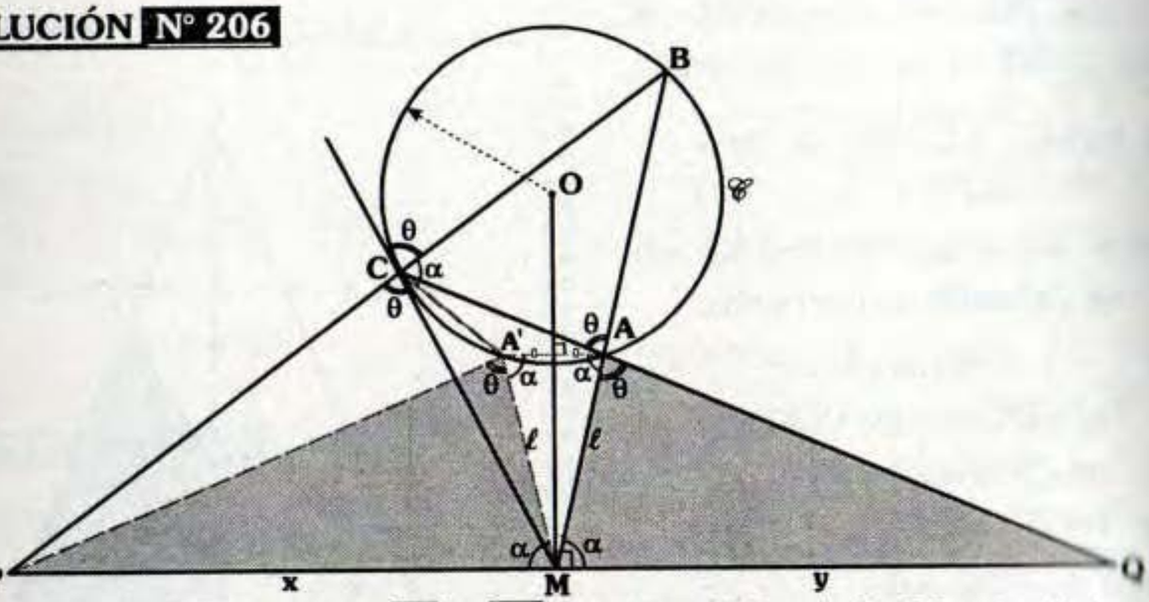
Vamos a demostrar : $\overline{\mathbf{AC}} \parallel \overline{\mathbf{ID}}$



- Debido a que el triángulo ACB es isósceles, luego C, O e I son colineales.
  - $\Rightarrow$ La recta que los contiene es perpendicular a $\overline{AB}$ en su punto medio.
- Por teorema del circuncentro :
$$m\measuredangle AOB = 2(m\measuredangle ACB) = 2\theta$$
$$\Delta AOC \text{ es isósceles } \Rightarrow m\measuredangle HOB = \theta$$
- En el $\triangle$IHB y $\triangle$IQO se cumple :
$$m\measuredangle QOI = \beta$$
$$\Rightarrow \square IODB \text{ es inscriptible}$$
- Luego $m\measuredangle IDB = m\measuredangle IOB = \theta$
- Se tendrá entonces :
$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle IDB = \theta$$

$$\therefore \quad \overline{\mathbf{DI}} \parallel \overline{\mathbf{CA}}$$

RESOLUCIÓN N° 206



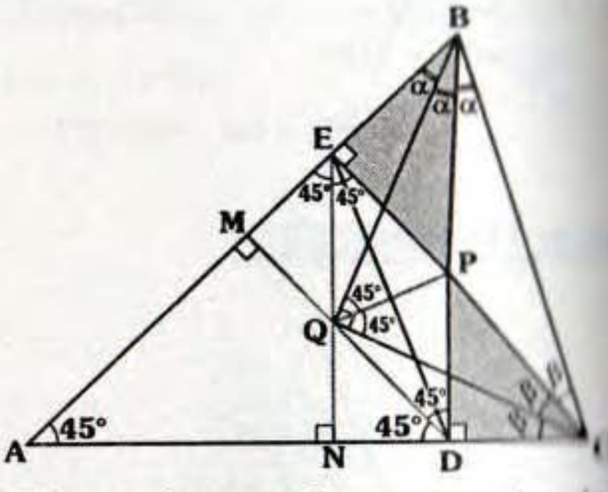
- Se ubica A' en $\mathscr{C}$, tal que $\overline{AA'} \perp \overline{OM} \Rightarrow AM=A'M=\ell$ ($\Delta A'AM$: isósceles) y

$$m\measuredangle A'AM = m\measuredangle AMQ = \alpha$$

- $\triangle AA'CB$: Inscrito $\Rightarrow$ $m\measuredangle A'CB = \alpha$
- $\triangle PCA'M$: Inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle PA'M=\theta$
- $\Delta PA'M \cong \Delta MAQ$ (ALA)

$$\therefore\ \mathbf{x = y}$$

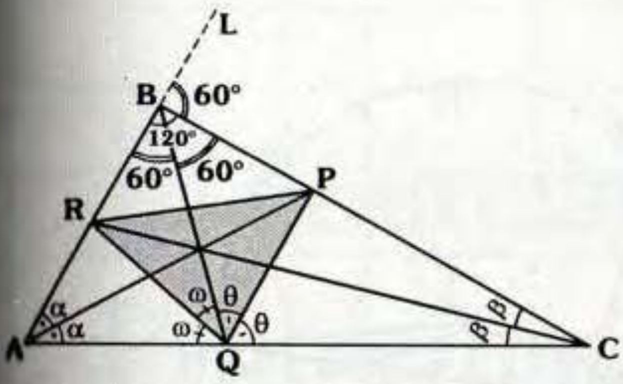
RESOLUCIÓN N° 207



- P : Incentro del ΔBQC
  $\Rightarrow m\measuredangle BQP=m\measuredangle PQC = 45°$
- Q : Excentro ΔBPE
  $\Rightarrow m\measuredangle AEQ=m\measuredangle QEP = 45°$
- Q : Excentro ΔPDC
  $\Rightarrow m\measuredangle PDQ=m\measuredangle QDA = 45°$
- Al prolongar $\overline{EQ}$ y $\overline{DQ}$, nos damos cuenta que $\overline{DM}$ y $\overline{EN}$ son alturas del ΔAED, por lo tanto Q es ortocentro del ◺ADE.

RESOLUCIÓN N° 208

- Al prolongar $\overline{AB}$ hasta L, $m\measuredangle LBP = 60°$
- P : Excentro del $\Delta ABQ \Rightarrow m\measuredangle BQP = m\measuredangle PQC = \theta$



- R : Excentro del ΔBQC

$\Rightarrow\ m\measuredangle BQR = m\measuredangle RQA = \omega$

- En "Q" : $2\omega + 2\theta = 180°$

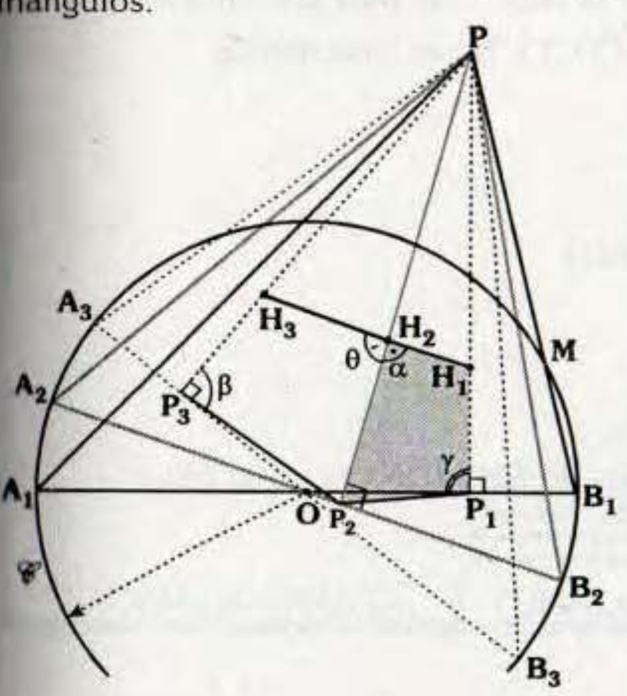
$\Rightarrow\ \omega + \theta = 90°$

$\therefore\ \mathbf{m\measuredangle PQR = 90°}$

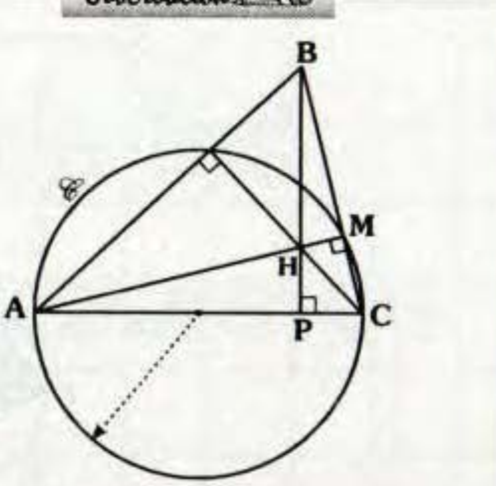
RESOLUCIÓN Nº 209

Puesto que para todos los triángulos ABP tienen como mediana "fija": $\overline{PO}$, el baricentro también es fijo, luego el lugar geométrico de los circuncentros será la misma que el descrito por el ortocentro, dado que son homotéticos.

Analicemos los ortocentros para tres triángulos.



Observación



En el gráfico

Por teorema de la secante

Se cumple :

$$(BH)(BP) = (BM)(BC) = Pot_{(B,\ \mathscr{C})}$$

- De la observación :

$$(PM)(PB_1) = (PH_1)(PP_1) = (PH_2)(PP_2) = $$
$$= (PH_3)(PP_3)$$

$\Rightarrow\ \triangle P_1H_1H_2P_2$, $\triangle P_2P_3H_3H_2$ y $\triangle P_1P_2P_3P$ son inscriptibles.

- Luego :

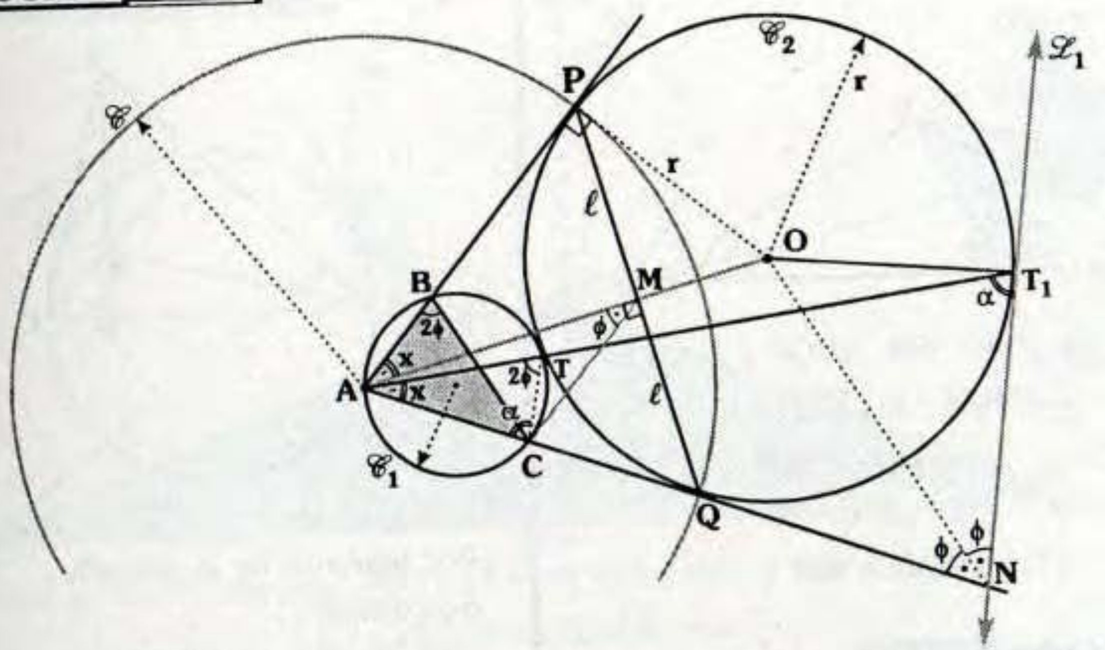
$$\left.\begin{array}{l}\theta + \beta = 180° \\ \alpha + \gamma = 180° \\ \beta + \gamma = 180°\end{array}\right\}\alpha = \beta$$

$\Rightarrow\ \theta + \alpha = 180°$

$\Rightarrow\ H_1$, H_2 y H_3 son colineales

$\therefore$ **El lugar geométrico es una recta**

RESOLUCIÓN N° 210

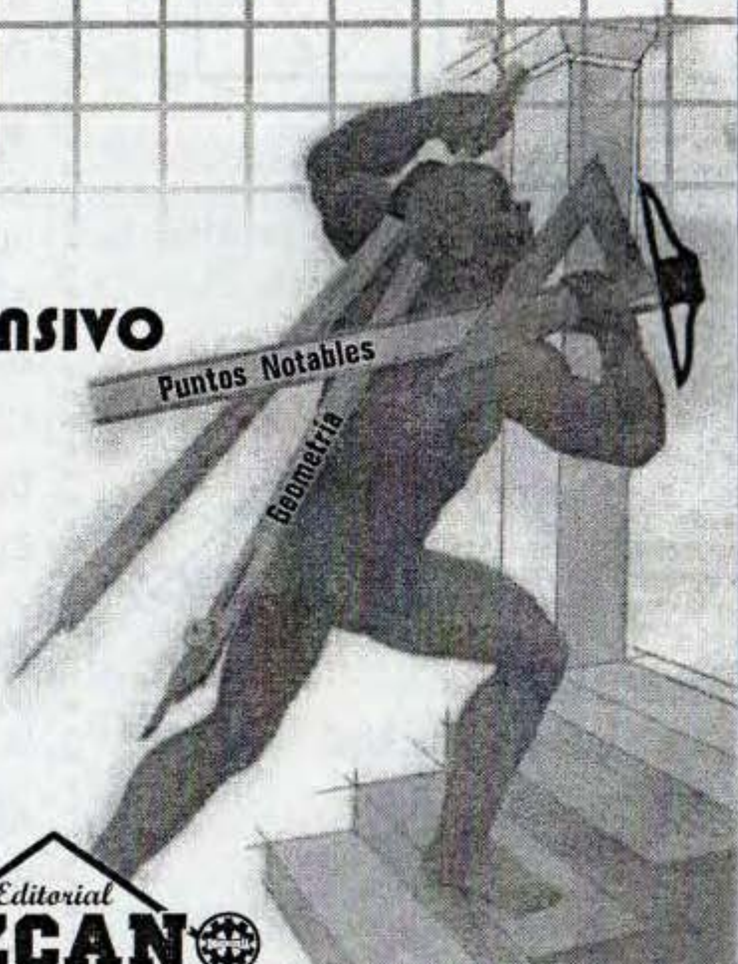


- $\triangle APQ$: Isósceles $\Rightarrow PM=MQ$ y $m\measuredangle MAP = m\measuredangle MAQ$ con centro en A y radio AP trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$, la cual será nuestra circunferencia de inversión.
- $\mathscr{C}_2$ es ortogonal a $\mathscr{C}$, entonces es su propio inverso.
- El inverso a $\mathscr{C}_1$ es $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ el cual es tangente a $\mathscr{C}_2$ en T' (inverso de T)
- Por teorema de circunferencia : $m\widehat{ABT} = m\measuredangle \widehat{TQT'} \Rightarrow m\measuredangle ACT = m\measuredangle TT'N = \alpha$
  $\Rightarrow \triangle CTT'N$ es inscriptible
- Luego $m\measuredangle CTA = m\measuredangle CNT' = 2\phi$
- En $\mathscr{C}_1$: $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ATC = 2\phi$
- Por relaciones métricas : $(AP)^2 = (AM)(AO)$
- En $\mathscr{C}_2$: $(AP)^2 = (AT)(AT')$
- En $\triangle CTT'N$: $(AT)(AT') = (AC)(AN)$
  $(AM)(AO) = (AC)(AN) \Rightarrow \triangle CMON$ es inscriptible
- Luego : $m\measuredangle AMC = m\measuredangle ONA = \phi$
- Finalmente en el $\triangle ABC$: $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AMC)$ y $m\measuredangle BAM = m\measuredangle MAC$
- Se concluye que M es excentro.

Enunciado de los Problemas Propuestos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO



Editorial CUZCANO

Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

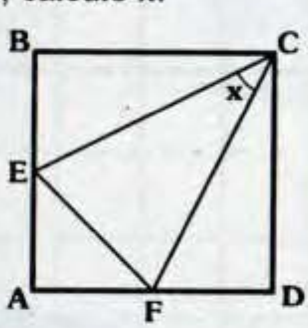
Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

Si el centro del cuadrado ABCD es el baricentro de ECF, calcule x.

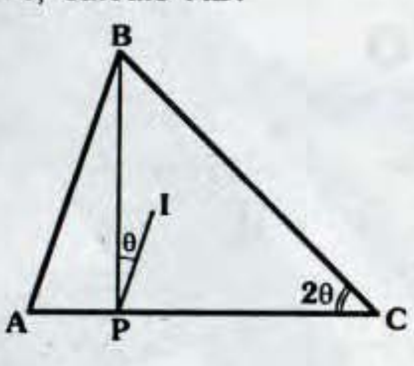
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



PROBLEMA Nº 2

En el gráfico I es incentro de ABC, si AP=PI y PC=4, calcule AB.

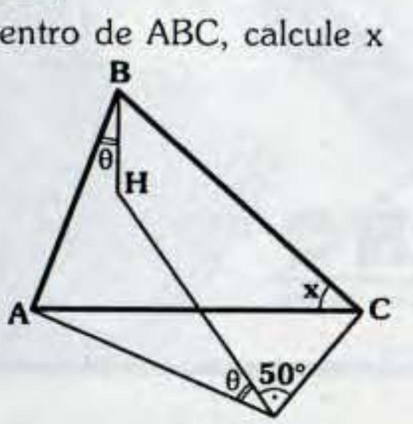
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



PROBLEMA Nº 3

Si H es ortocentro de ABC, calcule x

A) 25°
B) 30°
C) 35°
D) 40°
E) 50°



PROBLEMA Nº 4

Se tiene el paralelogramo ABCD, I_1 e I_2 son incentros de ABD y BCD, si :

$$m\measuredangle BAD = m\measuredangle I_1BI_2$$

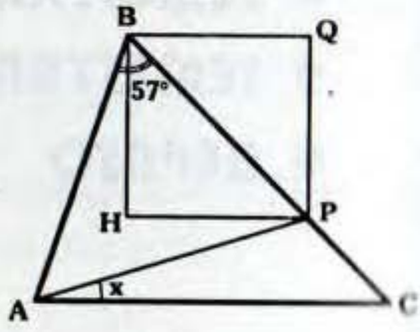
Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 5

Si HBQP es un cuadrado y H es el ortocentro de ABC, calcule x.

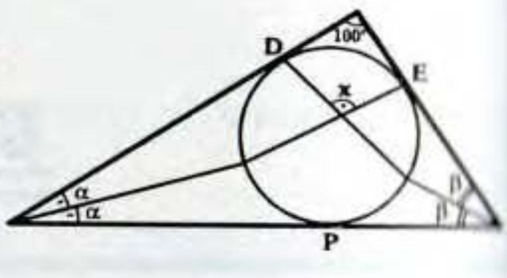
A) 12°
B) 13°
C) 14°
D) 15°
E) 16°



PROBLEMA Nº 6

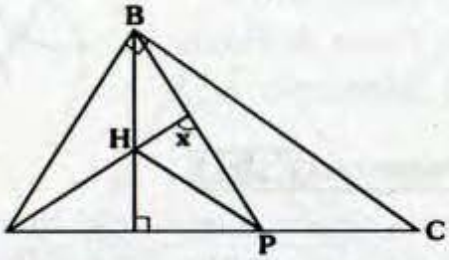
D, E y P son puntos de tangencia, calcule x.

A) 90°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 7

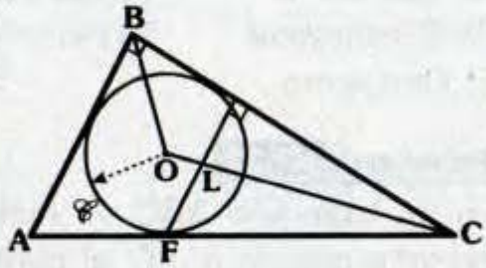
Si $\overline{HP} // \overline{BC}$, calcule "x".



A) 60º
B) 75º
C) 80º
D) 90º
E) 120º

PROBLEMA Nº 8

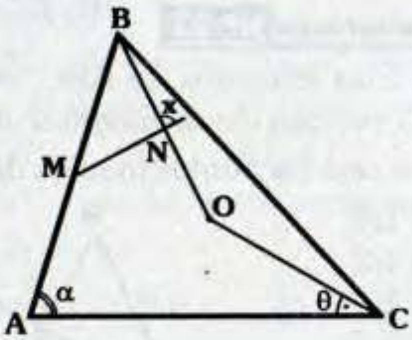
$\mathscr{C}$ esta inscrita en ABC, si $BO = 4\sqrt{2}$, calcule FL.



A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

PROBLEMA Nº 9

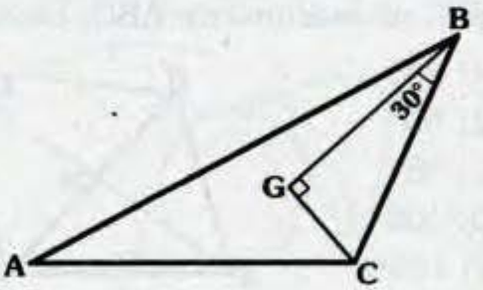
O es circuncentro de ABC, si AM=MB, BN=NO y $\alpha - \theta = 40°$, calcule "x".



A) 60º
B) 70º
C) 80º
D) 90º
E) 100º

PROBLEMA Nº 10

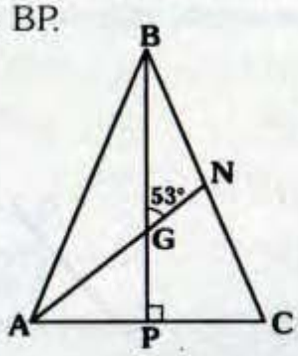
Si G es baricentro de ABC y CG=2, calcule AC.



A) $2\sqrt{7}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}$
E) 4

PROBLEMA Nº 11

En el gráfico, $AB = 2(BN) = 2(NC)$ y GN=10, calcule BP.



A) 20
B) 28
C) 30
D) 36
E) 40

PROBLEMA Nº 12

En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{BD} \cap \overline{AM} = F$, si BD=12 calcule BF.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 13

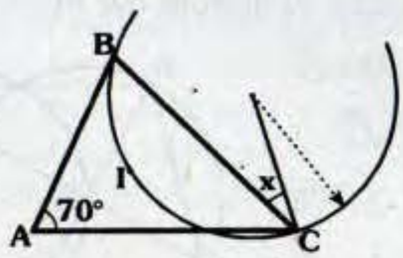
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B) de incentro I, si AI=4 y $CI = 6\sqrt{2}$, calcule AC.

A) $2\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{17}$ C) $2\sqrt{34}$

D) $3\sqrt{34}$ E) $4\sqrt{34}$

PROBLEMA Nº 14

I es incentro de ABC, calcule x :



A) 35º
B) 37º
C) 45º
D) 53º
E) 60º

PROBLEMA Nº 15

Dado un triángulo ABC, I es incentro y E es el excentro relativo a $\overline{BC}$, si :

$m\measuredangle EIC = 50° + m\measuredangle IEC$, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30º B) 32º C) 34º D) 38º E) 40º

ROBLEMA Nº 16

es incentro de ABC, P y Q son puntos e tangencia, calcule $m\widehat{IP}$.

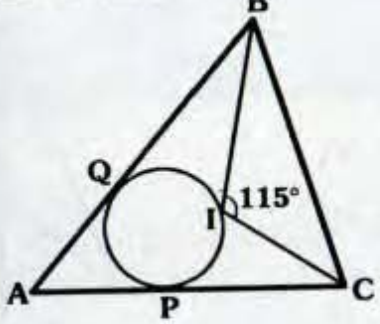
) 100°

) 115°

) 120°

) 135°

) 140°



PROBLEMA Nº 17

En un triángulo ABC, H y O son el rtocentro y circuncentro respectivamente, si OB=13 y AC=24, calcule BH.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 18

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, si el inradio es 3 y el perímetro de a región triangular ABC es 40, calcule su circunradio.

A) 6 B) $\dfrac{13}{2}$ C) $\dfrac{17}{2}$

D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 19

Calcule el inradio del triángulo ABO_1.

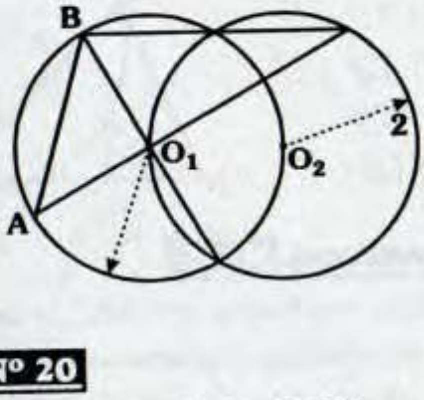
A) $2-\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2}-1$

C) $3-\sqrt{2}$

D) $4-\sqrt{2}$

E) $\sqrt{2}+1$



PROBLEMA Nº 20

¿Qué punto notable es P de ABC?

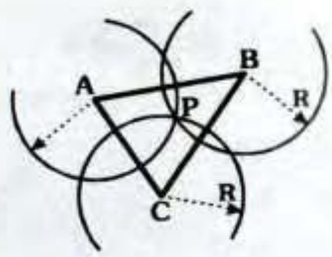
A) Incentro

B) Circuncentro

C) Ortocentro

D) Punto de Brune

E) Baricentro



PROBLEMA Nº 21

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P, si AP=PC y

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle PAC = 90°,$$

indique que punto notable es P de ABC.

A) Incentro B) Baricentro

C) Circuncentro D) Punto de Miquel

E) Ortocentro

PROBLEMA Nº 22

En un triángulo ABC de incentro I y excentro relativo a $\overline{AC}$ el punto E, calcule $m\measuredangle AIC + m\measuredangle AEC$.

A) 90° B) 120° C) 135°

D) 180° E) 200°

PROBLEMA Nº 23

Si E es excentro de ABC, AB=BC=8 y AC=6, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$.

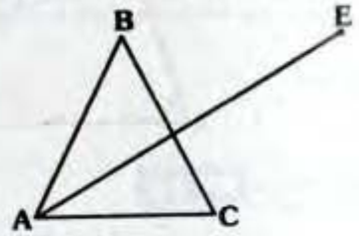
A) 1/4

B) 1/2

C) 1

D) 1,5

E) 2



PROBLEMA Nº 24

Si C es excentro de ABD, calcule x.

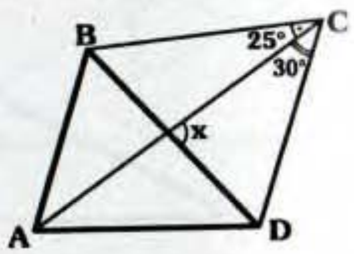
A) 85°

B) 90°

C) 95°

D) 100°

E) 105°



PROBLEMA Nº 25

Si O es circuncentro de ABD, calcule x.

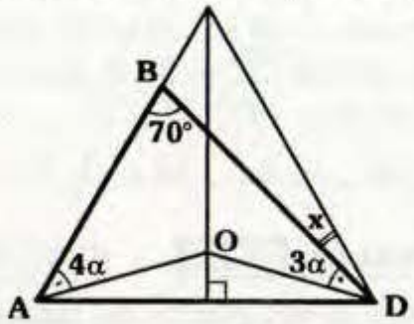
A) 14°

B) 13°

C) 12°

D) 11°

E) 10°



PROBLEMA Nº 26

A, M, P, Q, L, A y N son puntos de tangencia, $AB-BC=2$ y $CD=6$, calcule $MN+ND$.

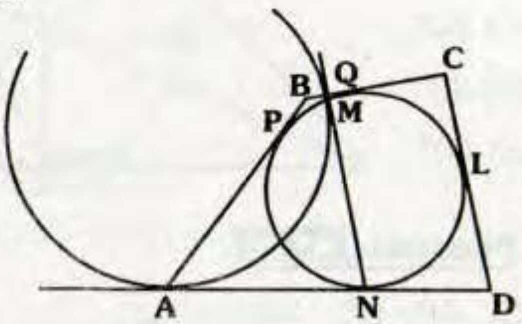
A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14



PROBLEMA Nº 27

En el lado $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD se ubica el punto P, tal que $m\measuredangle BPC=90°$, si $AB=12$ y $m\measuredangle PCD=37°$, calcule la distancia de A al incentro de BPC.

A) $\sqrt{274}$ B) $2\sqrt{74}$ C) $3\sqrt{14}$

D) $4\sqrt{7}$ E) 9

PROBLEMA Nº 28

Si $5(AL)=2(LB)=20$, calcule $AM-MN$.

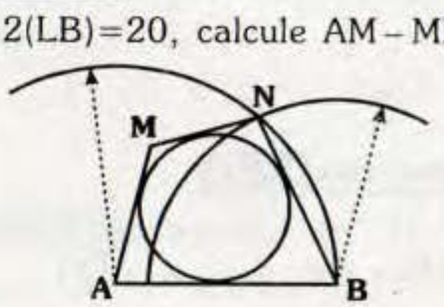
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



PROBLEMA Nº 29

En un triángulo ABC se traza la mediana BM y se ubica los baricentros G_1 y G_2 de ABM y MBC, si $m\measuredangle ABC=72°$, calcule $m\measuredangle G_1MG_2$.

A) 36° B) 40° C) 48° D) 60° E) 72°

PROBLEMA Nº 30

En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AB}$, incentro I y ortocentro H, si $m\measuredangle ACB=20°$, $BH=20$, calcule la distancia de H a $\overline{BI}$.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 31

I_1 e I_2 son incentros de ABM y MBC respectivamente, calcule x.

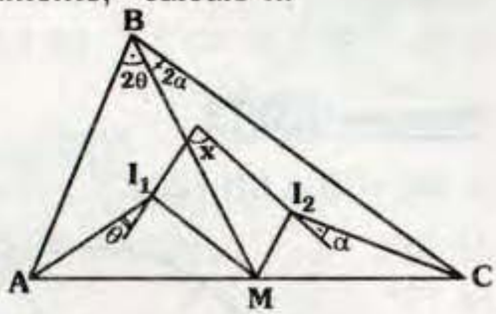
A) 60°

B) 75°

C) 90°

D) 95°

E) 120°



PROBLEMA Nº 32

En un trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia, la diferencia entre las longitudes de un lado lateral y la base menor es 10, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 33

L es punto de tangencia y T es ortocentro de ABC, si $BT=16$ y $BL=31$, calcule TQ.

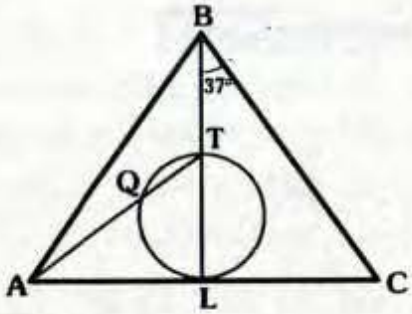
A) 9

B) 8

C) 7

D) 6

E) 5



PROBLEMA Nº 34

En un triángulo rectángulo, la longitud de un cateto es igual a la distancia de su ortocentro a su circuncentro, calcule la medida del menor ángulo interior.

A) 30° B) 37° D) 45° D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 35

El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es 1, calcule la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 36

Si AN=CB y CN=2(NO), calcule x.

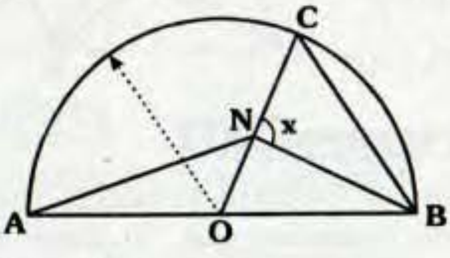
A) 90°

B) 75°

C) 60°

D) 53°

E) 45°



PROBLEMA Nº 37

Si AB=BC y O es circuncentro de AFC, calcule x.

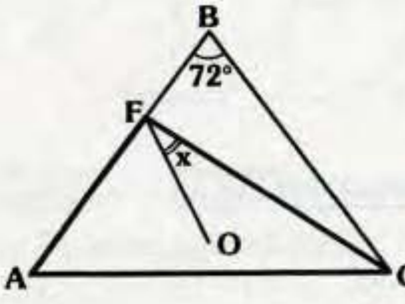
A) 30°

B) 32°

C) 34°

D) 36°

E) 38°



PROBLEMA Nº 38

En un triángulo isósceles ABC (AB=BC), el punto F es su excentro relativo a $\overline{BC}$ y su altura BH mide 8, calcule la distancia de F a $\overline{BC}$.

A) 10 B) 8 C) 6 D) 1 E) 2

PROBLEMA Nº 39

Si A y B son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{PQ}$.

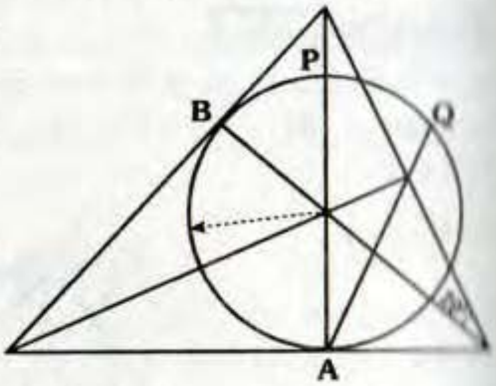
A) 20°

B) 25°

C) 30°

D) 35°

E) 40°



PROBLEMA Nº 40

Si AP=BC, calcule x.

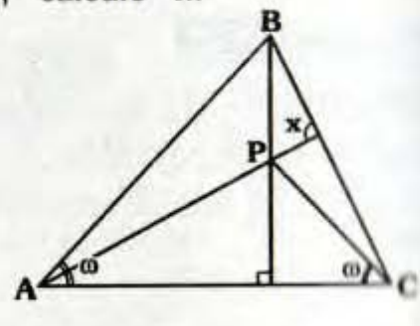
A) 90°

B) 60°

C) 75°

D) 120°

E) 80°



PROBLEMA Nº 41

Calcule el circunradio de un triángulo ABC, si $m\measuredangle BAC = 53°$ y BC=12.

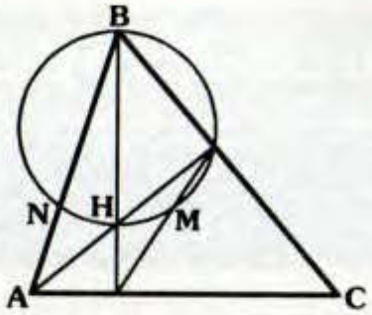
A) 5 B) 5,5 C) 6

D) 7,5 E) 8

PROBLEMA Nº 42

Si H es ortocentro de ABC y $m\widehat{HM} = 40°$, calcule $m\widehat{HN}$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



PROBLEMA Nº 43

En un triángulo ABC, N es el excentro relativo a $\overline{BC}$, luego se ubica el excentro E del ΔBNC, relativo a $\overline{BC}$, tal que :

$$m\measuredangle BEC = 2m\measuredangle BAC = 2x\,,$$

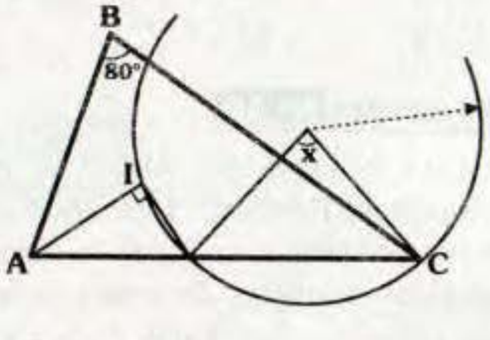
calcule x.

A) 180°/7 B) 200°/7 C) 90°/7
D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 44

I es incentro ABC, calcule x.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



PROBLEMA Nº 45

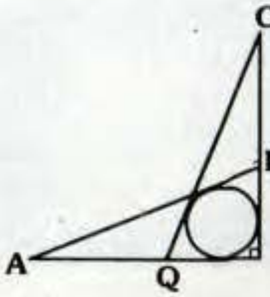
En un triángulo ABC de ortocentro H se traza la altura AR, en $\overline{HR}$ y $\overline{BR}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $\overline{QP} \parallel \overline{BH}$, si $m\measuredangle QAC = 65°$, calcule $m\measuredangle PCA$.

A) 20° B) 25° C) 26°
D) 28° E) 30°

PROBLEMA Nº 46

Si AP=CQ y CP=4, calcule AQ.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA Nº 47

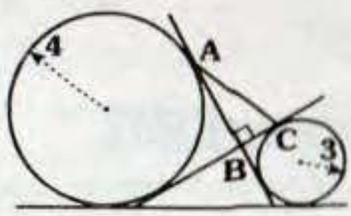
En un triángulo ABC de incentro I, E_1 y E_2 son excentros relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si $m\measuredangle ABC = 20°$, calcule $m\measuredangle E_1IE_2$.

A) 40° B) 60° C) 80°
D) 100° E) 120°

PROBLEMA Nº 48

Calcule el inradio de ABC.

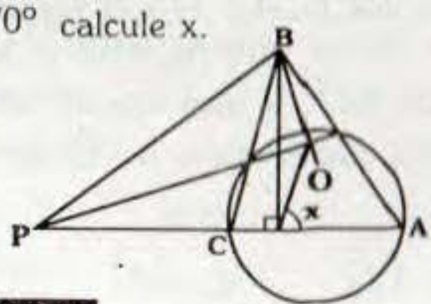
A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5



PROBLEMA Nº 49

Si O es circuncentro de ABC y $m\measuredangle PBO = 70°$ calcule x.

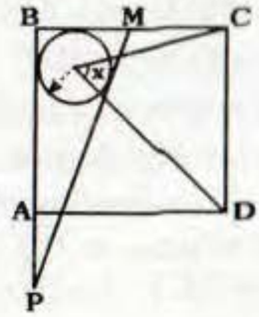
A) 60°
B) 62°
C) 65°
D) 68°
E) 70°



PROBLEMA Nº 50

ABCD es un cuadrado, si BM=MC=5 y AP=2, calcule x.

A) 41°
B) 43°
C) 47°
D) 55°
E) 59°

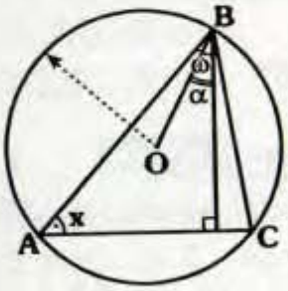


Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

OBLEMA Nº 51

la figura, hallar x, si $\alpha = 30°$ y $= 50°$.



45°
40°
50°
55°
60°

ROBLEMA Nº 52

: tiene un triángulo acutángulo ABC en cual se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, so- e las prolongaciones $\overrightarrow{HB}$ y $\overrightarrow{JC}$ se ubi- ın los puntos P y Q respectivamente : modo que AC=BP y AB=CQ. Si $Q = 6\sqrt{3}$, la distancia del vértice A a la :cta que contiene a $\overline{PQ}$ es :

) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$

) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

ROBLEMA Nº 53

ea el triángulo ABC, cuyo ángulo inter- o en B mide 120° y cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{3C}$ miden a y b unidades $(a < b)$. La isectriz del ángulo B y la mediatriz de $\overline{\text{\AC}}$ se intersecan en P y desde P se tra- a el segmento $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{BC}$ Q en BC). Calcule QC.

A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $\dfrac{a+b}{4}$ C) $\dfrac{b-a}{2}$

D) $b-a$ E) $b-2a$

PROBLEMA Nº 54

La circunferencia exinscrita al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC, determina el punto de tangencia M en la prolongación del lado $\overline{CA}$. Se traza $\overline{AF}$ perpendicular a $\overline{OB}$ (O es el centro de la circunferencia) tal que: $m\measuredangle AMF = m\measuredangle ACB$

Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 45° B) 30° C) 60°

D) 75° E) 67,5°

PROBLEMA Nº 55

En un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices interiores formándose un nuevo cuadrilátero, calcular la suma de dos ángulos opuestos de este cuadrilátero.

A) 120° B) 180° C) 150°

D) 140° E) 110°

PROBLEMA Nº 56

En un triángulo ABC $(AC > AB)$ se traza la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{BC}$ de centro O. $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{F\}$, por F se traza una recta tangente a la circunferencia que intercepta a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{AC}$ en J, si $AB = 6\mu$ y $FJ = 2\mu$, entonces AJ – BF (en u) es :

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº 57

En un triángulo ABC recto en B, AB<BC. La circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos N y P respectivamente. Exteriormente se construye el trapezoide BDEC circunscrito a una circunferencia siendo M y Q los puntos de tangencia con los lados $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $DE=5\mu$, $AC=CE$ y $DM+AN=3\mu$. Calcule PQ (en μ).

A) 3 B) 1,5 C) 2,5 D) 1 E) 2

PROBLEMA Nº 58

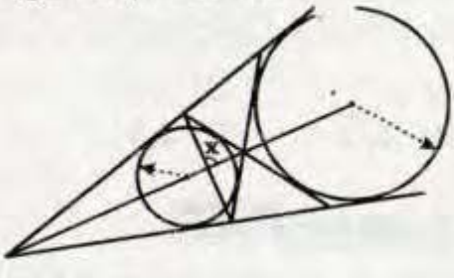
Sea el triángulo ABC, recto en B, se traza $\overline{BH}\perp\overline{AC}$, si $\overline{BM}$ es la bisectriz del ángulo ABH, $\overline{BN}$ la bisectriz del ángulo HBC y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, entonces la longitud de $\overline{MN}$ es :

A) r/3 B) r/2 C) r D) 3r/2 E) 2r

PROBLEMA Nº 59

Del siguiente gráfico, hallar x.

A) 75°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 60

Dos triángulos equiláteros ABC y CDE están ubicados de modo que A, C y E son colineales y los puntos B y D se encuentran en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AE}$. G_1 y G_2 son los baricentros de los triángulos ABC y CDE respectivamente. Si AB=2(DE) y $G_1D=L$, entonces la distancia entre los puntos G_1 y G_2 es :

A) L/2 B) L/3 C) L
D) 2L E) 2/3L

PROBLEMA Nº 61

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, si la diferencia de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AHB y BHC es L unidades. Halle la distancia del incentro del triángulo ABC a la altura $\overline{BH}$.

A) L/5 B) L/4 C) L/3
D) L/2 E) L

PROBLEMA Nº 62

Sea el triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, sean I_1 e I_2 son incentros de los triángulos BHA y BHC; I es el incentro del triángulo ABC e $\overrightarrow{I_1I_2}\cap\overline{BC}=\{D\}$. Halle la medida del ángulo I_1DB y que punto notable es I del triángulo I_1BI_2.

A) 45° ; incentro
B) 45° ; ortocentro
C) 45° ; circuncentro
D) 30° ; incentro
E) 30° ; ortocentro

PROBLEMA Nº 63

Dado el triángulo ABC; donde la $m\measuredangle BAC=32°$ y $m\measuredangle ACB=88°$. Además O, I y H son circuncentro, incentro y ortocentro respectivamente. Halle $m\measuredangle OIH$.

A) 150° B) 151° C) 152°
D) 153° E) 155°

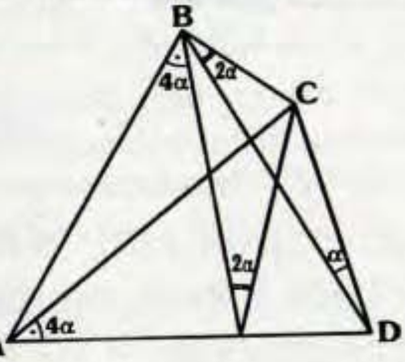
PROBLEMA Nº 64

En un triángulo ABC, se ubica el incentro I, por I se traza una recta secante que intersecta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Si $m\measuredangle INA = 60°$, $MI/IN = \sqrt{3}$, halle la medida del ángulo BAC.

A) 60° B) 75°
C) 90° D) Hay dos respuestas
E) 120°

PROBLEMA Nº 65

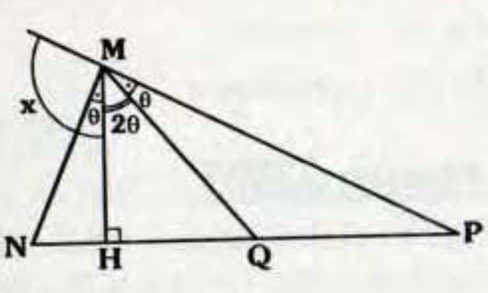
En la figura adjunta, AB=AD. Halle el valor de α.



A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 15°

PROBLEMA Nº 66

En el siguiente gráfico $\overline{MQ}$ es mediana del triángulo MNP. Halle x.



A) 60°
B) 90°
C) 67,5°
D) 12,5°
E) 112,5°

PROBLEMA Nº 67

Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo si los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas miden r y R unidades respectivamente.

A) $4R-r$ B) $3R-r$
C) $2(R+r)$ D) $2(2R+r)$
E) $4(R+r)$

PROBLEMA Nº 68

En un triángulo ABC, halle la longitud de la flecha relativa a $\overline{AC}$, si los radios de los círculos inscritos y exinscrito relativo a $\overline{AC}$, miden r y R respectivamente $(R>r)$.

A) $\dfrac{2R+r}{3}$ B) $\dfrac{R-r}{3}$ C) $\dfrac{R-r}{2}$

D) $2R-r$ E) $\dfrac{2R-r}{4}$

PROBLEMA Nº 69

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), el cual está inscrito en una circunferencia, E es excentro relativo a $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ corta a la circunferencia en P. Si BP=3. Calcule EC.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6
D) $3\sqrt{3}$ E) 4,5

PROBLEMA Nº 70

Sea el cuadrilátero ABCD convexo, $M\in\overline{AB}$ y $N\in\overline{DC}$, sea O_1 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AMND, O_2 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero NMBC. Si AB+CD=40m, AD+BC=24m. Halle MN.

A) 8m B) 9m C) 10m
D) 11m E) 12m

PROBLEMA Nº 71

En un triángulo ABC recto en B, sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto F y se trazan $\overline{FP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{FQ} \perp \overline{BC}$ respectivamente :

$$\left(P \in \overline{AB} \wedge Q \in \overline{BC}\right)$$

Si AB+BC=PF+AC y los inradios de los triángulos APF y FQC miden 3 y 4 unidades, entonces $\overline{PF}$ mide (en μ).

A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

PROBLEMA Nº 72

En un triángulo rectángulo, si el semiperímetro es p y la hipotenusa mide h, entonces el inradio mide :

A) $p-\frac{h}{2}$ B) $\frac{p-h}{2}$ C) $p-h$

D) $2p-h$ E) $\frac{p+h}{2}$

PROBLEMA Nº 73

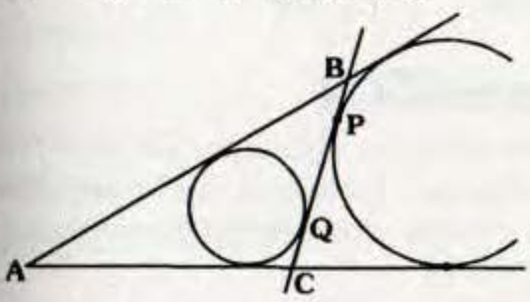
En un triángulo rectángulo ABC (recto e B) se traza la altura $\overline{BH}$, si I es el incentro. Halle la distancia trazada de I a $\overline{BH}$ si se sabe que:

BH=12 y $r_1=3$ (r_1 es el inradio del triángulo AHB).

A) 1,5 B) 2 C) 1 D) 2,5 E) 1,25

PROBLEMA Nº 74

Si AC=b y AB=c. Halle PQ.



A) $\frac{c-b}{5}$ B) $\frac{c-b}{4}$ C) $\frac{c-b}{3}$

D) $\frac{c-b}{2}$ E) $c-b$

PROBLEMA Nº 75

ABCD es un cuadrilátero exinscriptible y circunscriptible. Si AB=8μ entonces AD (en μ) es :

A) 6 B) 8 C) 9

D) 10 E) 15

PROBLEMA Nº 76

ABCD es un cuadrilátero en donde BC=CD, m∡BCD = m∡DAB = 90° se traza $\overline{BE}$ de manera que $E \in \overline{AD}$, EBCD es un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ $\left(H \in \overline{AD}\right)$ tal que : CH − HD = 8μ, EH = 6μ, calcule el radio de la circunferencia inscrita en ABE (en μ).

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 77

En la figura AN=18μ, AD+DC=14μ, OC=8μ. Halle el radio R (en μ).

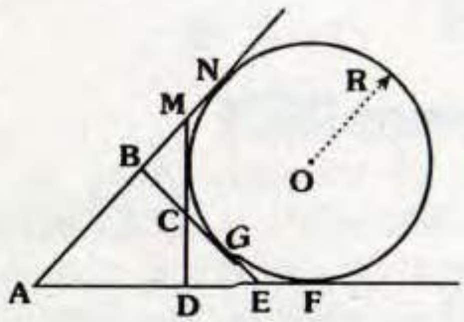
A) $4\sqrt{5}$

B) $4\sqrt{6}$

C) 6

D) $4\sqrt{3}$

E) 4



ROBLEMA Nº 78

un triángulo ABC, $AB = 5\mu$, $BC = 7\mu$ $AC = 6\mu$ se inscribe una circunferencia ngente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q. el arco menor PQ se traza una tannte que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ E y F respectivamente. Halle el períetro del triángulo EBF (en μ).

4	B) 5	C) 6
7	E) 8	

ROBLEMA Nº 79

n un cuadrilátero convexo MNPQ, se aza $\overline{RS}$ tal que : $S \in \overline{QP}$, $R \in \overline{MN}$. Si Q+NP=a y QP+MN=b y los cuadriláros RMQS y RSPN son circunscriptibles, ntonces la razón RS/(b – a) es igual a :

) 10,3	B) 0,1	C) 0,2
) 0,8	E) 0,5	

ROBLEMA Nº 80

e tiene el triángulo ABC, $AB = 6\mu$, $C = 8\mu$, se inscribe una circunferencia ngente al lado $\overline{BC}$ en M, se exinscribe na circunferencia tangente al lado $\overline{BC}$ n N. Halle MN (en μ).

) 1	B) 3	C) 1,5
) 2	E) 2,5	

ROBLEMA Nº 81

n un triángulo ABC, se cumple $n\measuredangle BAC = 76^\circ$, $m\measuredangle BCA = 44^\circ$ y la disancia del incentro al circuncentro es $\sqrt{2}$. Calcule la distancia del ircuncentro al ortocentro.

A) 12	B) 13	C) 14
D) 15	E) 16	

PROBLEMA Nº 82

En la figura hallar FE en función de r_1 y r_2.

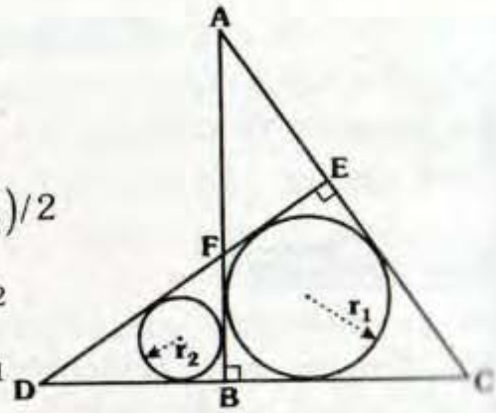
A) $r_2 - r_1$

B) $r_2 + r_1$

C) $(r_1 + r_2)/2$

D) $2r_1 - r_2$

E) $2r_2 - r_1$



PROBLEMA Nº 83

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es :

A) $\sqrt{65}$ cm	B) 12 cm	C) $\sqrt{51}$ cm
D) 8 cm	E) 9 cm	

PROBLEMA Nº 84

En el ΔABC $(m\measuredangle B = 40^\circ)$, M es el punto medio del segmento que une el incentro con el excentro relativo a $\overline{AC}$. Hallar $m\measuredangle AMC$.

A) 60°	B) 80°	C) 120°
D) 140°	E) 90°	

PROBLEMA Nº 85

En un triángulo equilátero su lado mide a unidades. Entonces, la longitud del radio de una circunferencia exinscrita al triángulo es :

A) $2a$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3a}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA Nº 86

Se tiene un triángulo ABC cuyos lados miden $AC=b$, $AB=c$ y $BC=a$. Si $a+c=b+2r$ donde "r" es el inradio del triángulo ABC. Calcule $m\measuredangle ABC$.

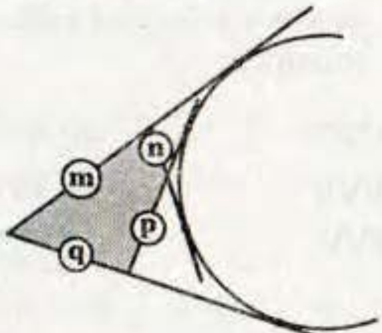
A) 60º B) 45º C) 75º
D) 90º E) 120º

PROBLEMA Nº 87

Del siguiente gráfico. Calcular :

$$\frac{m+n}{m+n+p+q}$$

A) 4/5
B) 3/4
C) 2/3
D) 2/3
E) 1/2



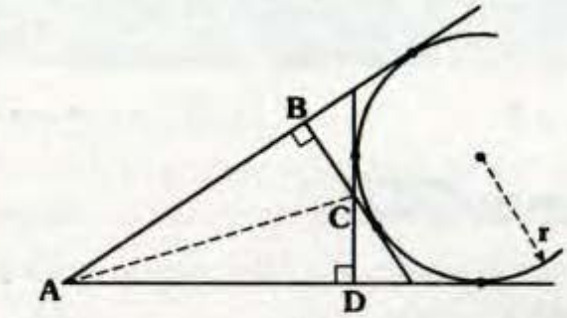
PROBLEMA Nº 88

En un triángulo ABC: el ortocentro de su triángulo mediano es el .... del triángulo ABC.

A) Ortocentro
B) Incentro
C) Baricentro
D) Circuncentro
E) Punto de Feuerbach

PROBLEMA Nº 89

Con respecto a los inradios de los triángulos ABC y ADC r_1 y r_2 respectivamente se puede afirmar que :



A) $r_1 > r_2$ B) $r_1 < r_2$
C) $r_1 = r_2$ D) Falta información
E) $r_1 + r_2 = r$

PROBLEMA Nº 90

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas :

I. Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O; $\overleftrightarrow{L}$ es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda AB y el arco AB, luego: $O \in \overleftrightarrow{L}$.

II. En todo triángulo : ortocentro, incentro y baricentro son puntos de una misma recta.

III. Todo trapecio es inscriptible.

A) Sólo I B) Sólo II
C) I y II D) I y III
E) Sólo III

PROBLEMA Nº 91

Se tiene un triángulo rectángulo ABC. Para hallar la longitud de la hipotenusa $\overline{BC}$ es necesario conocer.

Los radios de los círculos exinscritos relativos a los catetos.

El inradio y exradio relativo a la hipotenusa.

Sólo I B) Sólo II

I y II D) Falta información

I ó II

ROBLEMA Nº 92

dicar verdadero o falso según corresnda :

) El incentro está ubicado en el interior para todo triángulo.

) El ortocentro de un triángulo rectángulo está ubicado en el punto medio de la hipotenusa.

) El baricentro de un triángulo puede estar ubicado en el exterior.

) El circuncentro de un triángulo obtusángulo está ubicado en uno de sus vértices.

) Todo triángulo tiene tres excentros.

A) VVFFV B) FVFVF

C) VVVFF D) VFFFV

E) VVFVV

PROBLEMA Nº 93

Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I. Las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de los ángulos del triángulo pedal.

II. En todo triángulo acutángulo la distancia del ortocentro al vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto al vértice considerado.

III. La circunferencia que pasa por 2 vértices de un triángulo y por su incentro, tiene su centro en la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

A) VVF B) VFV

C) VVV D) FFF

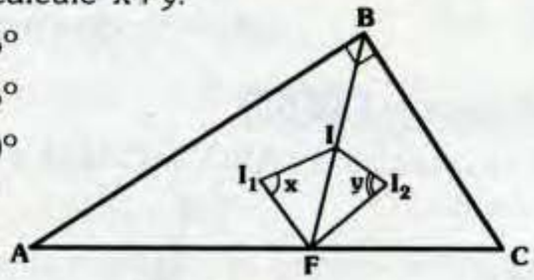
E) FVV

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 94

I, I_1 e I_2 son incentros de ABC, ABF y BFC, calcule x+y.



A) 135°
B) 125°
C) 120°
D) 90°
E) 60°

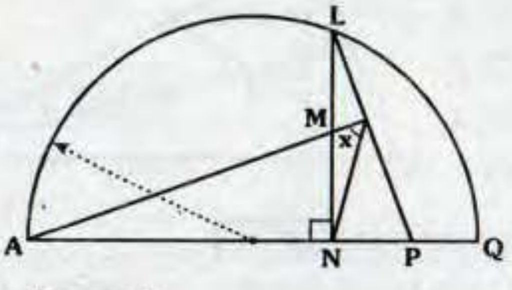
PROBLEMA Nº 95

Se tiene un triángulo ABC (recto en B), la bisectriz del ángulo exterior en B corta a la circunferencia circunscrita en M, si N es punto medio de $\overline{AC}$, calcule m∡MNA.

A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

PROBLEMA Nº 96

Si LM=MN, NP=PQ y $m\widehat{AL}=110°$, calcule x.



A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°

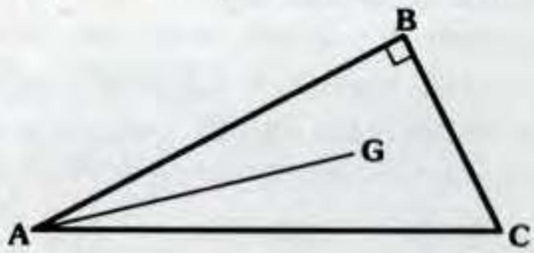
PROBLEMA Nº 97

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, I y E son el incentro y excentro relativo a $\overline{BC}$, si AC=IE=6, calcule AB.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 98

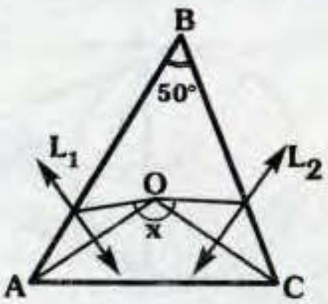
Si G es baricentro de ABC y AC=18, calcule el mayor valor entero de AG.



A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13

PROBLEMA Nº 99

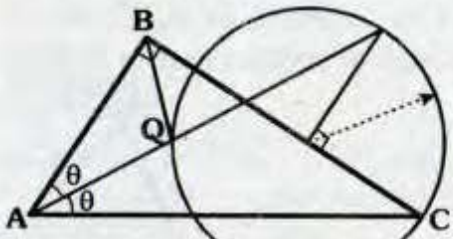
O es circuncentro de ABC, si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$, calcule x.



A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°

PROBLEMA Nº 100

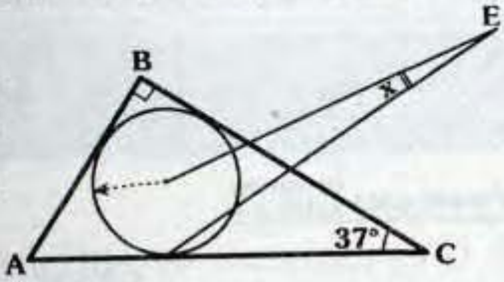
Si $BQ=3\sqrt{2}$, calcule el inradio de ABC.



A) 3
B) 3,5
C) $3\sqrt{2}$
D) 4
E) 5

ROBLEMA Nº 101

E es excentro de ABC, calcule x :



15°

17°/2

21°/2

23°/2

25°

ROBLEMA Nº 102

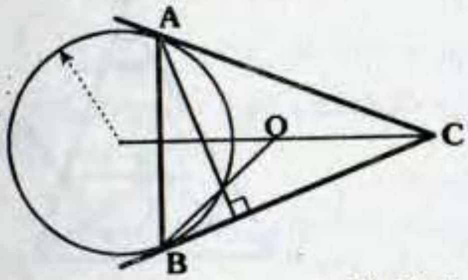
: tiene el triángulo rectángulo ABC, rec-
en B, $m\measuredangle BAC = 30°$ y $AC = \sqrt{3}$, si O
circuncentro de ABC, calcule la distan-
a entre los circuncentros de AOB y BOC.

) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

ROBLEMA Nº 103

y B son puntos de tangencia. ¿Qué
unto notable es O de ABC?.



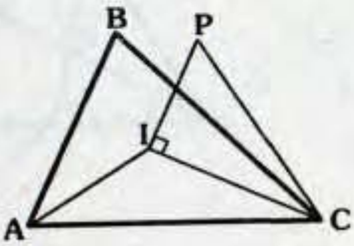
) Circuncentro B) Baricentro

) Punto de Georgone D) Incentro

) Ortocentro

PROBLEMA Nº 104

i I es incentro de ABC, AI=IP y PC=6,
alcule el mínimo valor entero de AC.



) 5

) 6

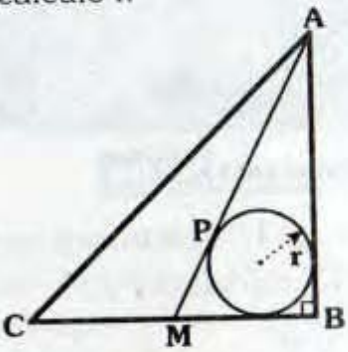
) 7

) 8

) 9

PROBLEMA Nº 105

Si P es punto de tangencia y baricentro de ABC, MP=2, calcule r.



A) $3\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{5}-1$

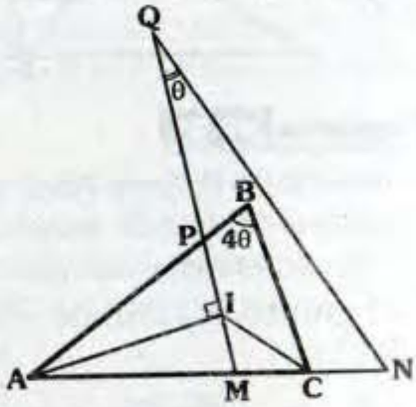
C) $\sqrt{15}-3$

D) $\sqrt{17}-3$

E) $2\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 106

I es incentro de ABC, MC=CN y CI=3, calcule PQ.



A) 6

B) 6,5

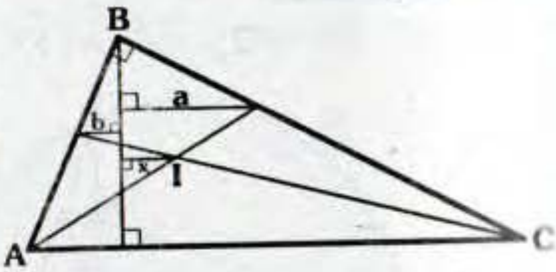
C) $6\sqrt{2}$

D) 8

E) 9

PROBLEMA Nº 107

I es incentro de ABC y $a-b=4$, calcule x.



A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

PROBLEMA Nº 108

Dado los triángulos equiláteros ABC, de baricentro G_1, CDE, de baricentro G_2, tal que A, C y E son colineales y B, C y D no son colinelales, si AC=2(CD) y $G_1G_2 = 5$, calcule G_1D.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

PROBLEMA Nº 109

Se tiene el $\triangle ABC$, se trazan la altura BH y la ceviana interior CP, tal que BC=CP, si $m\measuredangle PCA = 15^\circ$ y $m\measuredangle BAC = 60^\circ$, calcule $m\measuredangle PHA$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 110

En un cuadrilátero ABCD, si :

$$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ABD) = 120^\circ;$$
$$m\measuredangle ADB = 40^\circ \quad y$$
$$m\measuredangle ADC = 110^\circ$$

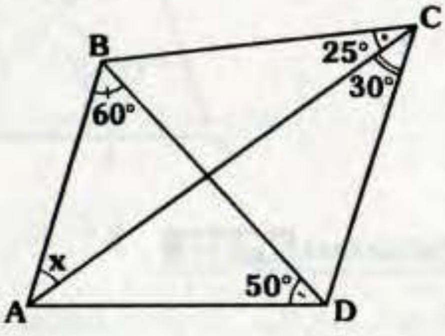
Calcule la medida del ángulo entre las diagonales.

A) 60° B) 65° C) 70°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA Nº 111

Calcule x.

A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 45°
E) 50°



PROBLEMA Nº 112

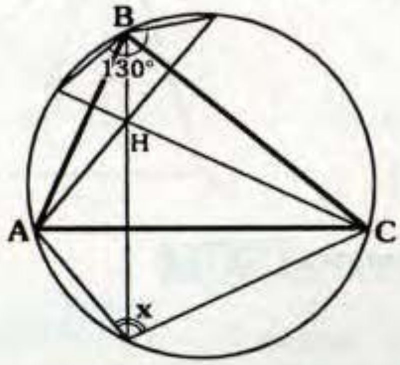
En un $\triangle ABC$, se ubica O en la ceviana interior BH, tal que $m\measuredangle BAO = m\measuredangle BCO$ $m\measuredangle AOC = 90^\circ + m\measuredangle BAO$, si $m\measuredangle OAC = 15^\circ$ y BC=12, calcule la distancia de H a $\overline{BC}$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 113

Si H es ortocentro de ABC, calcule x.

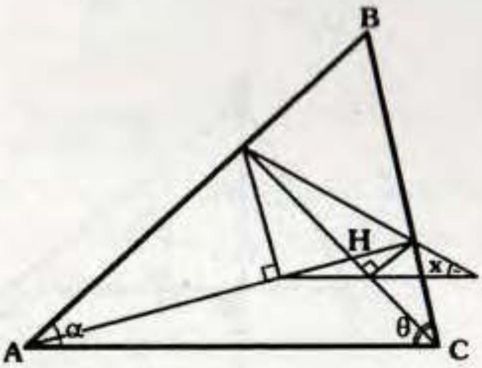
A) 115°
B) 95°
C) 100°
D) 105°
E) 110°



PROBLEMA Nº 114

H es ortocentro de ABC, calcule x.

A) $\theta + \alpha$
B) $\theta - \alpha$
C) $\dfrac{\alpha + \theta}{2}$
D) $\dfrac{\theta - \alpha}{2}$
E) $2\alpha - \theta$



PROBLEMA Nº 115

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se construye el triángulo equilátero APC (exterior a ABC), si $m\measuredangle ACB = 15^\circ$ y AB+BC=12, calcule la distancia del baricentro de APC a $\overline{BC}$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 116

Si G es baricentro de ABC, BGP es un triángulo equilatero, AN=3(NC), PM=MC y BP=4, calcule MN.

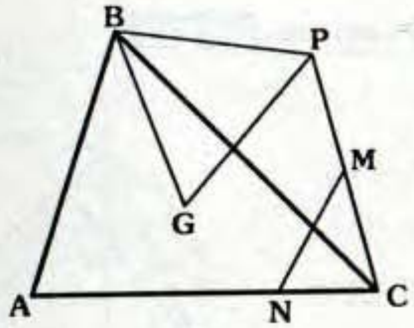
$\sqrt{3}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{7}$

2

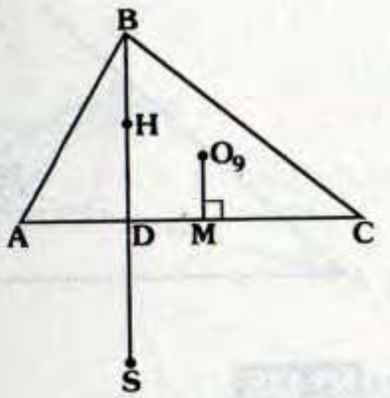
4



OBLEMA Nº 117

el gráfico H y O_9 son ortocentro y ıtro de la circunferencia de Euler del ıngulo ABC. Si BD=DS.

lcule: $\dfrac{HS}{O_9M}$



2 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$

3 E) 4

ROBLEMA Nº 118

es el circuncentro de ABC y ortocentro EDC, si $\alpha+\beta=75^{\circ}$, calcule x.

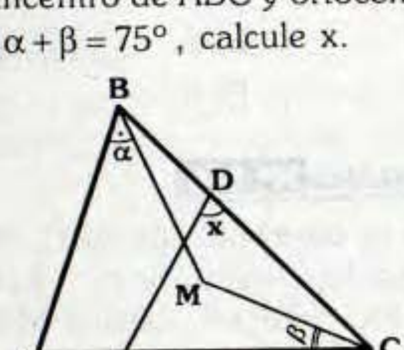
) 60°

) 65°

) 70°

) 75°

) 80°



PROBLEMA Nº 119

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y AC=3(BH), calcule x.

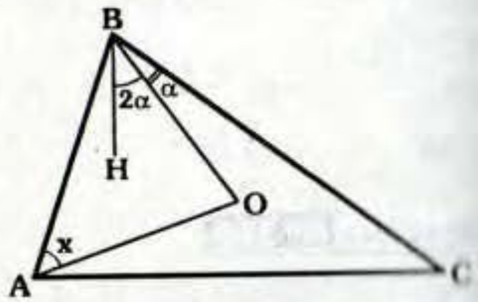
A) 53°

B) $\dfrac{429^{\circ}}{8}$

C) 45°

D) $\dfrac{245^{\circ}}{60}$

E) 60°



PROBLEMA Nº 120

Calcule el cincunradio de ABC, si H y O son su ortocentro y circuncentro respec- tivamente, además el perímetro de la re- gión triangular equilátera HLO es 6 y $\overline{HO} // \overline{AC}$.

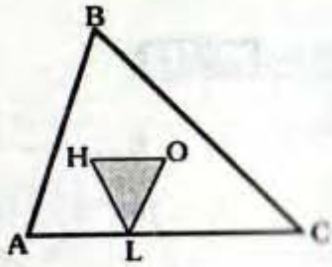
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 121

En un ΔABC, H es el ortocentro y O es el circuncentro, si $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle HBO)$ y BH=BO, calcule $m\measuredangle HAO$.

A) 6° B) 7° C) 8°

D) 9° E) 10°

PROBLEMA Nº 122

Se tiene un triángulo ABC, se ubica el punto O en la altura BH, K y O son el circuncentro y ortocentro de ABC respectivamente, si $m\measuredangle ABC = 60°$ y $m\measuredangle AOH = 40°$, calcule $m\measuredangle HOK$.

A) 90° B) 95° C) 100°
D) 105° E) 110°

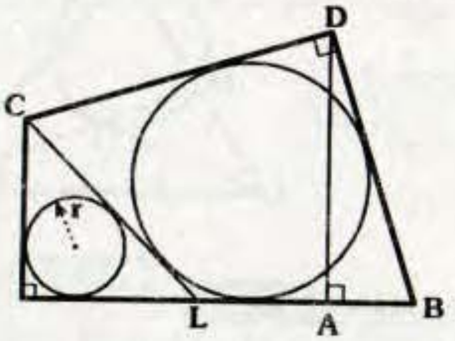
PROBLEMA Nº 123

Se tiene el ΔABC; I_1, I_2 e I_3 son sus excentros (I_1 es relativo a $\overline{AB}$), además I es el incentro de ABC, si $m\measuredangle I_3I_1I_2 = 50°$, calcule $m\measuredangle I_2I\,I_3$.

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

PROBLEMA Nº 124

Si $AD - AB = 6$, AL=4 y CD=DB, calcule r



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

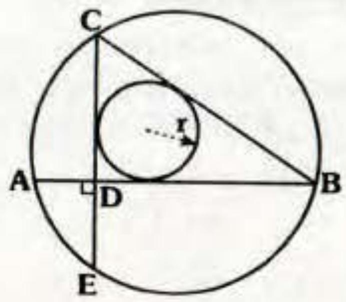
PROBLEMA Nº 125

Dado un triángulo rectángulo ABD, recto en B, se construye el triángulo rectángulo BCD, recto en C, si AB=4(BC), AD=5(BC)−7 y la suma de los inradios de ABD y BCD es 5, calcule CD.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 126

Si $m\widehat{CA} = 2(m\widehat{AE})$, y $CD - AD = 16$. Calcule r.



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

PROBLEMA Nº 127

En un cuadrilátero ABCD circunscrito, AB=AC y $m\measuredangle ACD = 90°$, si BC=12. Calcule el inradio de ACD.

A) 3 B) 1 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 128

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, dicho trapecio es circunscrito, si $m\measuredangle ACD = 90°$ y los inradios de ABC y ACD son r_1 y r_2 respectivamente, calcule BC.

A) $2r_1 - r_2$ B) $\dfrac{r_1 + r_2}{2}$

C) $r_1 + 2r_2$ D) $3r_1 - 2r_2$

E) $r_1 + r_2$

PROBLEMA Nº 129

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica E en $\overline{BC}$, si CD=3, $m\measuredangle BAD = 2(m\measuredangle EDC)$ y ED toma su máximo valor entero, calcule AB. (Siendo ABED circunscrito de perímetro 26).

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

BLEMA Nº 130

lo un octógono circunscrito CDEFGH, si AB=2(BC)=DE=2 , =1,5 , EF=2,5 , GH=3 y AH=4 , :ule FG.

1 B) 1,5 C) 2
2,5 E) 3

OBLEMA Nº 131

un triángulo ABC, de incentro I y ectriz interior AD, se traza $\overline{IE}$ perpen- :ular a BC $\left(E \in \overline{BC}\right)$, calcule :

$$\frac{m\measuredangle BID}{m\measuredangle EIC}$$

0,5 B) 1 C) 1,5
2 E) 2,5

ROBLEMA Nº 132

n un cuadrilátero ABCD, $\measuredangle BAD = 105°$, $m\measuredangle ABC = 130°$, $\measuredangle BAC = 30°$ y $m\measuredangle ACD = 80°$, calcule medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

) 60° B) 65° C) 75°
) 85° E) 90°

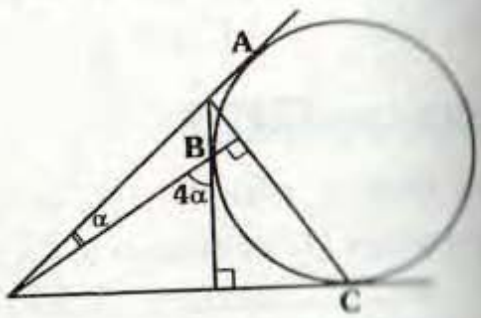
ROBLEMA Nº 133

e tiene el triángulo rectángulo ABC, rec- o en B, en el cual BQ es mediana, traza- nos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{BQ}$, $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overline{CN} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (M N∈ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$), si MN=24, calcule la distan- :ia del ortocentro de ABC a $\overline{AC}$.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

PROBLEMA Nº 134

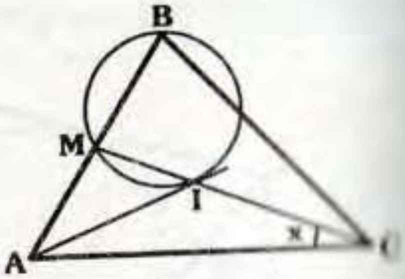
A, B y C son puntos de tangencia, cal cule α .



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 16°
E) 18°

PROBLEMA Nº 135

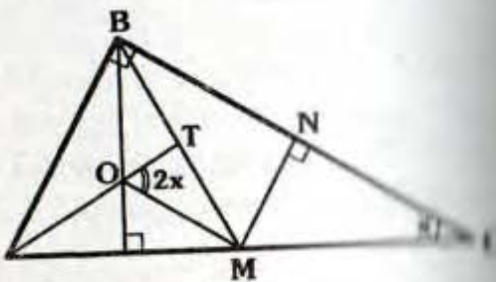
I es punto de tangencia e incentro de ABC, si MB=20 y el inradio de ABC mide 15, calcule x.



A) 30°
B) 37°
C) 37°/2
D) 15°
E) 14°

PROBLEMA Nº 136

Si : $\overline{OM} // \overline{BC}$ y MT=MN, calcule x



A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 15°
E) 14°

PROBLEMA Nº 137

En un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, la prolongación de BO corta a $\overline{AC}$ en P, si $m\measuredangle ABP = 30°$ y $m\measuredangle PBC = 20°$, calcule $m\measuredangle BPC$.

A) 90° B) 25° C) 80°

D) 100° E) 40°

PROBLEMA Nº 138

Se tiene un triángulo isósceles ABC (AB=BC) cuyo excentro relativo a $\overline{BC}$ es E, en el ΔBEC se traza la altura EH, si BH=2, calcule AC.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 139

Se tiene un triángulo equilátero ABC, inscrito en una circunferencia de centro O, se traza una cuerda $\overline{CQ}$, tal que $\overline{CQ} \perp \overline{AC}$, si el circunradio de BQO mide 4, calcule BC.

A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{3}$

D) 13 E) 24

PROBLEMA Nº 140

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q respectivamente, de modo que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia inscrita a dicho triángulo, si los perímetros de las regiones triangulares ABC y PBQ son 24 y 12, calcule AC.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 141

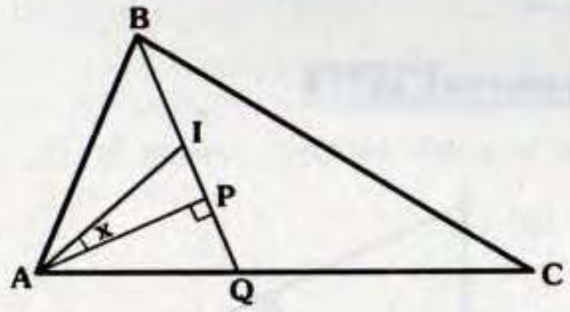
En un paralelogramo ABCD en $\overline{CD}$ se ubica el punto M tal que CM=MD=3, en $\overline{BM}$ se ubica N de modo que BN=2(MN) y $m\measuredangle NDA = m\measuredangle BCD$. Calcule DN.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 142

I es incentro de ABC, si AB=BQ y QC=2(AP), calcule x.



A) 10° B) 11° C) 12°

D) 14° E) 15°

PROBLEMA Nº 143

Dado un triángulo acutángulo ABC, calcule la distancia del circuncentro de ABC a la altura BF, siendo su circunradio 12 y $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA = 30°$.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

OBLEMA Nº 144

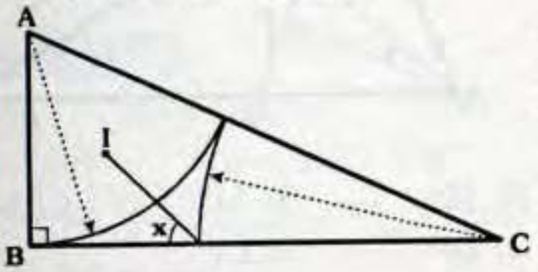
tiene el ΔABC de circuncentro O, se
ca el punto P exterior y relativo a $\overline{BC}$.
PC es igual al circunradio de ABC y
$BPC = m\measuredangle BAC$, calcule $m\measuredangle PBC$.

30° B) 37° C) 45°
53° E) 60°

OBLEMA Nº 145

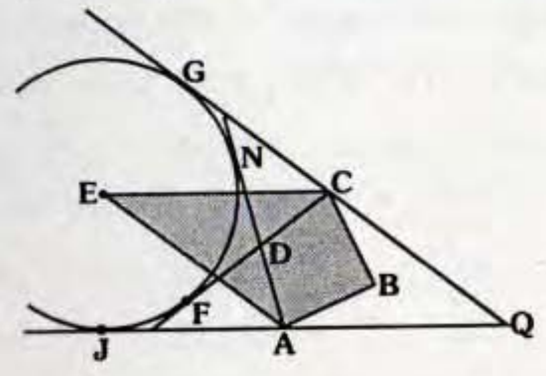
incentro de ABC, calcule x.

30°
37°
45°
53°
60°



OBLEMA Nº 146

el gráico J, F, N y G son puntos de
gencia, indique que tipo de cuadrilá-
o es ABCE, si ABCD y AECQ son
ralelogramos.



A) Circunscriptible B) Exinscriptible
C) Trapecio D) Inscriptible
E) Bicéntrico

PROBLEMA Nº 147

Se tiene el cuadrilátero ABCD, se prolonga $\overline{AB}$ hasta E, si $m\measuredangle ADB = 54°$, $m\measuredangle BDC = 30°$, $m\measuredangle DBC = 78°$ y $m\measuredangle EBC = 48°$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 10° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA Nº 148

O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, si $\overline{AO} // \overline{O_1Q}$, calcule AO/r.

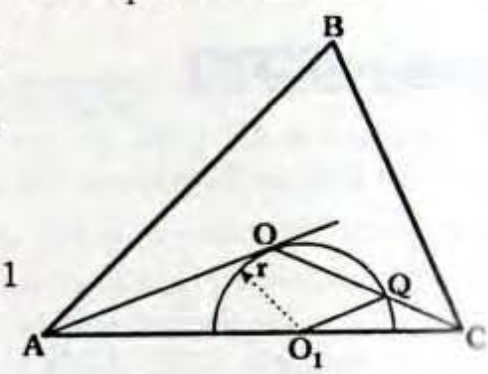
A) $\sqrt{2}+1$

B) $\sqrt{2}-1$

C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}-1$

E) $\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 149

Dado el triángulo acutángulo ABC, H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC, si AB=2 y $BH = BO = \sqrt{2}$, calcule $m\measuredangle HBO$.

A) 14° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 45°

PROBLEMA Nº 150

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, si $CD=2(AB)$, $BD=2\sqrt{3}$ y $m\measuredangle BCA=15°$, calcule la distancia del ortocentro de ABC al circuncentro de ABD.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$ E) 2

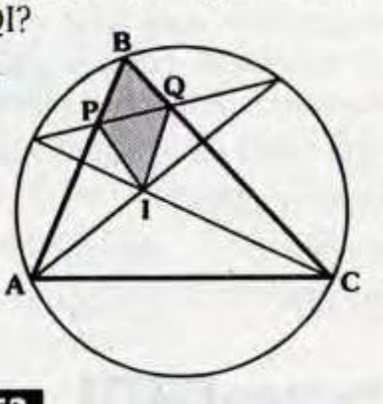
PROBLEMA Nº 151

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BD, I es el incentro de ABC, si $BI=7\sqrt{2}$ y $DI=5\sqrt{2}$, calcule AC.

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

PROBLEMA Nº 152

I es incentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es PBQI?



A) Rombo

B) Rectángulo

C) Inscriptible

D) Romboide

E) Cuadrado

PROBLEMA Nº 153

Se tiene el triángulo ABC de incentro I y circuncentro O, si K es el circuncentro de AIC, $m\measuredangle BCA=20°$ y $m\measuredangle BAC=60°$. Calcule $m\measuredangle KIO$.

A) 14° B) 16° C) 30°

D) 20° E) 50°

PROBLEMA Nº 154

Dado un ΔABC de circuncentro O, la recta de Euler de ABC corta a $\overline{AB}$ en L, luego se ubican M y N en dicha recta, si $m\measuredangle BLO=60°$, $m\measuredangle MAC=m\measuredangle NCA=90°$, $AM=2$ y $NC=4$, calcule BO.

A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 155

Por el vértice C de un ΔABC se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ paralela a la mediana BN, la prolongación de la mediana AM corta a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en F, si G es el baricentro de ABC y la suma de las longitudes de las medianas del ΔABC es ℓ, calcule el perímetro de la región limitada por el triángulo mediano del ΔGCF.

A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$

D) ℓ E) $\frac{3\ell}{2}$

PROBLEMA Nº 156

Se tiene el pentágono ABCDE, si :

$$m\measuredangle BAC=m\measuredangle CAD \quad y$$
$$m\measuredangle DEC=m\measuredangle CEB \ ,$$
$$m\measuredangle ABE+m\measuredangle ADE=180°$$

y $AE=30$, calcule la distancia entre el baricentro y circuncentro de ACE.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 157

En los lados AB y CD de un cuadrilátero ABCD se ubican los puntos P y Q, si PBCQ y APQD son circunscriptibles, calcule:

$$\frac{PQ}{CD+AB-BC-AD}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{2}$ E) 1

PROBLEMA Nº 158

Si $AC=4$ y $BC=4\sqrt{2}$, calcule r_1+r_2 :

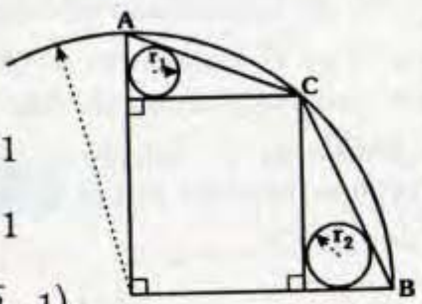
A) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{10}-1$

C) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{10}-\sqrt{2}-1$

E) $2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}-1\right)$



PROBLEMA Nº 159

Dado un triángulo ABC cuyo ortocentro es H, las prolongaciones de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, cortan a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en M, N y L, respectivamente. Si el perímetro de la región hexagonal ALBMCN es 18, calcule la suma de los circunradios de los triángulos LHN, NHM y LHM.

A) 9 B) 12 C) 14

D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 160

Si $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$, $m\widehat{NB}=m\widehat{NC}$, $m\widehat{PQ}=90^\circ$ y las distancias de M y N a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ son 5 y 12 respectivamente, calcule el inradio de ABC.

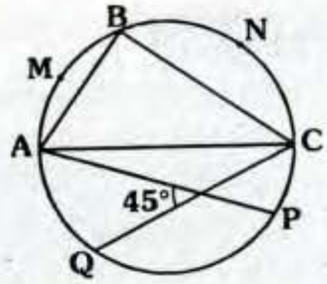
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 161

En una circunferencia se inscribe un triángulo ABC, $m\measuredangle ABC=90^\circ$, se traza la altura BH, en el arco BC se ubica el punto Q, tal que sea el excentro de AHB, si $\overline{AQ}\cap\overline{BH}=\{P\}$. ¿Qué punto notable es P de ABC?

A) Incentro B) Baricentro

C) Circuncentro D) Punto de Miquel

E) Ortocentro

PROBLEMA Nº 162

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle ACB=18^\circ$, la mediatriz del segmento que une el ortocentro y el circuncentro corta a $\overline{AC}$ en D, luego la bisectriz del ángulo BAC corta en E a $\overline{BD}$, si O es el punto medio de $\overline{AC}$, calcule $m\measuredangle DEO$.

A) 36° B) 38° C) 54°

D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 163

En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura BM, calcule la distancia del circuncentro O de dicho triángulo a $\overline{AC}$, si $AM=2$, $m\measuredangle MBO=31^\circ$ y $m\measuredangle OBC=14^\circ$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 164

Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, gira $60°$ alrededor de A, siendo su posición final $AB'C'$, si $BC=3\sqrt{10}$ y $m\measuredangle BAC=37°$, calcule la distancia entre los incentros del triángulo en su posición inicial y final.

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 10

D) $\sqrt{18}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 165

Si T es punto de tangencia, G es el baricentro de PQT y $4(BP)=3(PG)$, Calcule x.

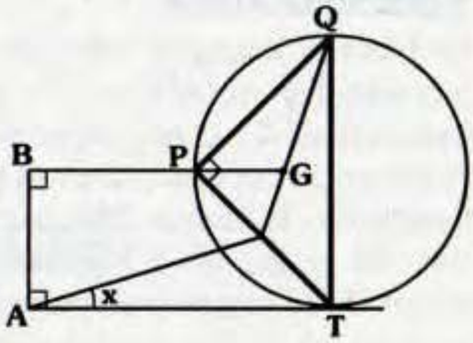
A) $14°$

B) $15°$

C) $37°/2$

D) $53°/2$

E) $30°$



PROBLEMA Nº 166

Dado el cuadrilátero convexo ABCD, se traza $\overline{BH}\perp\overline{CD}$ $\left(H\in\overleftrightarrow{CD}\right)$, si A es el circuncentro de BCD, $AB=CD$ y $m\measuredangle HBC=m\measuredangle BAC$, calcule la medida del ángulo entre sus diagonales.

A) $80°$ B) $82°$ C) $84°$

D) $86°$ E) $90°$

PROBLEMA Nº 167

E y T son puntos de tangencia, E es el circuncentro de ABC y EDCF es un cuadrado, calcule x.

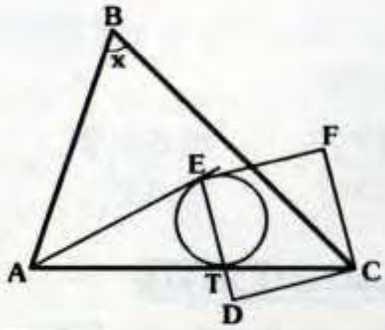
A) $90°$

B) $45°$

C) $53°$

D) $75°$

E) $60°$



PROBLEMA Nº 168

En el gráfico $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son rectas de Simson de B y C respecto a los triángulos ACD y ABD respectivamente. Si EF= 6 y ST=5. Calcule $m\overset{\frown}{BC}$.

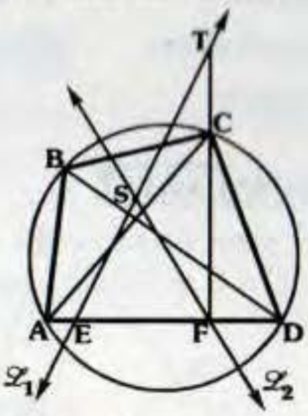
A) $60°$

B) $74°$

C) $106°$

D) $53°$

E) $78°$



PROBLEMA Nº 169

Del gráfico, I es incentro y E es excentro de ABC, si $DP+DQ=6$, calcule el exradio del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$.

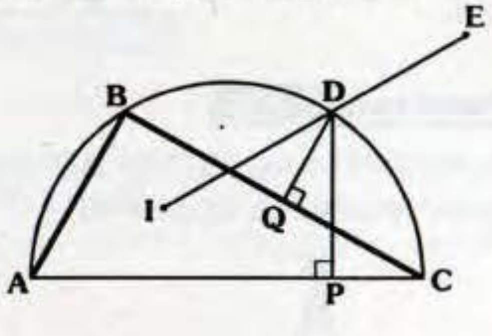
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7



PROBLEMA Nº 170

Se tiene el triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se trazan las alturas CH y AQ. Si

$\cap\overline{OB}=\{F\}$ y $HF=2(FO)$, calcule FHO.

A) 37°/2 B) 53°/2 C) 30°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº 171

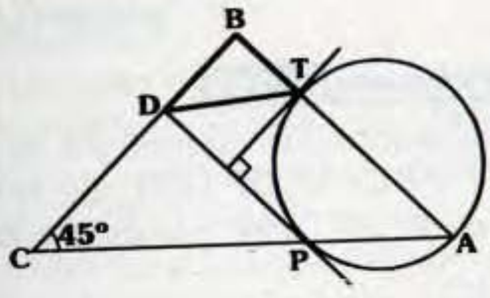
do un cuadrante AOB, de centro O, inscribe una circunferencia tangente a $\overline{O}$, $\overline{OB}$ y el arco AB en P, Q y T respectivamente. ¿Qué punto notable es B ATQ?

A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Ortocentro
E) Excentro

PROBLEMA Nº 172

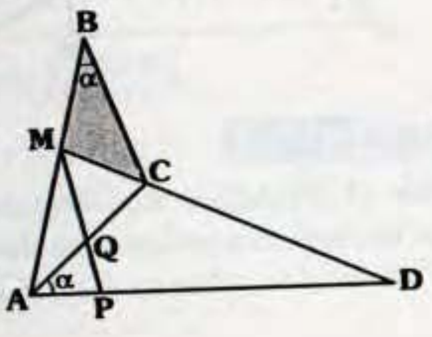
y P son puntos de tangencia, si $T-DC=1$ y $TD=5$, calcule el inradio e TBD.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 3,5
E) 4



PROBLEMA Nº 173

Si $m\measuredangle MAD=m\measuredangle MCA$ y AQ=AP. ¿Qué punto notable es Q de MBC?

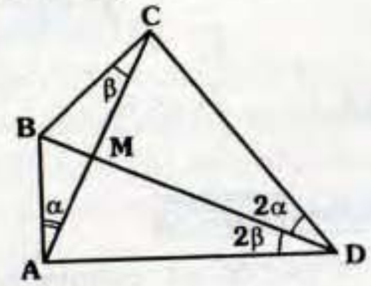


A) Ortocentro B) Circuncentro
C) Excentro D) Punto de Nagel
E) Punto de Steiner

PROBLEMA Nº 174

Si $AM=MC=5$ y $AD+CD=26$, calcule el inradio del triángulo AMD.

A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 3



PROBLEMA Nº 175

Se tiene el triángulo ABC, de inradio 3 incentro I y $m\measuredangle ABC=60°$, las prolongaciones de CI y AI intersectan a la circunferencia circunscrita en M y N respectivamente, la cuerda MN corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en E y F, calcule el perímetro de la región triangular EBF.

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 4
D) 6 E) $6\sqrt{3}$

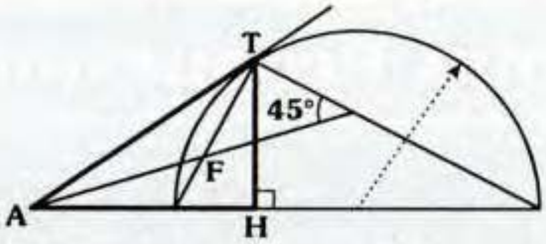
PROBLEMA Nº 176

Sea H e I el ortocentro e incentro respectivamente de un ΔABC, tal que $I\in\overline{BH}$, si $m\measuredangle BCA+m\measuredangle HCI=90°$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 70° B) 72° C) 74°
D) 76° E) 90°

PROBLEMA Nº 177

T es punto de tangencia. ¿Qué punto notable es F de ATH?



A) Incentro B) Baricentro
C) Punto de Brocard D) Ortocentro
E) Circuncentro

PROBLEMA Nº 178

En un triángulo ABC de ortocentro H, se trazan las alturas BQ y AM, luego la prolongación de $\overline{AM}$ corta a la circunferencia circunscrita al ΔABC en P, si $m\measuredangle ACB = 60°$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{QM}$ y $\overline{CP}$.

A) 14° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 45°

PROBLEMA Nº 179

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si M es punto medio de $\overline{BC}$, AB=5 y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle AMB)$, calcule la distancia entre su baricentro y circuncentro de ABC.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

PROBLEMA Nº 180

Se tiene un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, $\overline{BD}$ corta a $\overline{CA}$ en P, tal que $AP = 2(PC)$. ¿Qué tipo de triángulo es ACD?.

A) Acutángulo B) Obtusángulo
C) Escaleno D) Isósceles
E) Equilátero

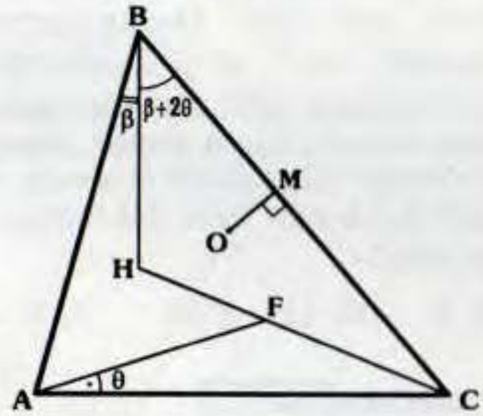
PROBLEMA Nº 181

Dado un ΔABC, se traza el cuadrado BNPQ, tal que $P \in \overline{BC}$ y N es incentro de ABC, $\overleftrightarrow{AN} \cap \overleftrightarrow{BQ} = \{S\}$, si SQ=m y NS=n, calcule $CN - CP$.

A) $n - m\sqrt{2}$ B) $2n - m$
C) $n + m\sqrt{2}$ D) $n\sqrt{2} - m$
E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n-m)$

PROBLEMA Nº 182

H y O son ortocentro y circuncentro de ABC, si OM=3, calcule HF.



A) 3
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{3}$
D) 6
E) 9

PROBLEMA Nº 183

Dado un triángulo ABC, con centro en $\overline{AC}$ se traza la circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, dicha circunferencia contiene al circuncentro y ortocentro, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

OBLEMA Nº 184

un triángulo ABC, se ubica en su
ıión interior el punto P, tal que
=PC, m∡ABP = 80°, m∡BAP = 30°
m∡BPC = 140°, calcule m∡ACP.

20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

OBLEMA Nº 185

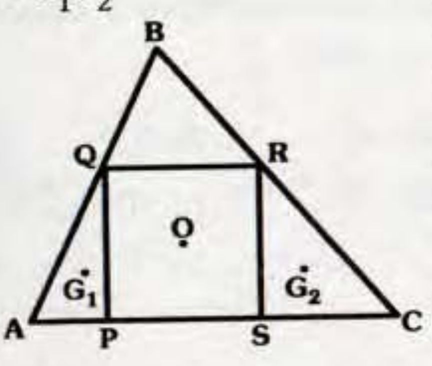
do un triángulo acutángulo ABC ins-
ta en una circunferencia $\mathscr{C}$,
∡ABC = 45°, se prolongan las alturas
l triángulo ABC hasta un punto de $\mathscr{C}$
terminando una región triangular de
rímetro 52, calcule el menor valor en-
o del mayor lado del triángulo órtico
ABC.

7 B) 11 C) 6 D) 8 E) 9

OBLEMA Nº 186

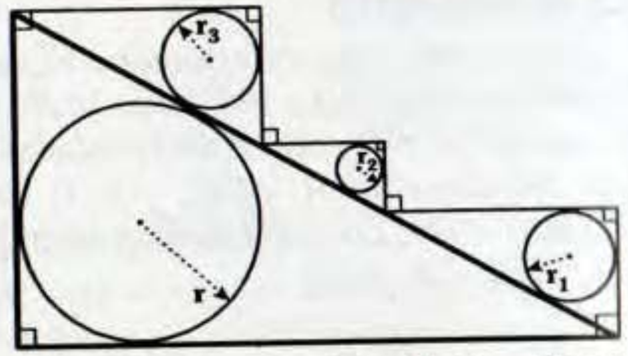
O es centro y baricentro del cuadrado
ỌRS y del triángulo ABC respectivamen-
, G_1 y G_2 son baricentros de AQP y
RC, calcule : $\frac{RS}{G_1G_2}$

) 2/3
) 3/4
) 3/5
) 5/3
) 3/2



PROBLEMA Nº 187

Si $r_1 + r_2 + r_3 = 7$, calcule r.



A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 7 E) 14

PROBLEMA Nº 188

Si ED = 12 y AE + AB + BC + CD = 24, calcule r.

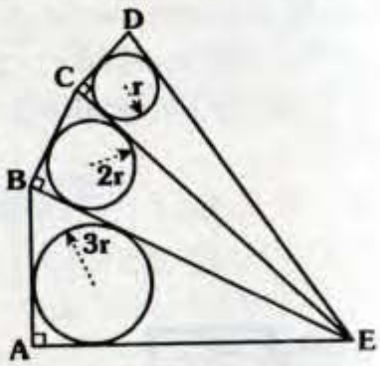
A) 1/2

B) 1

C) 3/2

D) 2

E) 5/2



PROBLEMA Nº 189

Dado un triángulo isósceles ABC, AB=BC se traza la ceviana interior AM, tal que MC = 2(MB), en $\overline{AM}$ se ubica el punto L, tal que m∡BLC = 90°, si Q es punto medio de $\overline{AC}$, calcule m∡ALQ.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 190

Si H es punto de tangencia y ortocentro de ABC, calcule x.

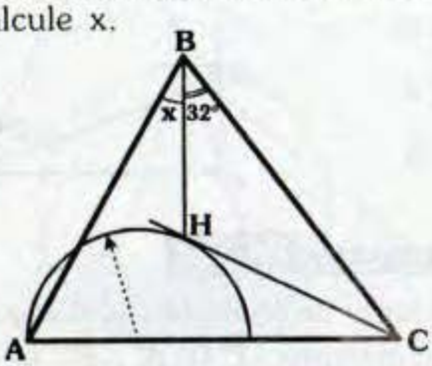
A) 26°

B) 27°

C) 28°

D) 29°

E) 30°



PROBLEMA Nº 191

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que AB=DC, si :

$$m\measuredangle ABD = \frac{m\measuredangle BAD}{2} = \frac{m\measuredangle BCD}{4}$$

Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 5° B) 7° C) 9° D) 8° E) 10°

PROBLEMA Nº 192

Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AB}$, si la ceviana interior BN pasa por el circuncentro de ABC y $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ANB$, calcule $m\measuredangle NBC$.

A) 22°30' B) 10°30' C) 15°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 193

Si E, B y F son puntos de tangencia y EF=15, calcule r.

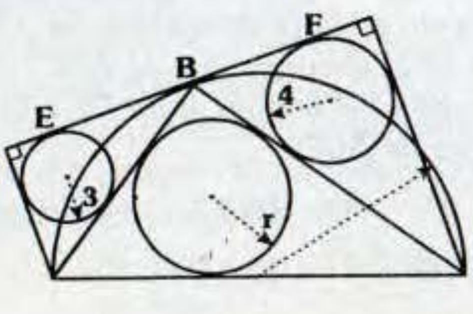
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



PROBLEMA Nº 194

Del gráfico, AB=6 y BM=MC, calcule R.

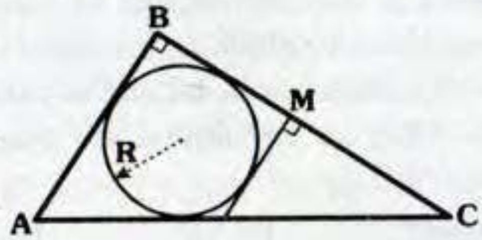
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 195

En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia de centro O, donde P es el punto de tangencia con $\overline{BC}$, si $m\measuredangle ABC = 90°$, $AB + CD = 21$ y $AD + OC = 17$, calcule el inradio de OPC.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 196

I es incentro de ABC, AB=13, BC=15, AC=14 y BI=IP, calcule x.

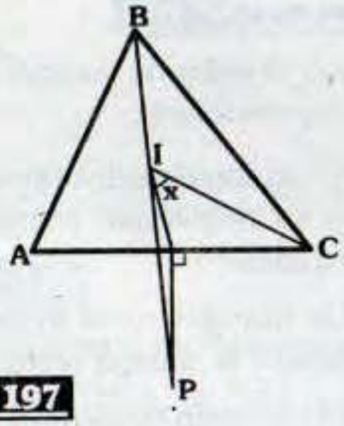
A) 42°

B) 44°

C) 45°

D) 49°30'

E) 46



PROBLEMA Nº 197

Si PB=2(BQ), calcule x.

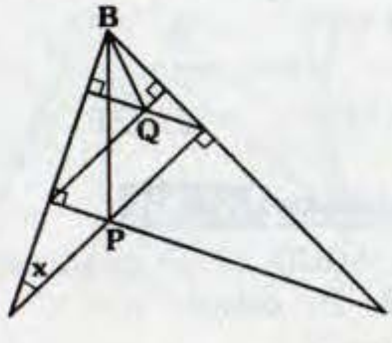
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) $\frac{53°}{2}$

E) $\frac{37°}{2}$



OBLEMA Nº 198

un triángulo ABC, se trazan la altura y la bisectriz interior AL, S es la proción ortogonal de L sobre la paralela $\overline{C}$ traza por B, tal que el circuncentro HBS se encuentra en $\overline{AL}$, calcule ∢ABC.

60° B) 75° C) 90°
120° E) 135°

OBLEMA Nº 199

un triángulo ABC de incentro I, sea punto medio de $\overline{AC}$, las rectas AI y cortan en P y Q a $\overline{BM}$ respectivamen- si BP=6, QM=4 y 2(BI)=3(ID) C>AB y $\overline{BD}$ es bisectriz interior), cal- PQ.

5 B) 5 C) 4
3 E) 2

OBLEMA Nº 200

ique el valor de verdad de las siguien- proposiciones :

Un triángulo exincentral es equilátero si su respectivo triángulo órtico es equilátero.

Un triángulo y su triángulo mediano tienen la misma recta de Euler.

. El triángulo tangencial puede ser rectángulo.

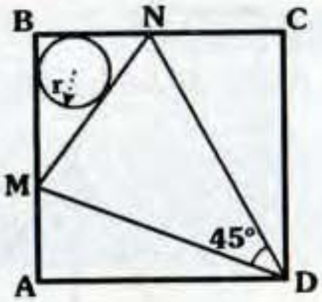
VVV B) VFV C) FFV

VVF E) FFF

OBLEMA Nº 201

ABCD es un cuadrado, MN=12 y =16, calcule r.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA Nº 202

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, si A', B' y C' son los circuncentros de COB, AOC y AOB, ¿Qué punto notable es O del triángulo A'B'C'?

A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Excentro

PROBLEMA Nº 203

Se tiene un trapecio isósceles ABCD $(\overline{AB} // \overline{CD})$, si BD=10, calcule la distancia entre los ortocentros de ABC y ADC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 204

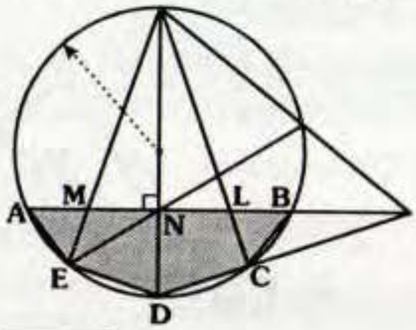
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se diferencian en 20°, la mediatriz de $\overline{AC}$ corta en P al arco BC de la circunferencia circunscrita, luego se traza $\overline{PE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (E esta en la prolongación de $\overline{AB}$), siendo O el circuncentro de ABC, calcule la medida del ángulo entre OE y la recta de euler de ABC.

A) 3° B) 5° C) 7°
D) 10° E) 15°

PROBLEMA Nº 205

Si MN=3, LB=2, CD=5 y AE=1, calcule el perímetro de la región pentagonal ABCDE.

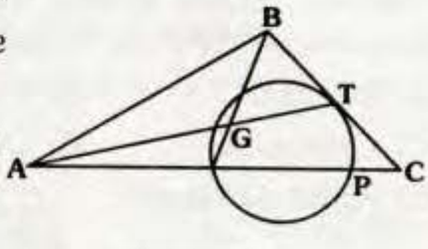
A) 10
B) 15
C) 22
D) 25
E) 30



PROBLEMA Nº 206

T es punto de tangencia y G es baricentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABTP?

A) Inscriptible
B) Trapezoide
C) Rombo
D) Bicentrico
E) Trapecio



PROBLEMA Nº 207

Exteriormente al triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros ABE y BCH, si M, N y P son los baricentros de ABE, ABC y BHC respectivamente, calcule m∡MNP.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 208

Calcule el perímetro de la región trapecial inscrita en una circunferencia, sabiendo que dicho trapecio esta circunscrito a otra circunferencia de radio R, además uno de sus ángulos interiores mide 30°.

A) 10R B) 12R C) 14R
D) 16R E) 18R

PROBLEMA Nº 209

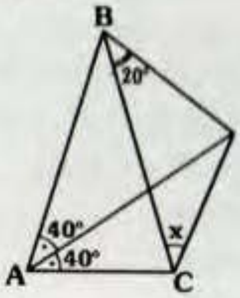
En un triángulo ABC, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que AC, BD y el circunradio de ABC son iguales y m∡ADC = 30°, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

A) 60° B) 18° C) 24° D) 30° E) 37°

PROBLEMA Nº 210

Si AB=BC, calcule x.

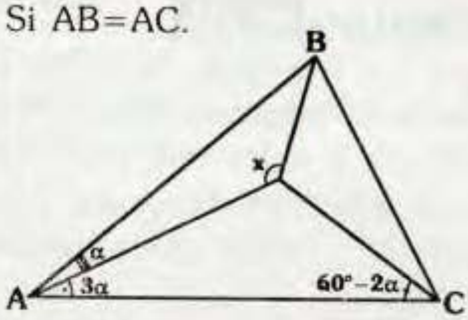
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 45°



PROBLEMA Nº 211

Calcule x. Si AB=AC.

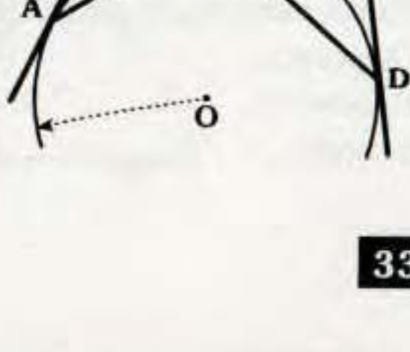
A) 90°
B) 150°
C) 110°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 212

Si A, T y D son puntos de tangencia, O_1 y O_2 son circuncentros de ABT y TCD, calcule la medida del ángulo entre $\overline{O_1O_2}$ y $\overline{OT}$.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 120°
E) 135°



ROBLEMA Nº 213

e tiene el cuadrilátero ABCD, las iagonales se cortan en E, si AB=BE, $\measuredangle EDC = m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle BEA)$, ¿qué unto notable es A del triángulo BCD?

) Excentro B) Ortocentro
) Punto de Steiner D) Circuncentro
) Punto de Miquel

ROBLEMA Nº 214

ado un triángulo rectángulo ABC, rec- en B, exteriormente se construyen los iángulos equiláteros ARB y BSC, si $\overline{RC}$ $\overline{SA}$ se cortan en L, indique que punto otable es B de RSL.

) Baricentro B) Incentro
) Ortocentro D) ircuncentro
) Punto de Brocard

ROBLEMA Nº 215

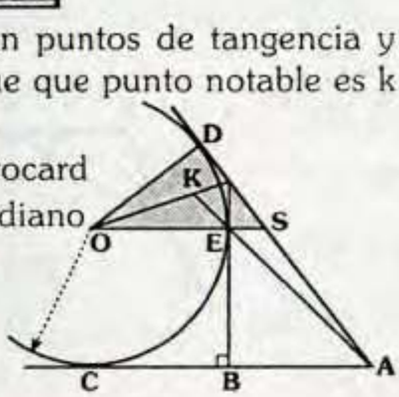
n un triángulo ABC se trazan las evianas interiores AM y CN que se cor- n en T, si los triángulos AMB y BNC on isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y T=AC. ¿Qué punto notable es T de BC?

) Incentro B) Baricentro
) Ortocentro D) Circuncentro
) Cevacentro

ROBLEMA Nº 216

D, E y C son puntos de tangencia y B=BC, indique que punto notable es k SDO.

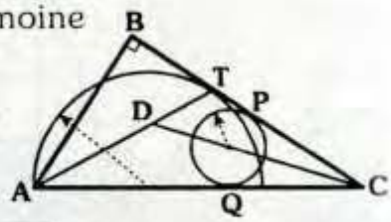
) Punto de Brocard
) Punto exmediano
) Ortocentro
) Baricentro
) Incentro



PROBLEMA Nº 217

T, P y Q son puntos de tangencia. ¿Qué punto notable es D del triángulo ABC?

A) Baricentro
B) Punto de Lemoine
C) Ortocentro
D) Circuncentro
E) Incentro



PROBLEMA Nº 218

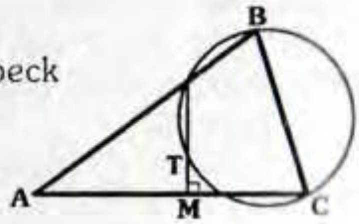
La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AB, BC y AC en M, N y P respectivamente, las bisectrices interiores de los ángulos BAC y ACB cortan a $\overline{MN}$ en R y Q respectivamente. ¿Qué punto notable es el incentro de ABC del triángulo PQR?

A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Punto de Nagel

PROBLEMA Nº 219

Si AM=MC, ¿Qué punto notable es T de ABC?

A) Baricentro
B) Punto de Jerabeck
C) Ortocentro
D) Incentro
E) Circuncentro



PROBLEMA Nº 220

En un cuadrilátero ABCD, tal que AB=BC, $m\measuredangle BDC = 2(m\measuredangle BAC)$ y

$$m\measuredangle BDA = 2(m\measuredangle BCA)$$

¿Qué punto notable es D de ABC?

A) Cevacentro B) Circuncentro
C) Excentro D) Ortocentro
E) Punto de Brocard

Problemas Propuestos Olímpicos

PROBLEMA Nº 1

XX Olimpiada Iberoaméricana
Cartagena de Indias, 2005

Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y D un punto en el menor arco BC de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Sean E y F punto de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tales que $m\measuredangle BDE = m\measuredangle OAC$ y

$m\measuredangle CDF = m\measuredangle OAB$.

Demuestre que EF pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

PROBLEMA Nº 2 **41° IMO 2 000**

P es un punto en el interior del triángulo ABC. Las perpendiculares desde P sobre los lados BC, CA y AB intersecan a dichos lados en D, E y F respectivamente. Demostrar que P es el circuncentro si uno de los triángulos AEF, BDF, CDE tiene perímetro no mas que DEF.

PROBLEMA Nº 3

Prueba de selección para IMO 2000 Brasil

Sean CC', BB' alturas del triángulo ABC, suponga $AB \neq AC$. Sea M punto medio de $\overline{BC}$, H ortocentro del triángulo ABC y D la intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. Demostrar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$.

PROBLEMA Nº 4

38° Olimpiada Internacional - Mar de Plata 1 997

Se da un ángulo de vértice M y un punto B, una circunferencia arbitraria que pasa por M y B interseca a los lados del ángulo en los puntos C y D (distintos de M). Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos MCD.

PROBLEMA Nº 5

Dado un triángulo no degenerado ABC, O es su circuncentro, H su ortocentro y R su circunradio.

Demostrar : $OH<3R$

PROBLEMA Nº 6

17° Olimpiada Brasil - 1 995

Sea ABCD un cuadrilátero convexo al mismo tiempo inscriptible y circunscriptible, sean I su incentro, O su circuncentro y S el punto de intersección de las diagonales. Demostrar que si dos puntos I, O y S coinciden entonces ABCD es un cuadrado.

PROBLEMA Nº 7

2° Olimpiada de matemática de Centroamérica y el Caribe - El Salvador 2 000

Sea ABCDE un pentágono convexo sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE respectivamente. Demostrar que PQRS es un paralelogramo y que el área de su región es $\frac{2}{9}$ del área de ABCD.

PROBLEMA Nº 8

16° Olimpiada de Matemática de los países balcanicos - Macedonia - 1 999

Dado un triángulo acutángulo, sea D el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, que no contiene A, sean E el simétrico de D con respecto a las rectas BC y F simétrico de D con respecto al circuncentro O. Finalmente sea K el punto medio del segmento EA. Probar que la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo ABC, también pasa por K y a su vez demostrar que la recta que pasa por K y el punto medio del segmento BC es perpendicular a la recta AF.

PROBLEMA Nº 9

12° Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas - México 1 997

En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersecan en O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N respectivamente. Sean P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP. Demostrar que AHSO es un paralelogramo.

PROBLEMA Nº 10 **39° IMO 1 998**

Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia inscrita de ABC toca a los lados BC, CA y AB en K, L y M respectivamente. La línea que pasa por B y que es paralela a MK interseca a las líneas LM y LK en R y S respectivamente pruebe que el ángulo RIS es agudo.

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. B	9. C	17. D	25. E	33. A	41. D	49. E
2. C	10. A	18. C	26. B	34. A	42. C	50. E
3. D	11. D	19. A	27. A	35. C	43. A	
4. D	12. B	20. B	28. D	36. A	44. E	
5. A	13. C	21. C	29. E	37. D	45. B	
6. C	14. A	22. D	30. A	38. B	46. D	
7. D	15. E	23. C	31. C	39. E	47. D	
8. B	16. B	24. A	32. E	40. A	48. B	

CEPRE-UNI

51. C	58. E	65 C	72. C	79. E	86. D	93. C
52. D	59. B	66. E	73. C	80. D	87. E	
53. C	60. C	67. D	74. E	81. C	88. D	
54. C	61. D	68. C	75. B	82. B	89. C	
55. B	62. B	69. B	76. A	83. A	90. A	
56. C	63. C	70. A	77. D	84. D	91. E	
57. E	64. C	71. A	78. C	85. B	92. D	

SEMESTRAL

94. A	102. A	110. E	118. D	126. D	134. C	142. E
95. D	103. A	111. C	119. B	127. D	135. C	143. D
96. B	104. C	112. A	120. C	128. E	136. A	
97. C	105. D	113. A	121. A	129. B	137. D	
98. C	106. A	114. B	122. E	130. C	138. B	
99. E	107. B	115. A	123. D	131. B	139. A	
100. A	108. C	116. C	124. B	132. D	140. B	
101.C	109. C	117. E	125. E	133. C	141. C	

SEMESTRAL INTENSIVO

144. A	150. E	156. C	162. C	168. B	174. D	180. D
145. C	151. B	157. D	163. B	169. D	175. E	181. E
146. B	152. D	158. E	164. C	170. B	176. B	182. D
147. E	153. C	159. A	165. D	171. E	177. A	183. C
148. A	154. E	160. C	166. A	172. A	178. D	
149. D	155. B	161. A	167. E	173. C	179. E	

REPASO

184. A	190. A	196. D	202. A	208. D	214. B	220. B
185. B	191. E	197. C	203. E	209. A	215. B	
186. C	192. A	198. C	204. D	210. C	216. E	
187. D	193. B	199. E	205. C	211. B	217. E	
188. B	194. A	200. D	206. A	212. C	218. A	
189. C	195. C	201. D	207. D	213. A	219. E	

Bibliografía

- Olivera Diaz. Carlos — Geometría Plana
- Pogorelov, A.V. (1974) — Geometría elemental. Editorial MIR Moscú
- Sharigin, 9 (1989) — Problemas de Geometría. Planimetría Editorial MIR. Moscú
- Puig Adam, Pedro (1961) — Curso de Geometría Métrica. Tomo I Nuevas gráficas S.A. Madrid
- Levi S. Shively (1961) — Introducción a la Geometría Moderna Compañía Editorial Continental S.A. México
- Golovina L.9. -Yaglom 9.M (1976) — Inducción en la Geometría. Editorial MIR Moscú
- Coxeter - H.S.M (1971) — Fundamentos de Geometría Editorial Limusa - Wiley - S.A.
- Francisco de la Borbolla y Monterrubio Luis de la Borbolla y Monterrubio (1966) — Geometría Analítica y Cálculo Editorial Limusa - Wiley - S.A.
- Vila, Antonio (1968) — 40 temas de Matemáticas para Preuniversitario. Editorial Vinces - Vives - Barcelona
- Miguel de Guzman (2002) — Experiencias del Descubrimiento en Geometría Universidad Complutense de Madrid
- Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la ciencia y la cultura (1996) — 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas. Fotojae, S.A. Madrid.
- Material Bibliográfico de Diferentes Instituciones Preuniversitarias
- Material Bibliográfico del Centro Pre de la Universidad Nacional de Ingeniería (Exámenes, Prácticas, Seminarios)

Páginas web consultadas:

- htttp:/www.campus-oei.org/oim/revistaoim/
- http:/xtec.cat/~qcastell/ttwesp/novedades.html
- www.arraki.es/~mcj/sangaku02.htm
- www.ctv.es/users/pacoga/bella/htm/
- http:/www.personal.vs.es/rbarroso/triánguloscabril/
- http:/www.oei.es/