

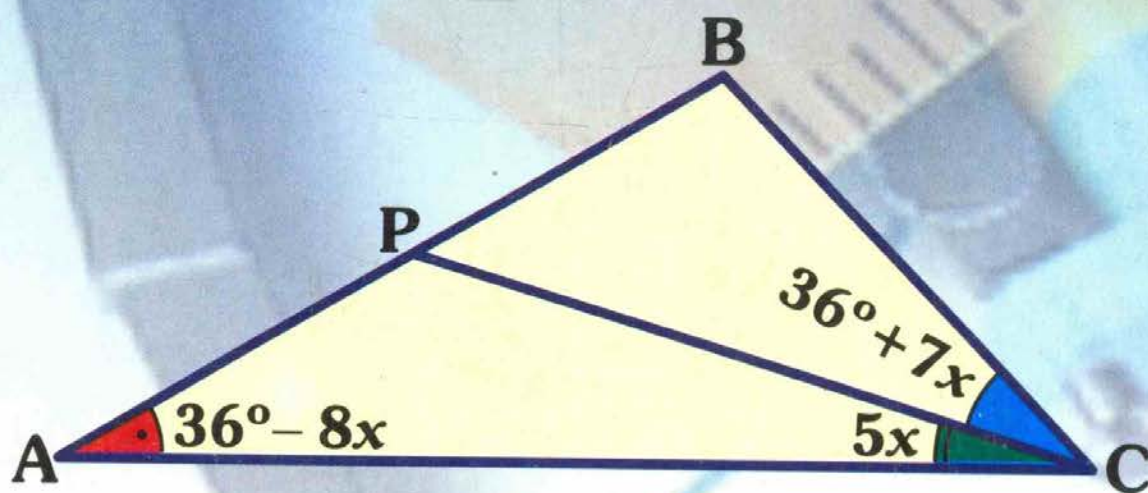
3 GEOMETRÍA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

**TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES**

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Dev Sáez Ayala

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico, $AP = BC$. Calcule x .

GEOMETRÍA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos

300 Problemas Propuestos

*Incluye Problemas
de Olimpiadas*

Prof.: JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Agradecimiento

- Al apoyo incondicional de toda mi familia.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano, por su apoyo y confianza.
- A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Richard Huamaní.
- A todos mis alumnos y exalumnos de las distintas instituciones educativas, en especial a los estudiantes: Milenka, Diana, Paola, Raúl, Edgard, Martín, Luis, Alexander, Omar Michel y Wilbert.
- Un agradecimiento especial al alumno Juan Carlos Mamani, por la creación del problema expuesta en la portada.

◆ CONGRUENCIA DE FIGURAS

Pág.

NOCIONES PRELIMINARES	9
- Segmentos congruentes	
- Axioma de la construcción del segmento	
- Ángulos congruentes	
- Axioma de la construcción del ángulo	
TRIÁNGULOS CONGRUENTES	10
- Definición	
CRITERIOS DE CONGRUENCIA	11
- Axioma (Lado-Ángulo-Lado)	
- Teorema del Triángulo Isósceles	
- Teorema (Ángulo - Lado - Ángulo)	
- Teorema (Lado - Lado - Lado)	
- Teorema (Lado - Lado - Ángulo Mayor)	
- Otros criterios de congruencia	
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA	17
- Teorema de la mediatriz	
- Teorema de la bisectriz	
- Teorema de la base media	
- Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa	
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES	26
- Triángulos rectángulos de 45° , 30° y 60°	
- Triángulos notables aproximados	
TEOREMAS RELACIONADOS CON LOS TRIÁNGULOS NOTABLES	34
TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA	36
TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES	41
TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO	44
TEOREMAS SOBRE CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS	46
ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS	51

Indice

CONGRUENCIA DE FIGURAS

	Pág.
ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN	56
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GENÉRICOS	62
CONSIDERACIONES FINALES	77
TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS	80
JUEGO DE ESCUADRAS	83
ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS	85
SOLUCIONARIO	141
ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	295
ANEXOS	346
CLAVES	351
BIBLIOGRAFÍA	353



CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

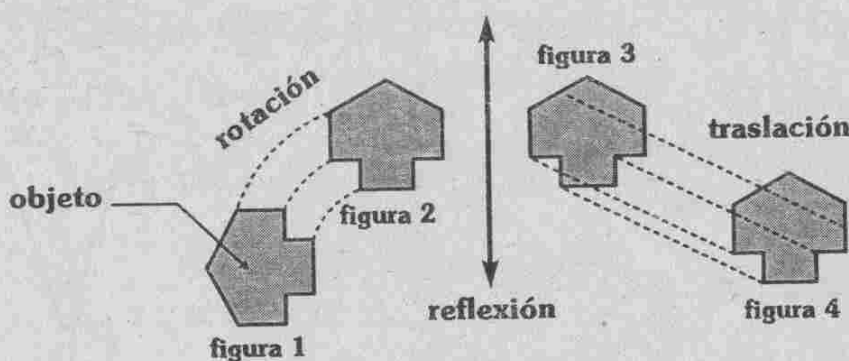
GEOMETRÍA
GEOMETRÍA

“El universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto”

Galileo Galilei

NOCIONES PRELIMINARES

El concepto de congruencia tiene su origen con el de igualdad. La realidad nos sugiere conceptos puros que en la propia realidad no existen. Así los conceptos de recta y plano, sugeridos por un rayo de luz o un estanque helado. Los “cambios” que nuestra intuición percibe de los objetos, es decir los “movimientos” nos dan la idea de la congruencia.



La figura 1 se mueve, realizando movimientos de rotación (figura 2), reflexión (figura 3) y traslación (figura 4), de tal forma que la figuras “coinciden”.

Intuitivamente hablando, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma⁽¹⁾ e igual tamaño⁽²⁾.

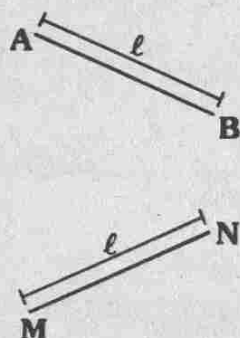
Dentro del desarrollo axiomático griego,

- ❖ las nociones primarias se construían con
- ❖ fundamento en el mundo exterior, es decir se pretendían que los axiomas res-
- ❖ pondieran a la realidad, este tipo de
- ❖ axiomática se ha denominado axiomática
- ❖ material.
- ❖ En oposición a la axiomática material,
- ❖ se estructura lo que se ha denominado
- ❖ un sistema axiomático formal.

(1) y (2) acerca de tamaño y forma, ver anexos.

SEGMENTOS CONGRUENTES

Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.



En el gráfico, los segmentos AB y MN son congruentes.

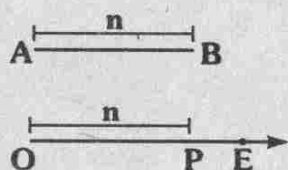
Notación:

$$\overline{AB} \cong \overline{MN}$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN SEGMENTO

Dado un segmento AB y el rayo OE, de origen O. Entonces existe en $\overrightarrow{OE}$ un único punto P tal que:

$$\overline{AB} \cong \overline{OP}$$

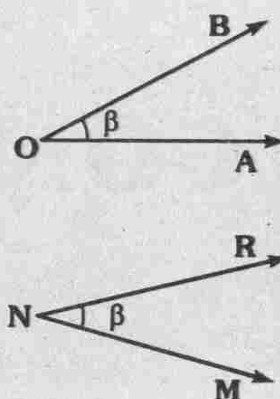


En términos prácticos este axioma afirma la posibilidad de construir o transportar un segmento, haciendo uso del compás.

ÁNGULOS CONGRUENTES

Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida.

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNR$$



En el gráfico, los ángulos AOB y MNR son congruentes.

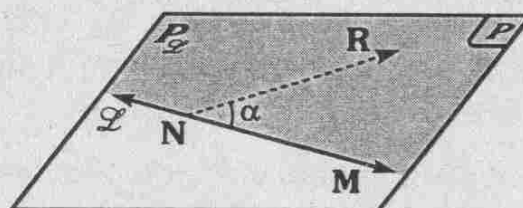
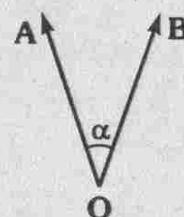
Notación:

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNR$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO

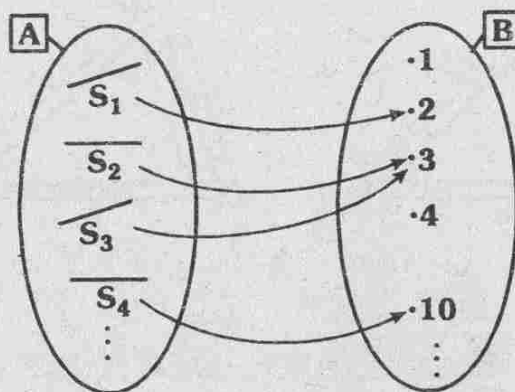
Sea el ángulo AOB y M un punto en la recta $\mathcal{L}$, situado a su vez en el plano P, sea $P_{\mathcal{L}}$ uno de los semiplanos y $\overrightarrow{NM}$ un rayo en $\mathcal{L}$, entonces existe un único rayo NR en $P_{\mathcal{L}}$, tal que:

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNR$$



Similar que el axioma anterior, este axioma nos da la posibilidad de la construir un ángulo.

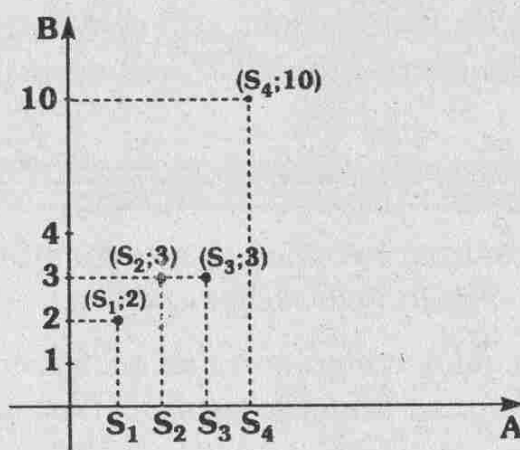
- Es cierto que dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida, lo mismo para ángulos, pero en el caso de triángulos, la definición no es tan sencilla, pues no hay una medida que "defina" un triángulo.
- El siguiente gráfico, nos "ilustra" fácilmente la congruencia de segmentos.



$A = \{\text{Conjunto de todos los segmentos}\}$

$B = \mathbb{R}^+$, en cm. (Por elegir alguna unidad).

Se puede hacer una correspondencia entre los segmentos y los números reales que representarán sus longitudes, tal que si dos segmentos tengan igual la segunda componente, dichos segmentos serán congruentes.



En este gráfico, se cumple:

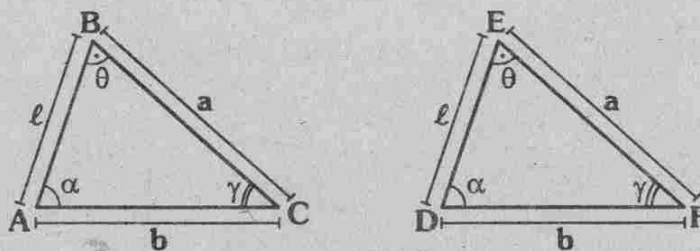
$$S_2 \equiv S_3$$

- Un gráfico similar se puede hacer para ángulos y sus medidas, pero como se ha mencionado no es posible usar algo análogo para triángulos.

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

DEFINICIÓN

Dos o más triángulos son congruentes, si tienen los lados de uno de ellos respectivamente de igual longitud a los de otro y los ángulos interiores opuestos a dichos lados de igual medida.



En el gráfico:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}; \overline{BC} \cong \overline{EF}; \overline{AC} \cong \overline{DF}; \angle BAC \cong \angle EDF; \angle ABC \cong \angle DEF \text{ y } \angle ACB \cong \angle DFE.$$

Notación:

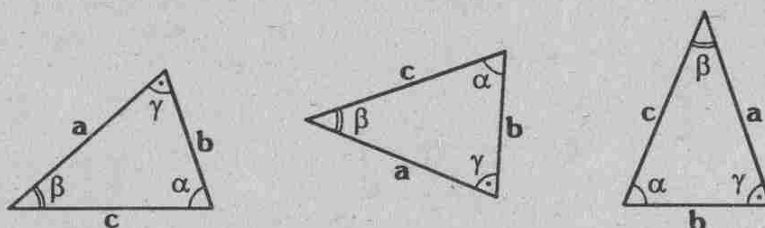
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

La definición anterior establece que dos triángulos son congruentes si tanto los lados como los ángulos se presentan en pares congruentes.

Notar del gráfico, la correspondencia entre vértices: A-D, B-E y C-F, así como de los ángulos, pero no todos los textos siguen esta convención, cuando se afirma que el $\triangle ABC$ está en correspondencia con el $\triangle DEF$ no respetan las reglas anteriores de correspondencia.

Nota

- Como regla práctica, cuando dos triángulos son congruentes diremos que a los "lados iguales se oponen ángulos iguales" y viceversa.
- En los ejercicios los triángulos congruentes se encontrarán en distintas posiciones, no perder de vista "lados y ángulos iguales". (Ver gráficos).



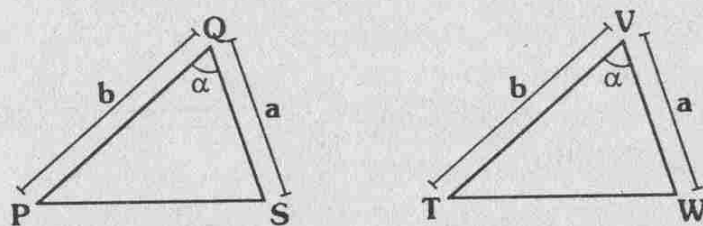
Observe que en todas las posiciones, el opuesto a " α " es " a " y así para cada lado y ángulo.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Los siguientes criterios, establecen condiciones mínimas para la congruencia de dos triángulos.

AXIOMA LADO - ÁNGULO - LADO (LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente de igual longitud y el ángulo determinado por ellos de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.



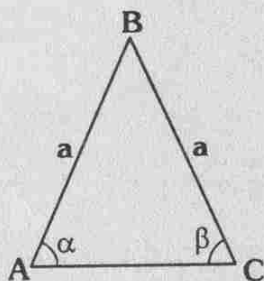
En el gráfico, $PQ=TV$; $QS=VW$ y $m\angle PQS = m\angle TVW$

 $\Rightarrow$

$$\Delta PQS \cong \Delta TVW$$

TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida.

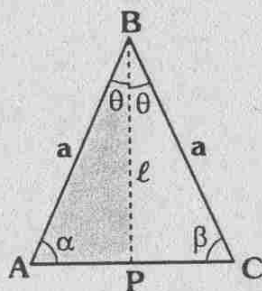


En el gráfico, si

$$AB = BC \Rightarrow \alpha = \beta$$

Demostración:

Este teorema fue enunciado en la publicación de triángulos (Fascículo N°2), pero carecíamos de argumentos para su demostración, ahora sí los tenemos:



Se traza la bisectriz interior BP, con ello tenemos:

$$\Delta ABP \cong \Delta CBP \text{ (LAL)}$$

Por lo expuesto (regla práctica), en ambos triángulos, el opuesto a $\angle B$, se tendrá:

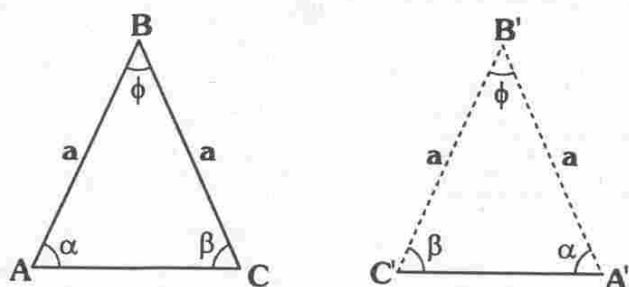
$$\alpha = \beta$$

Además, el opuesto a " θ ", se tiene:

$$AP = PC$$

Otra forma:

Aunque un poco desconcertado, cuando se ve por primera vez, es que no es común plantear la congruencia consigo mismo, lo cual no está prohibido.



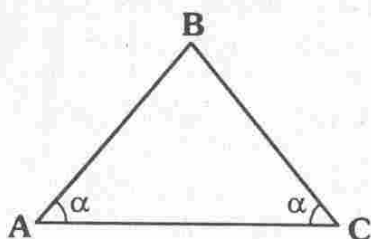
Para mayor facilidad, graficamos el triángulo CBA (aunque no es necesario). Sólo para observar, los dos triángulos.

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle C'B'A' \text{ por LAL} \Rightarrow \alpha = \beta$$



Observación

El recíproco también es cierto, es decir, si un triángulo tiene dos ángulos interiores de igual medida, entonces los lados opuestos tienen igual longitud.



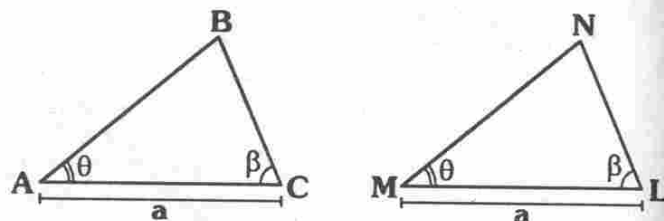
En el gráfico, si:

$$m\angle BAC = m\angle ACB$$

$$\Rightarrow AB = BC$$

TEOREMA ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA)

Si dos triángulos tienen un lado de igual longitud y los ángulos adyacentes a este lado respectivamente de igual medida, entonces dichos triángulos son congruentes.



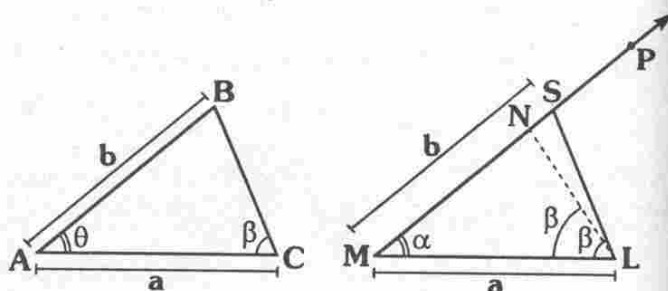
En el gráfico:

$$AC = ML ; m\angle BAC = m\angle NML \text{ y}$$

$$m\angle ACB = m\angle MLN$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL$$

Demostración:



Consideramos el rayo $\overrightarrow{MP}$ que contiene a $\overline{MN}$.

- Por axioma de segmentos, existe en $\overrightarrow{MP}$ el punto (S), tal que $AB = MS$.
- Por LAL: $\triangle ABC \cong \triangle MSL$,
- Entonces: $m\angle ACB = m\angle MLS = \beta$
- Pero: $m\angle MLN = \beta$

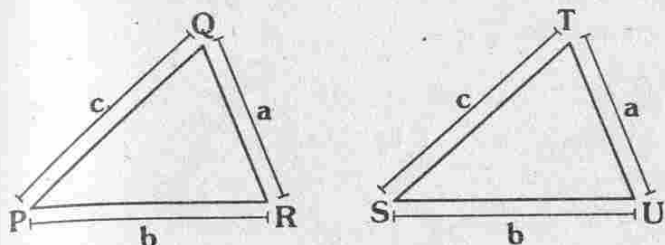
Por el axioma de la construcción de ángulos: el rayo $\overrightarrow{LS}$ debe ser único

$$\Rightarrow N = S$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle MNL$$

TEOREMA LADO-LADO-LADO (LLL)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente de igual longitud, entonces dichos triángulos son congruentes.



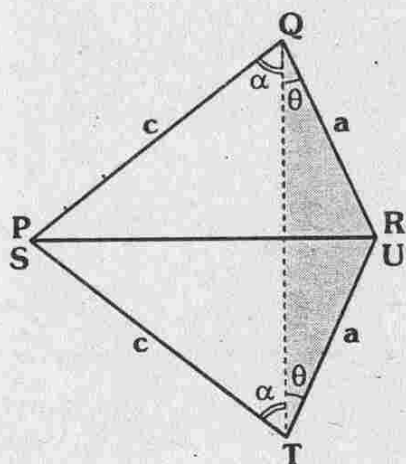
En el gráfico, si:

$$PQ=ST, \quad QR=TU \quad y \quad PR=SU$$

$$\Rightarrow \Delta PQR \cong \Delta STU$$

Demostración:

Vamos a demostrar el teorema LLL, a partir del teorema del triángulo isósceles.



Ubicamos los triángulos como se muestran, puesto que $PR=SU$, $PQ=ST$ y $QR=UT$, tenemos que los triángulos PQT y QRT son isósceles.

Por LAL, se concluye:

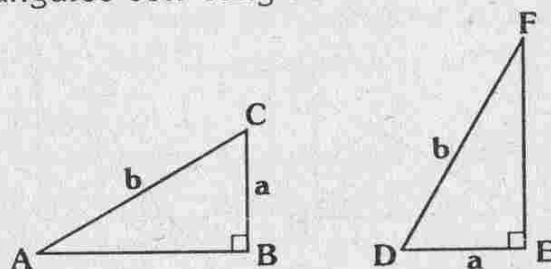
$$\Delta PQR \cong \Delta STU$$

Nota

Es común encontrar en la mayoría de textos, que se refieran a los criterios expuestos, como "**Casos de congruencia**", en esta publicación se trata de dar un cierto orden e ir introduciendo de a poco el análisis axiomático, por esta razón no usaremos tal nombre.

TEOREMA

Si dos triángulos rectángulos que tengan sus hipotenusas y un cateto de igual longitud respectivamente, entonces dichos triángulos son congruentes.

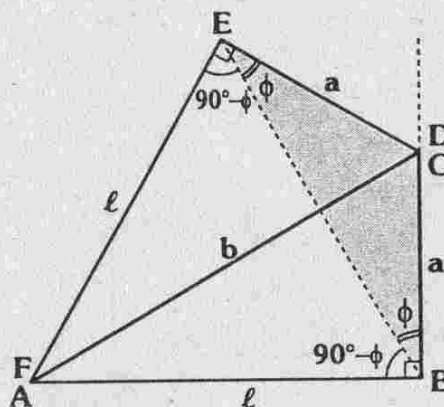


En el gráfico, se tiene:

$$m\angle ABC = m\angle DEF = 90^\circ; \quad AC=DF \quad y \quad BC=DE$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta FED$$

Demostración:



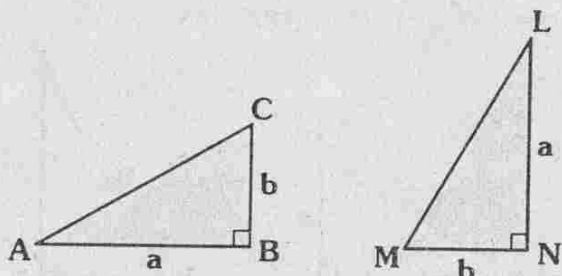
Ubicamos los triángulos como se muestra, pues $AC=FD$.

- Como $DE=CB \Rightarrow$ el $\triangle EDB$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle DEB = m\angle EBD$
- Como $m\angle FED = m\angle ABD = 90^\circ$
 $\Rightarrow m\angle FEB = m\angle ABE = 90^\circ - \phi$
- Luego el $\triangle EAB$ es isósceles $\Rightarrow FE = AB$
 $\therefore \triangle FED \cong \triangle ABC$



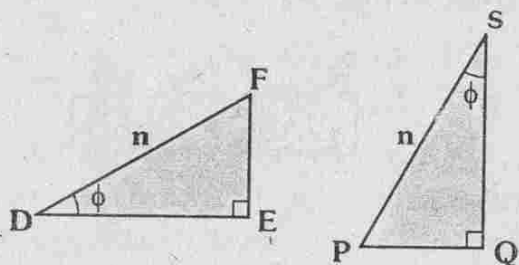
Observación

Los siguientes triángulos rectángulos son congruentes, la prueba es inmediata por LAL o ALA.



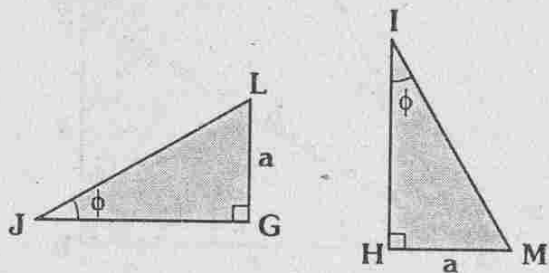
Se cumple:

$$\triangle ABC \cong \triangle LMN$$



Se cumple:

$$\triangle DEF \cong \triangle SQP$$



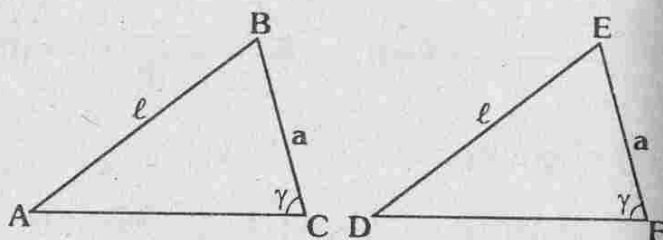
Se cumple:

$$\triangle LGJ \cong \triangle MHI$$

TEOREMA LADO-LADO-ÁNGULO MAYOR

Si dos triángulos tienen dos lados de igual longitud respectivamente y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

(Este teorema se encontrará en muchos textos como "4to caso")



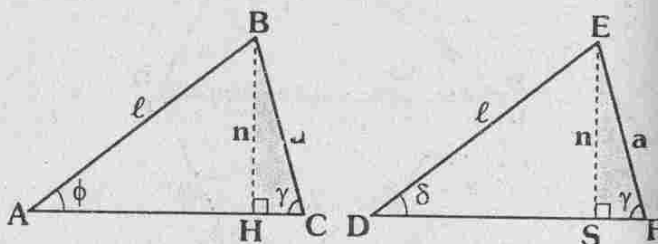
En el gráfico, sea $l > a$, $AB=DE$, $BC=EF$ y $m\angle BCA = m\angle EFD$

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Demostración:

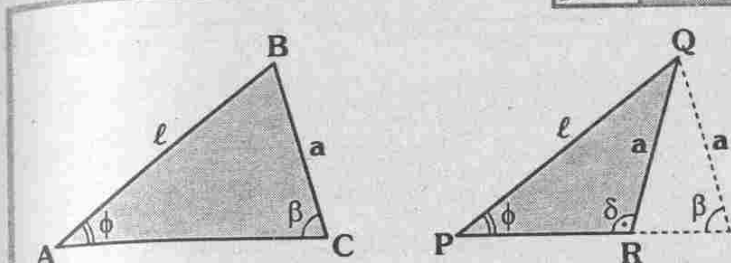
Utilicemos los teoremas anteriores, para "gamma" se presentan los siguientes casos:

- Si $\gamma = 90^\circ$, ya fue probado.
- Si $\gamma < 90^\circ$, se tiene:



- Como $l > a \Rightarrow \gamma > \phi$ y si:
 $\gamma < 90^\circ \Rightarrow \phi < 90^\circ$, lo mismo para "delta".
- Al trazar las alturas desde B y E, se tendrá: H en $\overline{AC}$ y S en $\overline{DF}$.
- Luego:
 $\triangle BHC \cong \triangle ESF \Rightarrow BH=ES, HC=SF$
- Finalmente: $\triangle AHB \cong \triangle DSE$
 $\Rightarrow AH=DS$

- Como $AH=DS$ y $HC=SF \Rightarrow AC=DF$
- Por LLL, se tendrá: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
- Si $\gamma > 90^\circ$, se demuestra análogamente, sino que la altura estará en la parte externa.

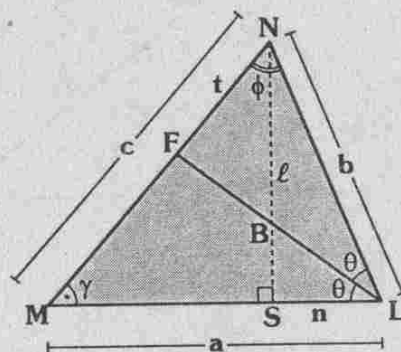
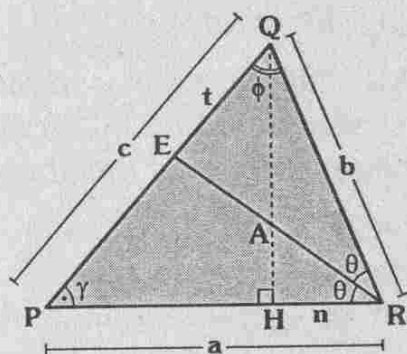


Si: $a < \ell \Rightarrow$ los triángulos ABC y PQR no son congruentes, como se muestra.

Importante

- Es cierto que los tres primeros criterios señalados (LAL, ALA y LLL) son los más usados en la resolución de problemas y deducción de diversos teoremas, por lo tanto se te sugiere tenerlos presente y visualizarlos en los ejemplos, tal vez aparezcan en diferentes posiciones.
- Un criterio a tomar en cuenta, en la resolución de ejercicios, es cuando en dos posiciones diferentes se "repita" un lado o tal vez algún "ángulo" posiblemente usemos congruencia, para ello completar ángulos y relacionarlo con algunos de los criterios mencionados, frecuentemente: LAL, ALA o LLL.
- Cuando dos triángulos son congruentes, entonces todos sus elementos serán respectivamente "iguales", así tenemos:

En el gráfico, los triángulos PQR y MNL son congruentes:



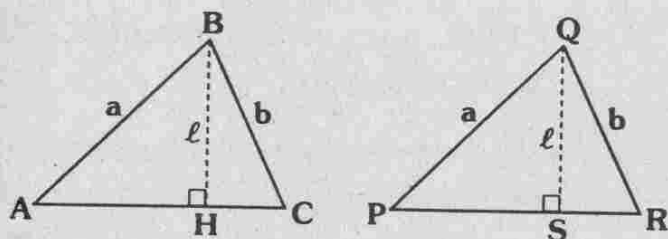
- $\overline{QH}$ y $\overline{NS}$ son alturas relativas a $\overline{PR}$ y $\overline{ML}$, los cuales son congruentes entonces: $QH=NS$ y $LS=HR$
- $\overline{RE}$ y $\overline{LF}$ son bisectrices interiores relativas a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN} \Rightarrow RE=LF$
- Como consecuencia: $EA=FB$
- En el gráfico anterior se ha indicado unas cuantas relaciones, lo general se indicará en el caso de **congruencia de figuras (*)**.

(*) ver anexos

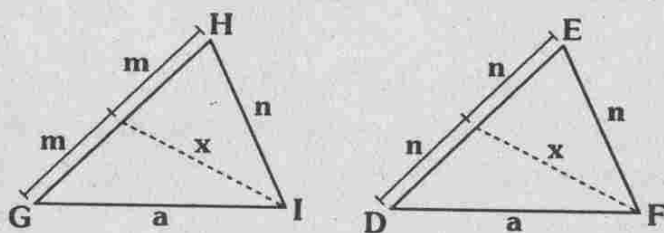
OTROS CRITERIOS DE LA CONGRUENCIA

Como se han mencionado, son condiciones mínimas en dos triángulos para asegurar que sean congruentes.

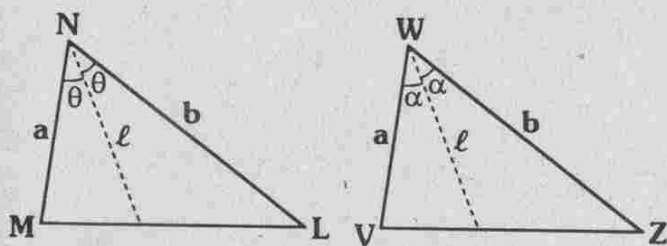
A continuación se muestran gráficamente algunas de dichas condiciones (notar que son tres elementos).



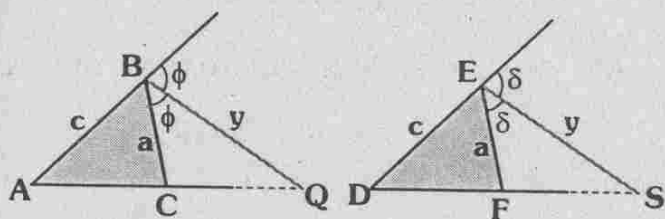
$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$



$$\triangle GHI \cong \triangle DEF$$

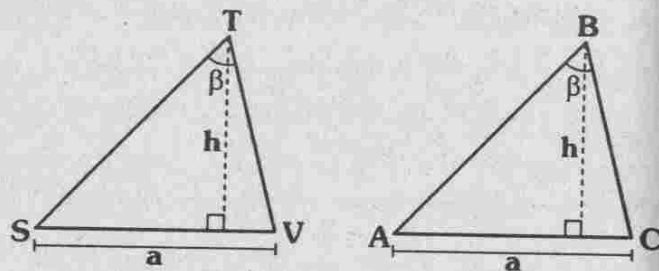


$$\triangle MNL \cong \triangle VWZ$$



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Se cumple:



Se cumple:

$$\triangle STV \cong \triangle ABC$$

- Si consideramos diversas combinaciones encontraremos más condiciones para la congruencia, así por ejemplo:
- Dos triángulos son congruentes si tienen dos medianas y un lado respectivamente de igual longitud.
- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres medianas respectivamente de igual medida.
- Dos triángulos son congruentes si tienen dos alturas y un lado respectivamente de igual longitud.
- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres alturas respectivamente de igual longitud.
- Dos triángulos son congruentes si tienen dos bisectrices y un lado respectivamente de igual longitud.
- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres bisectrices interiores respectivamente de igual longitud.
- Dos triángulos son congruentes si sus tres bisectrices exteriores son respectivamente de igual longitud.
- Ahora si consideramos elementos como los exradios e inradios, áreas y perímetros tendremos más criterios (tres condiciones mínimas, como se ha mencionado):

- Si los tres exradios de dos triángulos son de igual longitud los triángulos son congruentes.
- Si dos triángulos tienen un lado en común, el ángulo opuesto de igual medida y el inradio; respectivamente igual, los triángulos son congruentes.
- Si dos triángulos tienen igual perímetro, igual área e igual un ángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Nota

El lector puede notar que hay muchas condiciones para verificar la congruencia, algunas de estas demostraciones tienen que ver con capítulos como "circunferencia", "relaciones métricas" y "áreas", en dichas publicaciones se realizará tales demostraciones.

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $P \in \overleftrightarrow{L}$, entonces se cumple:

$$PA = PB$$

Demostración:

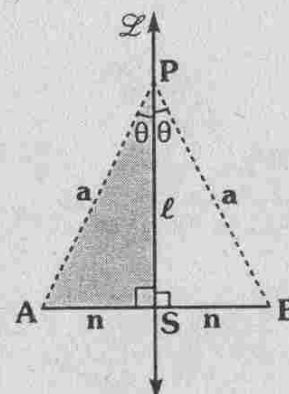
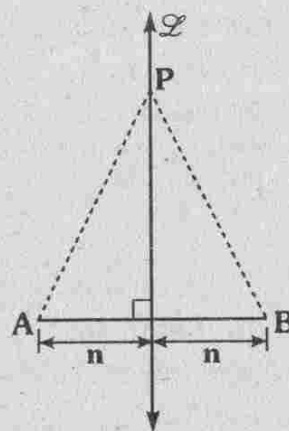
Del gráfico, tenemos:

$$\angle ASP \cong \angle BSP \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow AP = PB$$

Además:

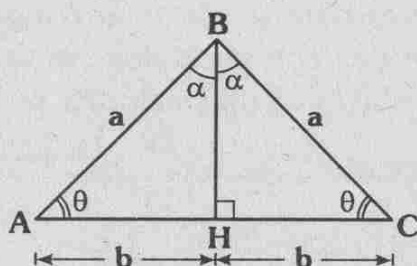
$$m\angle APS = m\angle BPS$$





Observación

- En el gráfico anterior, notemos que el triángulo APB es isósceles y que el segmento PS, es altura, bisectriz y a su vez mediana, relativas a la base.
- Lo último nos sugiere un trazo en el triángulo isósceles: la altura relativa a la base.

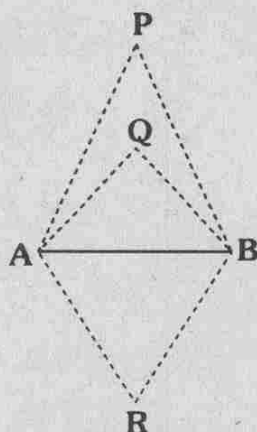


En el gráfico, $\overline{BH}$ es altura, entonces $\overline{BH}$ es mediana y altura.

- También todas las combinaciones son ciertas, es decir: "si en el triángulo isósceles se traza la mediana relativa a la base es también altura y bisectriz, lo mismo para la bisectriz".

TEOREMA

Si un conjunto de puntos coplares con un segmento, equidistan de los extremos de dicho segmento, entonces dichos puntos están en la mediatriz.

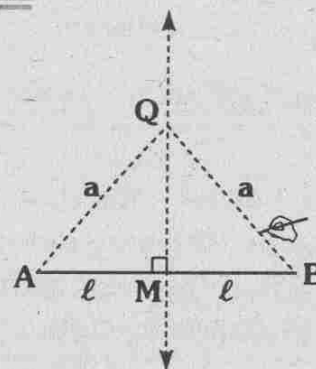


En el gráfico, si:

$$PA=PB, \quad QA=QB, \quad RA=RB$$

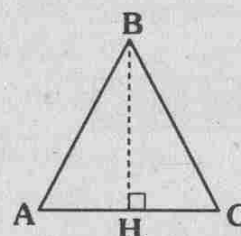
$\Rightarrow$ P, Q y R están en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Demostración:



- Bastará analizar uno de los triángulos por ejemplo: AQB, en él se traza la mediana, por el criterio anterior o por LLL: $\triangle AQM \cong \triangle BQM \Rightarrow \overline{QM}$ es también altura, es decir $\overline{QM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.
- Veamos algunas consecuencias:

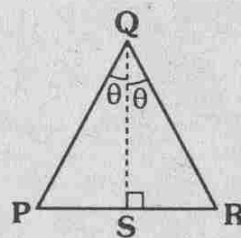
TEOREMA



Si $\overline{BH}$ es altura y mediana, entonces:

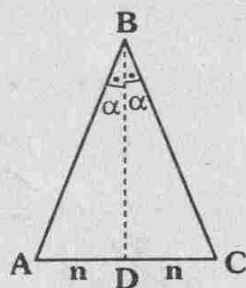
$$\boxed{AB=BC}$$

TEOREMA



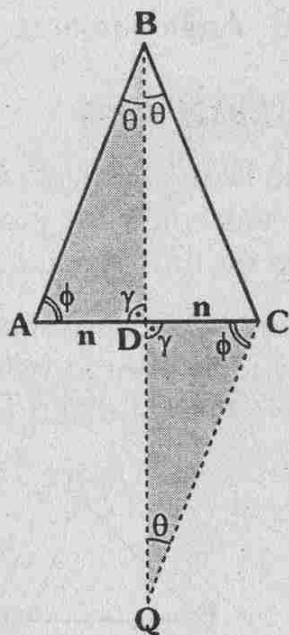
Si $\overline{QS}$ es altura y bisectriz, entonces:

$$\boxed{PQ=QR}$$

TEOREMA

Si $\overline{BD}$ es mediana y bisectriz, entonces:

$$\boxed{AB=BC}$$

Demostración:

- Se prolonga $\overline{BD}$ y se traza:

$$\overline{CQ} \parallel \overline{AB}$$

$$\Rightarrow m\angle DQC = \theta$$

- $\triangle BQC$: es isósceles

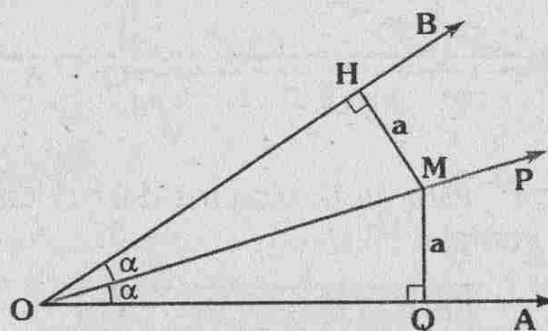
$$\Rightarrow BC=CQ$$

- $\triangle BAD \cong \triangle QCD$: (ALA)

$$\Rightarrow AB=BC$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Todo punto de la bisectriz de un ángulo, tiene igual distancia (*) hacia los lados de dicho ángulo.



En el gráfico, $\overline{OP}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y $M \in \overline{OP}$, se cumple:

$$\boxed{MH=MQ}$$

Demostración:

- Si completamos medidas angulares, tenemos:

$$m\angle OMH = m\angle OMQ = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OMQ \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow MH=MQ$$

- Además:

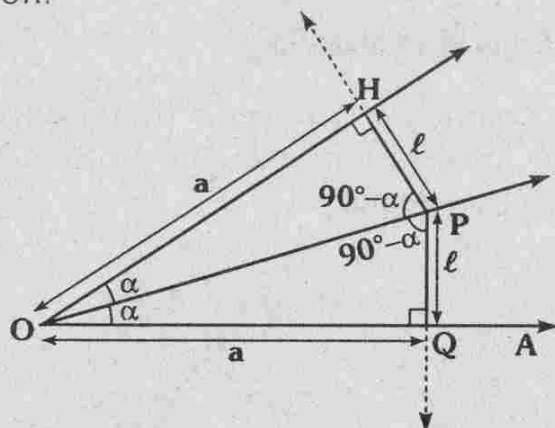
$$\boxed{OH=OQ}$$

(*) sobre el término "distancia" ver anexos.



Observación

Es común encontrar en muchos textos el teorema como se indica a continuación:



Si "P" está en la bisectriz del $\angle HOB$, se cumple:

$$PH = PQ \text{ y } OH = OQ$$

Pero notar que no son dos resultados, los cuales se deducen fácilmente de la congruencia.

Pues:

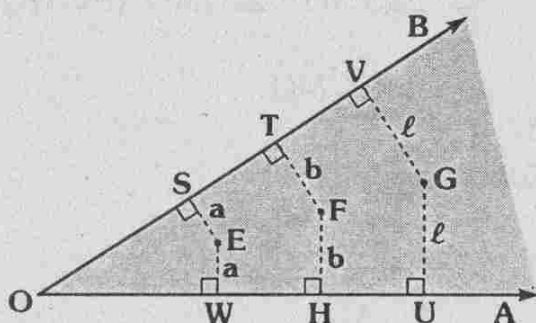
P está en la bisectriz del $\angle HOQ$ y

O está en la bisectriz del $\angle HPQ$

Cumpléndose el enunciado expuesto.

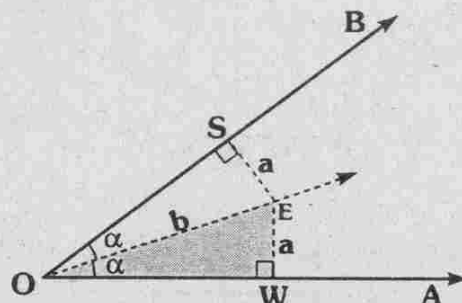
TEOREMA

Si un conjunto de puntos están en la región interior de un ángulo y equidistan de los lados del ángulo, entonces dichos puntos están en la bisectriz del ángulo dado.



Si: $ES = EW$, $FT = FH$ y $GV = GU$
 $\Rightarrow E, F$ y G están en la bisectriz del $\angle AOB$.

Demostración:



$$\angle OSE \cong \angle OWE$$

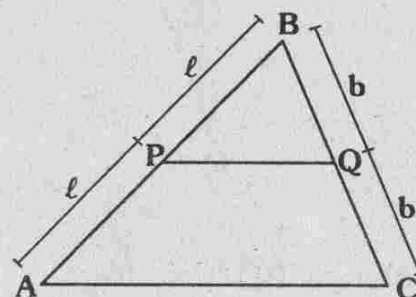
$$\Rightarrow m\angle SOE = m\angle EOA$$

Es decir "E" está en la bisectriz del ángulo AOB. Análogamente para F y G.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Se denomina base media al segmento que tiene como extremos los puntos medios de dos lados de un triángulo.

En todo triángulo la base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.



En el gráfico:

$$AP = PB \text{ y } BQ = QC$$

$\overline{PQ}$: base media

Se cumple:

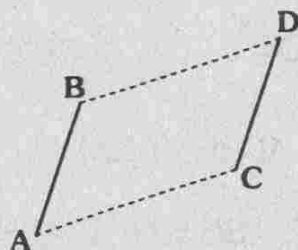
$$\overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{ y } PQ = \frac{AC}{2}$$

Demostración:

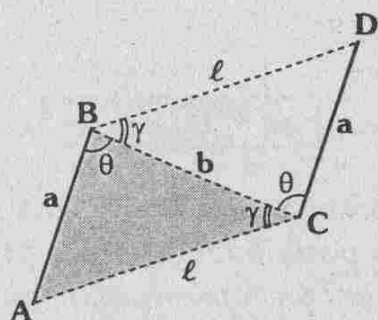
Paso I

Previamente demostremos lo siguiente.

Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $AB = CD$.



Se cumple: $BD = AC$ y $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$

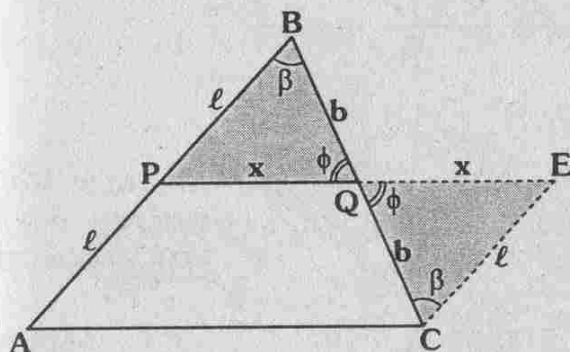


Por ángulos entre paralelas:

$$m\angle ABC = m\angle BCD \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow AC = BD \text{ y } m\angle BCA = m\angle DBC \Rightarrow \overline{BD} \parallel \overline{AC}$$

Paso II



Se traza desde C una paralela a $\overline{AB}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{PQ}$ en E.

$$\Rightarrow \triangle BQP \cong \triangle CQE \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow QE = QP = x$$

$$\text{y } PB = CE = l$$

Luego, como $AP = CE$ y $\overline{AP} \parallel \overline{CE}$, por la demostración del paso I:

$$AC = PE \Rightarrow AC = 2(PQ)$$

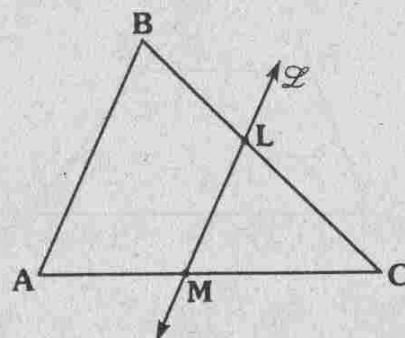
$$\Rightarrow PQ = \frac{AC}{2}$$

$$\overline{AC} \parallel \overline{PE} \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{PQ}$$

Ahora analicemos los recíprocos:

TEOREMA

Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta corta en el punto medio al tercer lado.

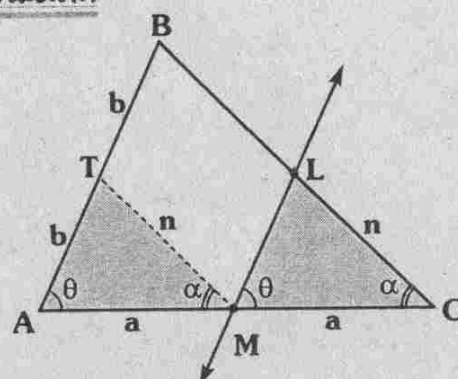


En el gráfico:

Si $AM = MC$ y $\overline{LM} \parallel \overline{AB}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{ML} \text{ es base media}}$$

Demostración:



- Se ubica T punto medio de $\overline{AB}$, con ello se tendrá $\overline{MT}$ es base media, entonces:

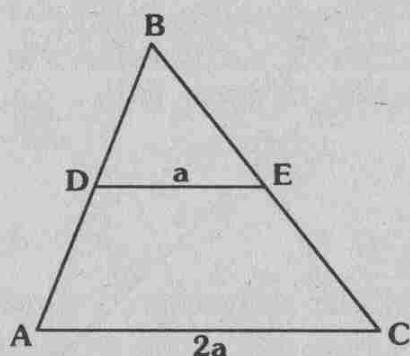
$$\overline{MT} \parallel \overline{CB} \quad \text{y} \quad BC = 2n$$

- $\triangle ATM \cong \triangle MLC$ (ALA) $\Rightarrow CL = n$
- Como $BC = 2n \Rightarrow BL = n$

$$\therefore BL = LC$$

TEOREMA

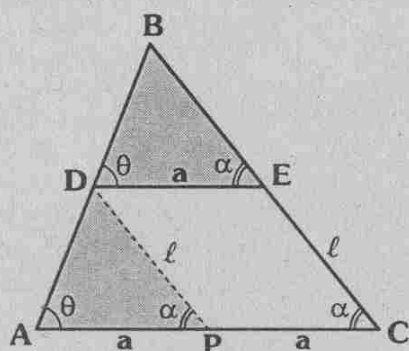
Si un segmento tiene sus extremos en los lados de un triángulo y cumple que es paralelo al tercer lado y tiene por longitud la mitad del tercer lado, entonces dicho segmento es la base media.



$$\text{Si: } \overline{DE} \parallel \overline{AC} \quad \text{y} \quad DE = \frac{AC}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{DE} \text{ es base media}}$$

Demostración:



- Se ubica P, punto medio de $\overline{AC}$, se tendrá ahora:

$$DE = PC \quad \text{y} \quad \overline{DE} \parallel \overline{PC}$$

por teorema (Paso I):

$$PD = \ell \quad \text{y} \quad \overline{PD} \parallel \overline{CE}$$

- $\triangle ADP \cong \triangle DBE$ (ALA)

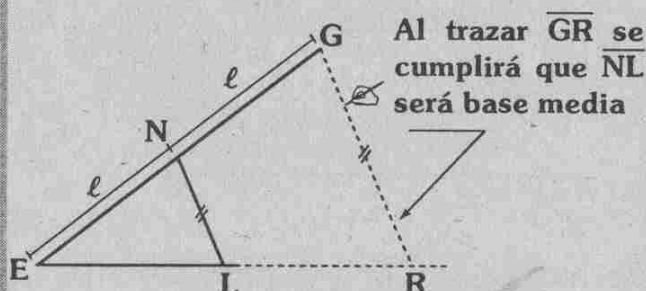
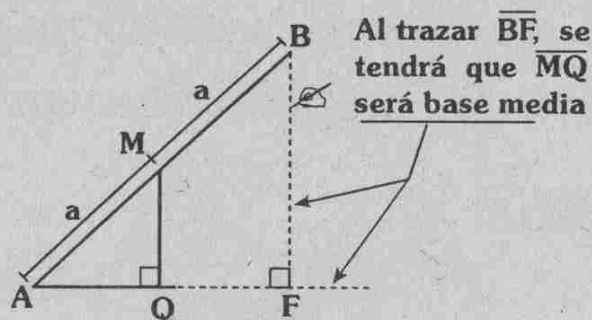
$$\Rightarrow DP = BE = \ell \quad \text{y} \quad AD = DB$$

$$\therefore \overline{DE} \text{ es base media.}$$



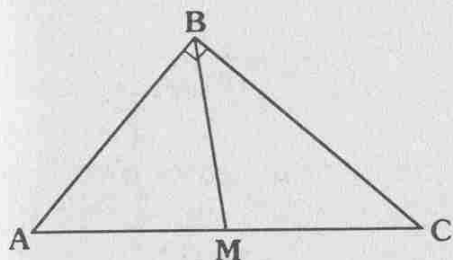
Observación

Los teoremas anteriores, nos sugieren algunas posibilidades en los problemas donde encontremos algún punto medio:



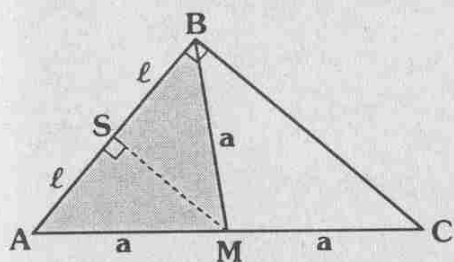
TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

El segmento que une el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo y el punto medio de la hipotenusa, mide la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico, $AM = MC$, entonces:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

Demostración:

- Se ubica S punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{SM}$ es base media:
- Luego: $\overline{SM} \perp \overline{AB}$
- Por teorema de la mediatriz $MA = MB$.

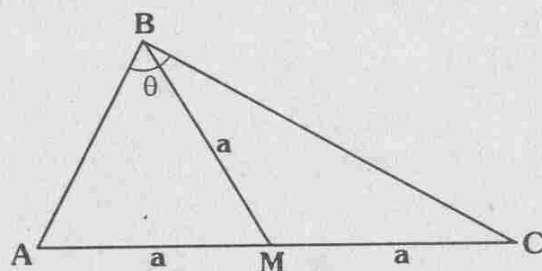
$$\therefore MB = \frac{AC}{2}$$

- Además: los triángulos ABM y BMC con isósceles.

TEOREMA

Si en un triángulo la mediana mide la mitad de la longitud del lado al cual es relativo, entonces dicho triángulo es rec-

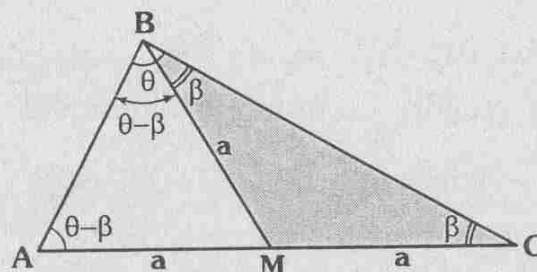
tángulo (recto en el vértice del cual se traza la mediana).



En el gráfico, $AM = MC = MB$

Se cumple:

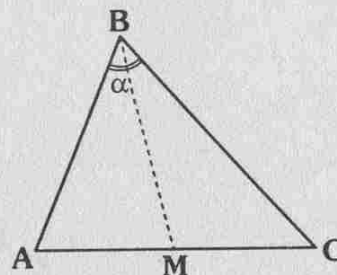
$$\theta = 90^\circ$$

Demostración:

- $\triangle BMC$ y $\triangle ABM$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle MBC = m\angle MCB = \beta$
 y $\Rightarrow m\angle MBA = m\angle BAM = \theta - \beta$
- En $\triangle ABC$: $\beta + \theta + \theta - \beta = 180^\circ$
 $\therefore \theta = 90^\circ$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

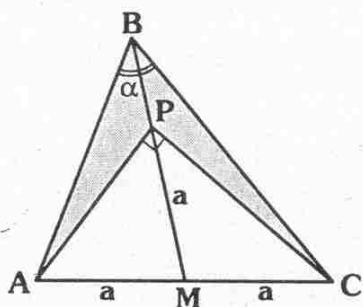
$$\frac{AC}{2} < BM \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ$$

Demostración:

La demostración consta de dos partes:

Parte I

- Si: $\frac{AC}{2} < BM \Rightarrow \alpha < 90^\circ$

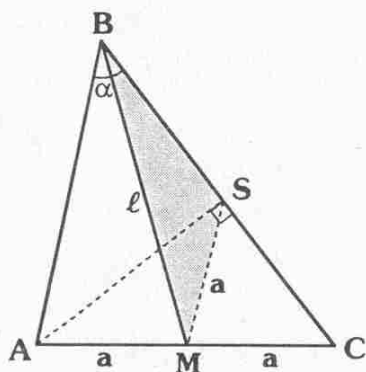


- Sea $AC = 2a \Rightarrow a < BM$, es decir existe en $\overline{MB}$ un punto P tal que $MP = a$.
- Se tiene entonces $AM = MP = MC$
 $\Rightarrow m\angle APC = 90^\circ$
- En la parte sombreada:

$$\alpha < 90^\circ$$

Parte II

- Si $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \frac{AC}{2} < BM$



- Como $\alpha < 90^\circ$, al trazar la altura desde A, entonces el pie de dicha altura estará en $\overline{BC}$ o en su prolongación.

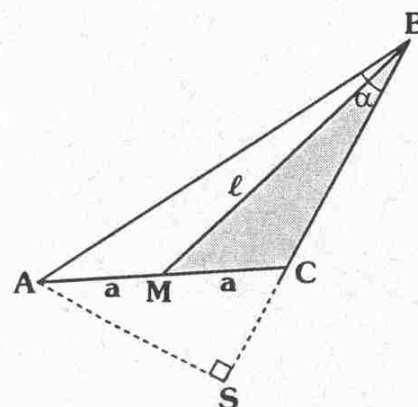
- En el $\triangle ASC$, por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $SM = a$
- Se tiene: $m\angle BSM > 90^\circ \Rightarrow a < \ell$

$$\therefore \frac{AC}{2} < BM$$



Observación

Si el pie de la altura está en la prolongación de $\overline{BC}$ o en "C" también se cumple:

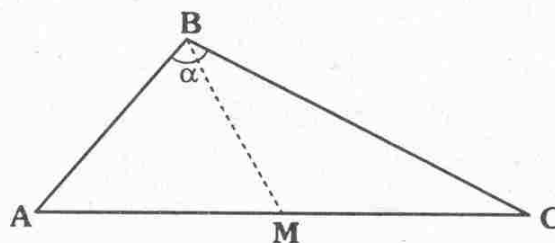


$$\ell > a; \text{ pues } m\angle ACB > 90^\circ$$

$$\text{es decir: } BM > \frac{AC}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana:



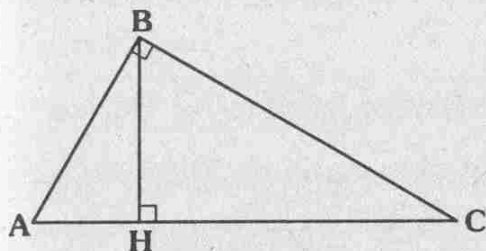
Se cumple:

$$\frac{AC}{2} > BM \Leftrightarrow \alpha > 90^\circ$$

La demostración se análoga a las anteriores, queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

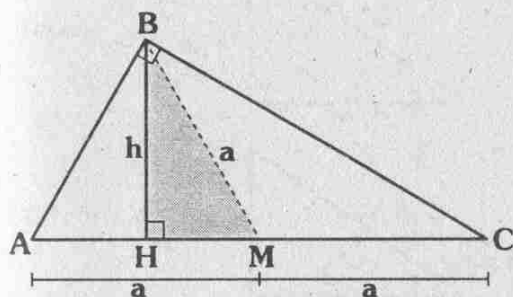
La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual que la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico se cumple:

$$BH \leq \frac{AC}{2}$$

Demostración:

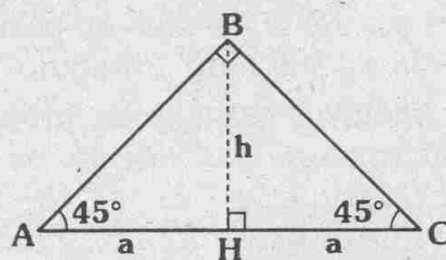


- Cuando se traza la mediana $\overline{BM}$ relativa a $\overline{AC}$, para M hay tres posibilidades (no dejarse llevar por el gráfico), que esté en $\overline{AH}$, o $\overline{HB}$ o que coincida con H.

- Sea M en $\overline{HC}$, en $\triangle BHM$: $BH < BM$

$$\Rightarrow h < a \Rightarrow BH < \frac{AC}{2} \quad \dots (I)$$

- Si $M = H$, es decir la mediana es altura:



- $\triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow a = h$

$$\Rightarrow BM = \frac{AC}{2} \quad \dots (II)$$

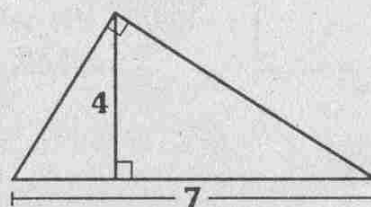
- De (I) y (II):

$$BM \leq \frac{AC}{2}$$



Observación

El último teorema nos da una condición más de existencia para triángulos rectángulos, la relación que debe existir entre la altura y la hipotenusa, por ejemplo el siguiente triángulo "no existe".



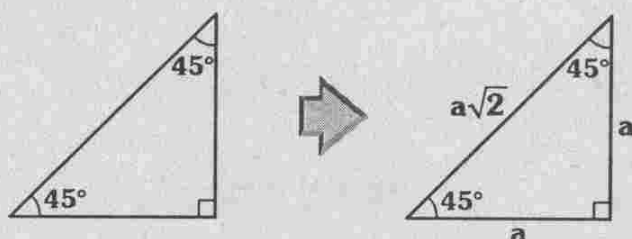
Pues no cumple:

$$4 \leq \frac{7}{2}$$

TRIANGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

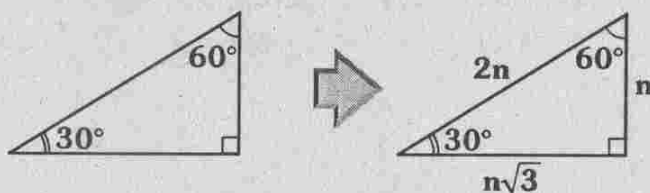
Son un conjunto de triángulos rectángulos donde son conocidas las medidas angulares y a partir de ellas es posible hallar las proporciones de sus lados y viceversa. En realidad en todo triángulo conociendo sus medidas angulares, con cálculos trigonométricos se halla las proporciones, sino que en el siguiente grupo de Δ_s las razones son sencillas, además se presentan con frecuencia en los ejercicios.

Notable de 45°:

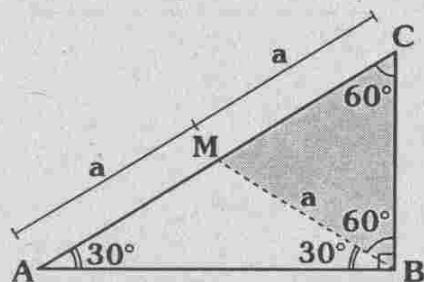


- Vemos que es el único triángulo rectángulo isósceles, por ello los catetos tienen igual longitud y por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa tiene por longitud: " $a\sqrt{2}$ ".
- Si partimos de un triángulo rectángulo de catetos de igual longitud o cateto e hipotenusa en la razón de 1 a $\sqrt{2}$ en ambos casos de comprueba que los ángulos agudos miden 45°.

Notable de 30° y 60°:



Demostración:



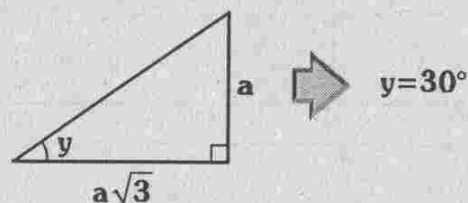
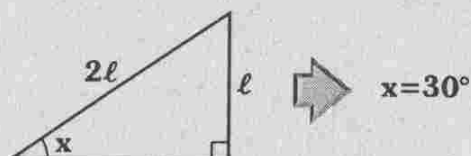
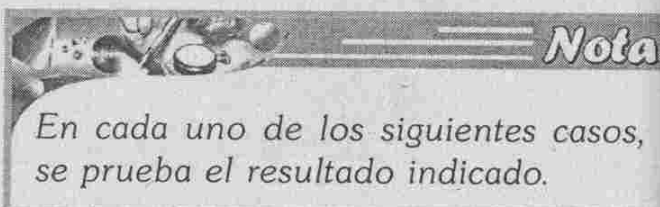
- En el ΔABC se traza la mediana BM:

$$\Rightarrow BM = a$$

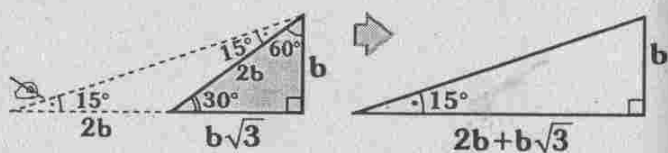
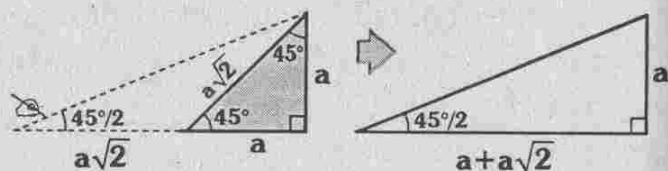
$$\Delta BMC \text{ equilátero} \Rightarrow BC = a$$

- Por el teorema de Pitágoras:

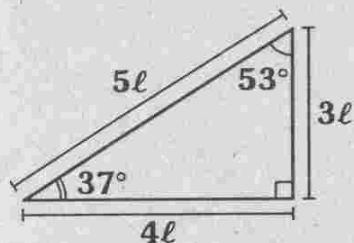
$$AB = a\sqrt{3}$$



- De los triángulos rectángulos de 45°, 30° y 60°, se deducen los siguientes.

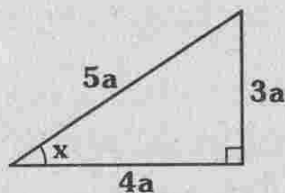


TRIÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS

Notable de 37° y 53° :

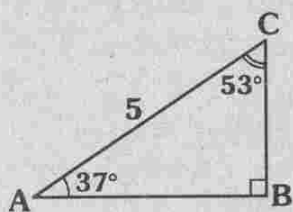
Observación

- Las proporciones de los lados 3:4:5 nos muestran que **es el único triángulo rectángulo en el que los lados están en progresión aritmética.**
- En cuanto a los valores aproximados podemos considerar, los siguientes casos:



Con uso de calculadora:

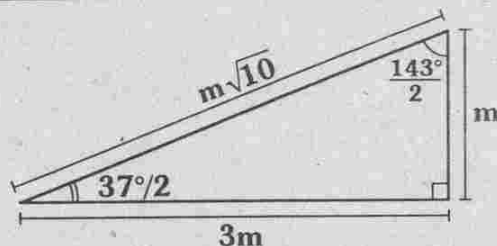
$$x = 36,869^\circ \Rightarrow x \approx 37^\circ$$



$$AB = 3,993 \approx 4$$

$$BC = 3,009 \approx 3$$

- Debido a su presencia en muchos ejercicios lo usaremos en los problemas como "exactos", pero vemos que en realidad no lo son.
- Los triángulos que se deducen a partir de él serán también aproximados.

Notable de $37^\circ/2$ y $143^\circ/2$:

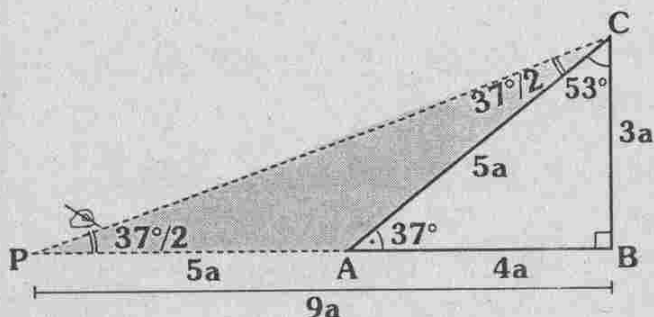
Notar:

$$\frac{37^\circ}{2} = 18,5^\circ = 18^\circ 30'$$

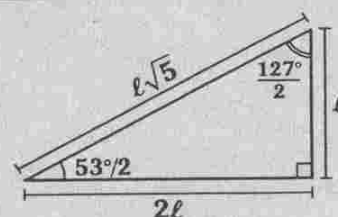
$$\frac{143^\circ}{2} = 71,5^\circ = 71^\circ 30'$$

Demostración:

- Partimos del triángulo de 37° y 53° .



- Se prolonga $\overline{BA}$, tal que $AP = AC = 5a$
 $\triangle PAC$ isósceles $\Rightarrow m\angle APC = \frac{37^\circ}{2}$
- Luego: $PB = 9a$ y $BC = 3a$
- Es decir: $PB = 3(BC)$
- Sea $BC = m \Rightarrow PB = 3m$, por teorema de Pitágoras: $PC = m\sqrt{10}$

Notable de $53^\circ/2$ y $127^\circ/2$:

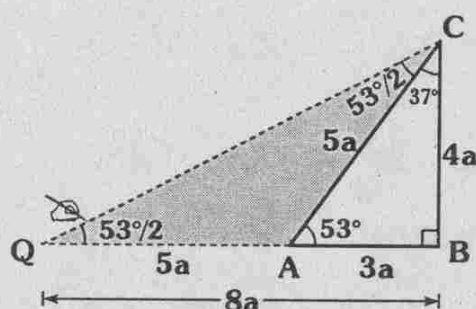
Considerar:

$$\frac{53^\circ}{2} = 26,5^\circ = 26^\circ 30'$$

$$\frac{127^\circ}{2} = 63,5^\circ = 63^\circ 30'$$

Demostración:

Partimos del $\triangle$ de 37° y 53° .



Se prolonga $\overline{BA}$ hasta Q tal que $AQ = 5a$.

$\Rightarrow \triangle QAC$ es isósceles, luego:

$$m\angle CQA = m\angle QCA = \frac{53^\circ}{2}$$

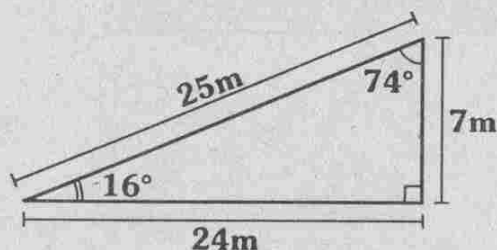
• Se tendrá: $QB = 8a$ y $BC = 4a$

• Es decir: $QB = 2(BC)$

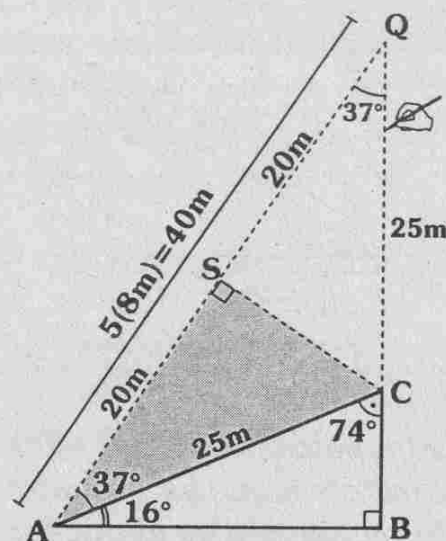
Finalmente hacemos $BC = \ell$ y $\Rightarrow QB = 2\ell$ por teorema de Pitágoras:

$$QC = \ell\sqrt{5}$$

$\triangle$ Notable de 16° y 74° :



Demostración:



• Como $74^\circ = 2(37^\circ)$, entonces se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q tal que:

$$CQ = AC = 25m$$

• $\triangle ACQ$ isósceles en este triángulo se traza la altura $CS \Rightarrow AS = SQ$.

• $\triangle ASC$ notable de 37°

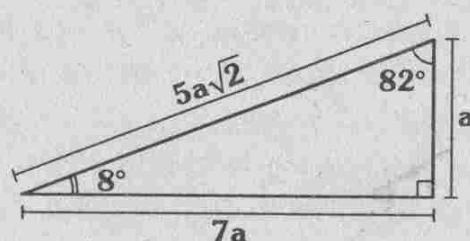
$$\Rightarrow AS = 20m$$

• Con ello el $\triangle ABQ$ que es notable de 37° , tiene hipotenusa 40m.

$$\Rightarrow AB = 3(8m) = 24m$$

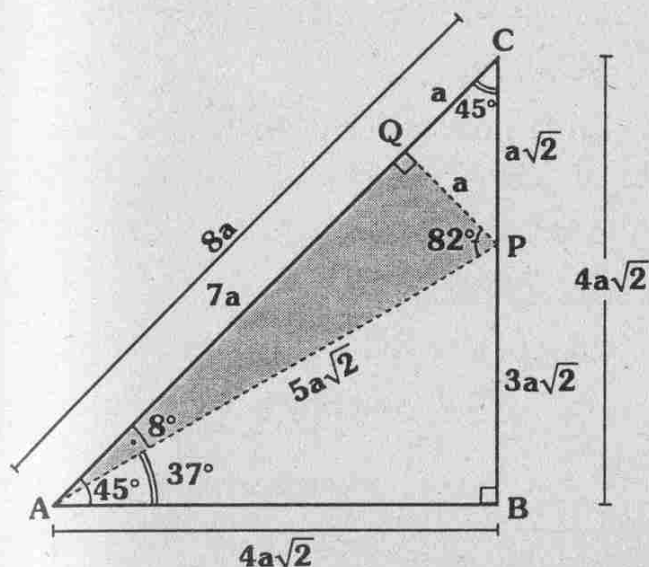
$$y \quad BQ = 4(8m) = 32m \Rightarrow BC = 7m$$

$\triangle$ Notable de 8° y 82° :



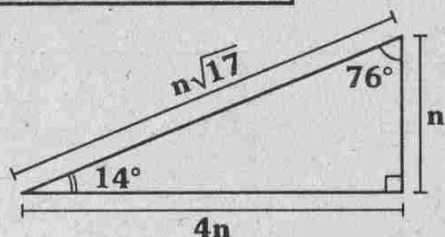
Demostración:

- Para la demostración se puede proceder similar que en la obtención del $\triangle$ de $37^\circ/2$ ó $53^\circ/2$, a partir del $\triangle 16^\circ$ y 74° pues: $16^\circ = 2(8^\circ)$, otra forma es partir así:



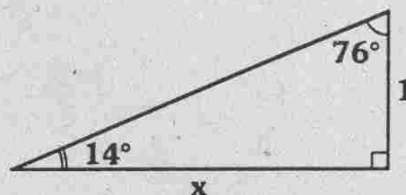
- Del $\triangle ABC$ de 45° , cuyos catetos midan $4a\sqrt{2}$, entonces $AC = 8a$.
- Se ubica P en $\overline{BC}$ tal que:
 $PB = 3a\sqrt{2} \Rightarrow PC = a\sqrt{2}$, $m\angle PAB = 37^\circ$
y $m\angle PAC = 8^\circ$.
- Se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$ (Q en $\overline{AC}$).
- En $\triangle PQC$ notable de $45^\circ \Rightarrow PQ = QC = a$
- En $\triangle AQP$ se observa:
 $AQ = 7a$, $PQ = a$ y $AP = 5a\sqrt{2}$

$\triangle$ Notable de 14° y 76° :



Observación

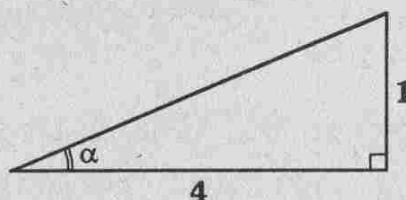
Este triángulo también es aproximado, notemos:



Con uso de calculadora:

$$x = 4,011$$

$$\Rightarrow \boxed{x \approx 4}$$



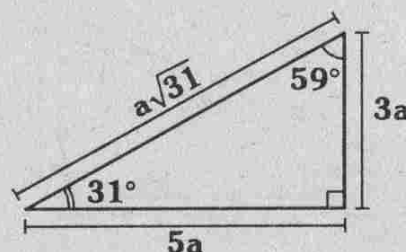
$$\alpha = 14,036^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \approx 14^\circ}$$

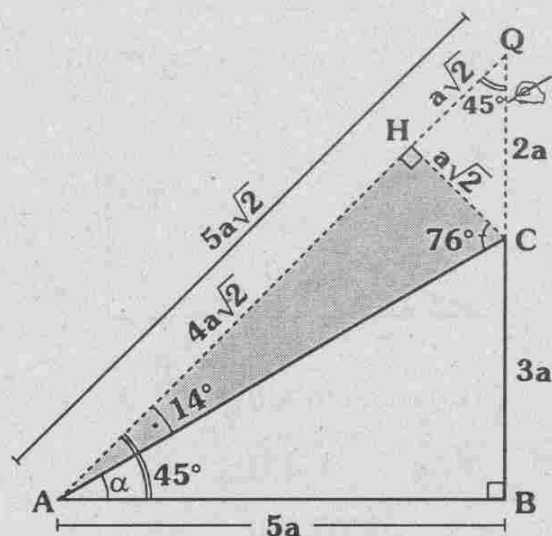
OTROS TRIÁNGULOS NOTABLES

Los siguientes resultados es producto de combinar las medidas angulares obtenidas anteriormente, cabe indicar que son "muy aproximados".

$\triangle$ Notable de 31° y 59° :



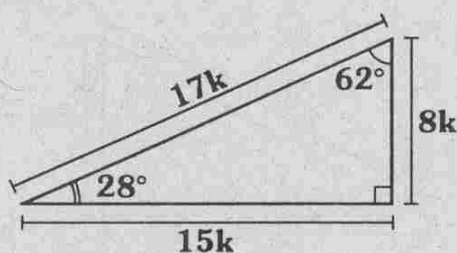
Demostración:



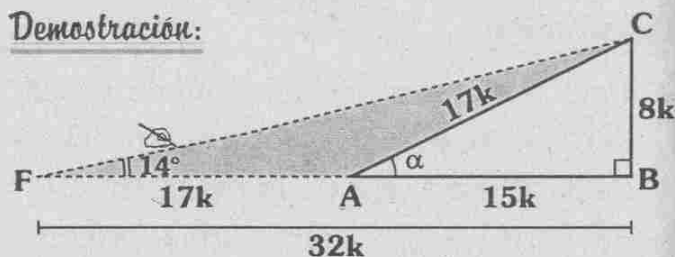
- Partimos del $\triangle ABC$ cuyos catetos miden $3a$ y $5a$.
- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q , tal que:
 $CQ = 2a \Rightarrow BQ = AB = 5a$ y $AQ = 5a\sqrt{2}$
- $\triangle ABQ$ es notable de 45° .
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AQ}$, con H en $\overline{AQ}$.
- En $\triangle CHQ$: $HQ = QC = a\sqrt{2}$
 $\Rightarrow AH = 4a\sqrt{2}$
- El $\triangle AHC$ es notable de 14° y 76°
 $\Rightarrow \alpha = 45^\circ - 14^\circ$

$\therefore \alpha = 31^\circ$

$\triangle$ Notable de 28° y 62° :



Demostración:

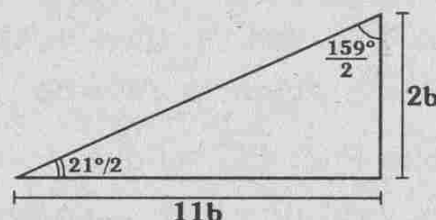


- Partimos del $\triangle ABC$, cuyos catetos miden $8k$ y $15k$, por teorema de Pitágoras $AC = 17k$.
- En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica F tal que $AF = 17k$.
 $\triangle AFC$ isósceles
- En $\triangle FBC$, notamos:
 $FB = 32k$ y $BC = 8k \Rightarrow FB = 4(BC)$

$\Rightarrow m\angle BFC = 14^\circ$

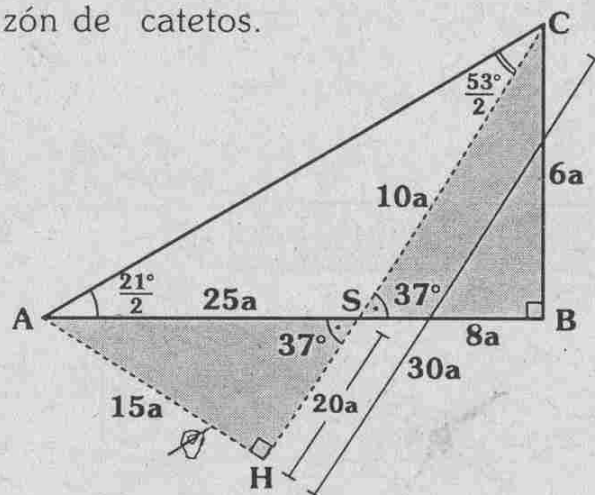
$\therefore \alpha = 28^\circ$

$\triangle$ Notable de $21^\circ/2$ y $159^\circ/2$:



Demostración:

- Partimos del $\triangle ABC$, donde $m\angle BAC = 21^\circ/2$ probaremos, la razón de catetos.



- Se traza $\overline{CS}$, tal que:

$$m\angle ACS = \frac{53^\circ}{2} \Rightarrow m\angle CSB = 37^\circ$$

- Se traza $\overline{AH} \perp \overline{CS}$, sea $AH = 15a$
Entonces:

$$\triangle AHS: HS = 20a \text{ y } AS = 25a$$

$$\triangle AHC: HC = 30a$$

$$\Rightarrow SC = 10a$$

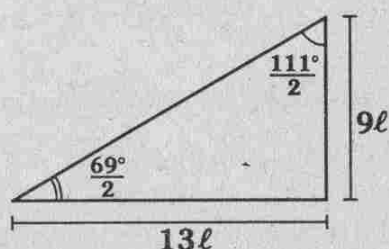
$$\triangle SBC: SB = 8a \text{ y } BC = 6a$$

$$\text{Luego: } AB = 33a \text{ y } BC = 6a$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{11}{2}$$

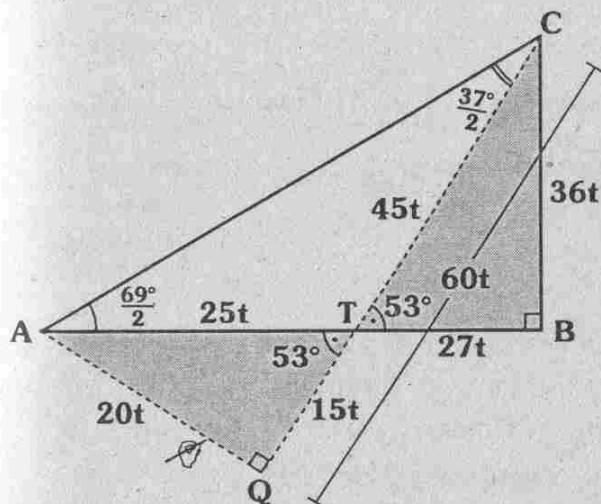
$$\therefore AB = 11b \text{ y } BC = 2b$$

△Notable de $69^\circ/2$ y $111^\circ/2$:



Demostración:

- Partimos del $\triangle ABC$ tal que:
 $m\angle BAC = 69^\circ/2$



- Se traza $\overline{CT}$, tal que:

$$m\angle ACT = \frac{37^\circ}{2} \Rightarrow m\angle BTC = 53^\circ$$

- Se traza $\overline{AS} \perp \overline{CT}$, sea $AQ = 20t$

$$\triangle ATQ: QT = 15t \text{ y } AT = 25t$$

$$\triangle AQT: QC = 60t \Rightarrow TC = 45t$$

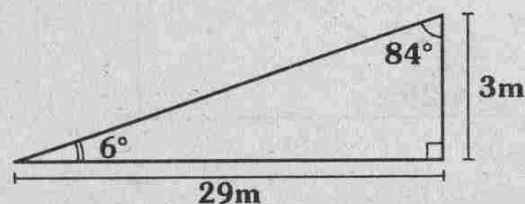
$$\triangle CBT: TB = 27t \text{ y } BC = 36t$$

- Luego: $AB = 52t \text{ y } BC = 36t$

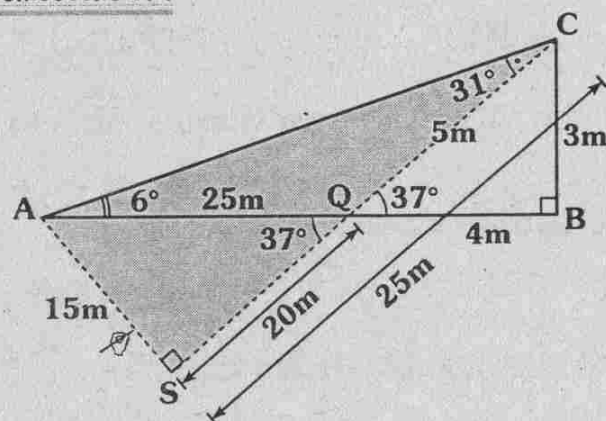
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{13}{9}$$

$$\therefore AB = 13l \text{ y } BC = 9l$$

△Notable de 6° y 84° :



Demostración:



- $\triangle ASC$: notable de 31° .

- Sea: $AS = 15m \Rightarrow SC = 25m$

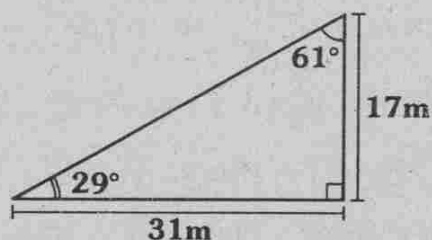
- $\triangle ASQ$ y $\triangle QBC$: notable de 37°

$$SQ = 20m \text{ y } AQ = 25m$$

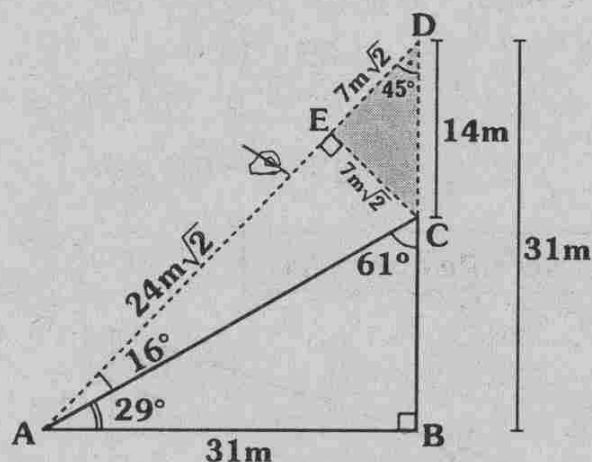
$$QC = 5m \Rightarrow QB = 4m \text{ y } BC = 3m$$

$$\Rightarrow CB = 3m \text{ y } AB = 29m$$

△ Notable de 29° y 61°:

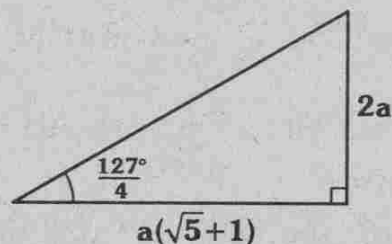


Demostración:

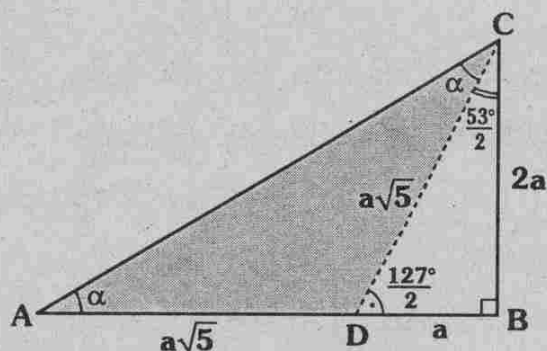


- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta D tal que:
 $m\angle BDA = 45^\circ \Rightarrow m\angle DAC = 16^\circ$
- En $\triangle ACD$ se traza la altura $\overline{CE}$, entonces:
 $\triangle AEC$, notable de 16° :
 $\Rightarrow EC = 7m\sqrt{2}$ y $EA = 24m\sqrt{2}$
 $\triangle ECD$, notable de 45° :
 $\Rightarrow ED = 7m\sqrt{2}$ y $CD = 14m$
 $\triangle ABD$: notable de 45° :
 $\Rightarrow$ como $AD = 31m\sqrt{2}$
 $\Rightarrow AB = BD = 31m \Rightarrow BC = 17m$
- Luego: $\frac{AB}{BC} = \frac{31}{17}$

△ Notable de $127^\circ/4$:



Demostración:



- Partimos del $\triangle ABC$, donde:
 $BC = 2a$ y $AB = a + a\sqrt{5}$
- Se traza $\overline{CD}$, tal que $DB = a$
 $\Rightarrow AD = a\sqrt{5}$
- El $\triangle DBC$ es notable de $53^\circ/2$
 $\Rightarrow DB = a\sqrt{5}$
- $\triangle ADC$: isósceles $\Rightarrow \alpha = \frac{127^\circ}{4}$



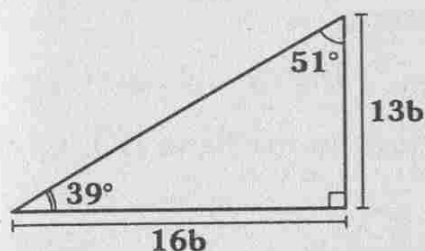
Observación

Del último gráfico, notamos:

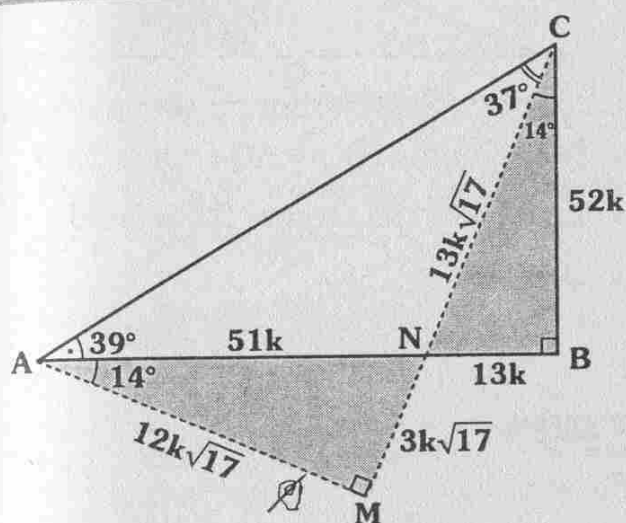
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

veremos en el capítulo de polígonos regulares que dicho número se denomina "Número áureo". También $\overline{BC}$ es sección áurea de $\overline{AB}$.

Notable de $39^\circ/51^\circ$:



Demostración:



- Se parte del $\triangle ABC$, tal que $m\angle BAC = 39^\circ$, en el cual se traza $\overline{CN}$ tal que $m\angle BCN = 14^\circ$

$$\Rightarrow m\angle ACN = 37^\circ$$

- Se traza: $\overline{AM} \perp \overline{CN}$ (M en $\overline{CN}$)

- Sea: $AM = 12k\sqrt{17}$

$$\triangle AMN: NM = 3k\sqrt{17} \text{ y } AN = 51k$$

$$\triangle AMC: MC = 16k\sqrt{17} \Rightarrow NC = 13k\sqrt{17}$$

$$\triangle NBC: NB = 13k \text{ y } BC = 52k$$

- Finalmente:

$$BC = 52k \text{ y } AB = 64k$$

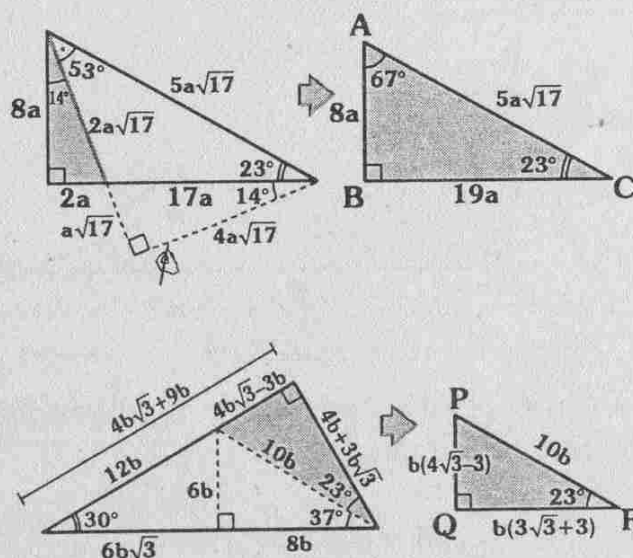
$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{13}{16}$$

$$\therefore BC = 13b \text{ y } AB = 16b$$



Observación

- No perder de vista que los triángulos que hemos deducido son aproximados.
- El estudiante puede hacer más combinaciones y encontrar sus propios triángulos notables, sin perder de vista que no son "exactos".
- Veamos el siguiente caso:



Se ha obtenido dos triángulos rectángulos de 23° , con razonamientos lógicos, a partir de los triángulos anteriores, este resultado fue previsible pues se han utilizado triángulos aproximados.

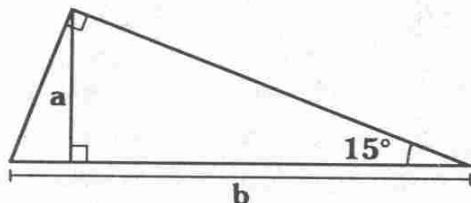
Notar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{8}{19} = 0,423 \\ \frac{PQ}{QC} &= \frac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4} = 0,427 \end{aligned} \right\} \frac{8}{19} \approx \frac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4}$$

TEOREMAS RELACIONADOS CON LOS TRIÁNGULOS NOTABLES

TEOREMA

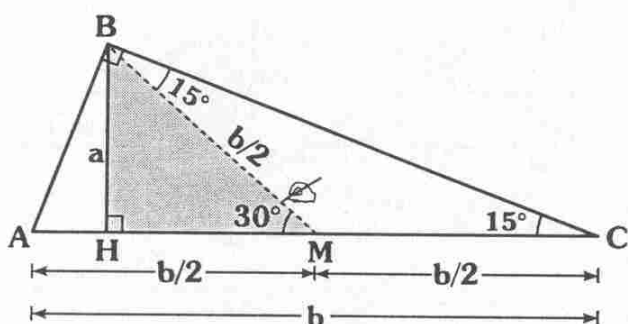
En el gráfico:



Se cumple:

$$b = 4a$$

Demostración:



- En el $\triangle ABC$, se traza la mediana BM, por teorema:

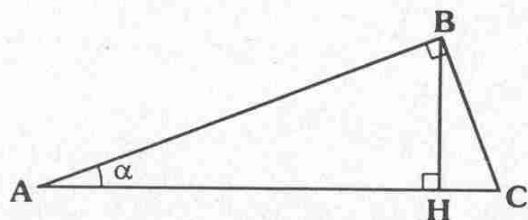
$$BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow BM = \frac{b}{2}$$

- $\triangle BHM$ notable de 30°

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2a \quad \therefore b = 4a$$

TEOREMA

En el gráfico, $AB > BC$ y $AC = 4(BH)$

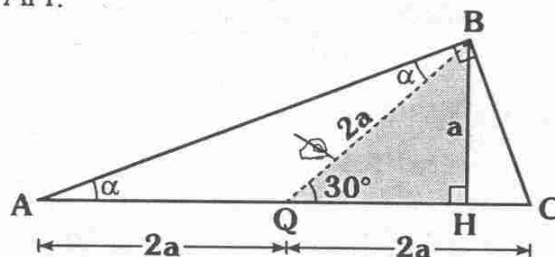


Se cumple:

$$\alpha = 15^\circ$$

Demostración:

- Como $AB > BC \Rightarrow AH > HC$
- Al trazar la mediana BQ, Q estará en AH.



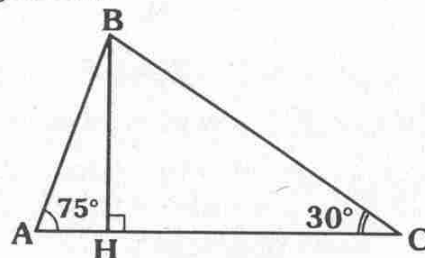
- Por teorema $BQ = AQ = QC = 2a$
- En el $\triangle QHB$, como $BQ = 2(BH)$
- Se cumple:

$$m\angle BQH = 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 30^\circ$$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

TEOREMA

En el gráfico:



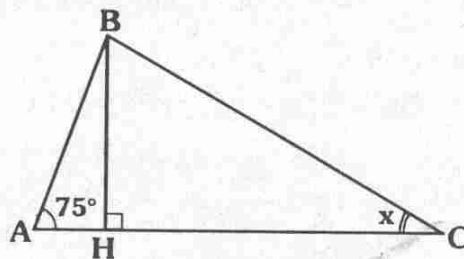
Se cumple:

$$AC = 2(BH)$$

La demostración es directa, se deja para el lector.

TEOREMA

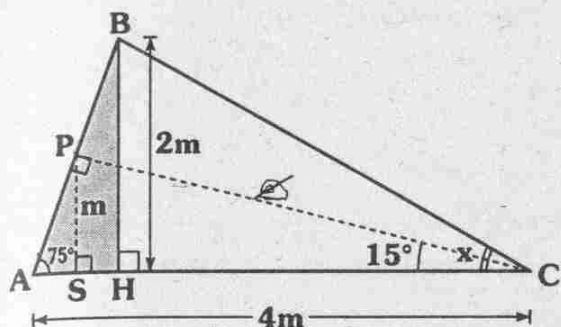
En el gráfico, $AC = 2(BH)$



Se cumple:

$$x = 30^\circ$$

Demostración:



- Sea $AC = 4m \Rightarrow BH = 2m$
- Se traza la altura CP en el $\triangle ABC$.
- En $\triangle APC$, se traza $\overline{PS}$ altura relativa a $\overline{AC}$, por teorema:

$$AC = 4(PS) \Rightarrow PC = m$$

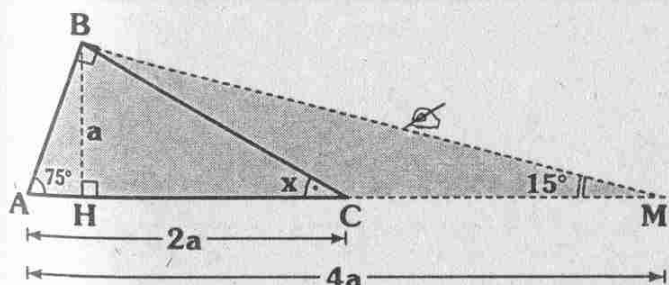
- En $\triangle AHB$, se tiene $\overline{BH} \parallel \overline{PS}$ y $BH = 2(PS) \Rightarrow$ por teorema $\overline{PS}$ es base media, por tanto:

$$AP = PB$$

- En $\triangle ABC$: $AP = PB$ y $\overline{CP}$ es altura $\Rightarrow \triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow \overline{CP}$ es bisectriz interior.

$$\therefore x = 30^\circ$$

Otra forma:



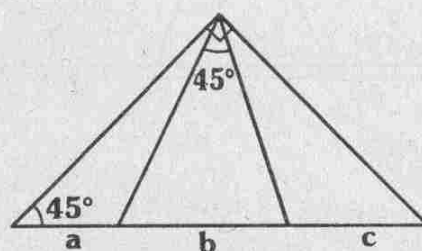
- Se traza $\overline{MB} \perp \overline{AB}$, donde M está en la prolongación de $\overline{AC}$.
- Por teorema: $AC = 4(BH) \Rightarrow AC = 4a$

- Luego: $AC = CM = 2a$
- En $\triangle ABM$, se tendrá $AC = CM$, es decir $\overline{BC}$ es mediana $\Rightarrow BC = 2a$
- En $\triangle BHC$ notable.

$$\therefore x = 30^\circ$$

TEOREMA

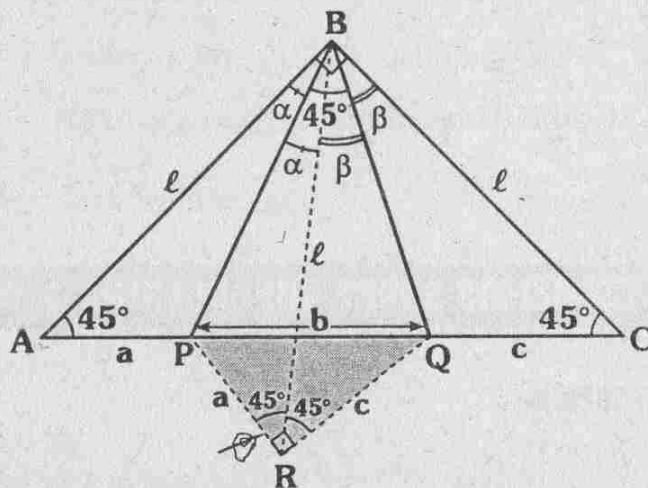
En el gráfico:



Se cumple:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Demostración:



- Sea $m\angle ABP = \alpha$ y $m\angle QBC = \beta$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$
- Se traza $\overline{BR}$ tal que: $RB = \ell$
y $m\angle PBR = \alpha \Rightarrow m\angle RBQ = \beta$

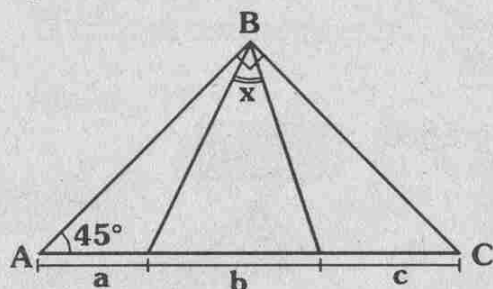
Luego: $\triangle ABP \cong \triangle RBP$ (LAL) $\Rightarrow PR = a$ y $m\angle PRB = 45^\circ$

$\triangle RBQ \cong \triangle CBQ$ (LAL) $\Rightarrow RQ = c$ y $m\angle QRB = 45^\circ$

En $\triangle PRQ$: $b^2 = a^2 + c^2$

TEOREMA

En el gráfico, si $b^2 = a^2 + c^2$

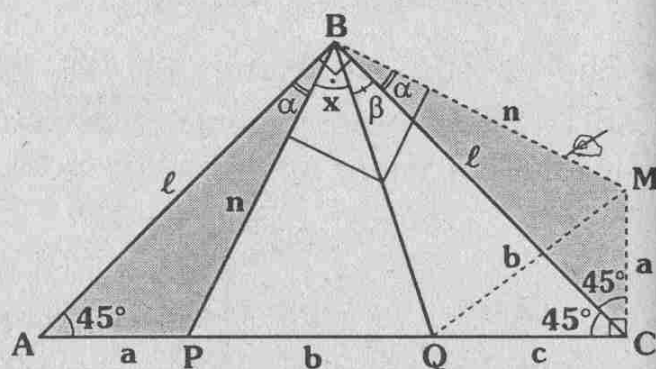


Entonces, se cumple:

$$x = 45^\circ$$

Demostración:

- Se construye $\triangle BCM$ congruente con $\triangle BAP$.
- Luego: $m\angle QCM = 90^\circ$
- En $\triangle QCM$: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por condición: $a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow QM = b$
- $\triangle PBQ \cong \triangle MBQ$ (LLL) $\Rightarrow x = \alpha + \beta$
- Como: $m\angle PBM = 90^\circ \Rightarrow 2x = 90^\circ$

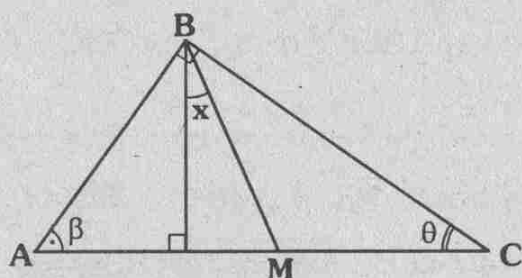


$$\therefore x = 45^\circ$$

TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA

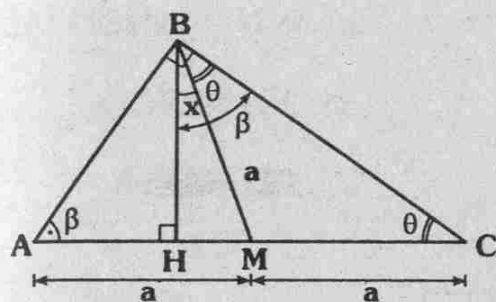
TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana para el $\triangle ABC$.



Se cumple:

$$x = \beta - \theta$$

Demostración:

- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$AM = MC = MB$$

- $\triangle MBC$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle MBC = \theta$$

- En $\triangle ABC$, como $\overline{BH}$ es altura

$$\Rightarrow m\angle HBC = \beta$$

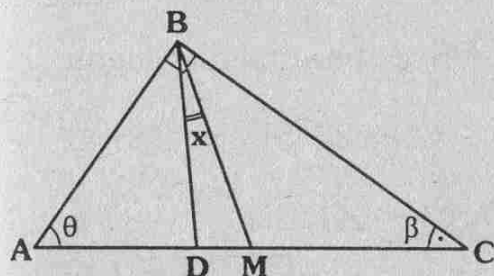
$$\Rightarrow x + \theta = \beta$$

$$\therefore x = \beta - \theta$$

TEOREMA

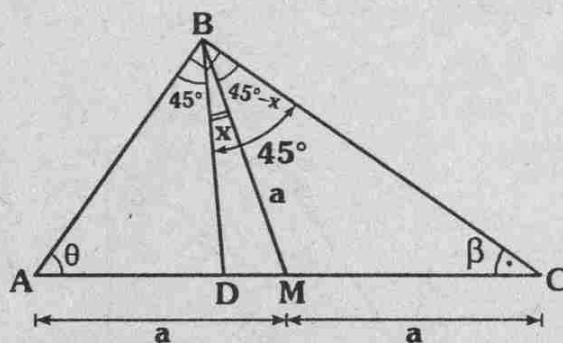
En el gráfico, para el $\triangle ABC$.

- $\overline{BD}$ es bisectriz interior.
- $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$x = \frac{\theta - \beta}{2}$$

Demostración:

- Como $\overline{BM}$ es mediana, por teorema:

$$AM = MB = MC \Rightarrow \theta = 45^\circ + x \quad \dots (I)$$

$$\beta = 45^\circ - x \quad \dots (II)$$

- Restando (I) y (II):

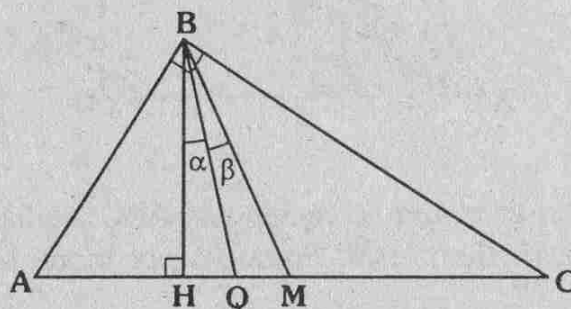
$$\theta - \beta = 2x$$

$$\therefore x = \frac{\theta - \beta}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, para el $\triangle ABC$:

- $\overline{BH}$ es altura.
- $\overline{BQ}$ es bisectriz interior y
- $\overline{BM}$ es mediana.



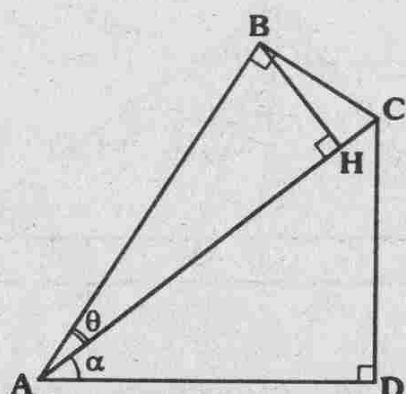
Se cumple:

$$\alpha = \beta$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA

En el gráfico, se cumple:



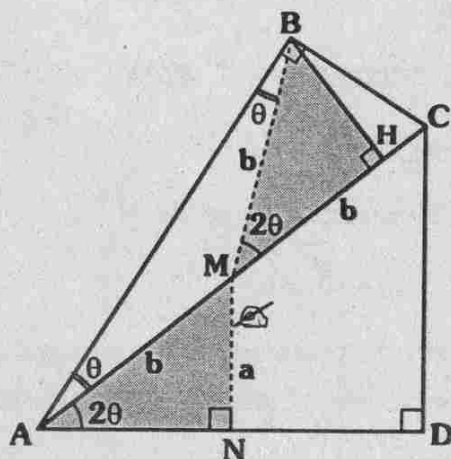
$$\alpha = 2\theta \Leftrightarrow CD = 2(BH)$$

Demostración:

Parte I

- Sea $\alpha = 2\theta$, se va a demostrar:

$$CD = 2(BH)$$



- En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- En el $\triangle ADC$, se traza la base media $\overline{MN}$, por teorema:

$$CD = 2(MN), \text{ sea } MN = a \Rightarrow CD = 2a$$

- Luego:

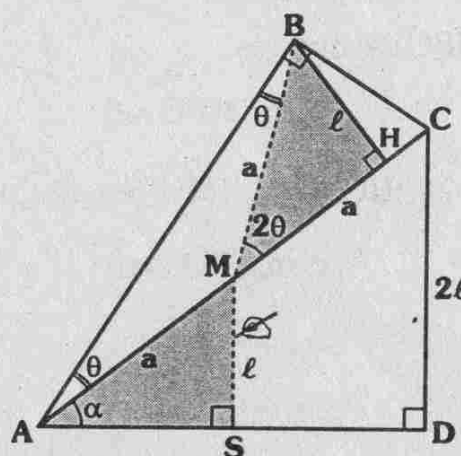
$$\triangle AMN \cong \triangle MBH \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow BH = MN = a$$

$$\therefore CD = 2(BH)$$

Parte II

- Sea $CD = 2(BH)$ se va a demostrar $\alpha = 2\theta$.



- Se traza la mediana BM en el triángulo ABC, por teorema:

$$BM = MA = MC = a$$

- En el $\triangle ADC$ se traza $\overline{MS} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, luego:

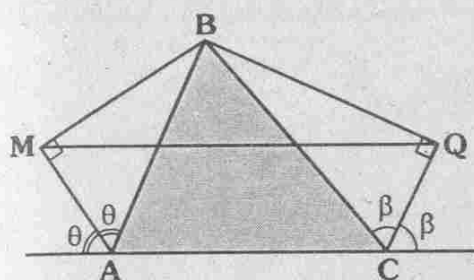
$$CD = 2(MS) \Rightarrow MS = \ell$$

- $\triangle ASM \cong \triangle MBH$

$$\therefore \alpha = 2\theta$$

TEOREMA

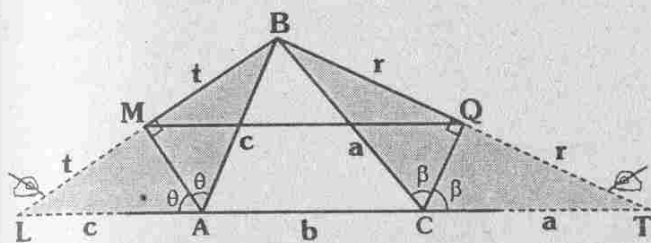
En el gráfico donde "p" es el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$MQ = p \quad \text{y} \quad \overline{MQ} \parallel \overline{AC}$$

Demostración:



- Por condición:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Se prolonga $\overline{BM}$ y $\overline{CA}$, los cuales se cortan en L, en $\triangle LAB$ vemos que $\overline{AP}$ es bisectriz y altura $\Rightarrow \triangle LAB$ es isósceles, luego:

$$AL = c \quad \text{y} \quad LM = MB$$

- Análogamente se prueba que el $\triangle BCT$ es isósceles, entonces:

$$CB = CT = a \quad \text{y} \quad BQ = QT$$

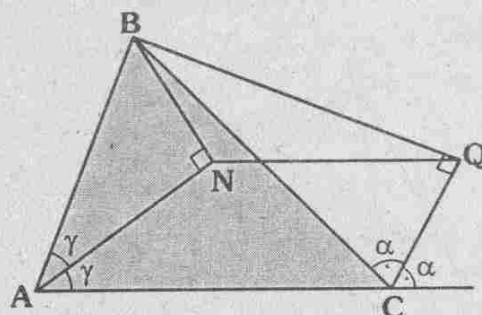
- En $\triangle LBT$; se tendrá que $\overline{MQ}$ es base media, entonces:

$$MQ = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{y}$$

$$\overline{MQ} \parallel \overline{AB}$$

TEOREMA

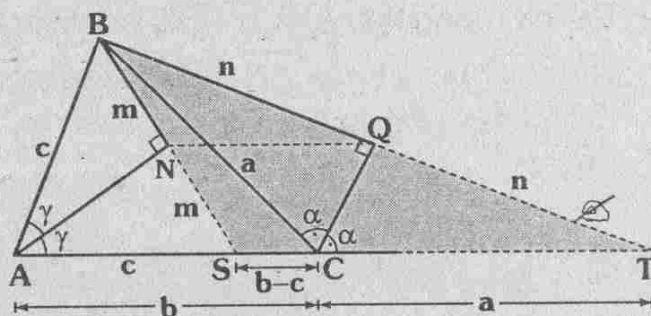
Sea p el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$NQ = p - AB \quad \text{y} \quad \overline{NQ} \parallel \overline{AC}$$

Demostración:



- En el gráfico se está considerando $b > c$ (aunque no necesariamente, sino lo fuera se prueba análogamente).

- $\triangle ABS$ y $\triangle BCT$ son isósceles.

$$\Rightarrow AS = c ; CT = a ; BN = NS \quad \text{y} \quad BQ = QT$$

- $\triangle SBT$: $\overline{NQ}$ es base media.

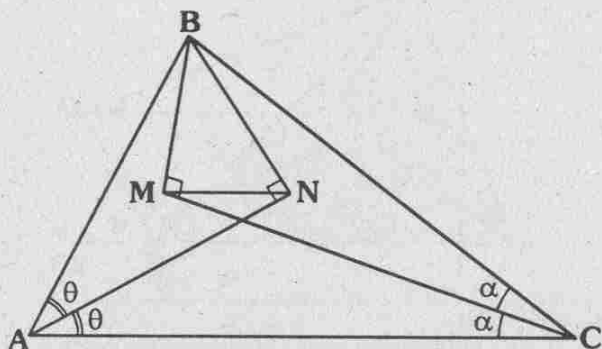
$$\Rightarrow NQ = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{y} \quad \overline{NQ} \parallel \overline{ST}$$

$$NQ = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2}$$

$$\therefore NQ = p - c \quad \text{y} \quad \overline{NQ} \parallel \overline{AC}$$

TEOREMA

En el gráfico, p es el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$MN = p - AC \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{AC}$$

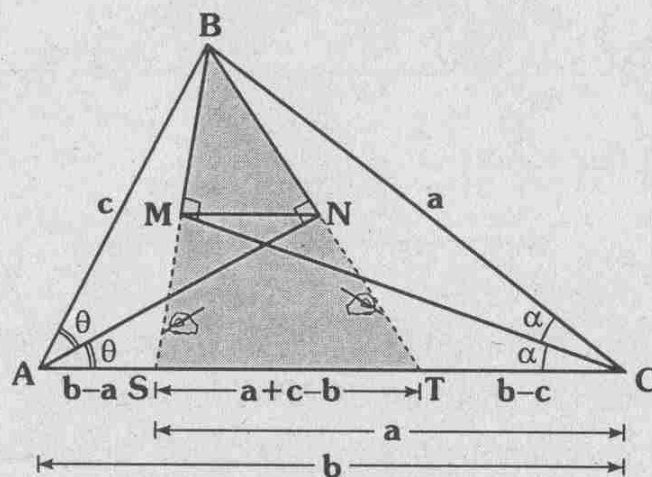
Demostración:

- En los triángulos ABT y CBS se observará que las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente son también bisectrices, entonces:

- $\triangle ABT$ y $\triangle CBS$ son isósceles

$$\Rightarrow AB = AT = c ; \quad CB = CS = a ;$$

$$BN = NT \quad \text{y} \quad BM = MS$$



- En triángulo SBT: $\overline{MN}$ es base media, entonces:

$$MN = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{ST}$$

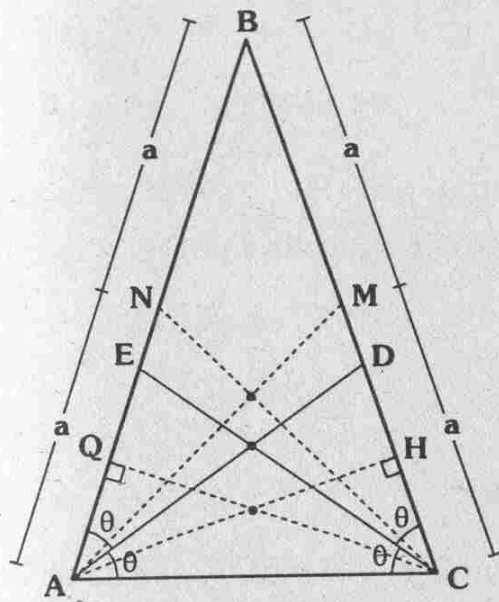
$$\Rightarrow MN = \frac{a+b+c-2b}{2} = \frac{2p-2b}{2}$$

$$\therefore MN = p - b$$

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES

TEOREMA

En el gráfico, $AB = BC$



Entonces:

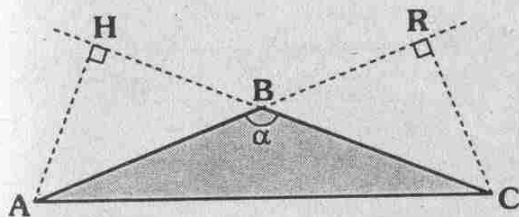
- $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$: alturas $\Rightarrow \boxed{AH = CQ}$
- $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: medianas $\Rightarrow \boxed{AM = CN}$
- $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ bisectrices $\Rightarrow \boxed{AD = CE}$

Cada uno de los resultados indicados queda como ejercicio para el lector.



Observación

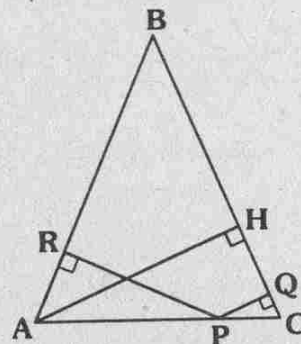
Si un triángulo es isósceles y obtusángulo.



Si $\alpha > 90^\circ$ y $AB = BC \Rightarrow \boxed{AH = CR}$

TEOREMA

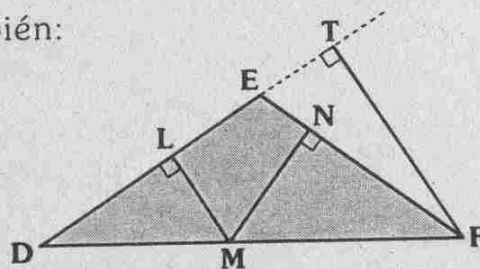
- ❖ La suma de distancias de un punto de la base a los otros lados, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas trazadas de los extremos de la base.



Si $AB = BC$ y $P \in \overline{AC}$

$$\Rightarrow \boxed{PR + PQ = AH}$$

También:

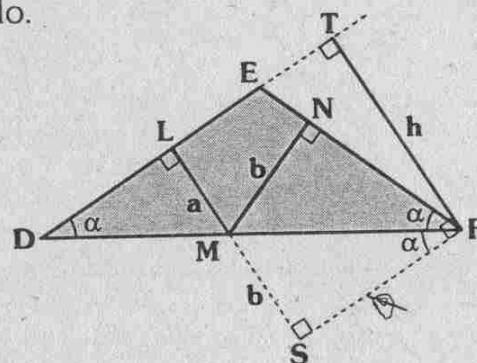


Si $DE = EF$ y $M \in \overline{DF}$

$$\Rightarrow \boxed{ML + MN = FT}$$

Demostración:

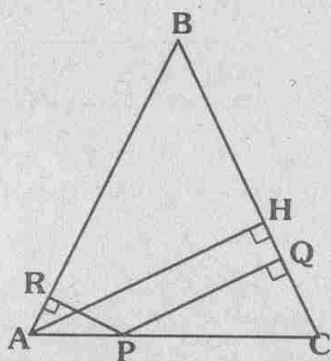
- Se puede elegir cualquiera de los triángulos (acutángulo u obtusángulo) isósceles. Escojamos el segundo triángulo.



- $\triangle DEF$: isósceles .
- Se prolonga $\overline{LM}$ y se traza $\overline{FS} \perp \overline{LM}$.
- Como $\overline{FS} \parallel \overline{DE} \Rightarrow m\angle MFS = \alpha$
- Por teorema de la bisectriz:
 $MN = MS = b$
- Como: $\overline{LT} \parallel \overline{SF}$ y $\overline{LS} \parallel \overline{TF}$
 $\Rightarrow h = a + b$

TEOREMA

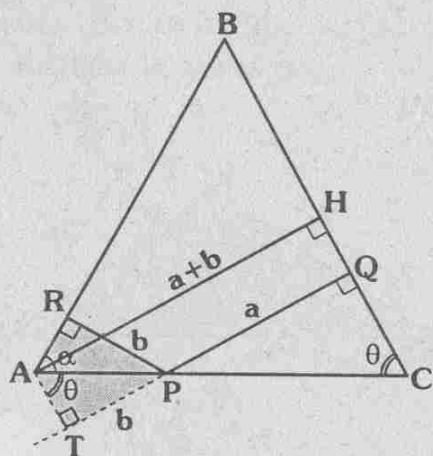
En el gráfico, si $P \in \overline{AC}$ y
 $PR + PQ = AH \Rightarrow AB = BC$



(se trata del recíproco del teorema anterior).

Demostración:

- El $\triangle ABC$, puede ser acutángulo, obtusángulo o rectángulo.



- Se prolonga $\overline{QP}$ y se traza:

$$\overline{AT} \perp \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AT} \parallel \overline{BC}$$

- Como:

$$\overline{AH} \parallel \overline{TQ} \text{ y } \overline{AT} \parallel \overline{HQ}$$

$$\Rightarrow AH = TQ \Rightarrow PT = b$$

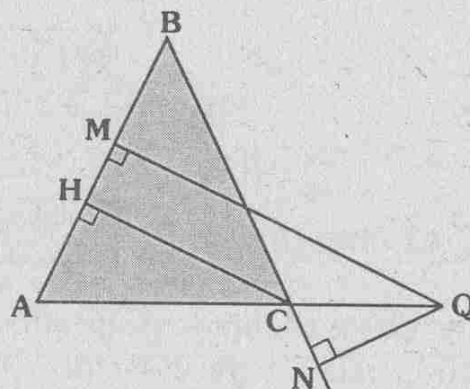
- Como $PR = PT$, por el recíproco del teorema de la bisectriz: $\alpha = \theta$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ es isósceles}$$

$$\therefore AB = BC$$

TEOREMA

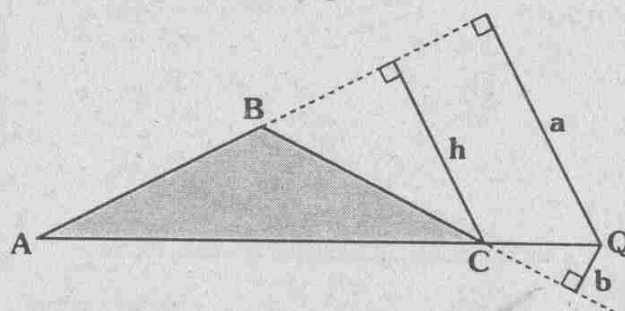
En el gráfico, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y Q está en la prolongación de $\overline{AC}$ (o $\overline{CA}$).



Se cumple:

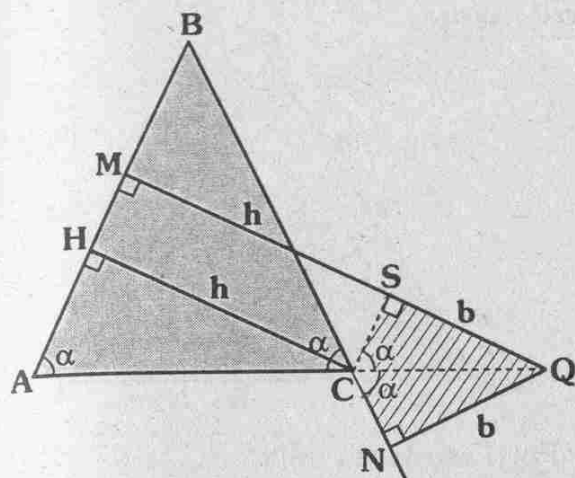
$$QM - QN = CH$$

También: si $AB = BC$



$$h = a - b$$

Demostración:



- Elijamos el primer triángulo.

- Como $AB = BC$:

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle CAB$$

- Se traza:

$$\overline{CS} \perp \overline{MQ} \Rightarrow CH = SM$$

- Como:

$$\overline{CS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle SCQ = \alpha$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$QN = QS$$

$$\Rightarrow QM = b + h$$

$$QM = QN + CH$$

$$\therefore QM - QN = CH$$



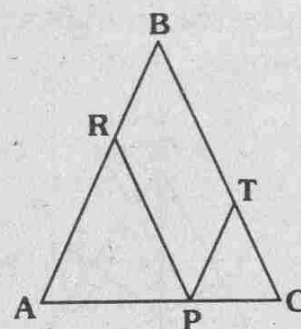
Observación

El recíproco también se cumple, es decir:

$$\text{Si } QM - QN = CH \Rightarrow AB = BC$$

TEOREMA

Si $AB = BC$, $P \in \overline{AC}$, $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$.



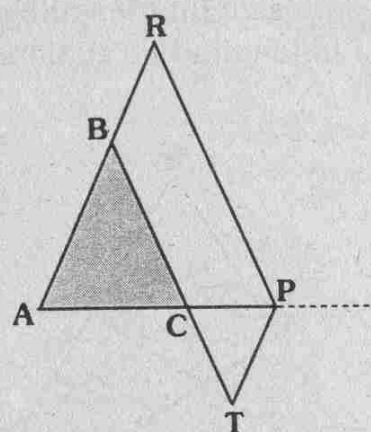
Se cumple:

$$PR + PT = AB$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

Si $AB = BC$, P está en la prolongación de $\overline{AC}$, $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$.



Se cumple:

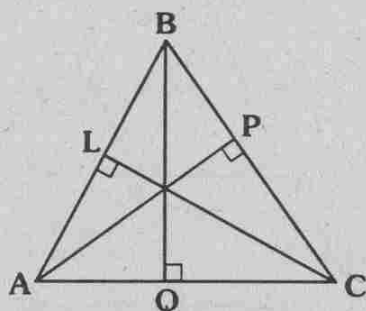
$$PR - PT = AB$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

TEOREMA

Las tres alturas de un triángulo equilátero son congruentes.



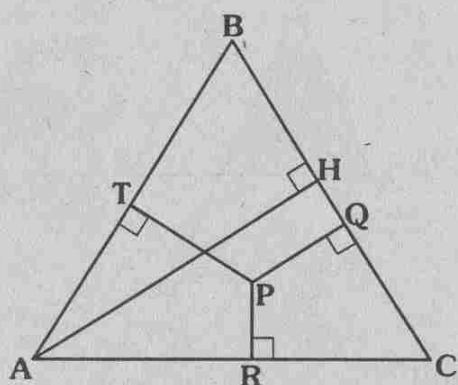
Si $\triangle ABC$ es equilátero, entonces:

$$AP = BQ = CL$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

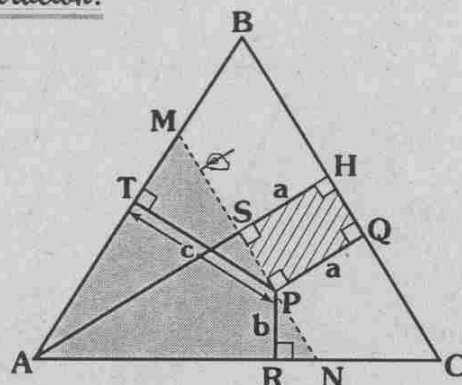
La suma de distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas.



Si $\triangle ABC$ es equilátero y P está en la región interior, entonces:

$$PQ + PR + PT = AH$$

Demostración:

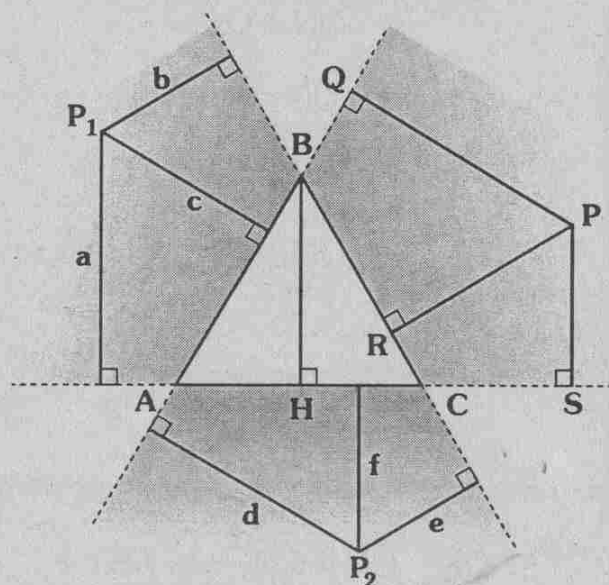


- Por P se traza $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
 $\Rightarrow \triangle AMN$ es equilátero
- Por el teorema anterior: $b + c = AS$
- Pero como: $PQ = SH = a$
 $\Rightarrow AH = AS + SH$
 $\therefore AH = b + c + a$

TEOREMA

En el gráfico, si P se ubica en cualquiera de las regiones, sombreadas (exteriores relativas a cada lado), se cumple:

$$PQ + PS - PR = BH$$



$$a + b - c = d + e - f = BH$$

Demostración:

- Por P se traza $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\Rightarrow \triangle MNA$ es equilátero

- $\triangle ABC$ equilátero $\Rightarrow BH = AT$

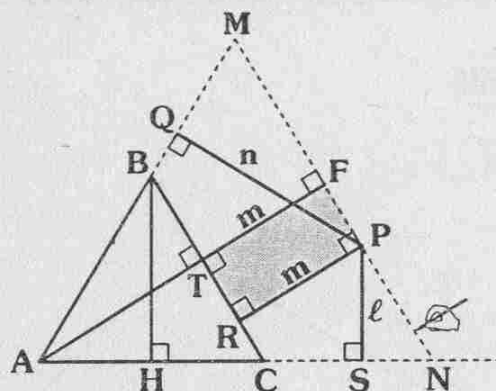
- Por teorema del $\triangle$ isósceles

$$AF = n + \ell$$

$$AT + m = n + \ell$$

$$\Rightarrow AT = n + \ell - m$$

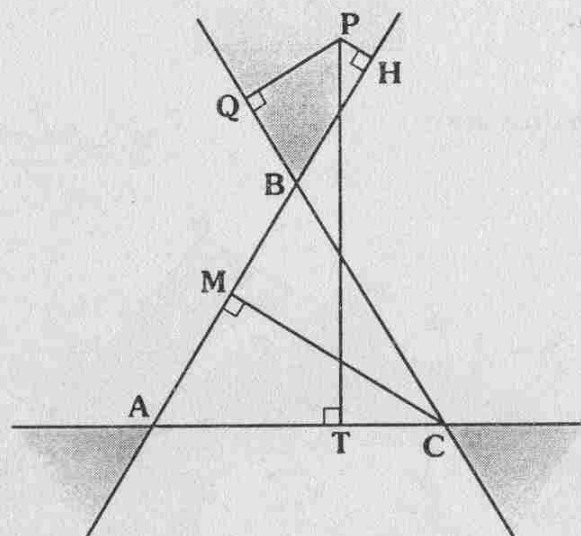
$$\therefore BH = PQ + PS - PR$$

TEOREMA

En el gráfico, el $\triangle ABC$ es equilátero y P se ubica en cualquiera de las regiones sombreadas.

Se cumple:

$$PT - PQ - PH = CM$$

Demostración:

- Se traza por P una paralela a $\overline{AC}$ que corta a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ en F y L respectivamente.

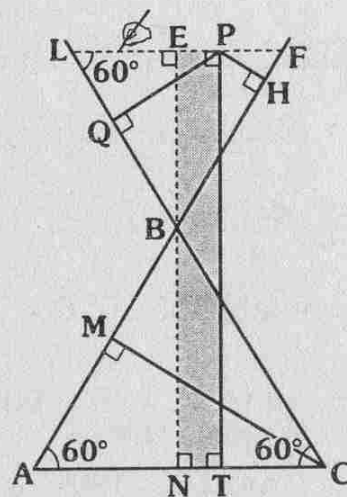
$$\triangle LBF \text{ equilátero} \Rightarrow PQ + PH = BE$$

$$\triangle ABC \text{ equilátero} \Rightarrow BN = CM$$

- Luego: $PT = BE + BN$

$$\Rightarrow PT = PQ + PH + CM$$

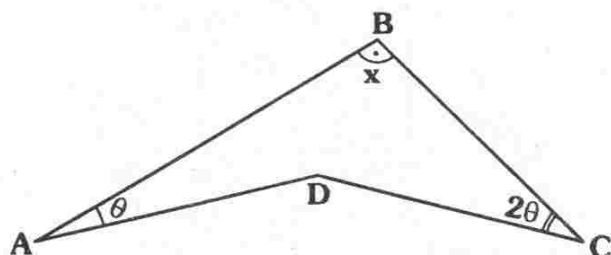
$$\therefore PT - PQ - PH = CM$$



TEOREMAS SOBRE CUADRILÁTEROS NO CONVEXOS (CÓNCAVOS)

TEOREMA

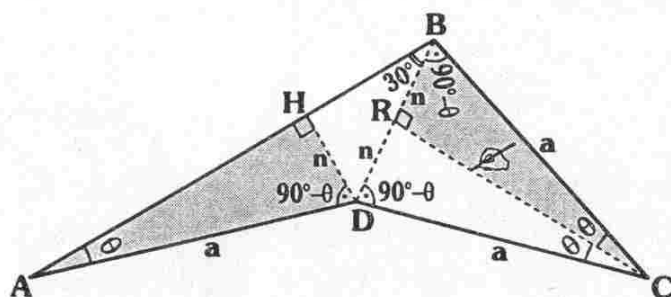
Caso I



- En el gráfico, si $AD=DC=BC$, se cumple:

$$x = 120^\circ - \theta$$

Demostración:

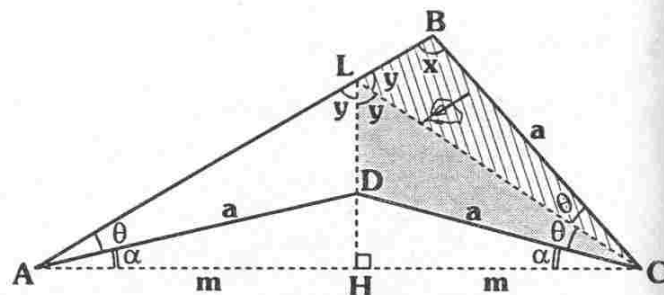


- Se traza $\overline{BD}$, entonces el $\triangle BDC$ es isósceles.
- En el $\triangle BDC$ se traza la altura $\overline{CR} \Rightarrow DR = BR$ y $m\angle BCR = m\angle RCD$
- $\triangle RBC \cong \triangle HDA$ (ALA) $\Rightarrow HD = BR$
- $\triangle BDH$: notable de $30^\circ/60^\circ$

$$\Rightarrow m\angle ABC = 30^\circ + 90^\circ - \theta$$

$$\therefore m\angle ABC = 120^\circ - \theta$$

Otra forma de demostrar:

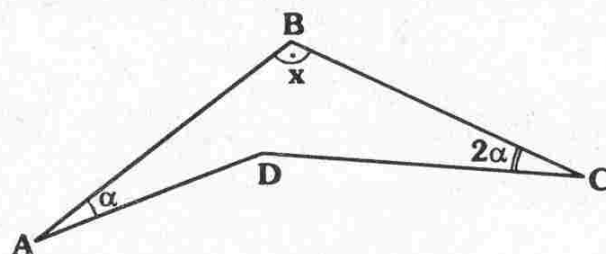


- $\triangle ADC$: isósceles
- $\overline{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow LA = LC$
- Luego: $m\angle LCD = \theta$ y $m\angle ALH = m\angle CLH = y$
- $\triangle DCL \cong \triangle BCL$ (LAL) $\Rightarrow m\angle BLC = y$
- En "L": $y + y + y = 180^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$
- En $\triangle BLC$: $x + 60^\circ + \theta = 180^\circ$

$$\therefore x = 120^\circ - \theta$$

TEOREMA

Caso II

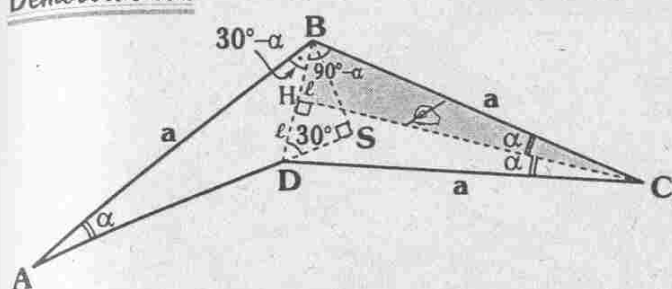


En el gráfico, $AB = BC = CD$

Se cumple:

$$x = 120^\circ - 2\alpha$$

Demostración:



• $\triangle BDC$: isósceles.

• En $\triangle BDC$ se traza la altura $\overline{CH}$, entonces:

$$BH = HD \text{ y } m\angle BCH = m\angle DCH$$

• $\triangle ASB \cong \triangle CHB$ (LAL) $\Rightarrow BS = \ell$

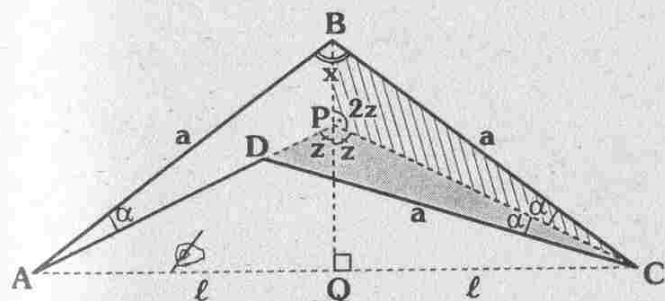
• $\triangle DSB$: notable de 30°

$$\Rightarrow m\angle ABD = 30^\circ - \alpha$$

• Luego: $m\angle ABC = 30^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha$

$$\therefore m\angle ABC = 120^\circ - 2\alpha$$

Otra forma de demostrar:



• En el $\triangle ABC$ se traza la altura $\overline{BQ}$, entonces $\overline{BQ}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

• Por teorema de la mediatriz:

$$AP = PC \text{ y } m\angle APQ = m\angle QPC = z$$

• $\triangle DCP \cong \triangle BCP$ (LAL) $\Rightarrow m\angle BPC = 2z$

• Luego: $z + 2z = 180^\circ \Rightarrow z = 60^\circ$

• En $\triangle ABCP$: $x + \alpha + \alpha = 2z = 120^\circ$

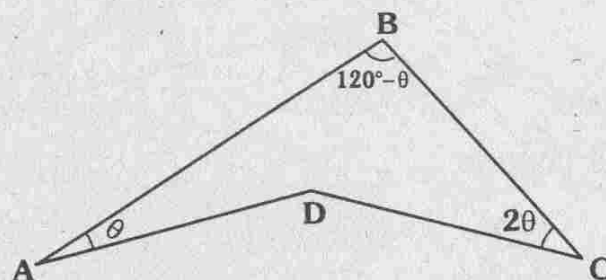
$$\therefore x = 120^\circ - 2\alpha$$

Los siguientes teoremas son los recíprocos de los dos teoremas anteriores mencionados.

ANALICEMOS PRIMERO LOS RECÍPROCOS DEL CASO I

TEOREMA

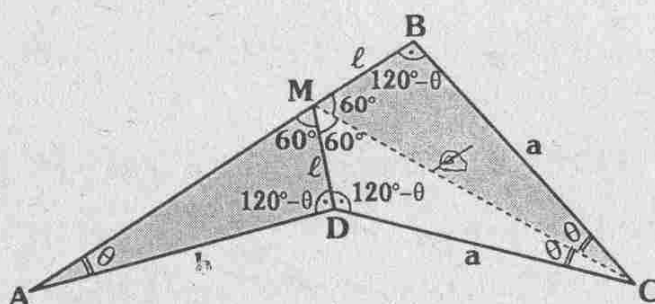
En el gráfico, si $BC = CD$



Se cumple:

$$AD = BC$$

Demostración:



• Se traza $\overline{CM}$ bisectriz, luego:

• $\triangle BCM \cong \triangle DCM$ (LAL)

$$\Rightarrow MB = MD = \ell$$

• También:

$$m\angle BMC = m\angle CMD = 60^\circ$$

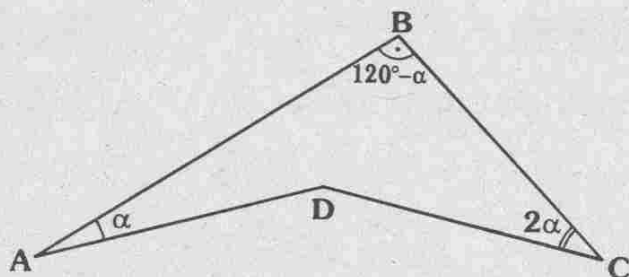
• Luego:

$$\triangle AMD \cong \triangle CMB$$
 (LAL)

$$\Rightarrow a = b$$

TEOREMA

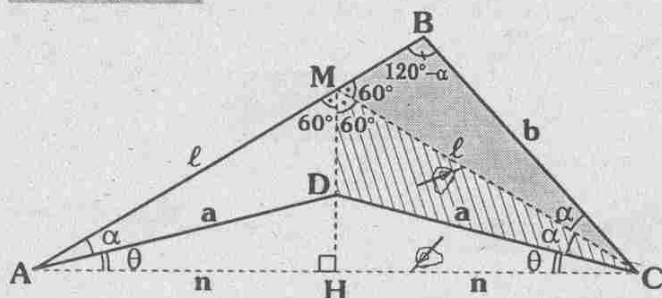
En el gráfico, $AD = DC$.



Se cumple:

$$BC = CD$$

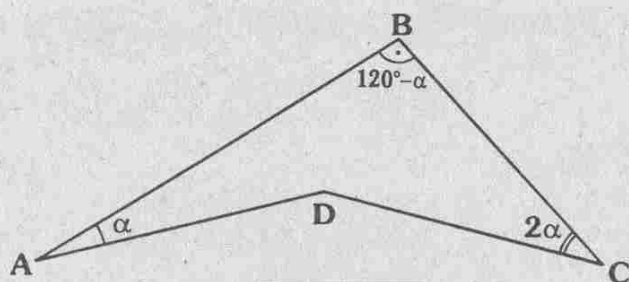
Demostración:



- $\triangle ADC$: isósceles, $\overline{DH}$ es altura, mediana y bisectriz.
- $\overline{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow AM = MC$.
- Como:
 $m\angle AMC = 120^\circ \Rightarrow m\angle AMD = m\angle DMC = 60^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BMC = 60^\circ$
- $\triangle DMC \cong \triangle BMC$ (ALA)
 $\therefore a = b$

TEOREMA

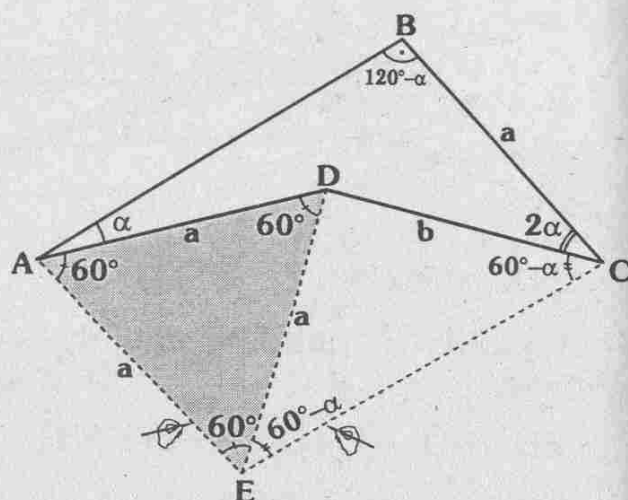
En el gráfico, $AD = BC$.



Se cumple:

$$DC = BC$$

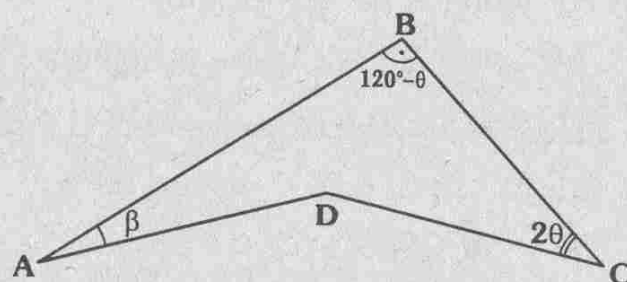
Demostración:



- Por A se traza $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ tal que:
 $AE = BC \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{EC}$
- Luego:
 $m\angle DAE = 60^\circ$ y $m\angle DCE = 60^\circ - \alpha$
- También, como $DA = DE$ y
 $m\angle BAE = 60^\circ \Rightarrow \triangle DAE$: equilátero
 $\Rightarrow m\angle DEC = 60^\circ - \alpha$
- $\triangle EDC$: isósceles
 $\Rightarrow a = b$

TEOREMA

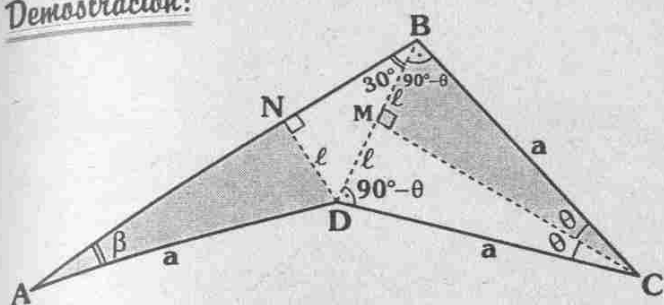
En el gráfico, $AD = DC = BC$.



Se cumple:

$$\beta = \theta$$

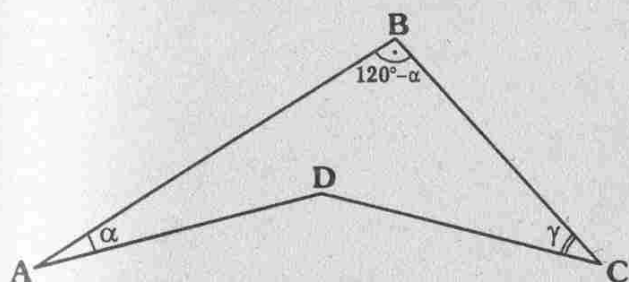
Demostración:



- Se traza $\overline{BD}$, entonces el $\triangle BDC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle DBC = 90^\circ - \theta$.
- Como:
 $m\angle ABC = 120^\circ - \theta \Rightarrow m\angle ABD = 30^\circ$
- Se traza: $\overline{CM} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DN} \perp \overline{AB}$.
- Luego: $\triangle AND \cong \triangle BMC$
 $\therefore \beta = \theta$

TEOREMA

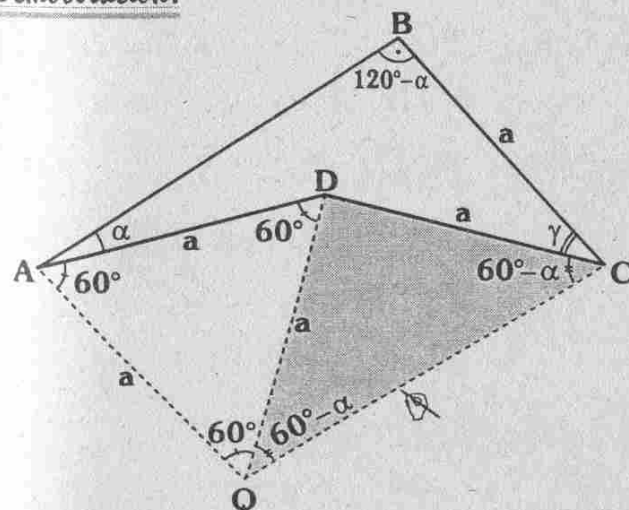
En el gráfico, $AD = BC = CD$.



Se cumple:

$$\gamma = 2\alpha$$

Demostración:

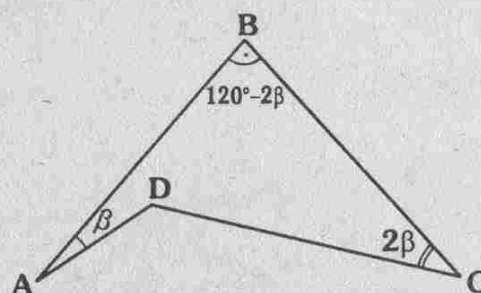


- Se traza $\overline{AQ} \parallel \overline{BC}$ y $AQ = BC$, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{QC}$, luego $m\angle DAQ = 60^\circ$.
- Como: $AD = AQ$ y $m\angle DAQ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ADQ$: es equilátero
 $\triangle DQC$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle DQC = m\angle DCQ = 60^\circ - \alpha$
- Como $\overline{CQ} \parallel \overline{BA}$, entonces:
 $\gamma + 60^\circ - \alpha + 120^\circ - \alpha = 180^\circ$
 $\therefore \gamma = 2\alpha$

AHORA ANALICEMOS LOS RECÍPROCOS DEL CASO II

TEOREMA

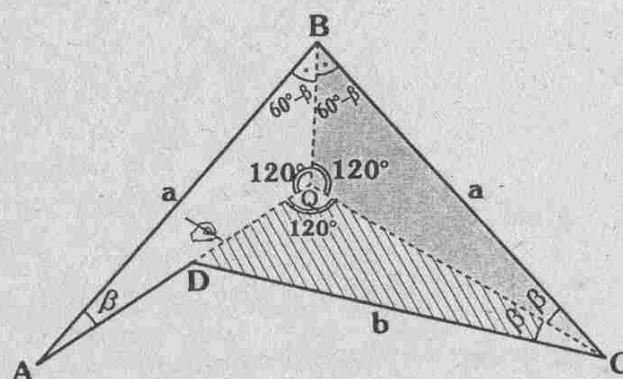
En el gráfico, $AB = BC$.



Se cumple:

$$BC = CD$$

Demostración:



- Se traza la bisectriz del $\angle ABC$, que corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q, entonces:

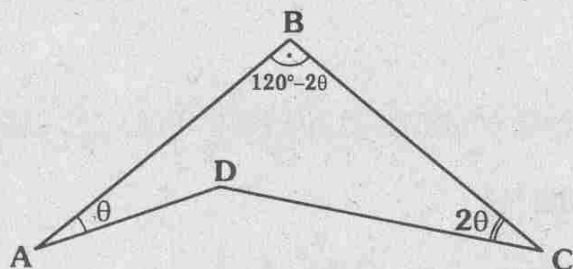
$$m\angle AQB = m\angle CQB = 120^\circ$$

- Luego: $m\angle DQC = 120^\circ$
- $\triangle QCB \cong \triangle QCD$ (ALA)

$$\therefore a = b$$

TEOREMA

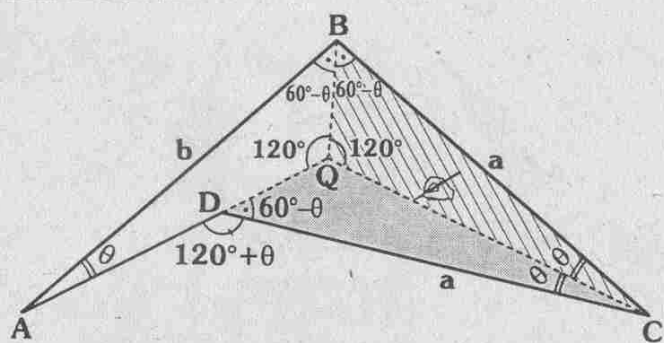
En el gráfico, $BC = CD$.



Se cumple:

$$AB = BC$$

Demostración:



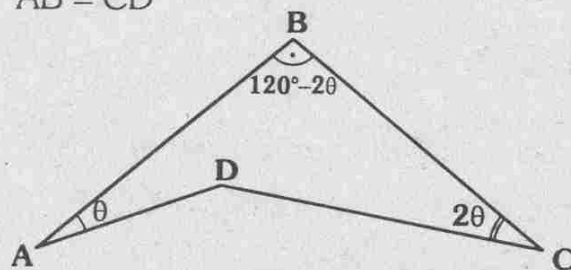
- Se traza la bisectriz del $\angle BCD$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q.
- Como: $m\angle ADC = 120^\circ + \theta$
 $\Rightarrow m\angle CDQ = 60^\circ - \theta$
- Luego: $\triangle DCQ \cong \triangle BQC$
 $\Rightarrow m\angle CBQ = 60^\circ - \theta$
- También: $m\angle ABQ = 60^\circ - \theta$

- $\triangle ABQ \cong \triangle CBQ$ (ALA)

$$\therefore a = b$$

TEOREMA

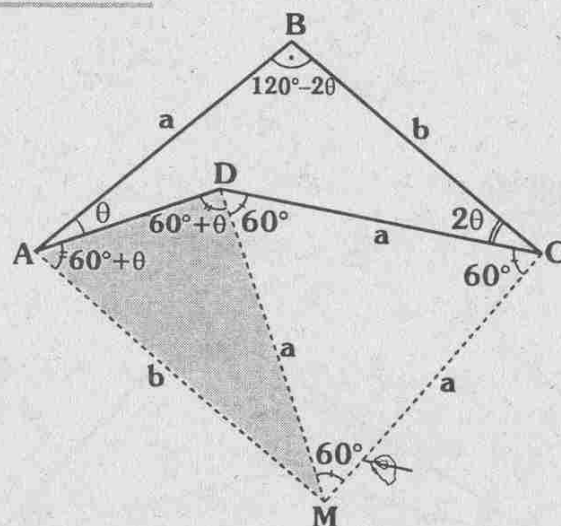
Si $AB = CD$



Se cumple:

$$BC = AB$$

Demostración:

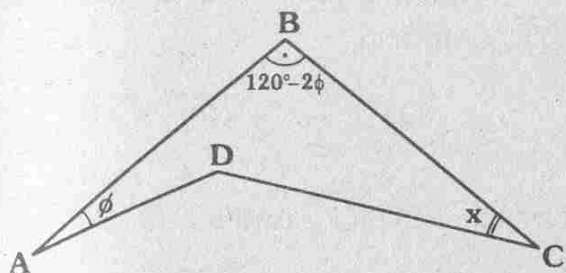


- Se traza: $\overline{CM} \parallel \overline{BA}$ tal que $CM = a$
 $\Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AM}$ y $AM = b$
- Como $CD = CM$ y $m\angle DCM = 60^\circ$, entonces el $\triangle DCM$ es equilátero.
- Como: $\overline{AM} \parallel \overline{DC}$
 $\Rightarrow m\angle DAM = 60^\circ + \theta$
 $m\angle ADC = 120^\circ + \theta$
 $\Rightarrow m\angle ADM = 60^\circ + \theta$
- Luego: $\triangle ADM$ es isósceles
 $\therefore a = b$

Los dos siguientes teoremas son análogos a los anteriores, quedan como ejercicio para el lector:

TEOREMA

Si $AB = BC = CD$

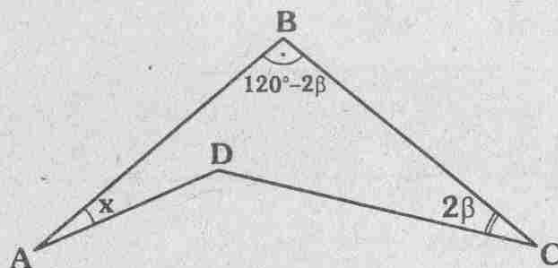


Se cumple:

$$x = 2\phi$$

TEOREMA

Si: $AB = BC = CD$



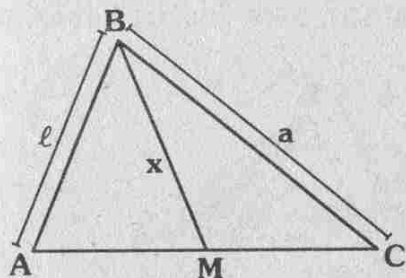
Se cumple:

$$x = \beta$$

ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

TEOREMA

En el gráfico, sea $a \geq \ell$ y $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$\frac{a - \ell}{2} < x < \frac{a + \ell}{2}$$

Demostración:

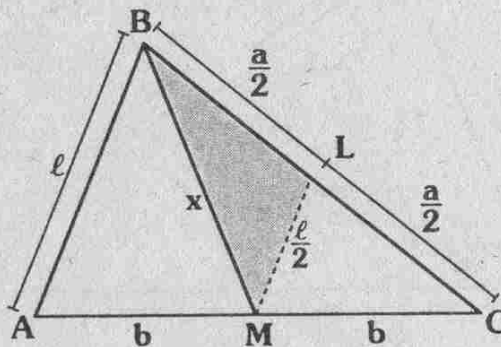
- Se traza la base media $\overline{ML}$, entonces:

$$LM = \frac{AB}{2} \Rightarrow LM = \frac{\ell}{2} \text{ y } BL = \frac{a}{2}$$

- $\triangle BLM$, por existencia de triángulos:

$$\frac{a}{2} - \frac{\ell}{2} < x < \frac{a}{2} + \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \frac{a - \ell}{2} < x < \frac{a + \ell}{2}$$



TEOREMA

Sea el triángulo ABC, con $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$; m_a , m_b y m_c son las longitudes de las tres medianas relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se cumple:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$$

Demostración:

- Por el teorema anterior:

$$m_a < \frac{b+c}{2} \quad \dots (I)$$

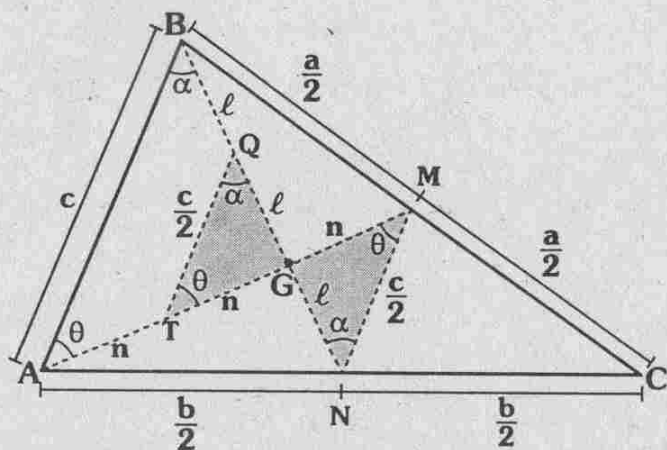
$$m_b < \frac{a+c}{2} \quad \dots (II)$$

$$m_c < \frac{a+b}{2} \quad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$m_a + m_b + m_c < a+b+c \quad \dots (*)$$

- Para la otra parte, demosremos previamente que cada dos medianas se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice.



- En el $\triangle ABC$, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son medianas
 $\Rightarrow$ Por el teorema de la base media:

$$MN = \frac{c}{2} \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{AB}$$

- En el $\triangle AGB$ se traza la base media $\overline{QT}$, entonces:

$$QT = \frac{c}{2} \quad \text{y} \quad \overline{QT} \parallel \overline{AB}$$

- Luego: $\triangle TQG \cong \triangle MNG$ (ALA)

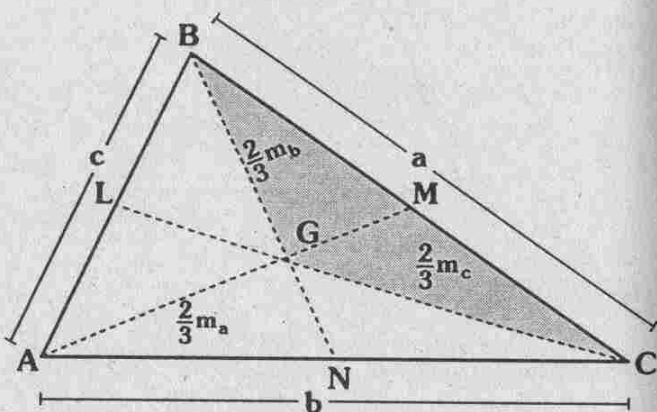
$$\Rightarrow GM = n \quad \text{y} \quad GN = \ell$$

- Es decir:

$$AG = 2(GM) \quad \text{y} \quad BG = 2(GN)$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}(AM) \quad \text{y} \quad BG = \frac{2}{3}(BN)$$

- Como cada dos medianas, se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice, veamos para las tres medianas.



- Sea:

$$AM = m_a ; CL = m_c \quad \text{y} \quad BN = m_b$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}m_a ; CG = \frac{2}{3}m_b ; BG = \frac{2}{3}m_c$$

- En el $\triangle AGB$, $\triangle AGC$ y $\triangle BGC$ por existencia:

$$b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c \quad \dots (\alpha)$$

$$c < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \quad \dots (\beta)$$

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \quad \dots (\gamma)$$

• Sumando (α) , (β) y (γ) :

$$a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c \quad \dots (**)$$

• De $(*)$ y $(**)$, se tiene:

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c$$



Observación

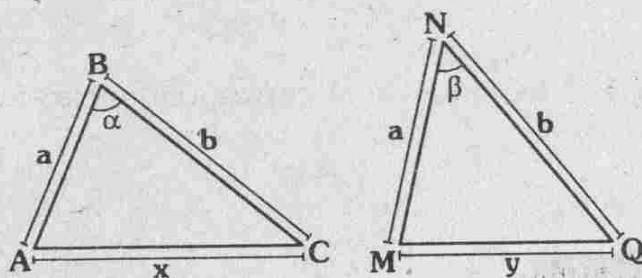
Al punto de concurrencia de las medianas se le llama baricentro, como se ve la publicación de Puntos Notables (Fascículo N° 7).

TEOREMA

(Teorema de Charnela)

Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con los lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en

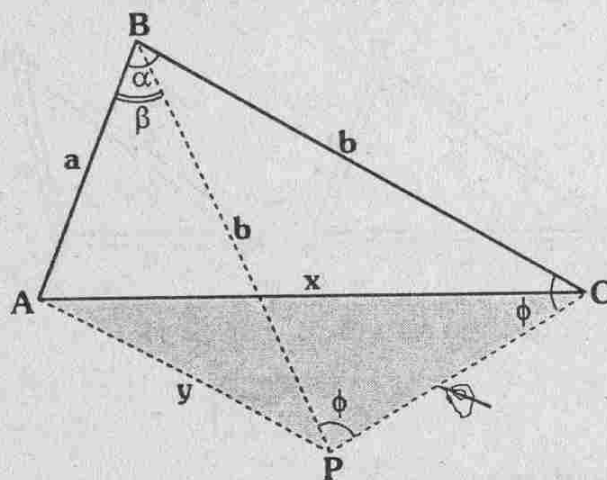
el segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo.



En el gráfico si: $\alpha > \beta$

$$\Rightarrow x > y$$

Demostración:



• Se considera el $\triangle ABC$, como $\alpha > \beta$ se traza $\overline{BP}$ tal que $m\angle ABP = \beta$ y $BP = b$.

• $\triangle ABP \cong \triangle MNQ$ (ALA)

$$\Rightarrow AP = y$$

• Como:

$$PB = BQ \Rightarrow \triangle PBQ : \text{isósceles}$$

- En $\triangle APC$:

$$m\angle APC > \phi \Rightarrow m\angle ACP < \phi$$

$$\Rightarrow m\angle APC > m\angle ACP$$

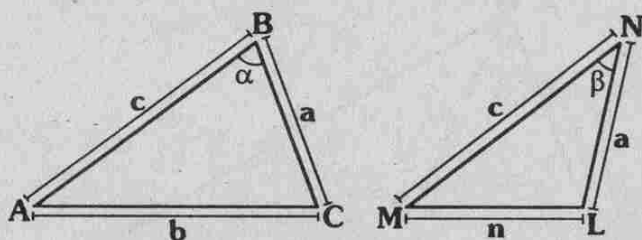
- Por teorema de la correspondencia:

$$x > y$$

TEOREMA

(Recíproco del teorema de charnela)

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo.



En el gráfico se cumple si $b > n$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha > \beta}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema se puede usar del mismo modo que el anterior, buscar alguna construcción, pero optemos por el método del absurdo.
- Es decir, supongamos que no se cumple $\alpha > \beta$, entonces

$$\alpha = \beta \quad \text{ó} \quad \alpha < \beta$$

- Si $\alpha = \beta \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL$ (LAL)

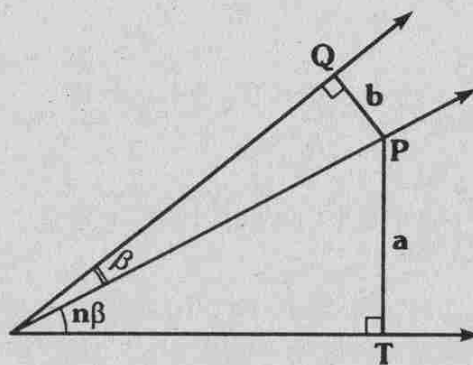
Luego $b = n$ (contradicción pues $b > n$)

- Si $\alpha < \beta \Rightarrow$ por el teorema anterior $b < n$ (contradicción pues $b > n$)
- Vemos que no se cumple: $\alpha \leq \beta$
- Por lo tanto:

$$\alpha > \beta$$

TEOREMA

En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$

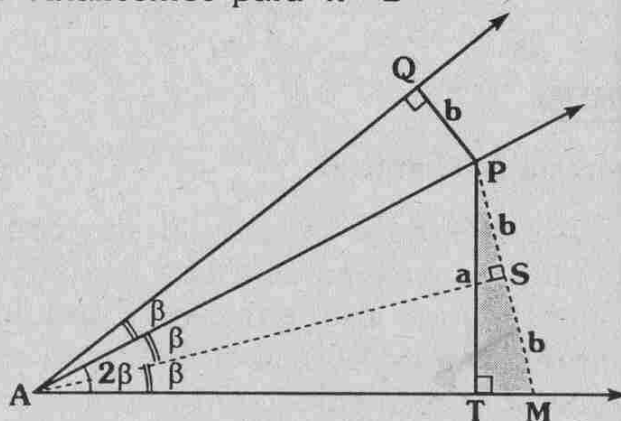


Se cumple:

$$\boxed{a < nb}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema, usemos el método de inducción, pues $n \in \mathbb{N}$.
- Analicemos para $n = 2$



- Como $m\angle TAP = 2(m\angle PAQ)$, se traza la bisectriz del ángulo PAT , se traza luego $\overline{PS} \perp \overline{AS}$ y se prolonga hasta que corte a $\overline{AT}$ en M .

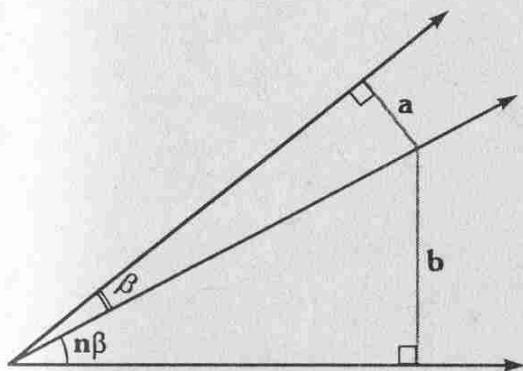
- Por teorema de la bisectriz:

$$PS = PQ = b$$

- $\triangle PAM$: isósceles $\Rightarrow PS = SM = b$

- En $\triangle PTM$: $a < 2b$

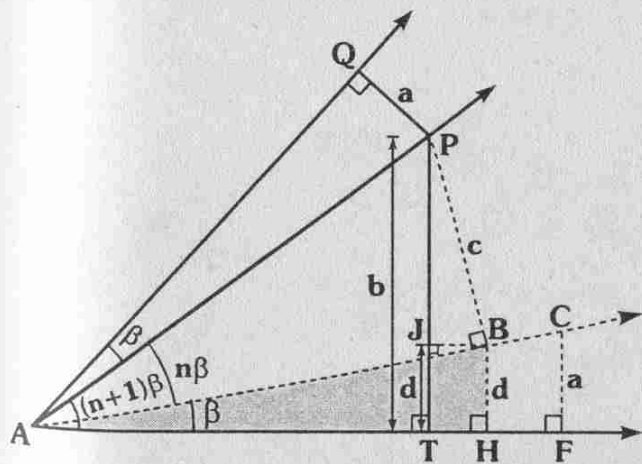
- El segundo paso de la inducción es suponer que el teorema cumple para " n ", $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.



- Hipótesis inductiva:

$$b < na$$

- Ahora demostremos que el teorema cumple para " $n+1$ ".



- Sea:

$$m\angle PAT = (n+1)m\angle QAP$$

se traza $\overline{AB}$ tal que $m\angle PAB = n\beta$, luego se traza $\overline{PB} \perp \overline{AB}$, por hipótesis inductiva:

$$c < na \quad \dots (I)$$

- Como:

$$m\angle BAH = \beta \quad y$$

$$AP > AB$$

- Se ubica C en $\overline{AB}$, tal que $AC = AP$ y se traza $\overline{CF} \perp \overline{AT}$.

- Luego: $\triangle AQP \cong \triangle AFC$

$$\Rightarrow CF = a$$

- Tenemos entonces:

$$d < a \quad \dots (II)$$

- En $\triangle PJB$:

$$b - d < c \quad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$c + d + (b - d) < na + a + c$$

$$\therefore b < a(n+1)$$

- Con lo cual queda concluida la demostración.

ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN O DE TRAZOS AUXILIARES

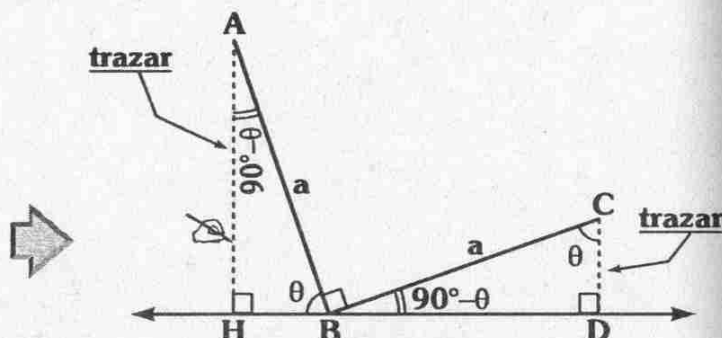
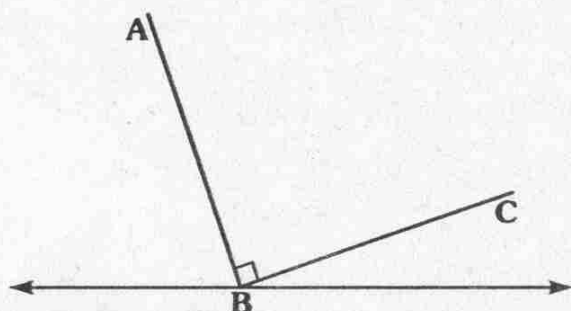
Al resolver diferentes ejercicios nos encontraremos frente a diversas situaciones, en algunos de ellos se resolverán con solo analizando la figura o "completando" ángulos, pero en algunos será necesario hacer algún trazo adicional (o varios). Este capítulo está orientado a conocer algunos criterios sobre construcciones o trazos auxiliares, los hay desde los más sencillos hasta los más difíciles, algunos de ellos ya fueron expuestos en nuestra publicación de "TRIÁNGULOS".

Los trazos son producto del razonamiento, buscando generalmente congruencia o ángulos que se repitan, los presentados aquí no son las únicas, el lector puede encontrar sus propios criterios.

A continuación, algunos criterios:

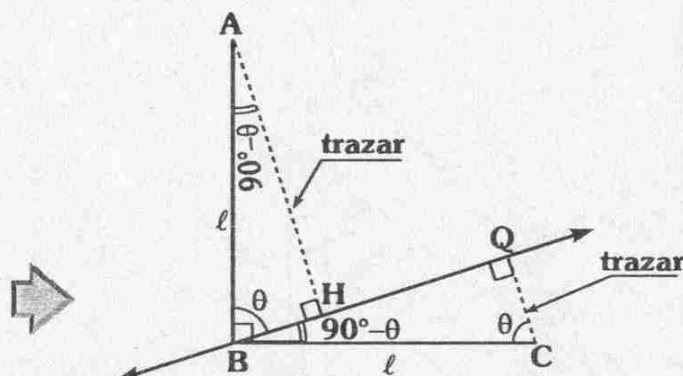
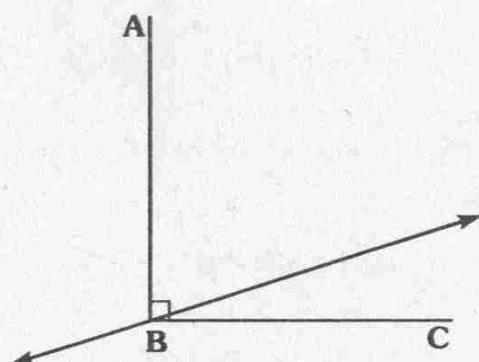
■ Si $AB = BC$

Se te sugiere:



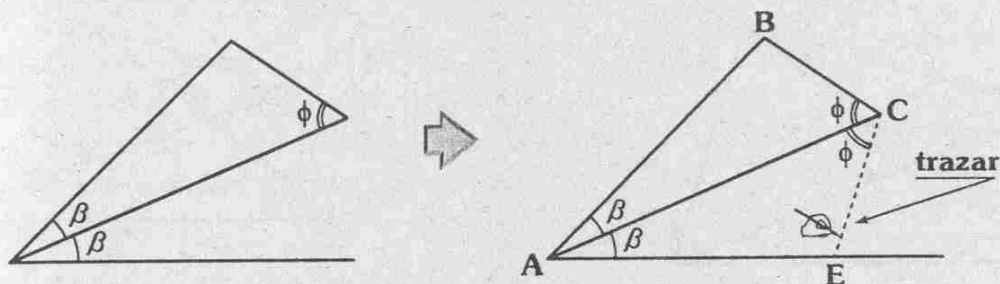
Se aprovecha: $\triangle ABH \cong \triangle BCD$

■ Si $AB = BC$



Se aprovecha: $\triangle ABH \cong \triangle BCQ$

■ Si en algún ejercicio, se presenta alguna bisectriz, por ejemplo:

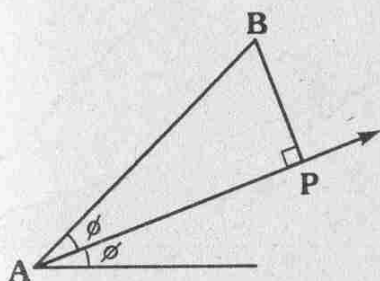


Se aprovechará:

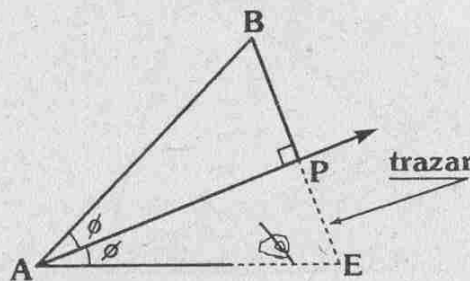
$$\triangle ACB \cong \triangle ACE \Rightarrow BC = CE \text{ y } AB = AE$$



Observación



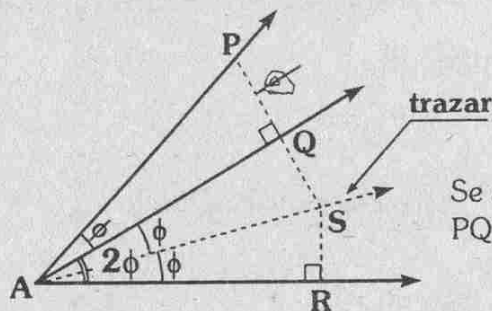
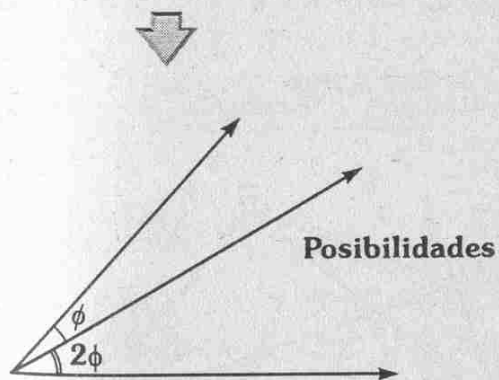
Este trazo es muy útil, como veremos en la resolución de muchos problemas.



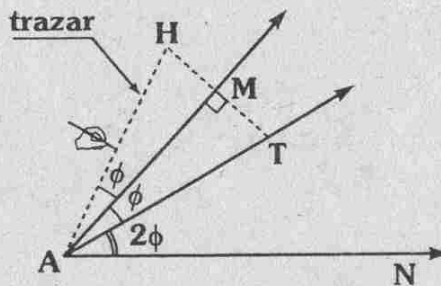
Aprovechamos que el $\triangle ABE$ será isósceles, entonces:

$$AB = AE \text{ y } BP = PE$$

■ Si se muestra un ángulo con la siguiente característica:

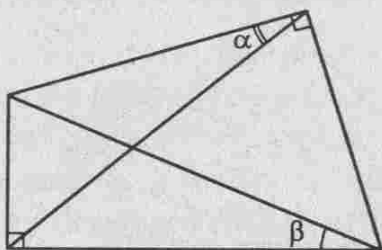


Se aprovecharía:
 $PQ = QS = SR$



Se aprovecharía:
 $\overrightarrow{AT}$ es bisectriz del $\angle HAN$ y $HM = MT$

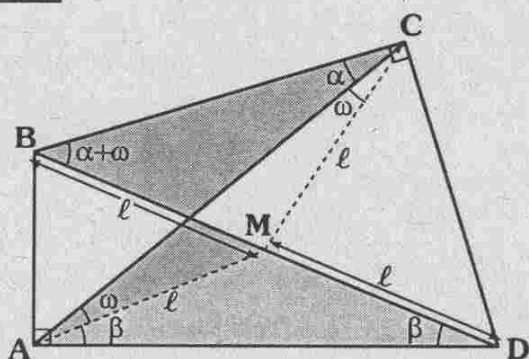
■ $\triangle_s$ rectángulos con igual hipotenusa.



En el gráfico, se cumple:

$$\alpha = \beta$$

Prueba:



- Como los triángulos rectángulos ABD y BCD tienen la misma hipotenusa, en ambos se traza la mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = BM = MD = MC$$

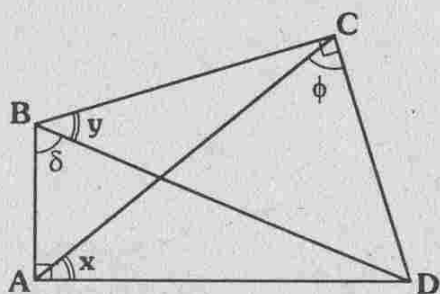
- $\triangle AMC$ isósceles $\Rightarrow m\angle MAC = m\angle ACM$

- En la parte sombreada:

$$2\beta + \omega = \alpha + \alpha + \omega \Rightarrow \beta = \alpha$$



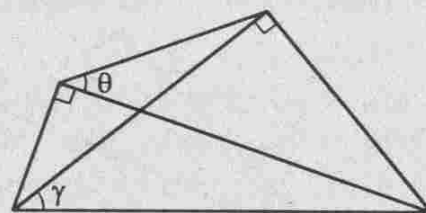
Observación



También se cumple:

$$x = y \wedge \phi = \delta$$

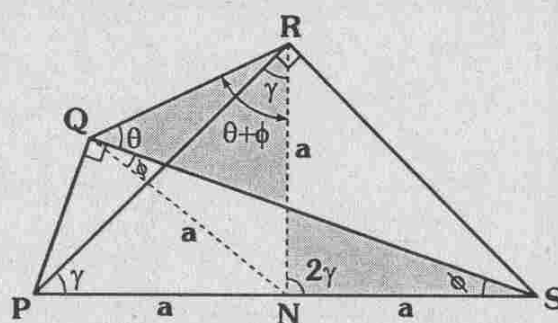
También:



En el gráfico, se cumple:

$$\theta = \gamma$$

Prueba:



- Análogo al ejercicio anterior, se traza las medianas $\overline{QN}$ y $\overline{RN}$ en los triángulos PQS y ARS, por teorema.

$$QN = NP = NS = NR$$

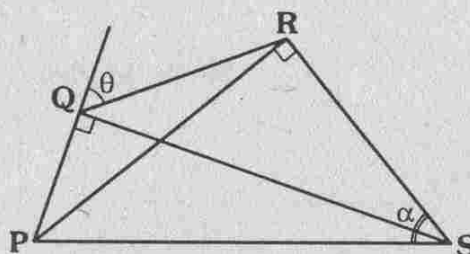
- $\triangle QNR$: isósceles

- En la parte sombreada:

$$\phi + 2\gamma = \theta + \theta + \phi \Rightarrow \gamma = \theta$$



Observación



También se cumple:

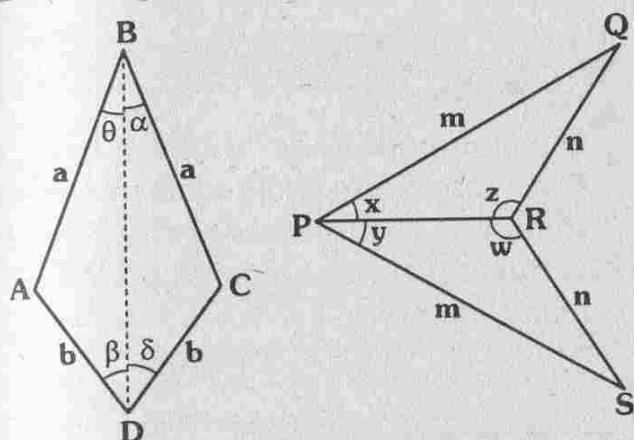
$$\theta = \alpha$$

Nota

Los dos casos anteriores, es decir los cuadriláteros ABCD y PQRS, son objeto de un estudio más general, a los cuales se les denomina cuadrilátero inscriptible.

Se hizo mención, pues para los casos expuestos teníamos dos triángulos rectángulos con hipotenusa común.

■ En los gráficos mostrados:



- Se cumple: $\theta = \alpha$; $\beta = \delta$; $x = y$; $z = w$

Prueba:

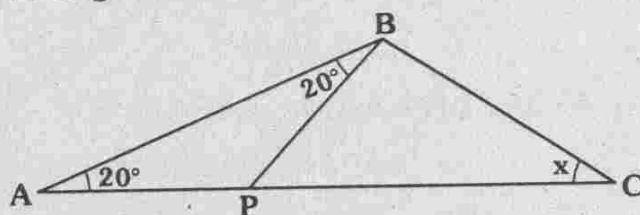
- En el primer gráfico, notar $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ (LAL)
- En el segundo gráfico: $\triangle PRQ \cong \triangle PRS$ (LAL)

APLICACIÓN

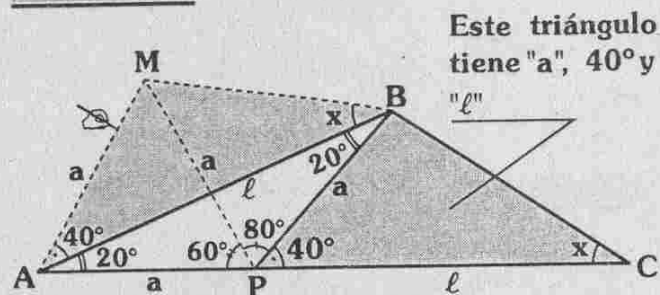
A continuación se resolverán dos problemas de construcción de distintas formas (con trazos auxiliares), para ilustrar los criterios expuestos, ya en los problemas, principalmente los del tipo semestral y semestral intensivo veremos más aplicaciones.

Problema N° 1

En el gráfico $AB = PC$. Calcule x

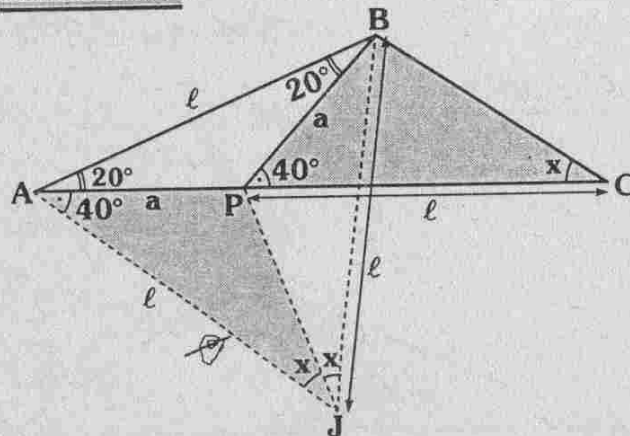


Resolución 1



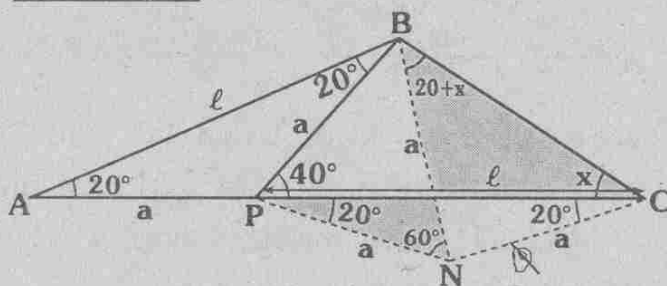
- Se busca un $\triangle$ que tenga "a", "40°" y "l", para ello: se traza $\overline{AM}$, tal que $MA = AP = a$ y $m\angle BAM = 40^\circ$
- $\triangle MAB \cong \triangle BPC$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle MBA = m\angle PCB = x$
- $\triangle MAP$: equilátero $\Rightarrow MP = a$
- $\triangle MPB$: isósceles, como:
 $m\angle MPB = 80^\circ \Rightarrow \underline{m\angle PBM} = 50^\circ$
 $x + 20^\circ = 50^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Resolución 2



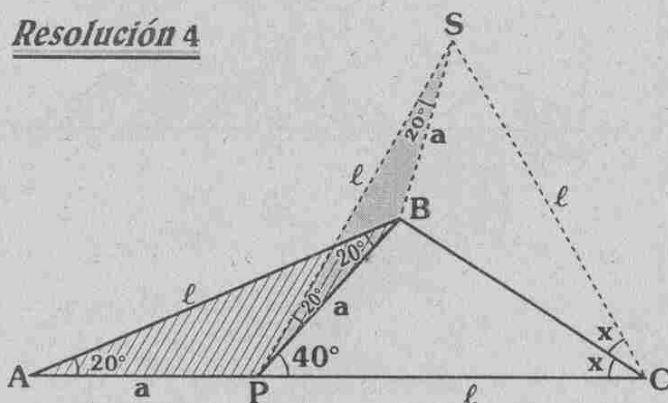
- Se traza $\overline{AJ}$ tal que $m\angle PAJ = 40^\circ$ y $AJ = \ell \Rightarrow \triangle JAP \cong \triangle CPB$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle AJP = x$
- Como $AB = AJ$ y $m\angle BAJ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABJ$ es equilátero
 $AJ = JB$ y $PA = PB$
 $\Rightarrow m\angle BJP = m\angle AJP = x$
 $\Rightarrow 2x = 60^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Resolución 3



- Se traza $\overline{PN}$ tal que $m\angle NPC = 20^\circ$ y $NP = a \Rightarrow \triangle BAP \cong \triangle CPN$ (LAL)
 $\Rightarrow NC = a$ y $m\angle ACN = 20^\circ$
- Como $NP = PB$ y $m\angle NPB = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle NPB$ es equilátero
- $\triangle BCN$: isósceles $\Rightarrow m\angle NBC = 20 + x$
- En la parte sombreada:
 $x + 20^\circ + x = 60^\circ + 20^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Resolución 4



- Tracemos $\overline{PS}$ tal que $m\angle BPS = 20^\circ$ y $PS = a$.
- $\triangle APB \cong \triangle PBS$ (LAL)
 $\Rightarrow PS = a$ y $m\angle PSB = 20^\circ$
- Como: $PS = PC$ y $m\angle CPS = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle SPC$: equilátero
 $PC = CS$ y $PB = BS \Rightarrow m\angle BCS = x$
 $\Rightarrow 2x = 60^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

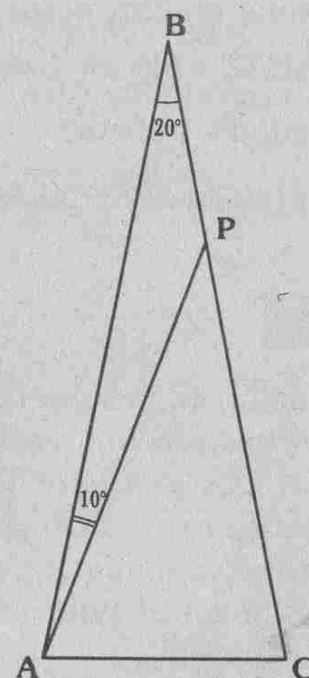


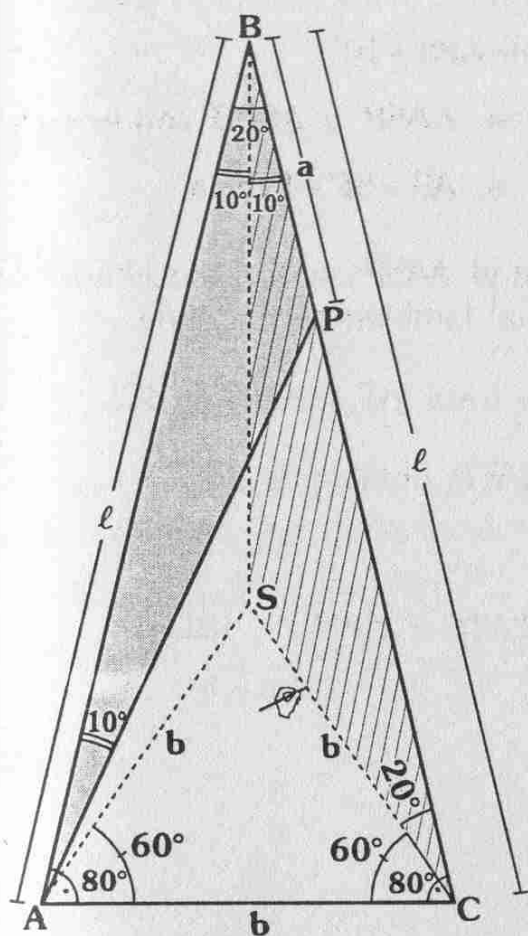
Nota

El estudiante debe verificar que en cada resolución planteada buscamos triángulos congruentes partiendo de la condición que habían dos lados de igual longitud.

Problema N° 2

- En el gráfico, $AB = BC$
- Demuestre que $BP = AC$



Resolución 1

• Sea:

$$PB = a \text{ y } AC = b$$

• $\triangle ABC$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = 80^\circ$$

• Busquemos un $\triangle$ que tenga "10°", "10°" y "20°" para ello: se ubica S en la región interior de ABC, tal que:

$$SC = b \text{ y } m\angle SCB = 20^\circ$$

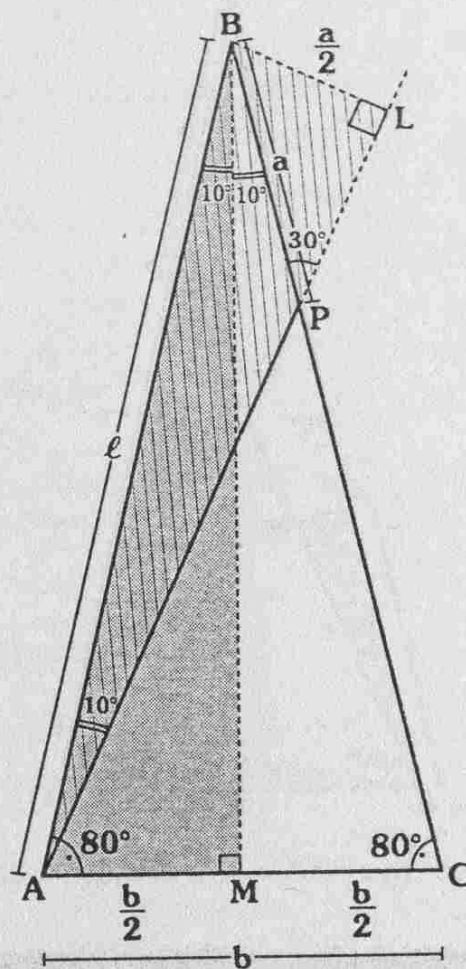
• $\triangle ASC$: equilátero

• Como $AS = SC$ y $AB = BC$

$$\Rightarrow m\angle ABS = m\angle CBS = 10^\circ$$

• $\triangle BCS \cong \triangle ABP$ (ALA)

$$\therefore a = b$$

Resolución 2

• Como $AB = BC$, al trazar la altura $\overline{BM}$, se tendrá:

$$AM = MC \text{ y } m\angle ABM = m\angle CBM = 10^\circ$$

• Se traza $\overline{BL} \perp \overline{AP}$

• $\angle PBL$: notable de 30°

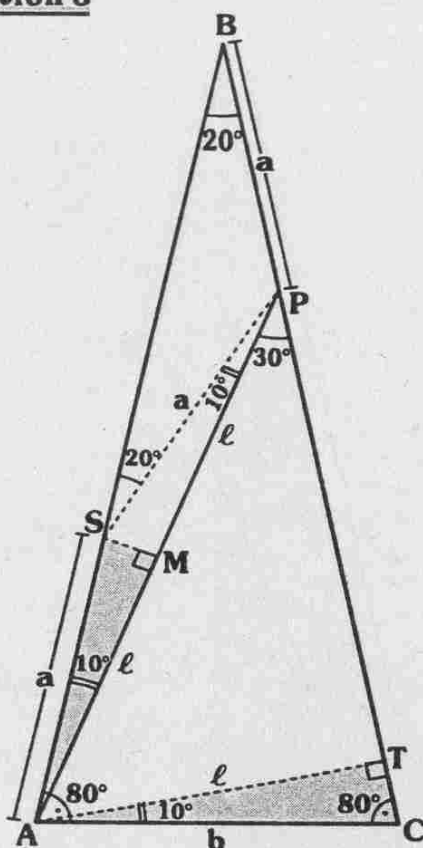
$$\Rightarrow BL = \frac{a}{2}$$

• $\angle ALB \cong \angle BMC$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = b$$

Resolución 3



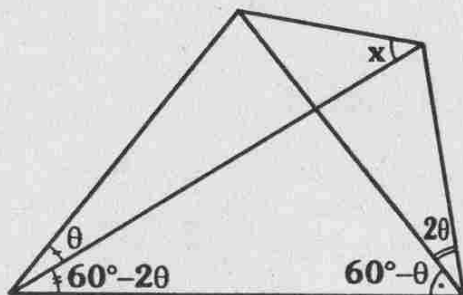
- Como $m_{\angle PBA} = 2(m_{\angle PAB})$, trazamos

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GENÉRICOS

Para complementar los criterios dados sobre construcción en triángulos se resolverá un grupo de problemas denominados genéricos, también se da un intervalo de la variable tal que el lector tenga casos particulares a partir del inicial.

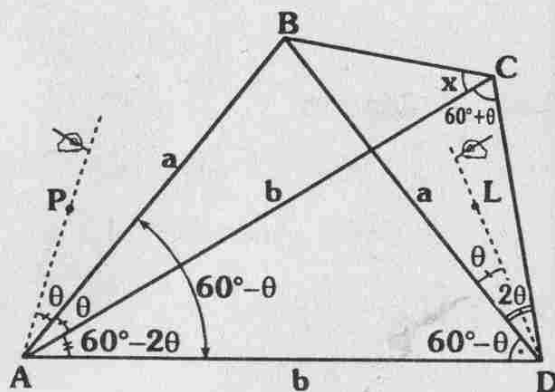
Problema	Nº 1
-----------------	-------------

En el gráfico, $\theta \in \langle 0^\circ; 30^\circ \rangle$, calcule x



Resolución

Paso	I
-------------	----------



- $$m\angle ADC = 60^\circ + \theta$$

$$\overline{DL}, \text{ tal que } m \angle BDL = \theta$$
$$\Rightarrow x = 30^\circ$$

63

- Reconocemos inicialmente que:

$$BC = CD \text{ y } BD = AD$$

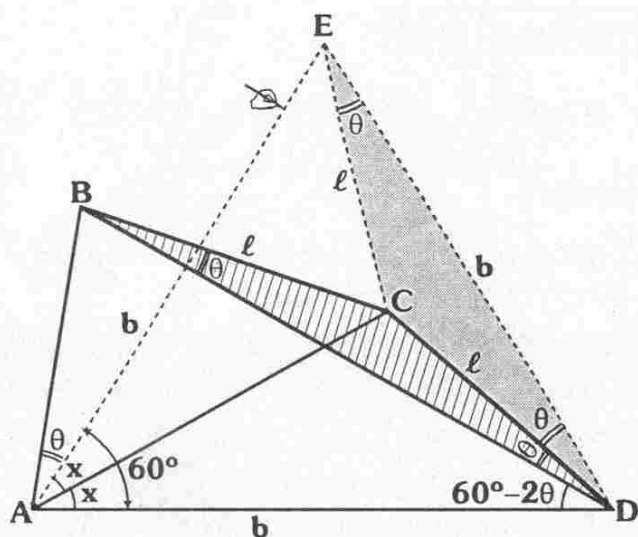
por ser los triángulos BCD y ADB isósceles.

- Como: $m\angle BAD = 60^\circ + \theta$ y
 $m\angle ADC = 60^\circ - \theta$

nos sugiere hacer los siguientes trazos.

- $\overline{AM}$ tal que $m\angle MAB = \theta$
- $\overline{DR}$ tal que $m\angle CDR = \theta$

Paso II



- Completando los trazos tenemos que el triángulo AED es equilátero.

- Luego $\triangle BDC \cong \triangle EDC$ (LAL)

$$\Rightarrow m\angle CED = \theta$$

- El triángulo ECD resulta ser isósceles

$$\Rightarrow CE = CD$$

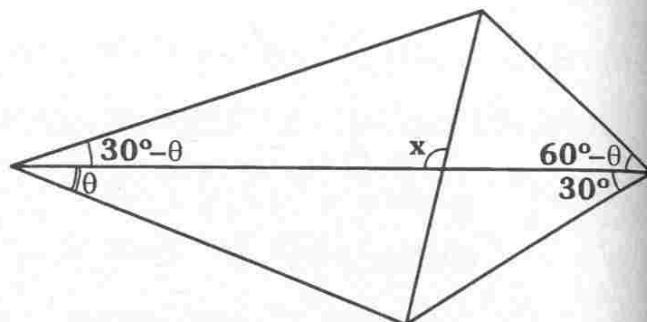
- Como $AD = AE \Rightarrow m\angle DAC = m\angle EAC$

$$\Rightarrow 2x = 60^\circ$$

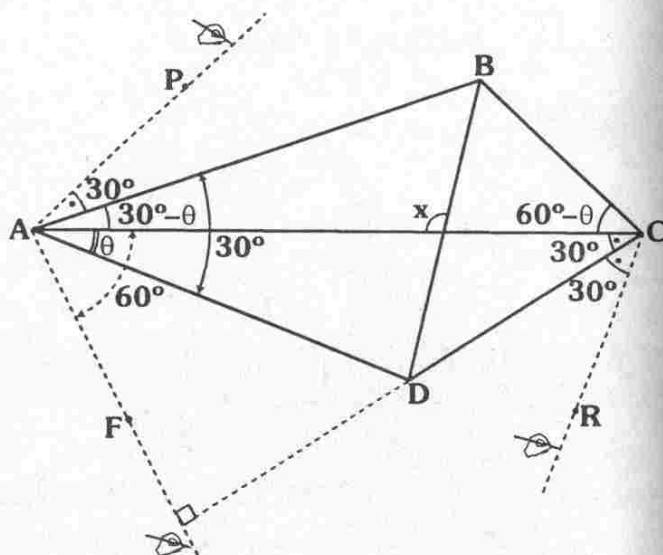
$$\therefore x = 30^\circ$$

Problema N° 3

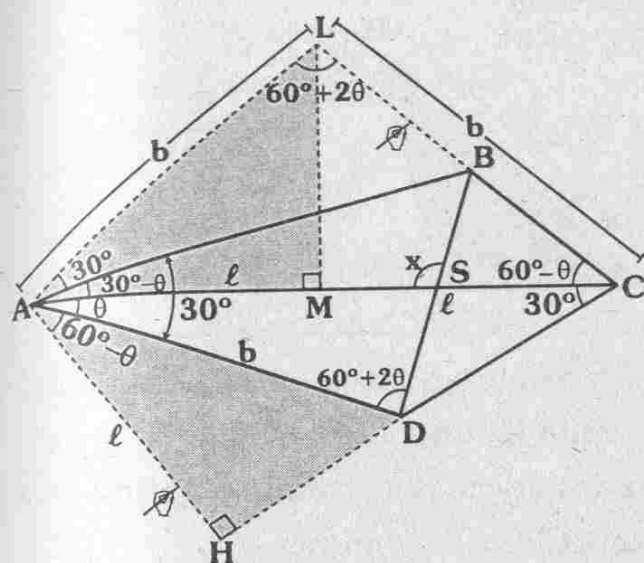
En el gráfico, $0^\circ < \theta < 30^\circ$. Calcule x en función de θ .



Resolución



- Para la resolución de este problema notamos que al “completar ángulos” no encontramos triángulos con “lados iguales” lo que si se puede aprovechar es la presencia del 30° , lo cual nos llevaría a completar el triángulo equilátero trazando $\overline{CR}$ y $\overline{AF}$, **otra posibilidad** es ubicar el 30° en un triángulo rectángulo. Optemos por lo último, aunque con la primera construcción también se llega al resultado.



- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AL}$, para obtener el $\triangle ALC$, el cual es isósceles.

- En el $\triangle ALC$ se traza la altura $\overline{LM}$
 $\Rightarrow AM = MC$

- Luego:

$$\triangle AML \cong \triangle DHA \Rightarrow AD = b$$

- También: $\triangle LAB \cong \triangle DAB$ (LAL)

$$\Rightarrow m\angle ADB = 60^\circ + 2\theta$$

- En $\triangle ADS$:

$$x = \theta + 60^\circ + 2\theta$$

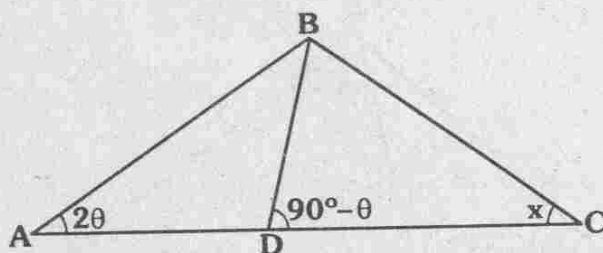
$$\therefore x = 60^\circ + 3\theta$$

Problema N° 4

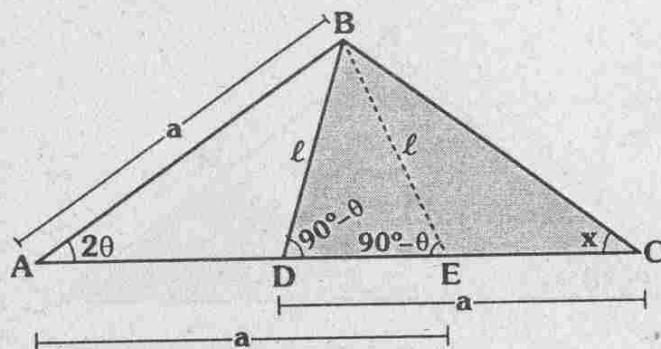
En el gráfico:

$$AB = CD, \quad \theta < 30^\circ \quad \text{y} \quad AB = DC$$

Calcule x en función de θ .



Resolución



- De acuerdo a los criterios estudiados es recomendable trazar $\overline{BE}$, tal que:

$$m\angle BEA = 90^\circ - \theta$$

entonces el $\triangle DBE$ y $\triangle ABE$ son isósceles

$$\Rightarrow AB = AE \quad \text{y} \quad DB = BE$$

- Luego: $\triangle BDC \cong \triangle AEB$ (LAL)

$$\therefore x = 2\theta$$



Observación

Además se demuestra que:

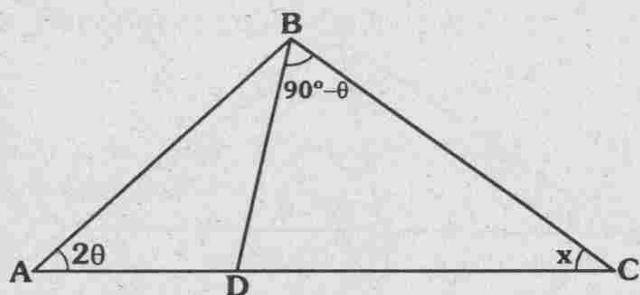
$$BC = a$$

Problema N° 5

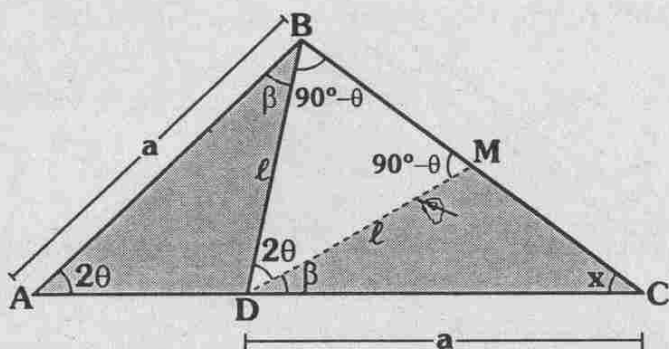
En el gráfico:

$$\theta < 30^\circ \quad \text{y} \quad AB = CD$$

Calcule x , en función de θ .



Resolución



- Lo que se busca en este problema es que las medidas de " 2θ " y " $90^\circ - \theta$ " se ubiquen en un mismo triángulo. Para ello se traza $\overline{DM}$ tal que $m\angle BDM = 2\theta \Rightarrow \triangle DBM$ es isósceles.

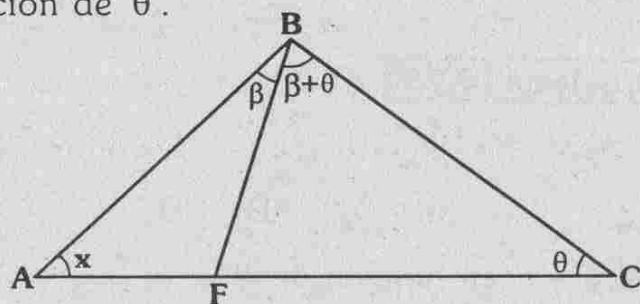
- Luego: $\triangle ABD \cong \triangle CDM$ (LAL)

$$\therefore x = 2\theta$$

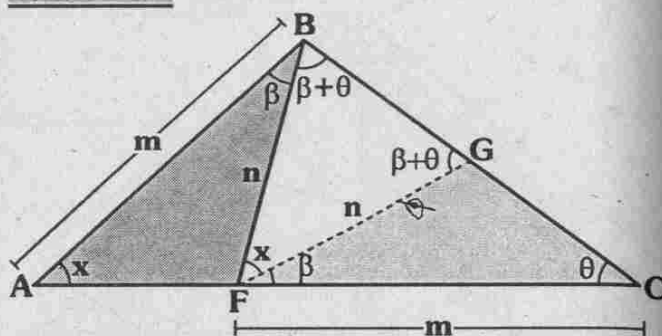
Nota
Como $x = 2\theta$, el triángulo ABC resulta isósceles con $AB = BC$.

Problema N° 6

En el gráfico, $AB = CF$, calcule x en función de θ .



Resolución



- En este caso buscamos ahora que se repita en un mismo triángulo " $\beta + \theta$ ", para lo cual trazamos $\overline{FG}$ tal que $m\angle CFG = \beta$, entonces:

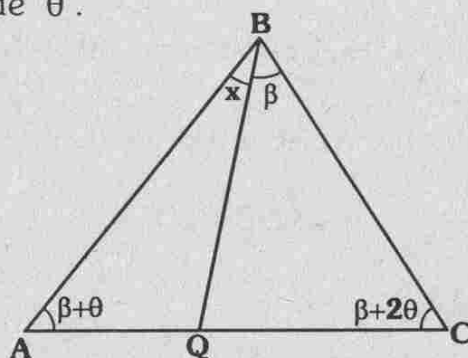
- $\triangle FBG$: isósceles $\Rightarrow FB = FG$

- $\triangle ABF \cong \triangle CFG$ (LAL)

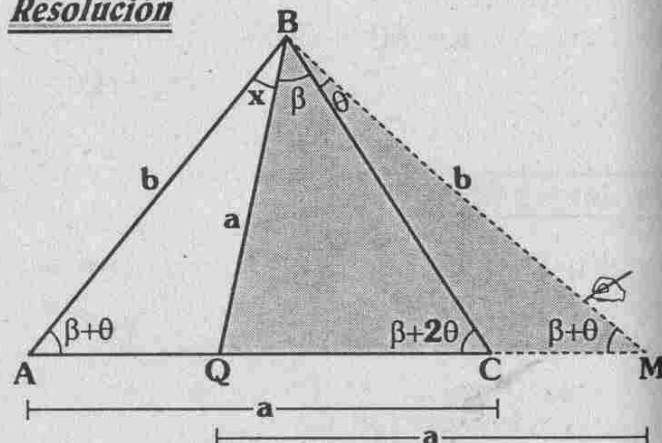
$$\therefore x = \theta$$

Problema N° 7

En el gráfico, $BQ = AC$, calcule x en función de θ .



Resolución



- Debido a las medidas de " $\beta + 2\theta$ ", " $\beta + \theta$ " y " β ", buscamos que se repitan algunas de ellas en un mismo triángulo.

- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\angle BMC = \beta + \theta$
 $\Rightarrow \triangle ABM$ es isósceles ($AB = BM$).

- También:

$$m\angle QBM = m\angle QMB = \beta + \theta$$

$$\Rightarrow QM = QB$$

- Finalmente:

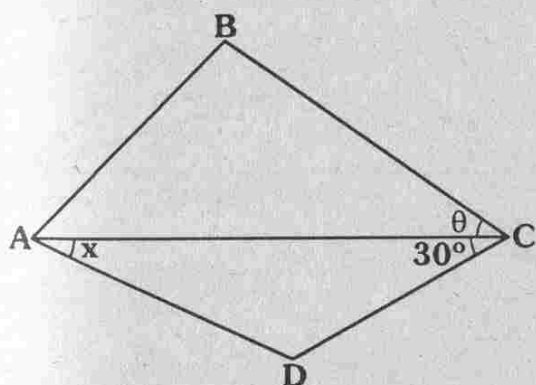
$$\triangle QMB \cong \triangle CAB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow x + \beta = \theta + \beta$$

$$\therefore x = \theta$$

Problema N° 8

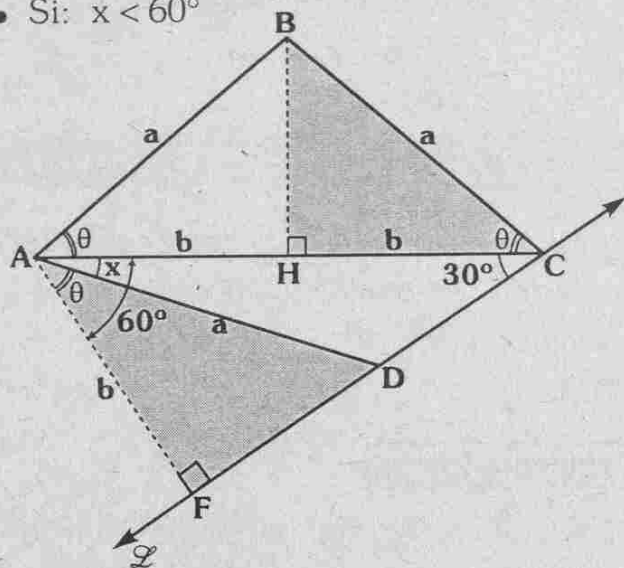
En el gráfico, $AB = BC = AD$, calcule x en función de θ .



Resolución

- Antes de resolver este problema, notemos que D es un punto sobre la recta $\mathcal{L}$, tal que $AD = AB$, se presenta dos posibilidades.

- Si: $x < 60^\circ$



Se traza la altura $\overline{BH}$ en el triángulo isósceles $ABC \Rightarrow AH = HC = b$.

También se traza: $\overline{AF} \perp \mathcal{L}$

$\triangle AFC$ notable de 30°

$$\Rightarrow AF = \frac{AC}{2} = b$$

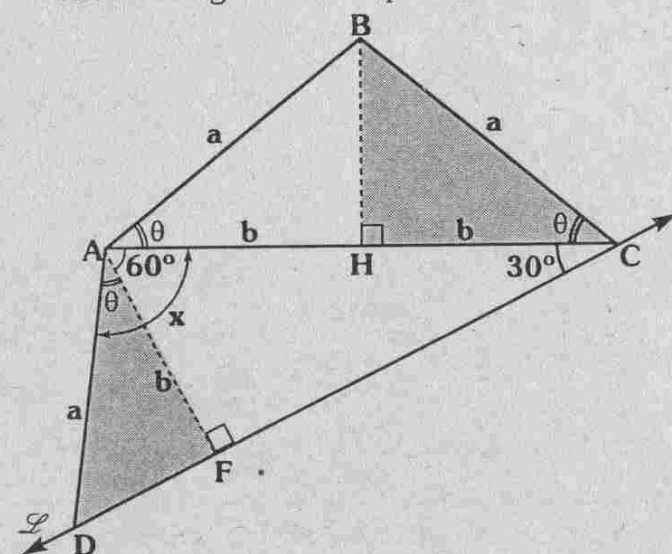
Luego:

$$\triangle FAD \cong \triangle HCB \Rightarrow m\angle FAD = \theta$$

$$\therefore x = 60^\circ - \theta$$

- Si $x > 60^\circ$

El procedimiento es análogo, en este caso la figura nos quedará así:



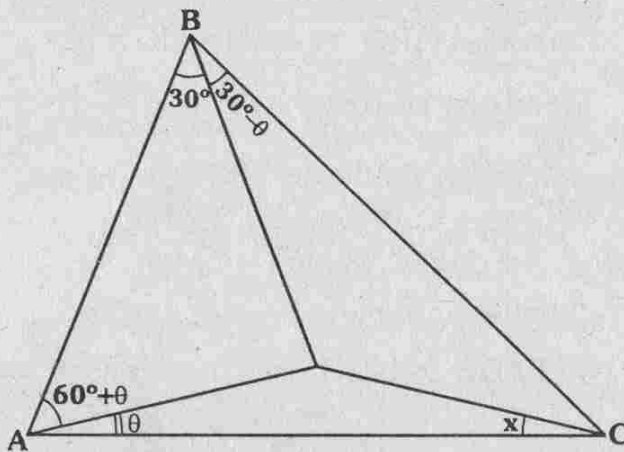
Con esta condición tenemos:

$$x = 60^\circ + \theta$$

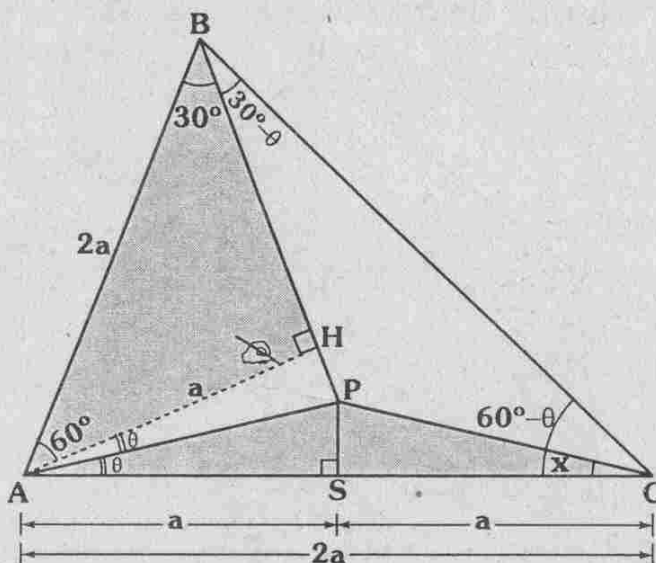
Nota
El estudiante puede verificar que $x \neq 60^\circ$, es decir $\overline{AD}$ no es perpendicular a $\overline{L}$.

Problema N° 9

En el gráfico, $\theta < 30^\circ$. Calcule x en función de θ .



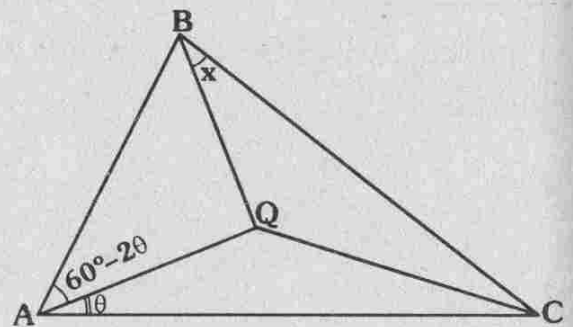
Resolución



- Primero, notemos que el triángulo ABC es isósceles $\Rightarrow AB = AC$.
- Como $m\angle BAP = 60^\circ + \theta$, trazamos $\overline{AH}$ tal que $m\angle BAH = 60^\circ \Rightarrow \overline{AP}$ es bisectriz del $\angle HAC$.
- $\triangle AHB$ notable de 30° :
Sea $AB = 2a \Rightarrow AH = a$
- Por teorema de la bisectriz:
 $AH = AS = a$
- Como: $AC = 2a \Rightarrow SC = a$
- Luego, el $\triangle APC$ es isósceles:
 $\therefore x = \theta$

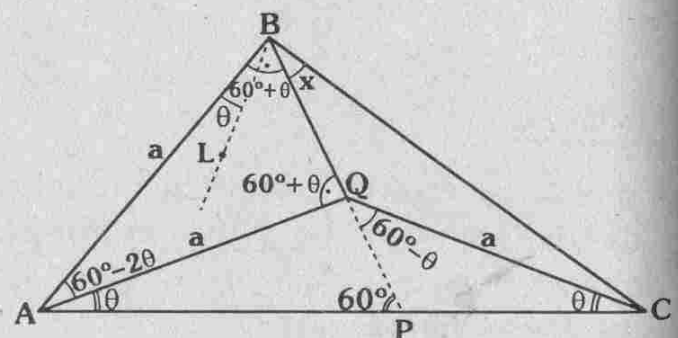
Problema N° 10

En el gráfico, $\theta < 30^\circ$ y $AB = AQ = QC$. Calcule x .



Resolución

Paso I



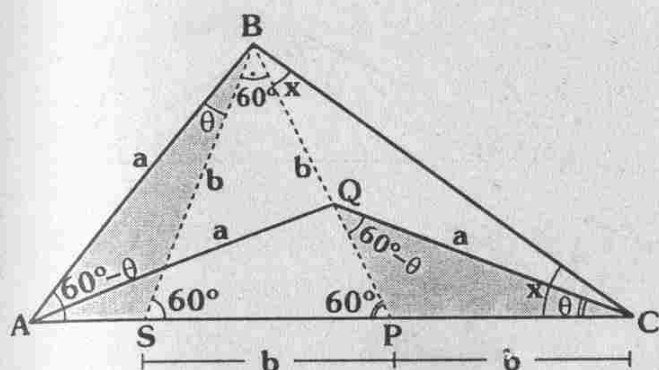
- Notemos que los triángulos ABQ y AQC son isósceles.

- Como:

$$m\angle ABP = 60^\circ + \theta \quad \text{y} \quad m\angle BPA = 60^\circ$$

nos da la posibilidad de trazar $\overline{BL}$ tal que $m\angle ABL = \theta$.

Paso II



- Al completar los trazos, tenemos:

- $\triangle SBP$ es equilátero.

- $\triangle BAS \cong \triangle CQP$ (ALA)

$$\Rightarrow BS = PC$$

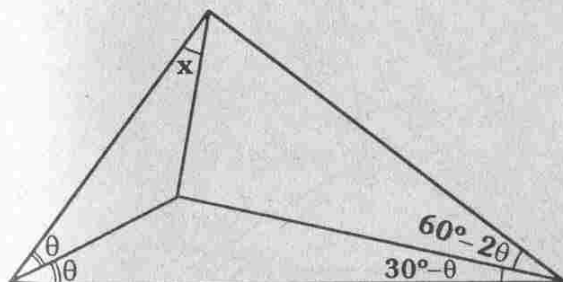
- Luego: $\triangle BPC$ es isósceles

$$\Rightarrow x + x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

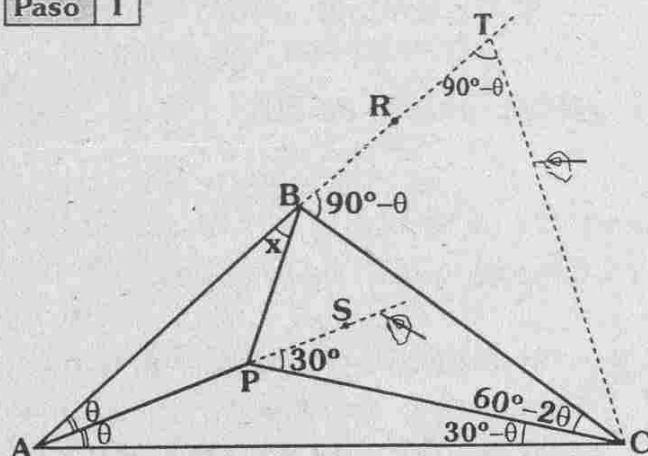
Problema N° 11

En el gráfico $\theta < 30^\circ$, calcule x .



Resolución

Paso I



- En este problema, no observamos inicialmente triángulos isósceles ni equiláteros, sólo notamos la bisectriz $\overline{AP}$ del $\angle BAC$ y también:

$$m\angle CBR = 90^\circ - \theta \quad \text{y} \quad m\angle BAC = 2\theta$$

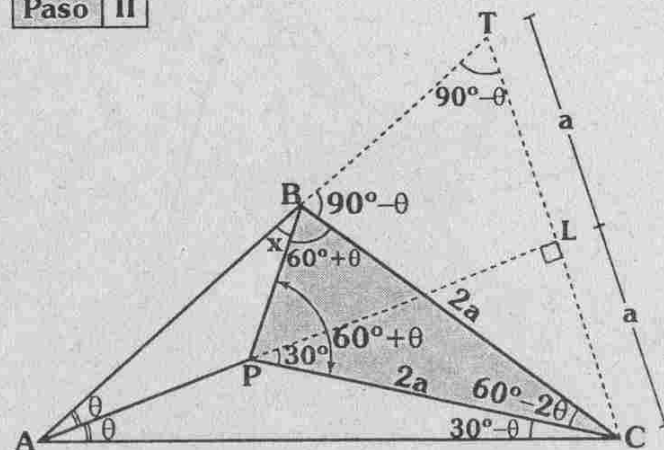
- Ello, por los criterios de construcción nos induce a trazar $\overline{CT}$ tal que:

$$m\angle BTC = 90^\circ - \theta$$

entonces $\triangle BCT$ y $\triangle ATC$ son isósceles.

- También notamos: $m\angle SPC = 30^\circ$ el cual corresponde a "un $\angle$ notable", busquemos la forma de aprovechar su presencia.

Paso II



- Como el $\triangle ATC$ es isósceles:
 $\Rightarrow \overline{AL}$ es también altura y mediana.
- $\angle PLC$ notable de 30°
 $\Rightarrow PC = 2(LC)$
- Luego el $\triangle BCP$ es isósceles:
 $\Rightarrow m\angle PBC = m\angle BPC = 60^\circ + \theta$
 $\Rightarrow x + 60^\circ + \theta + 90^\circ - \theta = 180^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

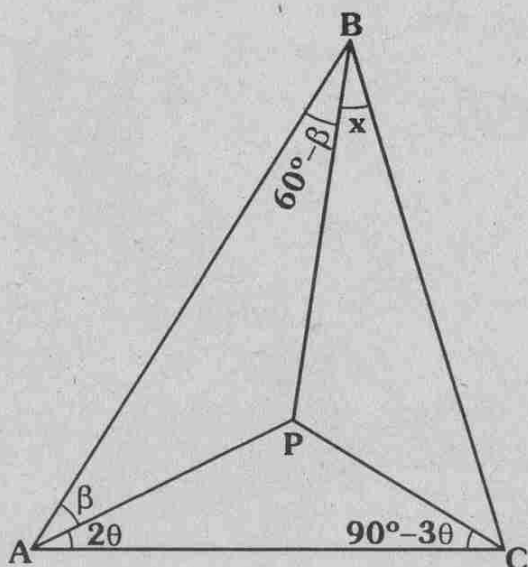
Problema N° 12

En el gráfico:

$$\theta < 30^\circ, \beta < 60^\circ$$

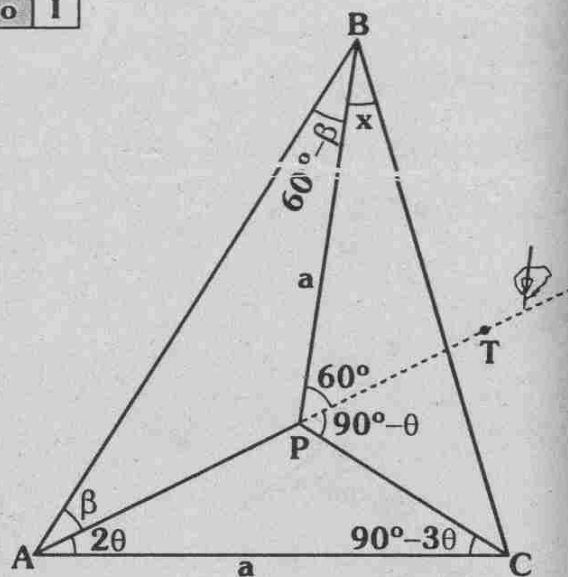
$$y \quad BP = AC$$

Calcule x en función de θ .



Resolución

Paso I



- En el gráfico tenemos que al prolongar $\overline{AP}$ se observará:

$$m\angle TPB = 60^\circ \quad y \quad m\angle TPC = 90^\circ - \theta$$

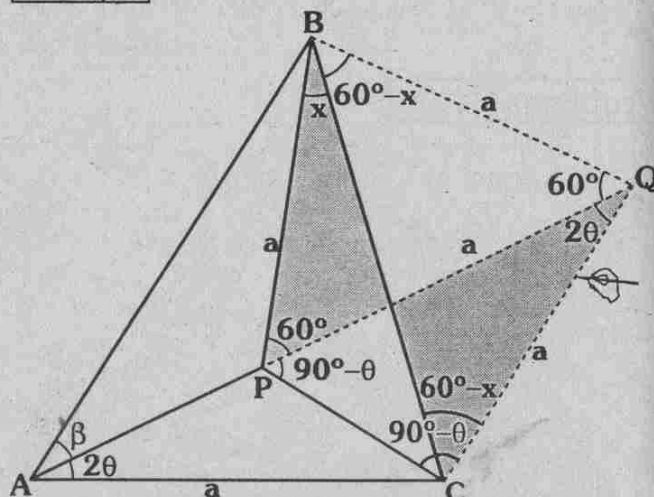
- Como: $m\angle CAP = 2\theta$

$$y \quad m\angle TPC = 90^\circ - \theta$$

nos da la posibilidad de acuerdo a los criterios de construcción de trazar $\overline{CQ}$ (Q en $\overrightarrow{AP}$) tal que:

$$m\angle AQC = 2\theta$$

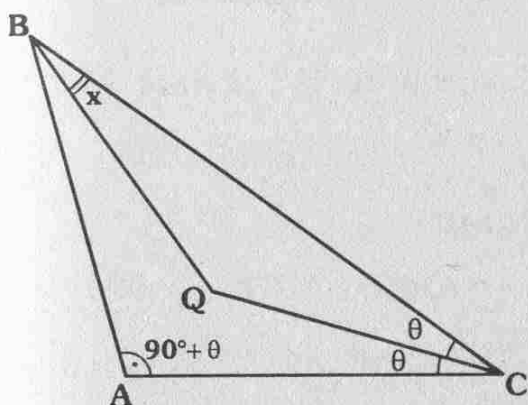
Paso II



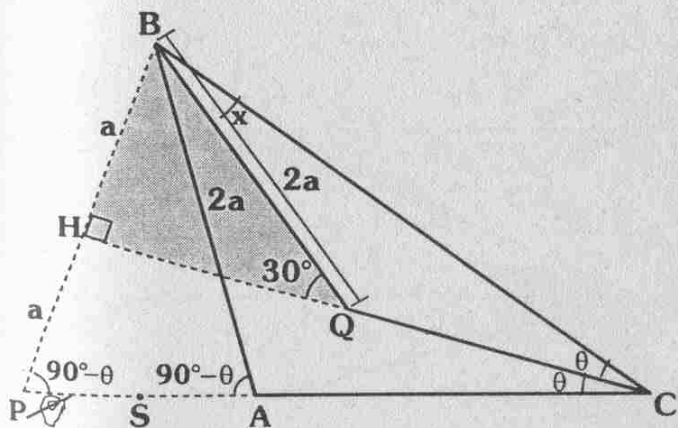
- Tenemos ahora que los $\Delta_s ACQ$ y PQC
 $\Rightarrow AC = CQ = QP = a$
- Como $PB = PQ = a$ y $m\angle BPQ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \Delta PBQ$ es equilátero
- ΔBQC es isósceles
 $\Rightarrow m\angle BCQ = 60^\circ - x$
- En la parte sombreada:
 $x + 60^\circ = 2\theta + 60^\circ - x$
 $\therefore x = \theta$

Problema N° 13

En el gráfico $\theta < 30^\circ$ y $AB = BQ$.
 Calcule x en función de θ .



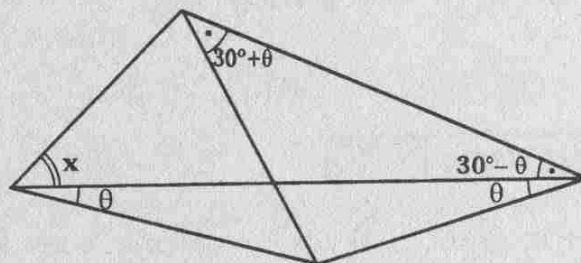
Resolución



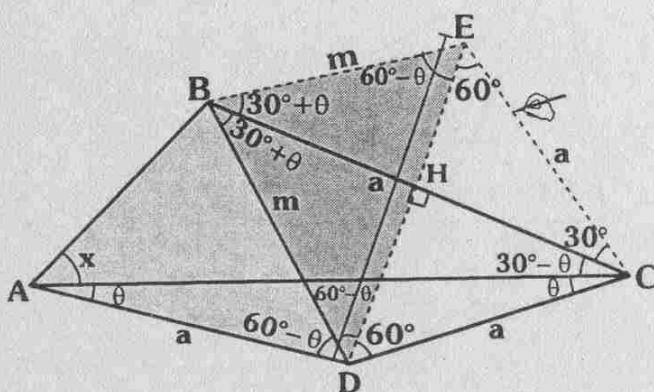
- Al prolongar $\overline{CA}$, nos damos cuenta que $m\angle SAB = 90^\circ - \theta$ y $m\angle BCA = 2\theta$, entonces nos conviene trazar $\overline{BP}$, tal que:
 $m\angle BPA = 90^\circ - \theta$
- Luego: ΔCBP y ΔAPB son isósceles
 $\Rightarrow PB = BA$ y $BC = CP$
- Como ΔBCP es isósceles $\Rightarrow \overline{CH}$ es bisectriz, mediana y altura.
- Luego, el $\angle BHQ$ es notable de 30°
 $\Rightarrow x + \theta = 30^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ - \theta$

Problema N° 14

En el gráfico, $\theta < 30^\circ$, calcule x en función de θ .



Resolución



- Notamos primero:

$$\triangle ADC \text{ isósceles} \Rightarrow AD = DC$$

$$m\angle ADB = 60^\circ - \theta$$

$$m\angle DCB = 30^\circ$$

- Se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$ y se prolonga hasta

$$E \text{ tal que el } DH = HE = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle DEC \text{ es equilátero}$$

- Como $DH = HE \Rightarrow BE = BD$

$$\triangle ADB \cong \triangle EDB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow AB = m$$

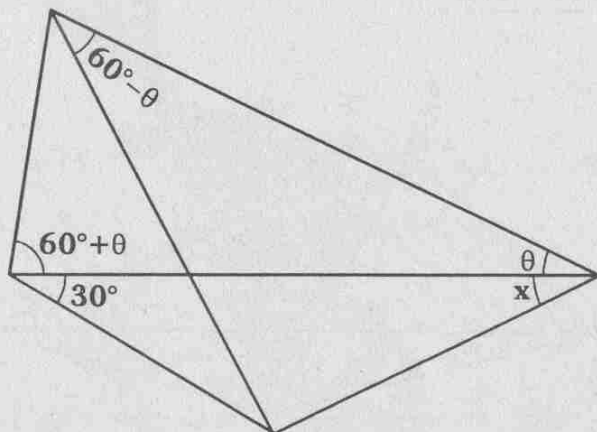
- $\triangle ABD$: isósceles

$$\Rightarrow x + \theta = 60^\circ - \theta$$

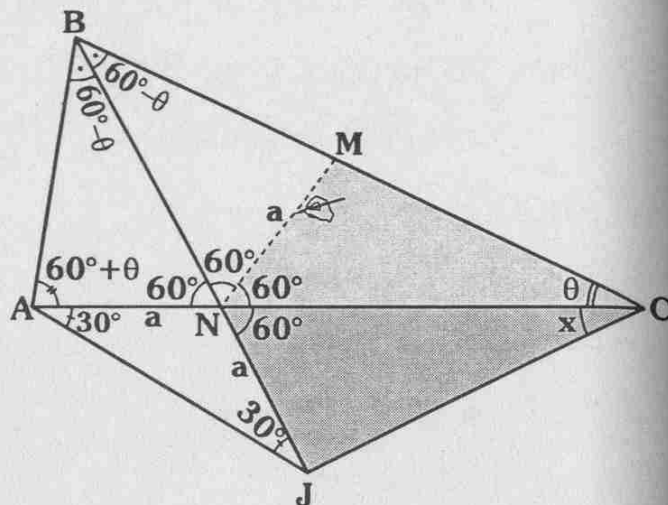
$$\therefore x = 60^\circ - 2\theta$$

Problema N° 15

En el gráfico, $\theta < 60^\circ$, calcule x en función de θ .



Resolución



- Al completar ángulos, tenemos:

$$m\angle AJN = 30^\circ$$

$$m\angle ABJ = 60^\circ - \theta$$

$$m\angle ANB = 60^\circ$$

- Como $m\angle BNC$, se traza $\overline{NM}$, tal que:

$$m\angle BNM = 60^\circ$$

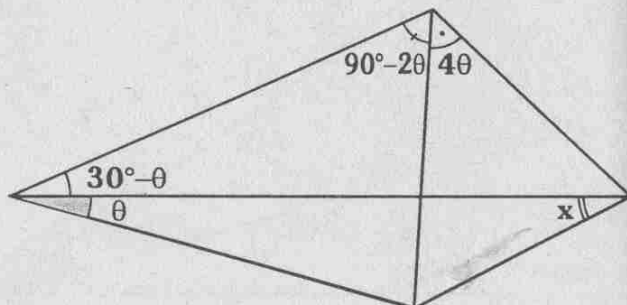
- Luego:

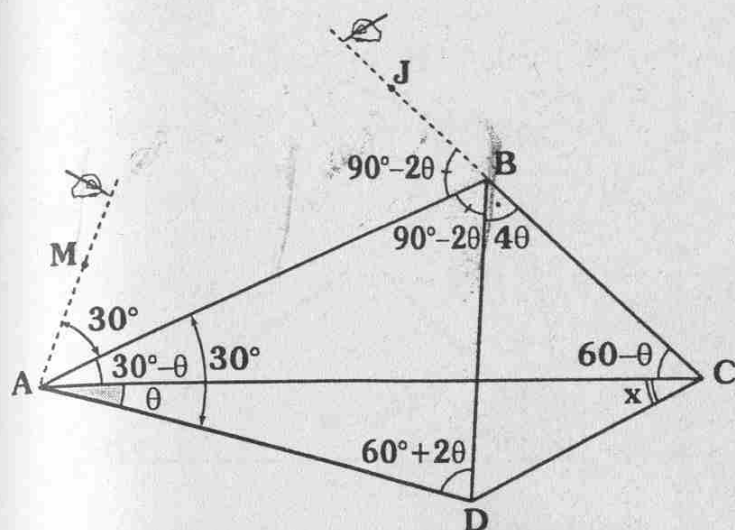
$$\triangle ANB \cong \triangle MNB \Rightarrow NM = a$$

$$\triangle CNM \cong \triangle CNJ \Rightarrow x = \theta$$

Problema N° 16

En el gráfico, $\theta < 30^\circ$, calcule x .



Resolución**Paso I**

- Cuando prolongamos $\overline{CB}$, nos damos cuenta:

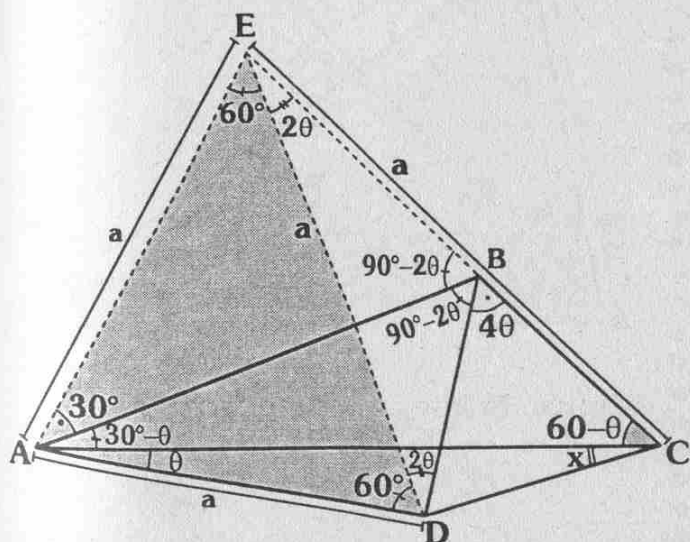
$$m\angle JBA = m\angle ABD = 90^\circ - 2\theta$$

$$m\angle DAB = 30^\circ$$

- Trazamos $\overline{AM}$ tal que:

$$m\angle BAM = 30^\circ$$

para buscar un triángulo congruente con el $\triangle ABD$.

Paso II

- Al completar los trazos indicados tenemos:

$$\triangle BAE \cong \triangle BAD \Rightarrow AE = AD$$

- Como:

$m\angle EAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle AED$
es equilátero.

- Como:

$$m\angle EAC = m\angle ECA = 60^\circ - \theta$$

$\Rightarrow \triangle AEC$ es isósceles

$$\Rightarrow EA = EC = a$$

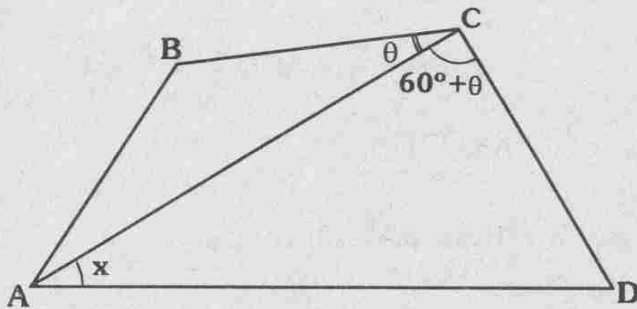
- $\triangle DEC$ es isósceles, como

$$m\angle DEB = 2\theta \Rightarrow x + 60^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$$

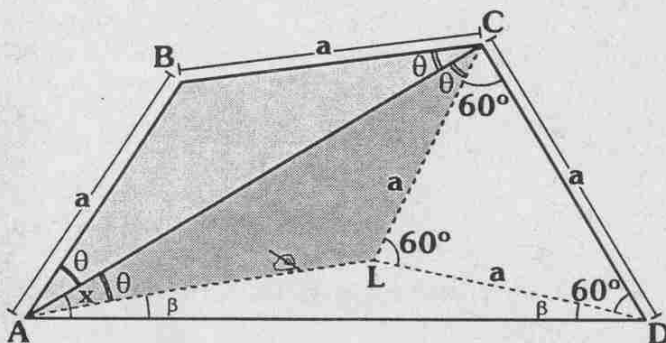
$$\therefore x = 30^\circ$$

Problema N° 17

En el gráfico, $\theta < 90^\circ$ y $AB = BC = CD$.
Calcule x .



Resolución



- Como $m\angle ACD = 60^\circ + \theta$, trazamos $\overline{CL}$, tal que $m\angle ACL = \theta$ y $CL = a$
 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ALC$, luego: $CL = AL = a$
- Como $LC = CD$ y $m\angle LCD = 60^\circ \Rightarrow$ el $\triangle LCD$ es equilátero
- $\triangle ALD$ es isósceles.
- En $\triangle ACLD$:

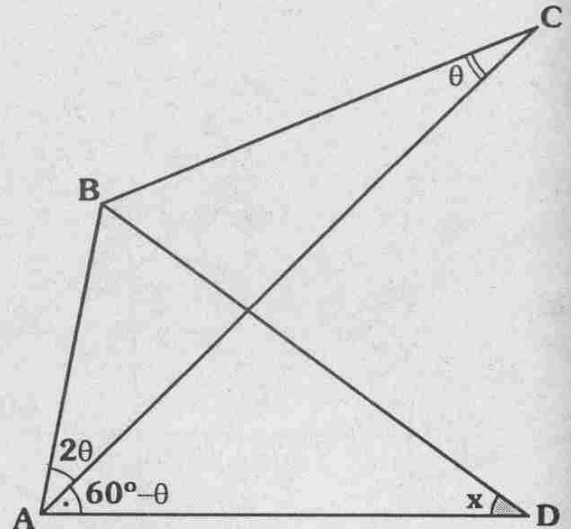
$$2\theta + 2\beta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 30^\circ$$

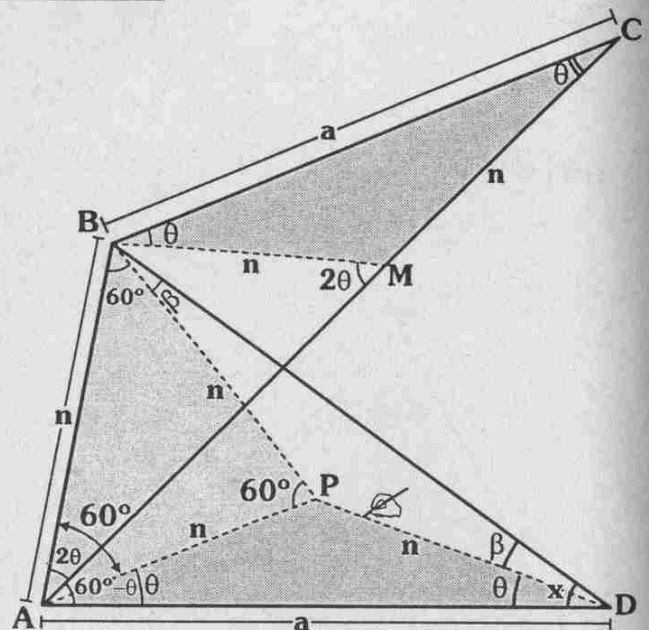
$$\therefore x = 30^\circ$$

Problema N° 18

En el gráfico, $\theta < 90^\circ$, $BC = AD$.
Calcule x .



Resolución



- Inicialmente nos damos cuenta:
 $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$ y
 $m\angle BAD = 60^\circ + \theta$
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\angle MBC = \theta$
 $\Rightarrow BM = MC = AB$

- Se traza también:

$\overline{AP}$ tal que $m\angle DAP = \theta$ y $AP = n$

- $\triangle PAD \cong \triangle MBC$ (LAL) $\Rightarrow PD = n$

- Además, como:

$$AB = AP \text{ y } m\angle BAP = 60^\circ$$

entonces $\triangle ABP$ es equilátero.

- $\triangle BPD$ es isósceles.

- En $\triangle ADBP$:

$$2\theta + 2\beta = 60^\circ$$

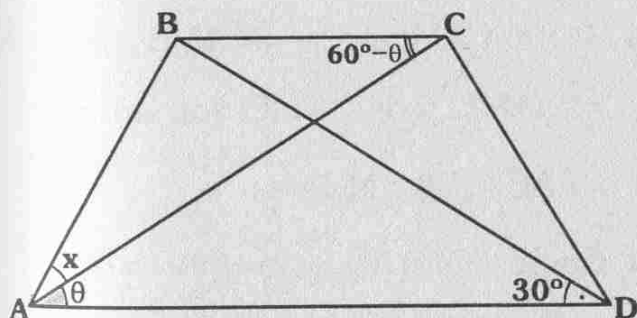
$$\theta + \beta = 30^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

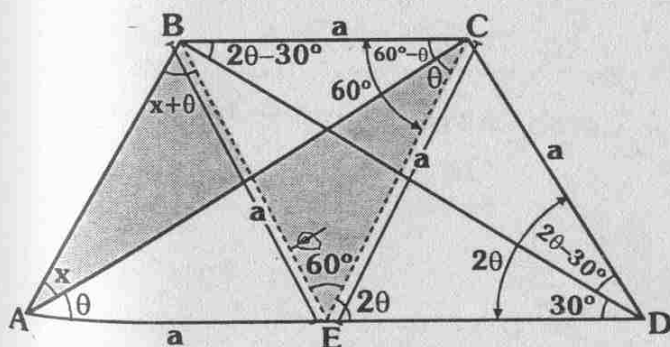
Problema N° 19

En el gráfico, $\theta < 60^\circ$ y $BC = CD$.

Calcule x .



Resolución



- Como el $\triangle BCD$ es isósceles

$$\Rightarrow m\angle CBD = m\angle CDB = 2\theta - 30^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ADC = 2\theta$$

- En el $\triangle ACD$, se está notando:

$$m\angle CDA = 2(m\angle CAD)$$

$\Rightarrow$ Se traza $\overline{CE}$ tal que $m\angle ACE = \theta$

$$\Rightarrow CE = CD = AE$$

- Como $m\angle ABE = 60^\circ$ y $BC = CE$ entonces el $\triangle BCE$ es equilátero.

- $\triangle AEB$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle ABE = x + \theta$$

- En la parte sombreada:

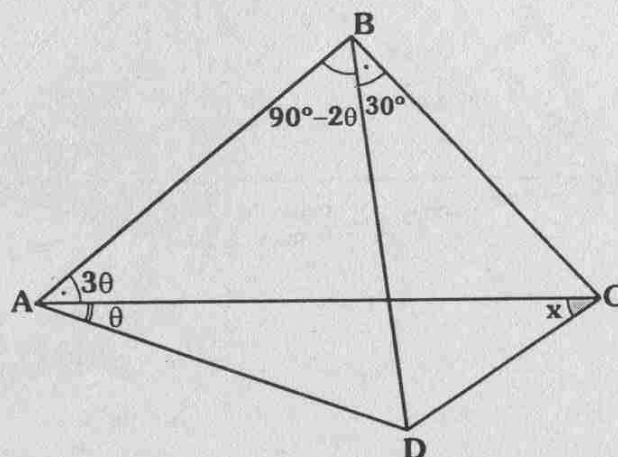
$$x + x + \theta = 60^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Problema N° 20

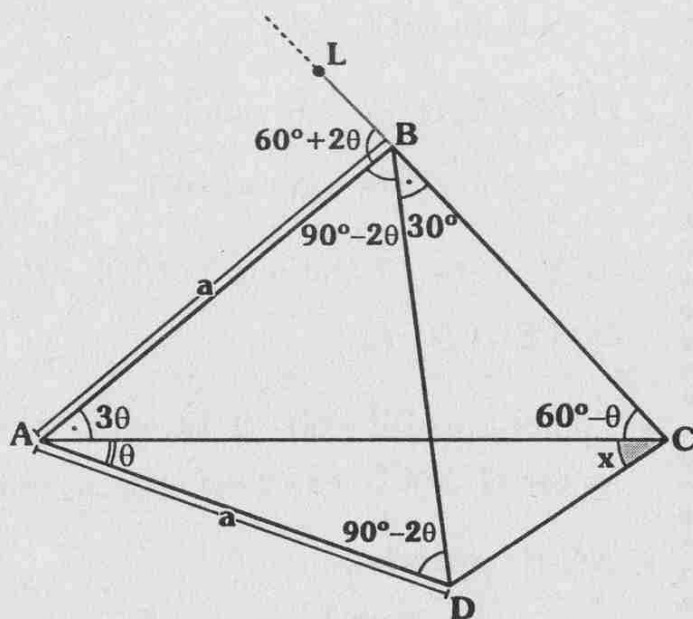
En el gráfico, $\theta < 15^\circ$.

Calcule x .



Resolución

Paso I

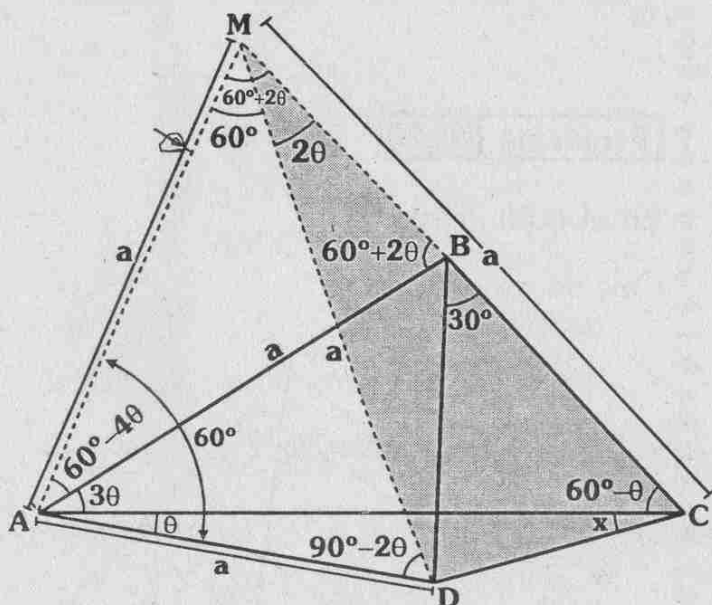


- Notamos inicialmente que el $\triangle ABD$ es isósceles. También al prolongar $\overline{CB}$.
- Se nota:

$$m\angle ACB = 60^\circ - \theta \quad y$$

$$m\angle LBA = 60^\circ + 2\theta$$

Paso II



- Se traza $\overline{AM}$ tal que $m\angle AMB = 60^\circ + 2\theta$
 $\Rightarrow \triangle AMB$ y el $\triangle AMC$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = AM = MC = a$
- Como $AM = AD$ y $m\angle MAD = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AMD$ es equilátero
- $\triangle DMC$: es isósceles
 $\Rightarrow DM = MC = a$
- Como $m\angle DMC = 2\theta$

$$\Rightarrow 60^\circ - \theta + x = 90^\circ - \theta$$

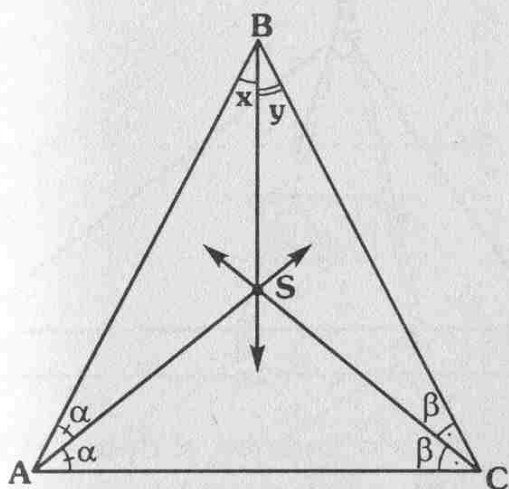
$$\therefore x = 30^\circ$$

CONSIDERACIONES FINALES

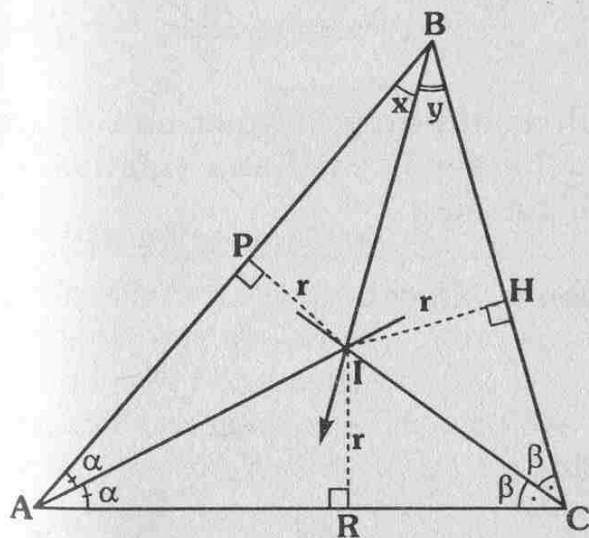
Veamos a continuación algunas situaciones comunes que el estudiante encontrará en la resolución de problemas. Aunque algunos de estos resultados, los estudiaremos en otros capítulos como puntos notables o circunferencia, los presentamos ahora, pues ellos tienen que ver con teoremas sobre congruencia.

Así tenemos:

- Si se tiene que $\vec{AS}$ y $\vec{CS}$ son bisectrices, entonces $\vec{BS}$ también es bisectriz.



Prueba:

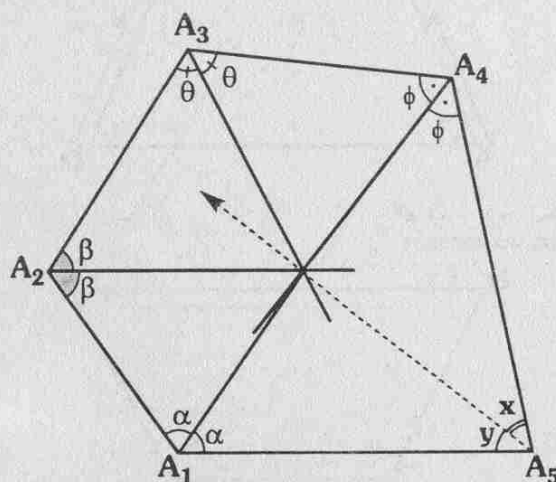


- Por teorema de la bisectriz:

$$IR = IH = IP$$

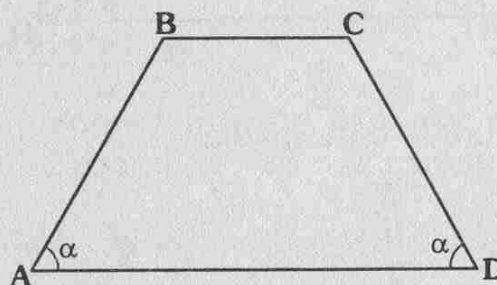
- Como: $IP = IH \Rightarrow x = y$

Generalizando:



- Consideremos un polígono de cinco vértices (puede ser de "n" vértices). Si las bisectrices desde A_1 , A_2 , A_3 y A_4 concurren, entonces: $x = y$

- Si $AB = DC$



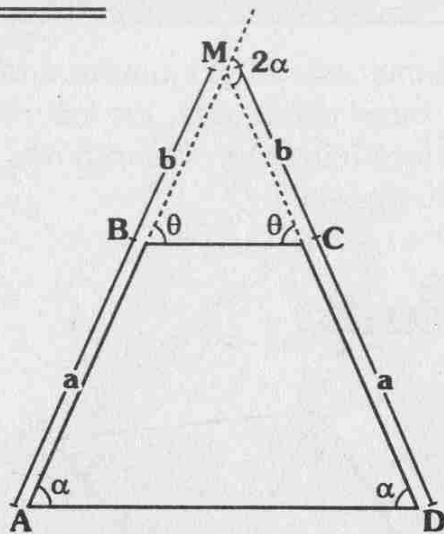
Se cumple:

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

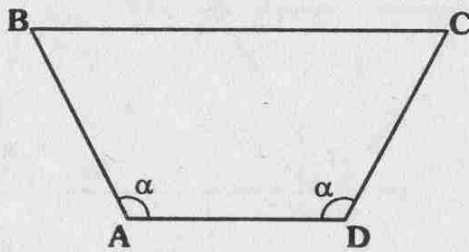
Prueba:

- Si $\alpha \neq 90^\circ$, consideremos los siguientes casos:

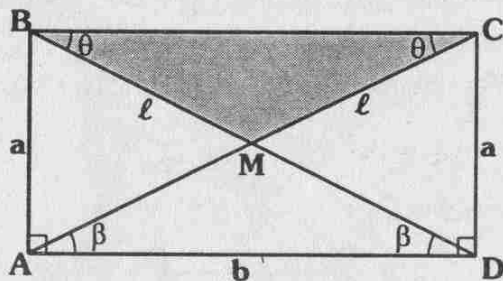
a) Si $\alpha < 90^\circ$:



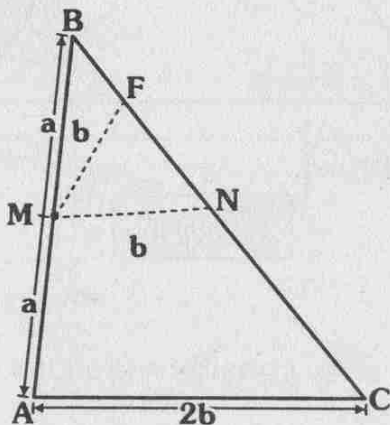
b) Si $\alpha > 90^\circ$:



c) Si $\alpha = 90^\circ$:



■ Sobre la base media:

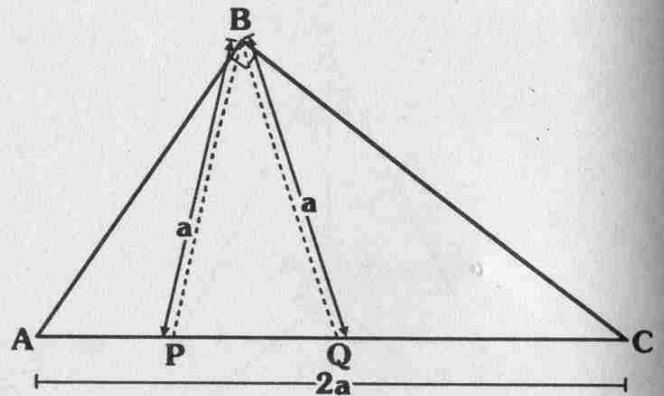


Si desde el punto medio M de $\overline{AB}$ trazamos los segmentos $\overline{MF}$ y $\overline{MN}$ tal que:

$$MF = MN = \frac{AC}{2}$$

entonces uno de ellos debe ser la base media (no dejarse llevar por el gráfico).

■ En el triángulo rectángulo:

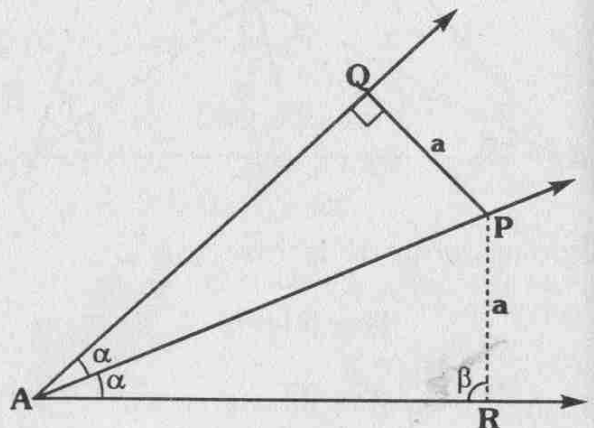


Similar a lo anterior, si desde M trazamos $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ tal que:

$$BP = BQ = \frac{AC}{2}$$

podemos asegurar que uno de ellos debe ser la mediana relativa a la hipotenusa.

■ En la bisectriz:

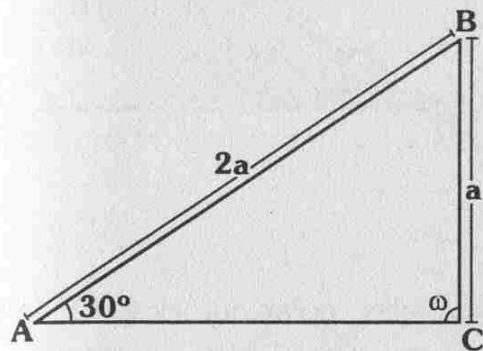


Si $\vec{AP}$ es bisectriz del $\angle QAR$, tal que:

$$\overline{PQ} \perp \overline{AQ} \text{ y } PQ = PR$$

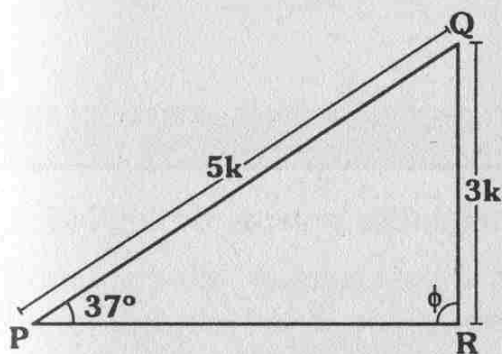
$$\Rightarrow \boxed{\beta = 90^\circ}$$

■ En algunos triángulos notables:



Se cumple:

$$\boxed{\omega = 90^\circ}$$

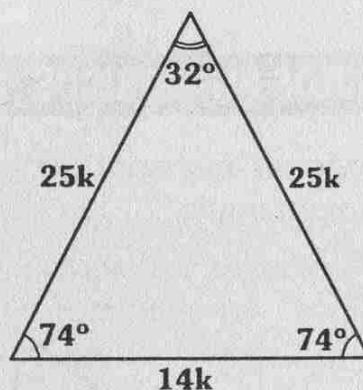
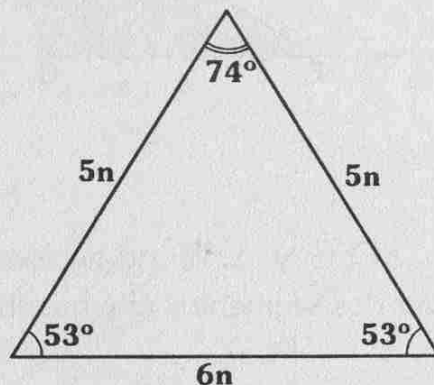
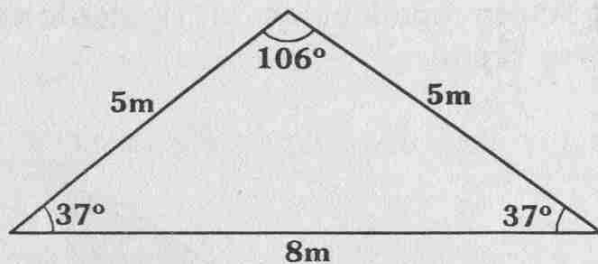
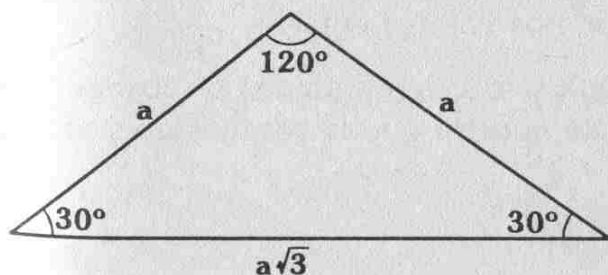


Se cumple:

$$\boxed{\phi = 90^\circ}$$

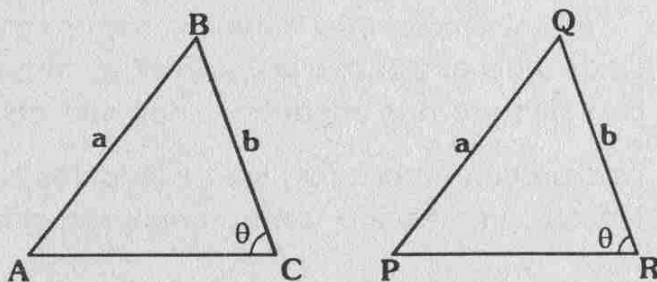
Otros triángulos notables :

Presentamos a continuación, algunos triángulos notables (notar que no necesariamente son triángulos rectángulos), notar que se conocen todas las medidas angulares y las razones de todos los lados.



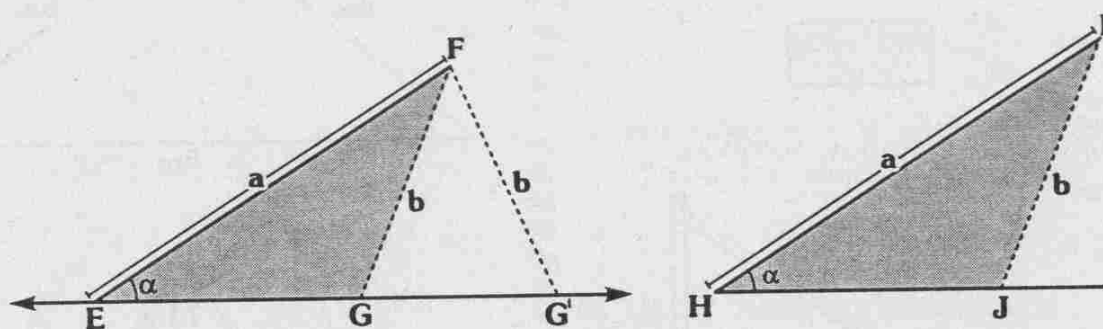
Sobre el 4to caso :

- El denominado 4to caso, estudiado en la página N° 14 nos indica:



$$\text{Si } a > b \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PQR$$

- Ahora analicemos el siguiente caso en que el “ángulo opuesto” al menor lado se repita.

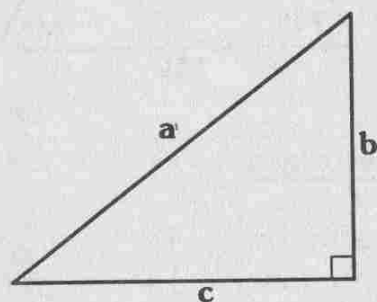


Si: $b < a$

⇒ Los $\triangle EFG$ y $\triangle HIJ$ no necesariamente son congruentes, notar que desde F se pueden trazar dos segmentos que miden “b”, solo en uno de los casos los $\triangle_s$ serán congruentes.

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

“Expresiones matemáticas para obtener las longitudes enteras de los lados de un triángulo rectángulo”.



Pitágoras de Samos nos legó su teorema de los triángulos rectángulos, pilar fundamental de cálculos geométricos y trigonométricos, en el cual relaciona las medidas de los catetos y de la hipotenusa.

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad \dots (I)$$

Dado que al aplicar la expresión, hemos de acabar calculando una raíz cuadrada, casi siempre nos encontraremos que no obtenemos valores enteros.

Nos preguntamos si existen triángulos rectángulos, cuyas longitudes de los lados son enteros, un sencillo y muy conocido ejemplo demuestra que la respuesta es afirmativa:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

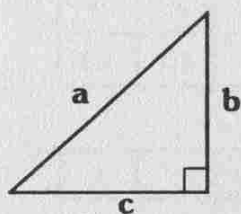
¿Existen otras respuestas? ¿Cómo podemos hallarlas?

En este capítulo analizaremos dichas interrogantes.

Si tenemos la solución a ; b y c de (I) podemos hallar otra multiplicando cada uno de los términos a , b y c con cualquier entero.

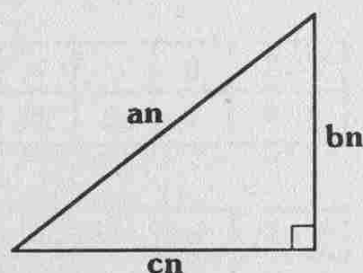
Puesto que 3; 4 y 5 es un resultado, podemos multiplicar por 2 para obtener 6; 8 y 10.

Esto nos da $6^2 + 8^2 = 10^2$; también: $9^2 + 12^2 = 15^2$. En términos generales $3n$; $4n$ y $5n$ será solución si " n " es un número entero. De la misma forma, si a , b y c es una solución cualquiera, entonces an ; bn y cn es también solución.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(a, b \text{ y } c \in \mathbb{Z}^+)$$



$$(an)^2 = (bn)^2 + (cn)^2$$

$$\text{con } "n" \in \mathbb{Z}^+$$

Esta forma de hallar nuevos resultados es muy trivial y por lo tanto de poco interés. Es más interesante encontrar soluciones básicas, y estas no pueden hallarse meramente multiplicando otro resultado por un número entero. Denominaremos "soluciones reducidas" aquellas donde a ; b y c no tengan un divisor común; luego 3; 4 y 5 es un resultado reducido.

Si dos o más números no tienen un divisor común diremos que son primos entre sí. En un resultado reducido cada par formado por los números a ; b y c es primo.

A continuación, sólo se indicarán los resultados para obtener el triángulo rectángulo de lados enteros (la demostración tiene que ver con procedimientos aritméticos los cuales no mencionaremos)

$$\left. \begin{array}{l} a = \mu^2 + v^2 \\ b = \mu^2 - v^2 \\ c = 2\mu v \end{array} \right\} \text{(II)}$$

Con $\mu > \nu$ y μ y ν son primos entre sí, ello para obtener "resultados reducidos".

Algunos ejemplos de números pitagóricos:

V=1	b	c	a
$\mu=2$	3	4	5
$\mu=4$	15	8	17
$\mu=6$	35	12	37
$\mu=8$	63	16	65
$\mu=10$	99	20	101

V=2	b	c	a
$\mu=3$	5	12	13
$\mu=5$	21	20	29
$\mu=7$	45	28	53
$\mu=9$	77	36	85
$\mu=11$	117	44	125

V=3	b	c	a
$\mu=4$	7	24	25

V=4	b	c	a
$\mu=5$	9	40	41

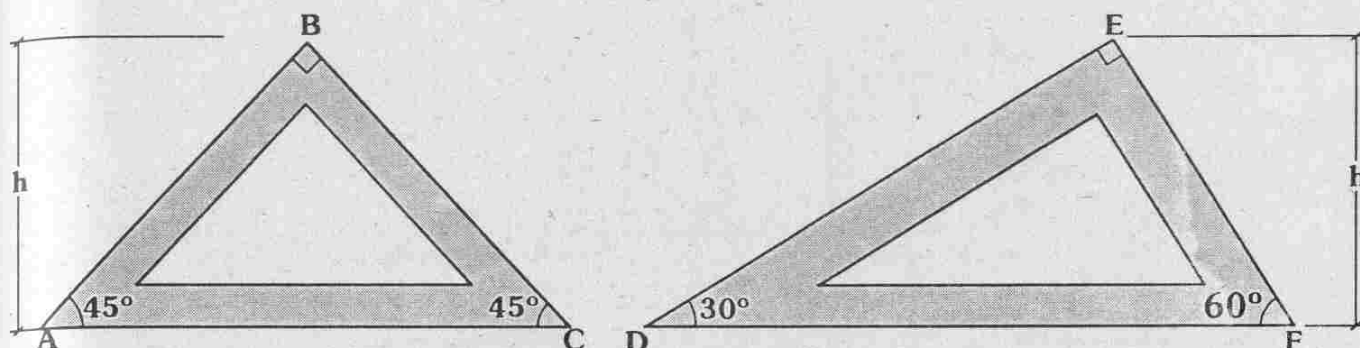
V=5	b	c	a
$\mu=6$	11	60	61

V=6	b	c	a
$\mu=7$	13	84	85

Nota

- Si bien es cierto, los resultados indicados, si reemplazamos en la expresión (II) por enteros cualesquiera con la condición dada encontraremos triángulos de lados enteros, pero no serán resultados reducidos;
- En las soluciones reducidas, sólo uno es divisible por 2, más aun múltiplo de 4;
- Los tres valores a ; b y c no pueden ser impares a la vez.
- Dos de los números son impares y uno par.
- Tampoco pueden tener un factor común impar.

JUEGO DE ESCUADRAS



En el gráfico mostrado se tiene un juego de escuadras, representados por los triángulos rectángulos ABC y DEF ($m\angle ABC = 90^\circ$; $m\angle BAC = m\angle ACB = 45^\circ$; $m\angle DEF = 90^\circ$; $m\angle EDF = 30^\circ$ y $m\angle DFE = 60^\circ$), es interesante notar que ambos triángulos tienen la misma altura relativa a la hipotenusa y como consecuencia de ello: $AC = DE$.

El dibujo técnico es la representación gráfica de un objeto, dicha representación se guía por normas fijas y preestablecidas para poder describir las dimensiones, formas, características y construcción de lo que se quiere producir.

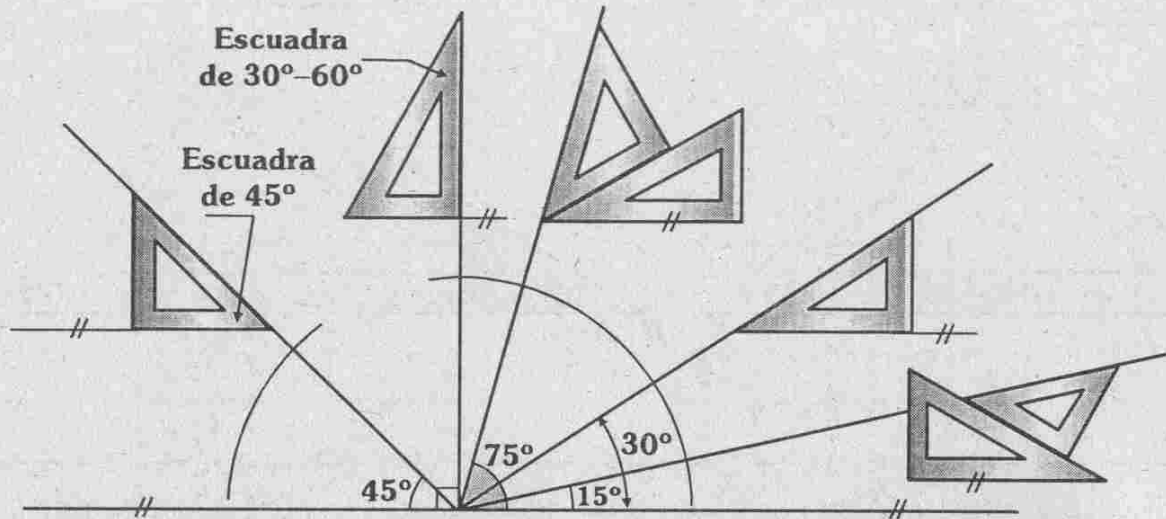
Para realizar el dibujo técnico se requiere de instrumentos de precisión, cuando no utilizamos estos instrumentos se llama dibujo a mano alzada.

La realización de un dibujo técnico, exige cálculo, medición, líneas bien trazadas, una serie de condiciones hacen necesario el uso de buenos instrumentos, entre los principales tenemos: tablero de dibujo, regla T, transportadores, **juego de escuadras**, compás, portaminas, escalímetro, entre otros.

Entre los usos de las escuadras, se emplean para medir y trazar líneas horizontales, verticales, inclinadas y combinada con la regla T se trazan líneas paralelas, perpendiculares y oblícuas.

A la escuadra de 60° se le denomina también cartabón.

A continuación se representa algunas posiciones de diversos ángulos, lo cual nos posibilita usarlos en el diseño y trazado geométrico.



Enunciado de los Problemas Resueltos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

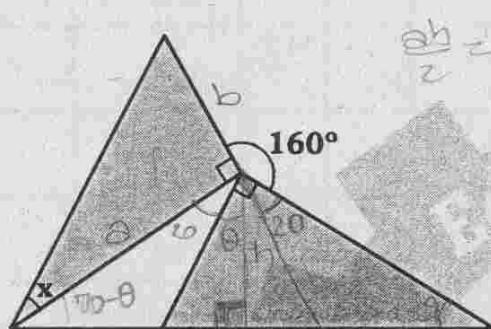


Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA N°1

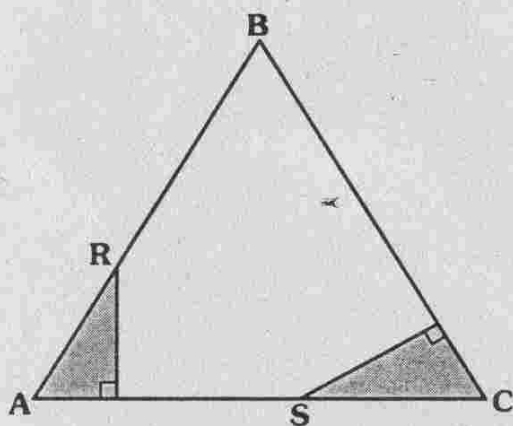
Según el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA N°2

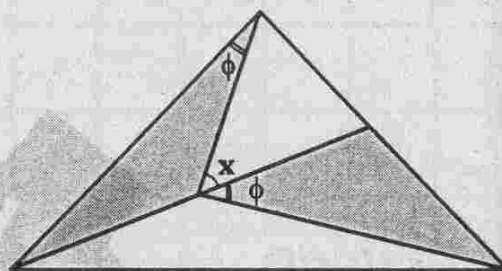
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y el triángulo ABC es equilátero. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{BS}$ y $\overline{CR}$.



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA N°3

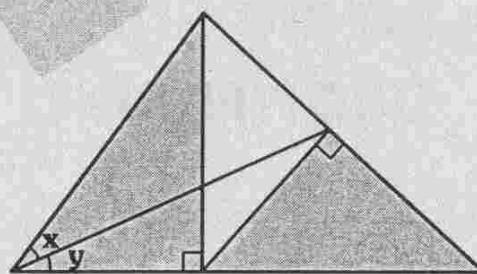
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .



- A) 60° B) 53° C) $63^\circ 30'$
D) 75° E) 72°

PROBLEMA N°4

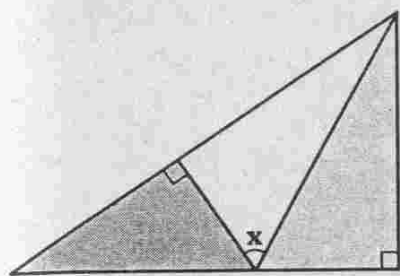
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule $\frac{x}{y}$.



- A) 2 B) 1 C) $1/2$
D) 3 E) $1/3$

PROBLEMA N°5

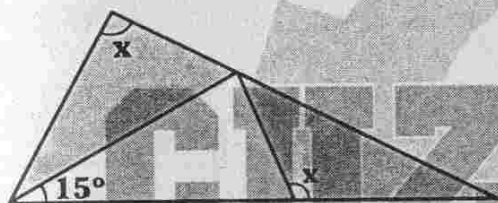
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .



- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 75° E) 53°

PROBLEMA N°6

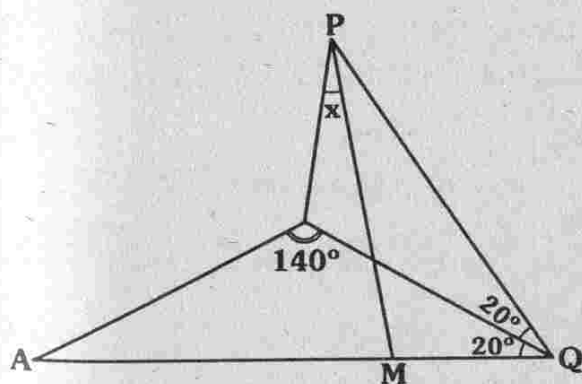
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .



- A) 150° B) 135° C) 120°
D) 127° E) 143°

PROBLEMA N°7

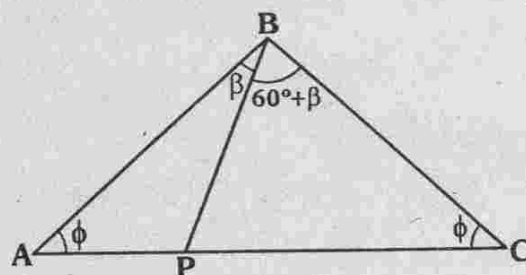
En el gráfico, $AM = PQ$. Calcule x .



- A) 40° B) 50° C) 30°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N°8

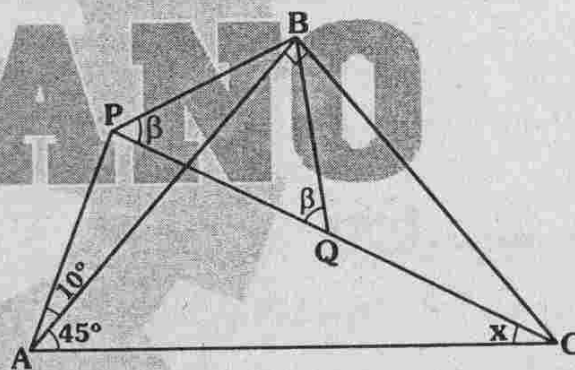
Según el gráfico, $AP = 2$ y $PC = 7$, calcule PB .



- A) 5 B) 6 C) 7
D) 3,5 E) 9

PROBLEMA N°9

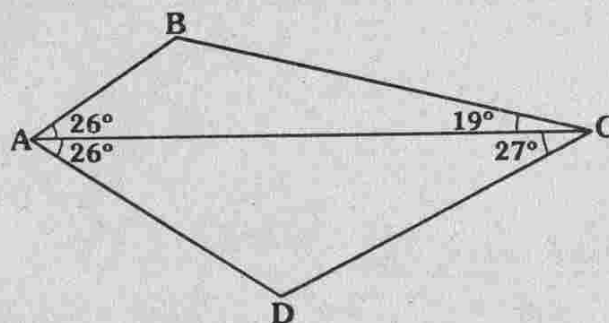
En el gráfico, $AP = QC$. Calcule x .



- A) 35° B) 20° C) 15°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N°10

Del gráfico, calcule $\frac{BC}{DC}$.

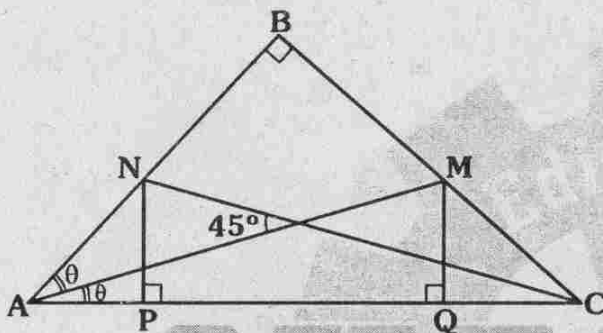


- A) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

PROBLEMA N°11

En el gráfico, $AB = 4$ y $BC = 6$.

Calcule $QC - AP$.

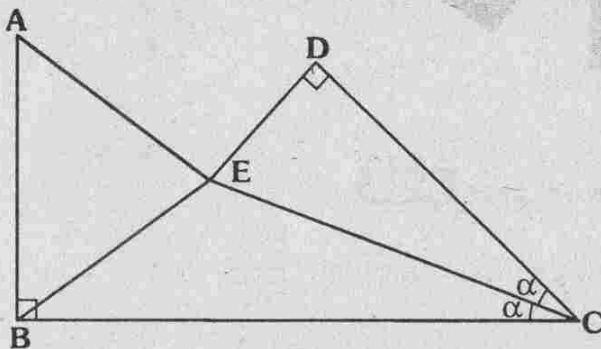


- A) 4 B) 3 C) 5
D) 2 E) 1

PROBLEMA N°12

Del gráfico, $AE = EB$ y $AB = 6$.

Calcule ED .



- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 3,5

PROBLEMA N°13

En el triángulo rectángulo ABC, recto en

B, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$, la mediatriz de $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AC}$ y a la prolongación de $\overline{AD}$ en P y Q respectivamente. Si $BD = PC$, calcule $m\angle AQP$.

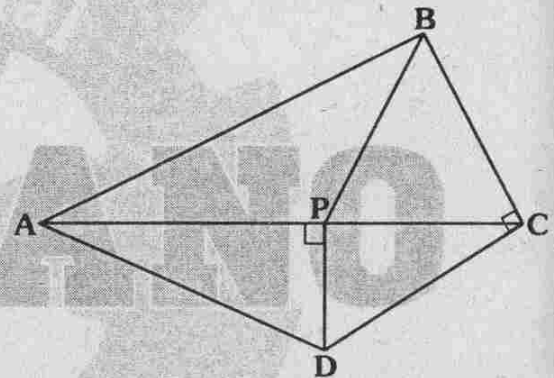
- A) 45° B) $45^\circ/2$ C) $37^\circ/2$
D) 37° E) $53^\circ/2$

PROBLEMA N°14

En el gráfico:

$BP = BC = CD$ y $2(AP) = 3(PC)$

Calcule $m\angle BAD$



- A) 45° B) 53° C) 37°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N°15

Exteriormente y relativo al cateto BC del triángulo rectángulo ABC, se ubica D, tal que:

$$m\angle ADC = m\angle ABC = 90^\circ$$

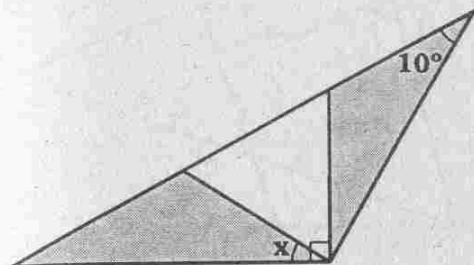
$$\text{si } m\angle CAD = m\angle BCD = 15^\circ$$

Calcule la razón entre AB y la distancia de D hacia $\overline{AB}$.

- A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA N°16

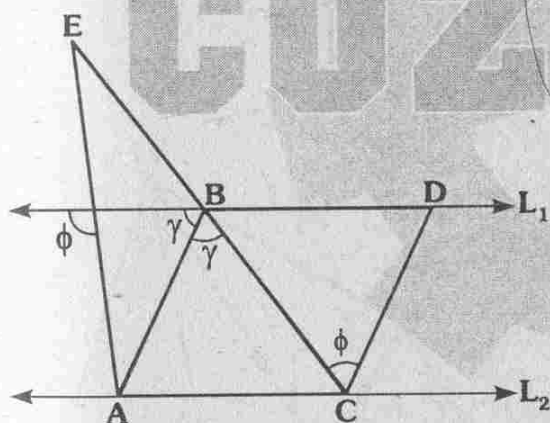
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .



- A) 20° B) 40° C) 60°
D) 80° E) 70°

PROBLEMA N°17

En el gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$, $BD = 10$ y $AC = 7$. Calcule EB .



- A) 1 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

PROBLEMA N°18

En el triángulo ABC , se cumple que $m\angle ABC = 105^\circ$ y $m\angle ACB = 25^\circ$. Se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ y la bisectriz interior $\overline{AF}$. Si $AB = DC$.

Calcule $m\angle BDF$.

- A) 40° B) 20° C) 35°
D) 30° E) 25°

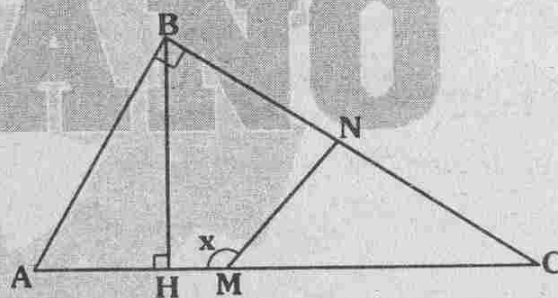
PROBLEMA N°19

En el triángulo rectángulo ABC , recto en B , se ubica M en $\overline{AC}$, tal que $m\angle MBC = 60^\circ$; $m\angle BAC = 50^\circ$ y $BM = a$. Calcule AC .

- A) a B) $a\sqrt{3}$ C) $2a$
D) $a\sqrt{2}$ E) $2a\sqrt{3}$

PROBLEMA N°20

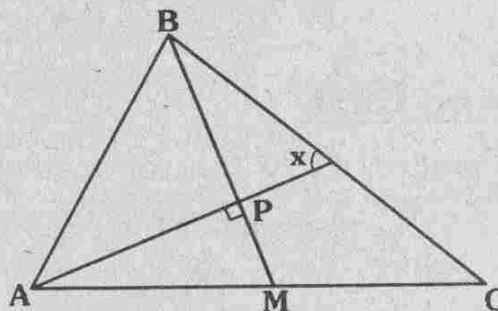
En el gráfico, $AB = NC$ y $5(AH) = 3(MN)$. Calcule x .



- A) 120° B) 127° C) 143°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA N°21

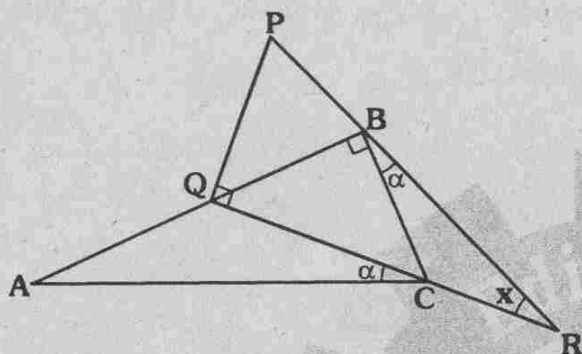
En el gráfico, $AM = MC$ y $BC = 2(AP)$. Calcule x .



- A) 53° B) 60° C) 75°
D) 45° E) 54°

PROBLEMA N°22

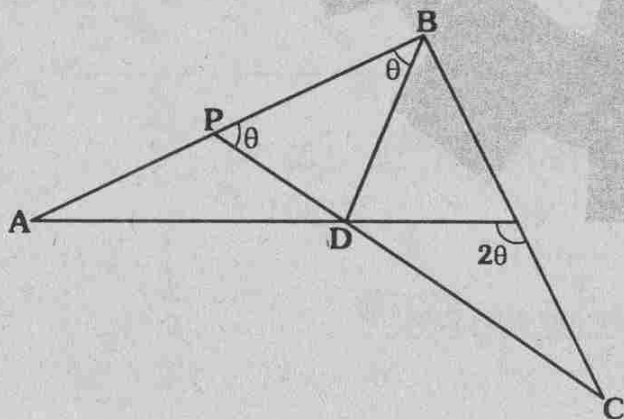
En el gráfico, los triángulos ABC y RQP son congruentes. Calcule x.



- A) 30° B) 37° C) $45^\circ/2$
D) 45° E) 15°

PROBLEMA N°23

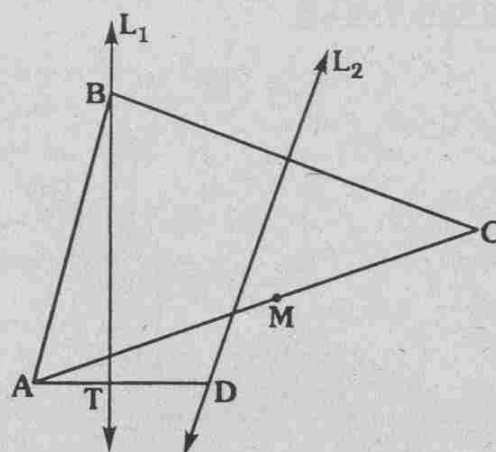
En el gráfico, $BC = AD$, calcule θ .



- A) 45° B) 53° C) 74°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N°24

En el gráfico, $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $AB = 6$ y $AM = MC$. Calcule TM.

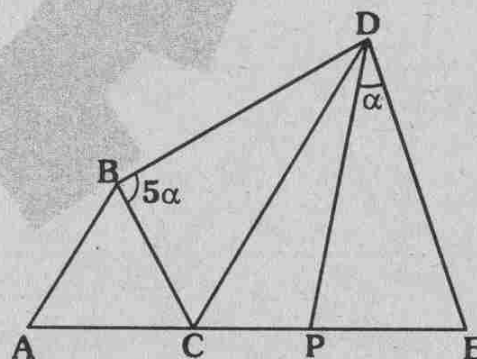


- A) 6 B) 3 C) 1,5
D) 2,5 E) 4,5

PROBLEMA N°25

En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros y $AC = PE$.

Calcule α .



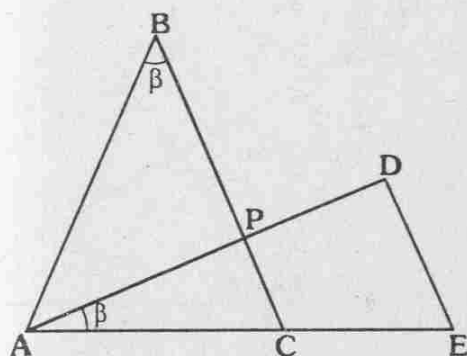
- A) 20° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 15°

PROBLEMA N°26

En el gráfico:

$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, $AB = AD$, $AE = 10$ y $PC = 2$

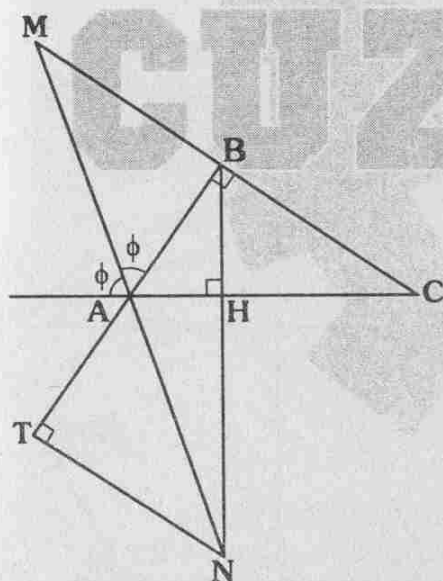
Calcule BP.



- A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 8

PROBLEMA N°27

En el gráfico, $MB = 10$ y $BH = 4$
Calcule TN.

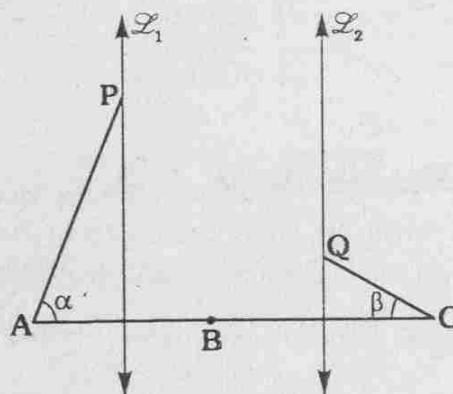


- A) 5 B) 7 C) 6
D) 9 E) 8

PROBLEMA N°28

Del gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Si $3(AP) = 4(QC) = 12$ y $\alpha + \beta = 90^\circ$
Calcule PQ.



- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA N°29

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que $m\angle NMA = 90^\circ$ y los triángulos NMA y NBC son congruentes, calcule $m\angle NCM$.

- A) 53° B) 45° C) 30°
D) 74° E) 60°

PROBLEMA N°30

En el triángulo ABC se traza la altura AH y la mediana BM que se intersectan en N. Si $AN = BC$, calcule $m\angle MBC$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 37° E) 50°

PROBLEMA N°31

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q, tal que:

$$AB = 2(QC) \text{ y } m\angle ACB = 45^\circ$$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 16° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N°32

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y en el triángulo ABM la altura BH, si $3(AC) = 5(BH)$. Calcule $m\angle MAC$.

- A) 60° B) 45° C) 30°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA N°33

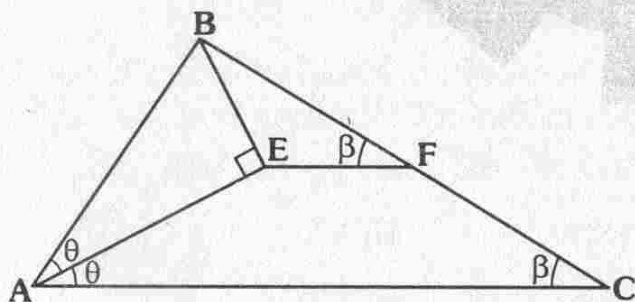
En el triángulo ABC, obtuso en B se cumple $m\angle BAC = 8^\circ$ y $AB = 5(BC)$.

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 53° B) 45° C) 5°
D) 46° E) 60°

PROBLEMA N°34

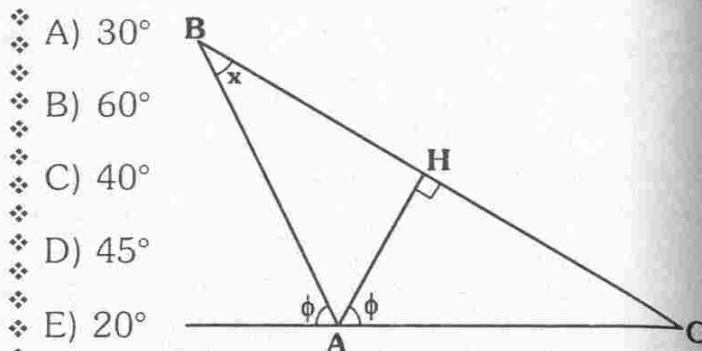
En el gráfico, $AB = 5$ y $AC = 13$. Calcule EF.



- A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°35

En el gráfico, $BH = HC$. Calcule x.



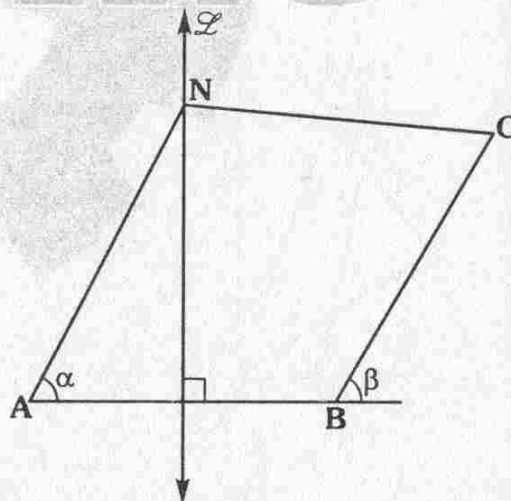
PROBLEMA N°36

En el triángulo ABC recto en B se cumple $AC = 6\sqrt{2}$ y $m\angle ACB < 45^\circ$. Calcule el mayor valor entero de AB.

- A) 3 B) 4 C) 7
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°37

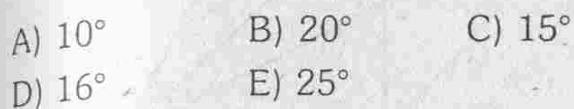
En el gráfico, $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, $AN = BC = 5$ y $\beta + \alpha = 120^\circ$. Calcule NC.



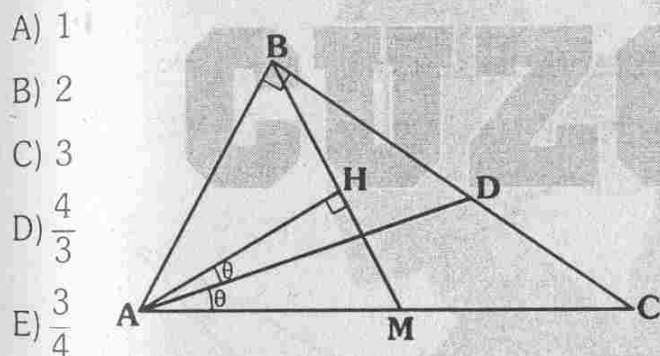
- A) 4 B) 5 C) 6
D) $5\sqrt{3}$ E) 10

PROBLEMA N°38

En el gráfico, $BC = 2(BH)$. Calcule x.



En el gráfico, $AM = MC$ y $7(AB) = 4(BC)$, calcule $\frac{DC}{BD}$.



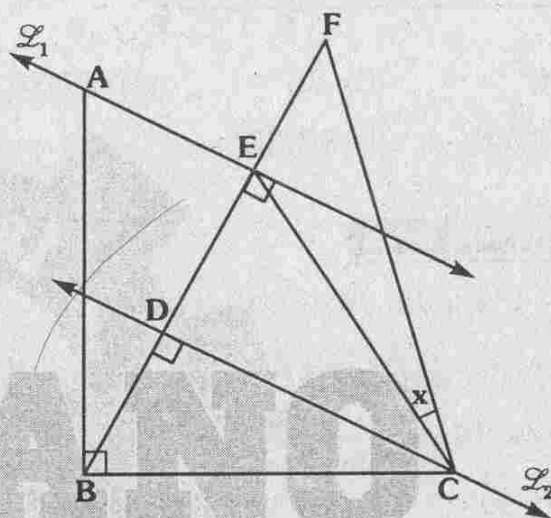
En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, la cual se prolonga hasta E y en $\overline{AD}$ se ubica el punto medio M. Si $\overline{ME} \parallel \overline{BC}$ y $EM = 2$. Calcule AB

- A) 4 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

En el triángulo rectángulo ABC se traza $\overline{CD}$ perpendicular a la bisectriz del ángulo BAC. Si $BC = 6$, calcule la distancia de D a $\overline{AC}$.

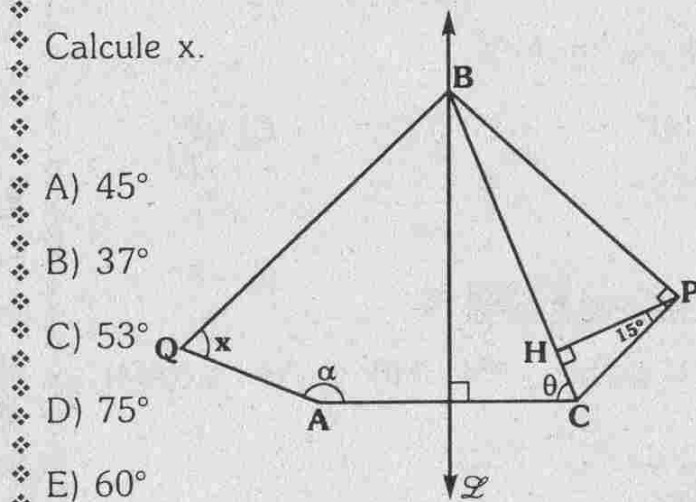
- ❖ A) 3 B) 6 C) 4,5
❖ D) 1,5 E) 2

❖ En el gráfico, $\overline{\mathcal{L}}_1$ y $\overline{\mathcal{L}}_2$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente y $AB = BC$. Calcule x .



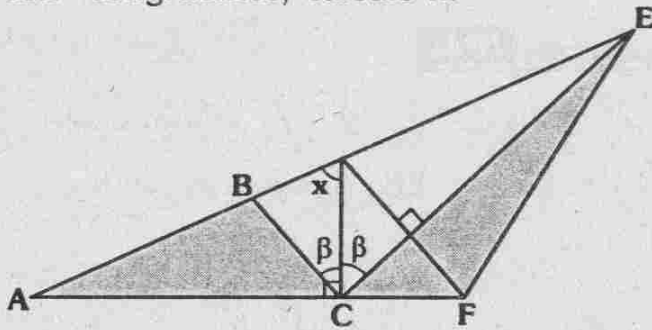
- ❖ A) $22^{\circ}30'$ B) $18^{\circ}30'$ C) $26^{\circ}30'$
❖ D) 15° E) 30°

- ❖ En el gráfico, $\overline{\mathcal{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$,
- ❖ $AQ = 3(PH)$ y $\alpha - \theta = 90^\circ$.
- ❖ Calcule x .



PROBLEMA N°44

En el gráfico, los triángulos ABC y ECF son congruentes, calcule x.



- A) 60° B) 75° C) $67^\circ 30'$
D) $63^\circ 30'$ E) $72^\circ 30'$

PROBLEMA N°45

En el triángulo ABC se cumple:

$$m\angle ABC = 90^\circ + m\angle BAC \text{ y } AC = 3(BC)$$

Calcule $m\angle CAB$

- A) $18^\circ 30'$ B) 37° C) 53°
D) $22^\circ 30'$ E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N°46

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AM y en el triángulo AMC la ceviana interior MN. Si $AM = 4$; $NC = 6$; $m\angle NMC = 90^\circ$ y $m\angle BAM = m\angle MCA$.

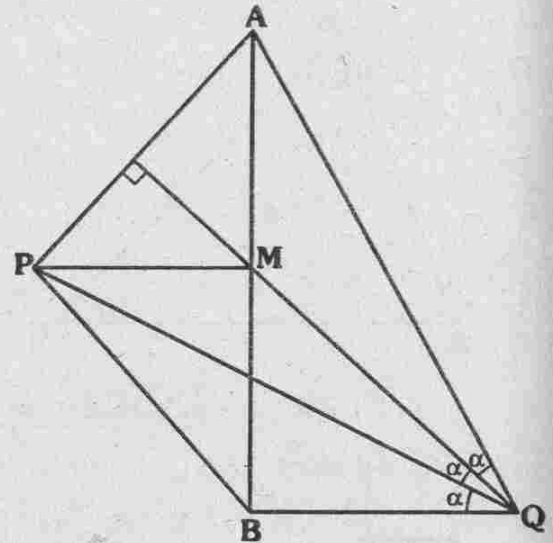
Calcule $m\angle MAC$.

- A) 30° B) 37° C) 60°
D) 15° E) $53^\circ/2$

PROBLEMA N°47

En el gráfico, $AM = MB$ y $PB = \sqrt{2}(AM)$.

Calcule $\frac{BQ}{AP}$

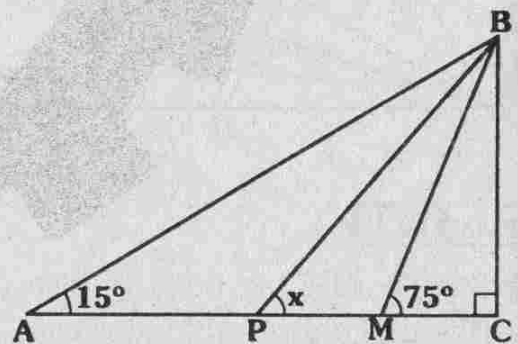


- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 1
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

PROBLEMA N°48

En el gráfico, $12(PB) = 5(AC + MC)$.

Calcule x.



- A) 37° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 45°

PROBLEMA N°49

En el triángulo ABC ($AB < BC$), la mediatriz de la bisectriz exterior $\overline{BE}$ interseca a $\overline{AE}$ en F de modo que $AB = FE$ y $FC = 8$.

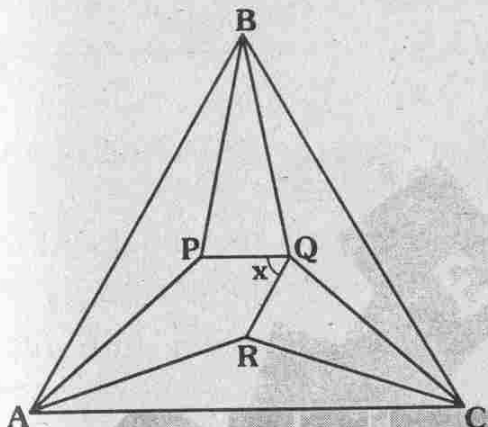
Calcule BC.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 4 E) 12

PROBLEMA N°50

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Calcule x, si :

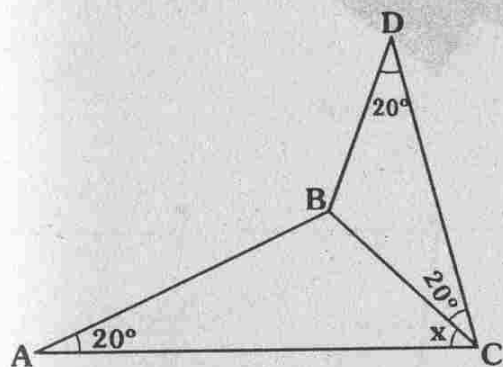
$$AP = PB = QC = RA = RC = QB$$



- A) 60° B) 45° C) 90°
D) 53° E) 75°

PROBLEMA N°51

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x.



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 35° E) 45°

PROBLEMA N°52

Se tienen los triángulos rectángulos ABC y ADC ambos de hipotenusa AC,

$\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{P\}$, Si $m\angle BAD = 45^\circ$ y $AC = 10$, calcule BD.

- A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$
D) 10 E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA N°53

En el triángulo equilátero ABC se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $MB = 2$, $NC = 5$ y $m\angle MNC = 90^\circ$. Calcule CM.

- A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{13}$
D) $\sqrt{13}$ E) 4

PROBLEMA N°54

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior BF, tal que:

$$AB = CF \quad \text{y}$$

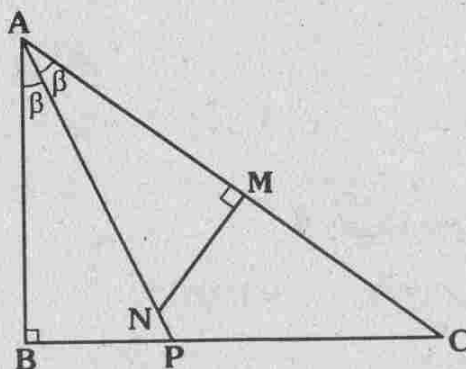
$$m\angle FBC = 2(m\angle ABF) = 2(m\angle ACB)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 30° B) 18° C) 22°30'
D) 26°30' E) 36°

PROBLEMA N°55

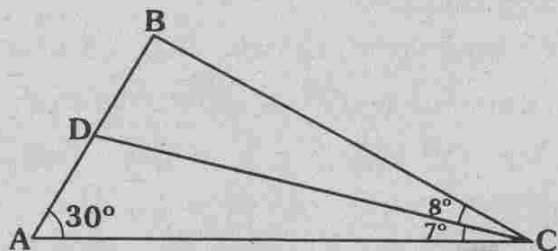
En el gráfico, $AM = MC$ y $PC = 18$. Calcule MN.



- A) 6 B) 7 C) 9
D) 4,5 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°56

En el gráfico, $AC = 12$, calcule BD .

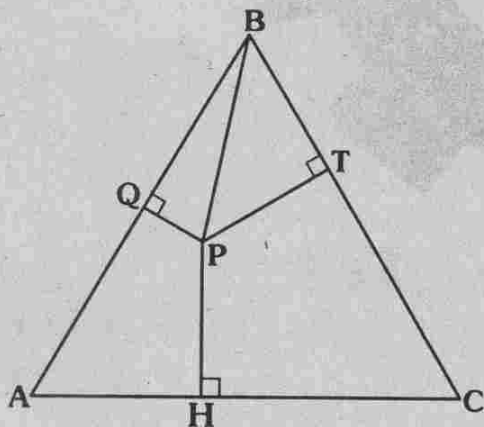


- A) 1 B) 2,5 C) 1,5
D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº57

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $PH = PB$, $PQ = 2$ y $TP = 11$.

Calcule PH.



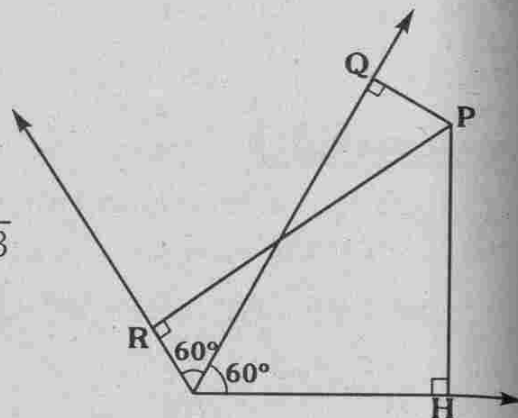
- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 12

PROBLEMA Nº58

En el gráfico, $PQ = 1$ y $PH = 7$.

Calcule PR.

- A) 8
B) $8\sqrt{3}$
C) $16\sqrt{3}$
D) 16
E) $4\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº59**

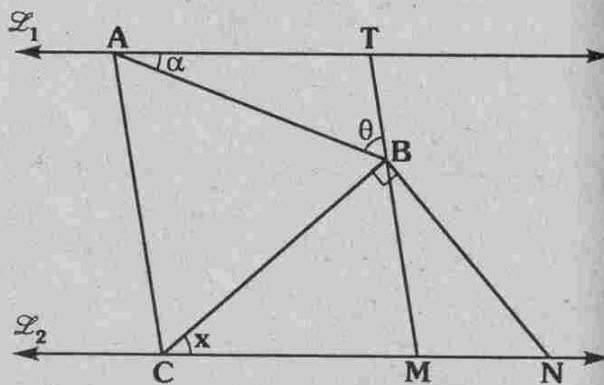
Dado el triángulo rectángulo ABC , recto en B , en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica D , cumpliéndose que $AC=10$, $DC=3$ y $BD=5$.

Calcule $m\angle BAD$.

- A) 30° B) 37° C) $18^\circ 30'$
D) $26^\circ 30'$ E) 45°

PROBLEMA N°60

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $MN = BT$; $\theta - \alpha = 30^\circ$ y $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$, calcule x.



- A) 30° B) 45° C) 37°
D) 36° E) 15°

Problemas Resueltos

Ciclo **Cepre-Uni**

PROBLEMA N°61

[1er. Seminario 99-I]

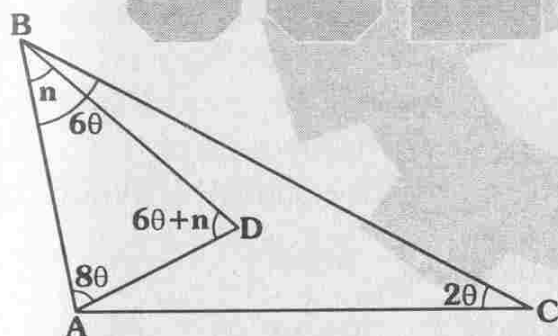
Dado el triángulo ABC, $m\angle B = 80^\circ$, $R \in \overline{AC}$, las mediatrices de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en Q, $AB = CR$ y $m\angle BCA = 3(m\angle ACQ)$. Calcule $m\angle ACQ$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA N°62

[1er. Seminario 99-I]

En el gráfico, $AD = 1$ y $AC = 7$.
Calcule BC.

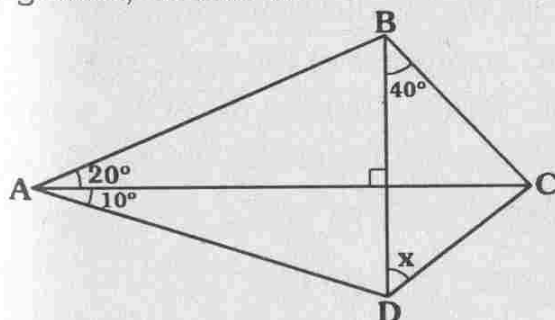


- A) 8 B) 9 C) 6
D) 11 E) 12

PROBLEMA N°63

[1er. Seminario 99-I]

Del gráfico, calcule x.



- A) 81° B) 45° C) 46°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N°64

[1er. Seminario 99-I]

En el triángulo isósceles ABC, se cumple $m\angle ABC = 90^\circ$, se considera el punto Q en su interior, con la condición siguiente:

$$m\angle BAQ = m\angle QBC = m\angle QCA$$

Calcule $m\angle BCQ$.

- A) 37° B) $37^\circ/2$ C) $53^\circ/2$
D) 30° E) 15°

PROBLEMA N°65

[1er. Seminario 99-I]

En el triángulo obtusángulo ABC obtuso en B, el ángulo en B mide 150° y el ángulo en C mide 10° , la distancia de C a la bisectriz interior del ángulo A mide 4. Calcule AB.

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

PROBLEMA N°66

[1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$), $E \in \overline{BD}$ tal que:

$$AB = AE = BC$$

$$m\angle BAE = 2(m\angle BCE)$$

Calcule $m\angle BDA$.

- A) 50° B) 52° C) 54°
D) 58° E) 60°

PROBLEMA N°67

[1er. Seminario 99-I]

Sea el triángulo rectángulo ABC recto en B, se construye exteriormente el triángulo equilátero BMC. P y Q son puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $AM = 8$, calcule PQ.

- A) 4 B) 6 C) 2
D) 8 E) 1

PROBLEMA N°68

[1er. Seminario 99-I]

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\angle A = 2(m\angle C) = 30^\circ$$

Se traza la mediana $\overline{BM}$, calcule $m\angle MBC$.

- A) 25° B) 15° C) 30°
D) 45° E) $22^\circ 50'$

PROBLEMA N°69

[1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, $m\angle C = 36^\circ$ y $m\angle B = 96^\circ$, N y E están en $\overline{AC}$, tal que $AN = NE$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $CE = AB$.

Calcule $m\angle MNC$.

- A) 24° B) 26° C) 20°
D) 30° E) 32°

PROBLEMA N°70

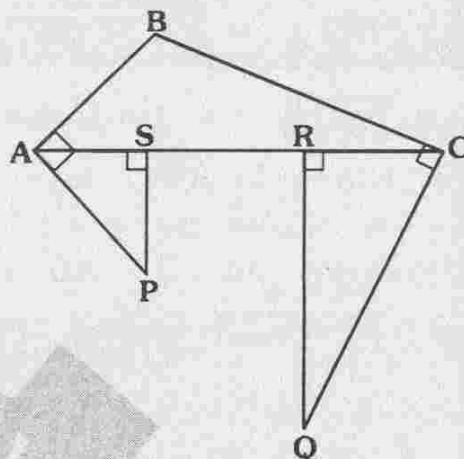
[1er. Seminario 99-I]

Dado el ángulo AOB y el punto exterior P, se trazan $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ por perpendiculares a los lados del ángulo, demostrar que la recta que une los puntos medios de $\overline{OP}$ y $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{EF}$.

PROBLEMA N°71

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AB = AP$, $BC = QC$, $PS = 3$ y $RQ = 5$. Calcule AC.



- A) 6 B) 10 C) 8
D) 9 E) 10,5

PROBLEMA N°72

[1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana BD, tal que:

$$AB = DC \text{ y}$$

$$2(m\angle ABD) = 5(m\angle A) = 10(m\angle C)$$

Calcule $m\angle C$.

- A) 10° B) 20° C) 12°
D) 18° E) 36°

PROBLEMA N°73

[1er. Seminario 98-II]

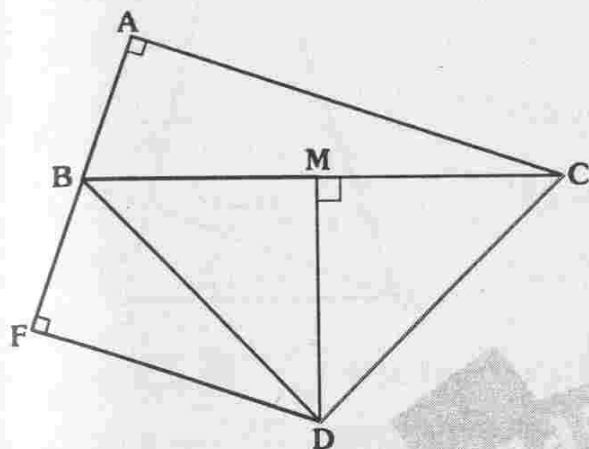
Por el vértice B del triángulo ABC se trazan las perpendiculares $\overline{BA'}$ a $\overline{BA}$ y $\overline{BC'}$ a $\overline{BC}$ exteriores al triángulo, si $BA' = BA$ y $BC' = BC$. Calcule $m\angle AOC$, siendo O el punto de intersección de $\overline{A'C}$ y $\overline{AC'}$.

- A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N°74

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BM = MC = MD$. Si $AB = 10$ y $DF = 14$, calcule AC .



- A) 24 B) 18 C) 22
D) 30 E) 28

PROBLEMA N°75

[1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC , recto en B , se traza la ceviana interior BD y la mediatriz de AD , la cual corta a la bisectriz del ángulo BDE en F (E es el punto de intersección de la mediatriz trazada con AB).

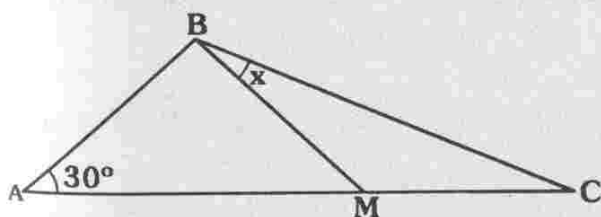
Si $m\angle CBD = \theta$. Calcule $m\angle DFE$.

- A) $45^\circ - \theta$ B) $\theta/2$ C) $90^\circ - \theta/2$
D) $45^\circ + \theta/2$ E) $45^\circ - \theta/2$

PROBLEMA N°76

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BC = AM$ y $BM = MC$. Calcule x .



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA N°77

[1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo ABC , $m\angle B = \beta > 90^\circ$, $m\angle C = \alpha$, $P \in \overline{AC}$, $AB = CP$, las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ se cortan en R . Calcule $m\angle ACR$.

- A) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ B) $\beta - \alpha$
C) $\beta - 2\alpha$ D) $\frac{\beta - 2\alpha}{2}$
E) $\frac{\beta - \alpha}{2}$

PROBLEMA N°78

[1er. Seminario 98-II]

Dado una recta y tres puntos consecutivos sobre ella A , B y C , se construyen dos triángulos equiláteros ABE y BFC a un mismo lado de la recta AE . Sean M y N los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$.

Demostrar que el triángulo MNB es equilátero.

PROBLEMA N°79

[1er. Seminario 98-II]

En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , $m\angle C = 15^\circ$. Sobre $\overline{BC}$ se ubica un punto cuyas distancias a la hipotenusa y a la mediana relativa a la hipotenusa miden " a " y " b ".

Calcule la longitud de la hipotenusa.

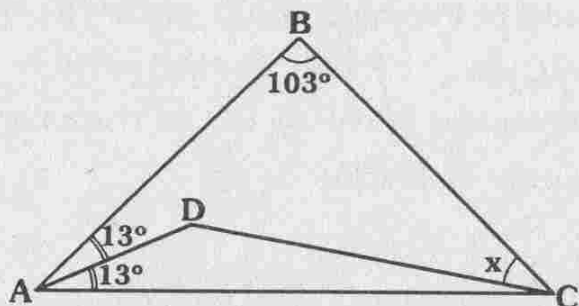
- A) $a + b$ B) $2(a + b)$
C) $4(a + b)$ D) $4\sqrt{a^2 + b^2}$
E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

PROBLEMA N°80

[1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $BC = CD$.

Calcule x .



- A) 30° B) 45° C) 36°
D) 40° E) 34°

PROBLEMA N°81

[1er. Seminario 2008-I]

En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 45^\circ$ y $m\angle ACB = 30^\circ$. Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces la $m\angle ABM$ es:

- A) $22,5^\circ$ B) 30° C) 36°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA N°82

[1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo ABC, ($AB < BC$) se traza la altura BH y la mediana BM de modo que el ángulo B quede trisecado. Entonces, la $m\angle BCA$ es:

- A) 15° B) $22,5^\circ$ C) 28°
D) 30° E) 35°

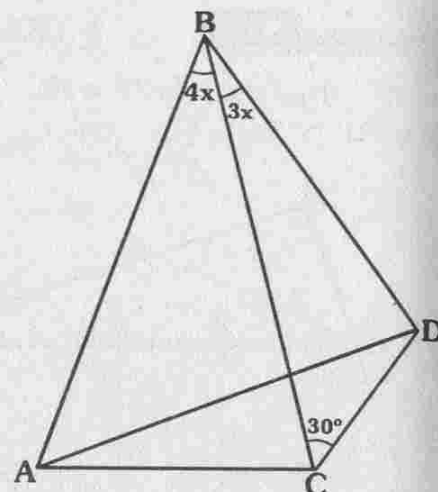
PROBLEMA N°83

[1er. Seminario 97-I]

En el gráfico:

$$AB = BC \quad \text{y} \quad AD = BD$$

Calcule $m\angle ABC$.



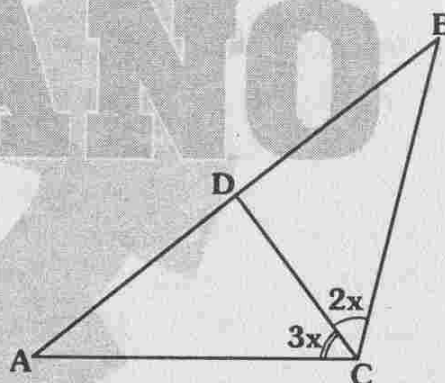
- A) 18°
B) 20°
C) 66°
D) 24°
E) 26°

PROBLEMA N°84

[1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $AD = DB$ y $BC = 2(CD)$.

Calcule x .



- A) 15° B) 18° C) $22,5^\circ$
D) 10° E) 30°

PROBLEMA N°85

[1er. Seminario 2006-I]

En un triángulo ABC, $AB < BC$, $AB = k_1$, la mediatriz de AC interseca a la bisectriz exterior del ángulo B en T. Se traza $\overline{TH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$, si $BH = k_2$. Halle BC.

- A) $3k_1 + k_2$ B) $k_1 + \frac{k_2}{2}$ C) $k_1 + 2k_2$
D) $2k_1 + k_2$ E) $k_1 + k_2$

PROBLEMA N°86

[1er. Seminario 97-I]

En el triángulo acutángulo ABC sobre $\overline{BC}$ se ubica E de modo que $AB = EC$. Si $m\angle ABC = 60^\circ$ y $AB = 18$. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$.

- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

PROBLEMA N°87

[1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC, se cumple $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$ y p es el semiperímetro, se trazan desde A perpendiculares a las bisectrices de los ángulos interiores en B y C. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las perpendiculares.

- A) p B) a - b C) (b + c)/2
D) p - a E) p - b

PROBLEMA N°88

[Texto CEPRE - UNI]

Desde un punto P interior a un triángulo equilátero ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Hallar $\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}$.

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $1/2$
D) 1 E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA N°89

[1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$ de modo que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$ y

$m\angle BAC = m\angle AEB = 3(m\angle EBC)$. Calcule $m\angle ABE$.

- A) 90° B) 120° C) 75°
D) 60° E) 150°

PROBLEMA N°90

[1er. Seminario 97-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), exterior a $\overline{AC}$ se ubica M de modo que $m\angle ACM = m\angle ACB$,

$$m\angle MAC = 2(m\angle ACM) \quad \text{y}$$

$$m\angle MBC = 3(m\angle ACB).$$

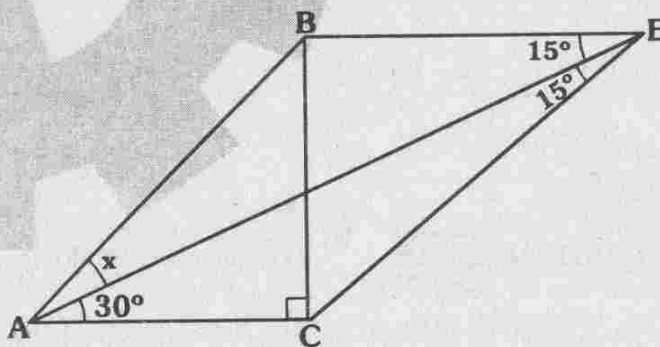
Calcule $m\angle ACM$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) $18,5^\circ$

PROBLEMA N°91

[1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, calcule x.



- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N°92

[1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, obtuso en B, por B se traza $\overline{QB} \perp \overline{BC}$, $Q \in \overline{AC}$. Si $AB = a$ y $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$.

Calcule QC.

- A) a B) $\frac{a}{2}$ C) $2a$
D) $3a$ E) $\frac{a}{3}$

PROBLEMA N°93

[1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, relativa a la hipotenusa, la mediatriz de BM interseca a MC en F, si $\overline{BC} \cong \overline{MF}$, halle $m\angle BAC$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 21°

PROBLEMA N°94

[1er. Seminario 2001-II]

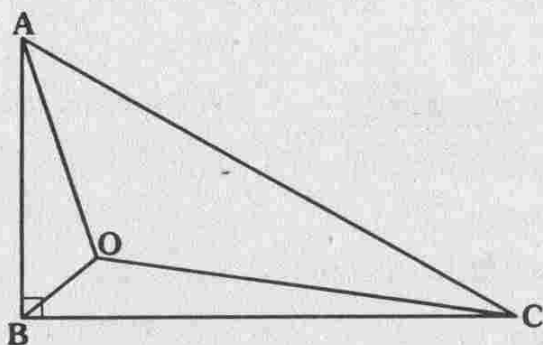
En el triángulo rectángulo MNP recto en N, se traza la bisectriz interior NQ ($Q \in \overline{MP}$), por Q se traza una perpendicular a $\overline{MP}$ intersectando a la prolongación del cateto MN en T. Si $m\angle NPM = \phi$, halle $m\angle NTP$.

- A) 45° B) 60° C) $\phi + 45^\circ$
D) $\phi + 30^\circ$ E) $\phi + 15^\circ$

PROBLEMA N°95

[1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $m\angle OBC = 3(m\angle BCO)$, $m\angle OAC = 2(m\angle BCO)$ y $m\angle BAO = m\angle OCB$. Calcule $m\angle OCB$.



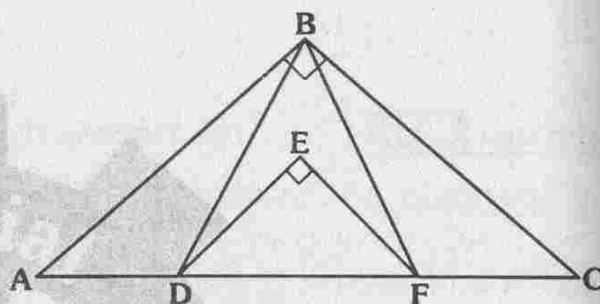
- ❖ A) 5° B) 9° C) 15°
❖ D) 18° E) 20°

PROBLEMA N°96

[1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $AB = BC$; $AD = DE$; $EF = FC$.

Calculemos $m\angle DBF$.



- ❖ A) 75° B) 60° C) 53°
❖ D) 45° E) 30°

PROBLEMA N°97

[1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, donde $m\angle BAC = 90^\circ$, se traza la ceviana $\overline{AP}$ y resulta que:

$$m\angle PAC = 36^\circ \text{ y } m\angle APB = 84^\circ$$

Si $BC = \ell$, calcule AP.

- ❖ A) $\ell/3$ B) $2\ell/3$ C) $\ell/2$
❖ D) $\ell/4$ E) $2\ell/5$

PROBLEMA N°98

[1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, recto en A, se ubica D en $\overline{BC}$, tal que $AB = CD$,

$m\angle ABD = 3\theta$ y $m\angle DAC = \frac{9\theta}{2}$. Halle θ .

- ❖ A) 5° B) 15° C) 18°
❖ D) $22,5^\circ$ E) 27°

PROBLEMA N°99

[1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en A), $\overline{AM}$ es mediana, $\overline{BN}$ es ceviana interior, $\angle BCN \cong \angle CBN$ y $m\angle ABN = 38^\circ$. Si L es punto medio de $\overline{BN}$. Calcule $m\angle LAM$.

- A) 38° B) 26° C) 13°
 D) 27° E) 52°

PROBLEMA N°100

[1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en B), se tiene $m\angle A = 2(m\angle AMB)$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $AC = 22\text{cm}$. Calcule AB

- A) 10 cm B) 16cm C) 12cm
 D) $\frac{22}{3}\text{cm}$ E) 14cm

PROBLEMA N°101

[1er. Seminario 2001-I]

En un triángulo ABC se traza la ceviana BP ($P \in \overline{AC}$). Si $AB = CP$; $m\angle PBC = 5\alpha$; $m\angle BAC = 4\alpha$ y $m\angle BCA = 3\alpha$. Calcule $m\angle PBC$.

- A) 40° B) 30° C) 50°
 D) 45° E) 65°

PROBLEMA N°102

[1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle A = \alpha$. Se traza la bisectriz interior BP y la mediatriz de $\overline{BP}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AC}$ en Q. Calcule $m\angle QBC$.

- A) α B) $\frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{\alpha}{3}$
 D) $\frac{3\alpha}{2}$ E) $\frac{2\alpha}{3}$

PROBLEMA N°103

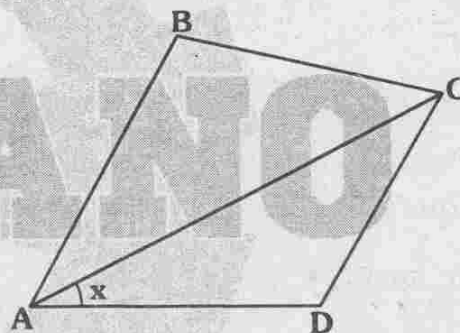
El ángulo interior de B del triángulo ABC mide 72° . Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en L y a $\overline{AC}$ lo intersectan en E y F respectivamente. Calcule $m\angle FBE$.

- A) 12° B) 17° C) 9°
 D) 36° E) 19°

PROBLEMA N°104

[1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $AB = AD$, $m\angle BAC = 57^\circ$, $m\angle BCA = 22^\circ$ y $m\angle ACD = 11^\circ$. Calcule x.



- A) 15° B) 16° C) 19°
 D) 22° E) 27°

PROBLEMA N°105

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, de modo que $BD = AC$, $m\angle BAC = 100^\circ$ y $m\angle BCA = 30^\circ$. Calcule $m\angle DBC$.

- A) 9° B) 10° C) 12°
 D) 15° E) 20°

PROBLEMA N°106

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo MNP se traza la ceviana interior NQ, tal que $\overline{MN} \cong \overline{QP}$.

Si $\frac{m\angle MNQ}{7} = \frac{m\angle NPQ}{2} = m\angle QNP$

Calcule $m\angle NPM$.

- A) 8° B) 10° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N°107 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo escaleno, se ubica el punto interior D, de modo que

$\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}$. Si $m\angle BCD = 2(m\angle BAD)$

Calcule $m\angle BAD + m\angle ABC$.

- A) 90° B) 95° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA N°108 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo ABC, se ubica D, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$,

$\frac{m\angle BAD}{9} = \frac{m\angle DCA}{3} = \frac{m\angle DCB}{4} = m\angle DBC = m\angle DAC$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 60° B) 70° C) 75°
D) 80° E) 88°

PROBLEMA N°109 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Si $m\angle ACB = 4x$, $m\angle ABD = x$ y

$m\angle DBC = 2x$, entonces x es:

- A) 12° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 21°

PROBLEMA N°110 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC ($AB < BC$) se ubica P

en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$, tal que $\overline{PB} \cong \overline{QC}$, las mediatrices en F, entonces BF es:

- A) Perpendicular a $\overline{PQ}$.
B) Perpendicular a $\overline{AC}$.
C) Pasa por el punto medio de $\overline{AC}$.
D) Bisectriz del ángulo ABC.
E) Mediatriz de $\overline{PQ}$.

PROBLEMA N°111 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo rectángulo isósceles ($AB = BC$), se ubica el punto interior D, de modo que $m\angle BAD = m\angle DCA$ y $\overline{AD} \perp \overline{BD}$. Si $BD = 4$, entonces $\overline{DC}$ mide:

- A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA N°112 [1er. Seminario 2007-II]

Exteriormente al triángulo rectángulo ABC (recto en B) y relativo a $\overline{BC}$, se ubica D.

Si $AB = n$ y

$m\angle DAC = m\angle BCA = m\angle DCB = 15^\circ$

entonces $\overline{CD}$ mide:

- A) $n\sqrt{2}$ B) $n\sqrt{3}$ C) $n\sqrt{5}$
D) $n\sqrt{6}$ E) $n\sqrt{7}$

PROBLEMA N°113 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM.

Si $m\angle ACB = 30^\circ$ y

$m\angle MBA = 2(m\angle BAC)$

entonces $m\angle ABM$ es:

- A) 20° B) 25° C) 12°
D) 35° E) 15°

PROBLEMA N°114

[1er. Seminario 2007-II]

Sea el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y H respectivamente, tal que $BP = BQ$; $m\angle QHC = 40^\circ$ y $HA = HQ + HC$. Calcule $m\angle PHA$.

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N°115

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC, donde $AB = BC$ y $m\angle ABC = 40^\circ$. En el interior se ubica Q tal que:

$$QB = AC \text{ y } m\angle ABQ = 10^\circ$$

Calcule $m\angle QAB$

- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 16°

PROBLEMA N°116

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se trazan las alturas BH y CQ. M es punto medio de $\overline{BC}$. Si $m\angle BAC = \omega$, entonces $m\angle HMQ$ es:

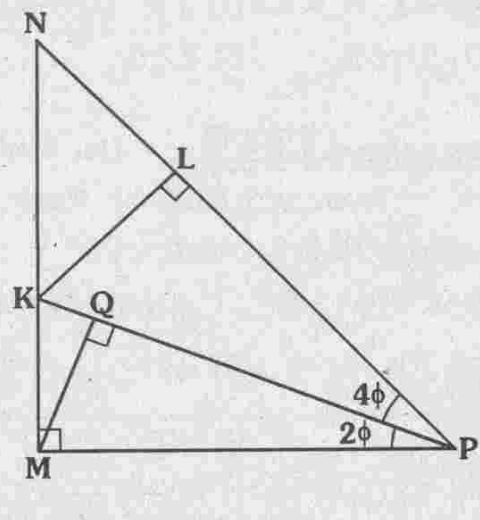
- A) $90^\circ - \frac{\omega}{3}$ B) $90^\circ + \frac{\omega}{2}$
C) $180^\circ - 2\omega$ D) $90^\circ - \frac{\omega}{2}$
E) $180^\circ - 3\omega$

PROBLEMA N°117

[1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $KL = \ell$ entonces QM es:

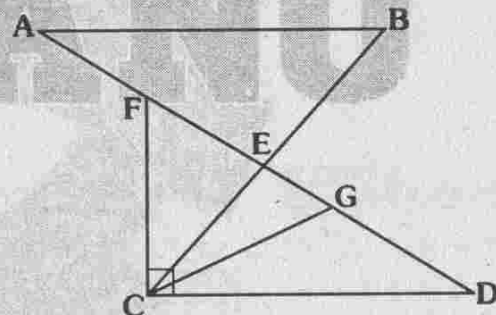
- A) $\frac{3}{4}\ell$
B) $\frac{2}{3}\ell$
C) $\frac{1}{2}\ell$
D) $\frac{1}{3}\ell$
E) $\frac{1}{4}\ell$



PROBLEMA N°118

[1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y E es punto medio de $\overline{BC}$. Si $AF = m$, $FE = n$ y G es punto medio de $\overline{FD}$, entonces $\overline{GC}$ mide:



- A) $\frac{m}{2} + 3n$ B) $\frac{m}{2} + n$ C) $\frac{n-m}{2}$
D) $\frac{n+m}{3}$ E) $2m + \frac{m}{3}$

PROBLEMA N°119

[1er. Seminario 2009-II]

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se ubica P en la región interior, tal que:

$$CP = AB, \quad m\angle PAC = x, \quad m\angle PAB = \theta$$

$$\text{y } m\angle APC = 4x + \theta$$

Calcule x.

- A) 30° B) 12° C) 15°
D) $18,5^\circ$ E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N°120 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM. Si $m\angle A = 20^\circ$ y $m\angle C = 80^\circ$ $AM = BM + BC$. Calcule $m\angle ABM$.

- A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N°121 [1er. Seminario 2007-II]

Se tienen los triángulos ABC y ADC ($AB \cap DC = \{Q\}$), $m\angle BCD = 20^\circ$, $m\angle DAC = m\angle ACD = 40^\circ$ y $AC = AD + BC$. Calcule $m\angle AQC$.

- A) 100° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA N°122 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BQ}$.

Si: $m\angle A = 2(m\angle ABQ)$ y

$$m\angle C - m\angle ABQ = 90^\circ$$

Calcule $m\angle BQC$.

- A) 15° B) 45° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA N°123 [1ra. P. Calificada 2007-I]

Se tiene el triángulo escaleno ABC, se traza la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{AC}$ que se intersecan en Q. Calcule $m\angle ACQ$ en función del ángulo en B del triángulo ABC.

- A) $\frac{2}{3}m\angle B$ B) $m\angle B$ C) $\frac{1}{2}m\angle B$
D) $\frac{1}{4}m\angle B$ E) $\frac{1}{3}m\angle B$

PROBLEMA N°124 [1ra. P. Calificada 2007-I]

En el triángulo ABC, las bisectrices de los ángulos ABC y BCA se intersecan en Q. Sea:

$$\frac{m\angle BAC}{3} = \frac{m\angle BCA}{2}$$

$$\text{y } \overline{QC} \cong \overline{AB}$$

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 50° B) 60° C) 75°
D) 80° E) 90°

PROBLEMA N°125 [1ra. P. Calificada 2006-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ de manera que $QC = AB$ y

$$\frac{m\angle QBC}{4} = \frac{m\angle QBA}{3} = m\angle BCA$$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 17° B) 18° C) 19°
D) 20° E) 21°

PROBLEMA N°126 [1ra. P. Calificada 2006-I]

Es verdadero

- I. Dos triángulos son congruentes, si tienen sus respectivos lados congruentes dos a dos.
- II. Dos triángulos son congruentes si tienen sus respectivos lados iguales dos a dos.

III. Dos triángulos con congruentes, si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman iguales dos a dos.

IV. Dos triángulos son congruentes, si tienen un ángulo congruente y los lados que lo determinan respectivamente congruentes dos a dos.

- A) I y III B) I y IV
C) I, II, III y IV D) II
E) IV

PROBLEMA N°127

[1ra. P. Calificada 2006-I]

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, la altura BF que interseca a la hipotenusa AC interseca a la bisectriz interior AP en E, se traza $\overline{EQ}$ paralelo a $\overline{AC}$, donde Q pertenece a $\overline{BC}$. Entonces se puede afirmar que:

- A) $QC = \frac{1}{2}(BP)$ B) $QC = BP$
C) $QC = \frac{3}{2}(BP)$ D) $QC = 2(BP)$
E) $QC = \frac{5}{2}(BP)$

PROBLEMA N°128

[1ra. P. Calificada 2004-II]

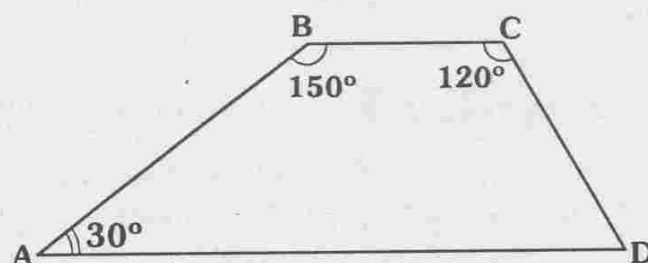
En el triángulo ABC, la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ a $\overline{AC}$ mide 2μ . Si $AB = 8\mu$ y $m\angle BAC = 2(m\angle ACB)$, entonces $m\angle ABC$ es:

- A) 150° B) 135° C) 120°
D) 90° E) 75°

PROBLEMA N°129

[1er. E. Parcial 2003-II]

En el gráfico $AB = 24\sqrt{3}$ y $BC = 16$,
Calcule AD.



- A) 52 B) 64 C) $32\sqrt{3}$
D) $32\sqrt{2}$ E) $64\sqrt{3}$

PROBLEMA N°130

[1er. Seminario 2001-II]

En el interior del triángulo ABC se ubica P tal que $AB = PC$, $AP = 8$, $m\angle ABP = 2(m\angle BAP)$; $m\angle BAP = m\angle ACP$ y $m\angle APC = 5(m\angle ACP)$. Calcule AC

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 20 E) 24

PROBLEMA N°131

[1er. Seminario 2001-II]

En el triángulo ABC, $AB = 5$ y $BC = 8$. La mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a la bisectriz exterior del ángulo trazado desde B en F, luego se traza $\overline{FH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$.

Calcule BH.

- A) 3 B) 1,5 C) 3,5
D) 4 E) 8

PROBLEMA N°132

[1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto exterior D relativo a $\overline{BC}$, tal que $AB = BC = CD$.

Si $m\angle ABC = 2(m\angle DAC)$, entonces $m\angle DAC$ es:

- A) 15° B) 18° C) $22,5^\circ$
D) 30° E) 36°

PROBLEMA N°133 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersectan en D. Si $AD = BC$ y $m\angle DCA = 2(m\angle DAC)$.

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 60° B) 80° C) 55°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA N°134 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N. Si $AM = 17\text{cm}$. Halle MN.

- A) 1cm B) 2cm C) $\frac{3}{2}\text{cm}$
D) $\left(\frac{9}{5}\right)\text{cm}$ E) $\left(\frac{17}{7}\right)\text{cm}$

PROBLEMA N°135 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto Q. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AQ} \cong \overline{QB}$,

$$m\angle QAB = m\angle QCA \quad \text{y}$$

$$m\angle QBC = 5(m\angle QAB)$$

Entonces $m\angle BQC$ es:

- A) 60° B) 65° C) 80°
D) 75° E) 70°

PROBLEMA N°136

[1er. Seminario 1999-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la mediana BM y se ubica Q punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en F. Si $CQ = 12$.

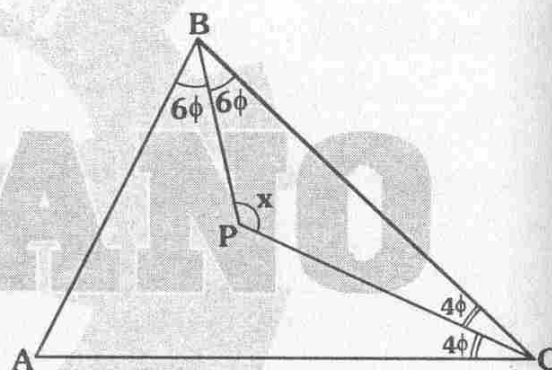
Calcule FM.

- A) 6 B) 8 C) 19
D) 10 E) 12

PROBLEMA N°137

[1er. Seminario 2008-I]

En el gráfico $AB = PC$, calcule x.



- A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

PROBLEMA N°138

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo MNP, obtuso en N, se cumple $m\angle N = \phi$, se construyen los triángulos equiláteros MPK y NPQ de modo que N, Q y K se encuentran en el mismo semiplano respecto de $\overline{MP}$.

Halle $m\angle KQN$.

- A) $2\phi - 30^\circ$ B) $\phi - 30^\circ$
C) $\phi - 60^\circ$ D) $2\phi - 60^\circ$
E) $\phi - 120^\circ$

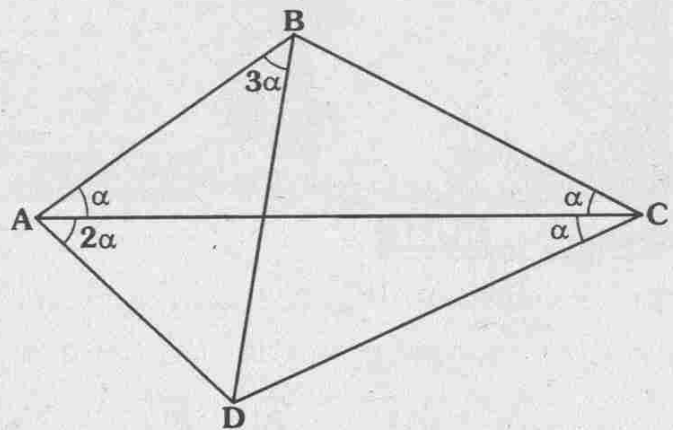
PROBLEMA N°139

[1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC obtusángulo ($m\angle B > 90^\circ$), se traza la mediana $\overline{BM}$, si $m\angle A = 2(m\angle C) = m\angle MBC$.

Calcule $m\angle MBC$.

- A) 40° B) 30° C) 15°
D) 10° E) 5°

**PROBLEMA N°140**

[Ciclo Repaso 2007-I]

En la figura se indica los valores de los ángulos. Halle el valor de α .

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

CUZCANO

Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N°141

En el triángulo ABC, se trazan la mediana AD y la ceviana interior BQ, tal que:

$$\overline{AD} \cong \overline{BQ} \quad \text{y} \quad \overline{AD} \perp \overline{BQ}$$

Calcule $m\angle DAC$.

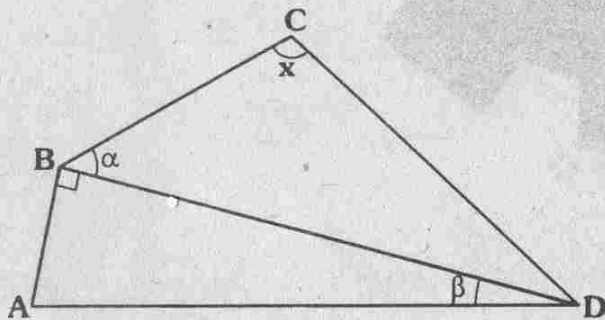
- A) 30° B) 45° C) 60°
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) 37°

PROBLEMA N°142

En el gráfico:

$$\alpha + \beta = 60^\circ \quad \text{y} \quad \frac{AD}{2} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = BC$$

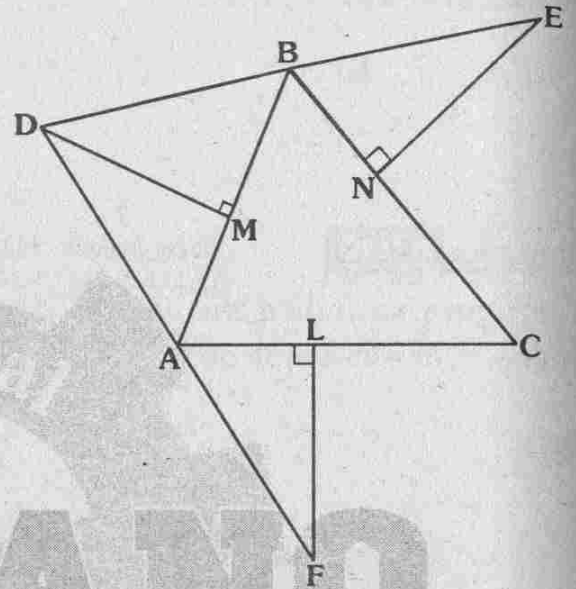
Calcule x.



- A) 90° B) 106° C) 105°
D) 115° E) 130°

PROBLEMA N°143

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $DB = BE$, $DA = AF$ y $FL + EN - MD = 4\sqrt{3}$. Calcule AB.

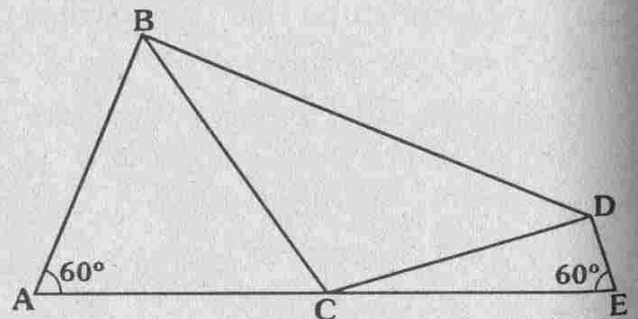


- A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 6

PROBLEMA N°144

En el gráfico, $AC = CE = AB + DE$ y $BC = \ell$.

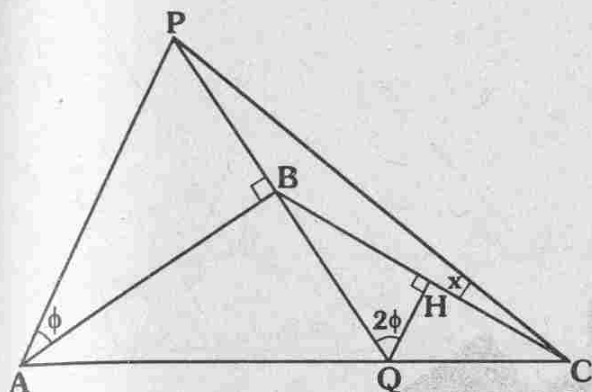
Halle BD.



- A) ℓ B) 2ℓ C) 3ℓ
D) $\ell\sqrt{3}$ E) $2\ell\sqrt{3}$

PROBLEMA N°145

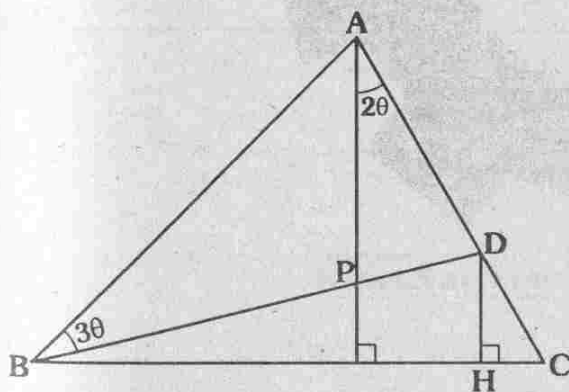
En el gráfico $AB = BC$, $PC = 25$ y $QH = 7$. Calcule x .



- A) 8° B) 16° C) 14°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA N°146

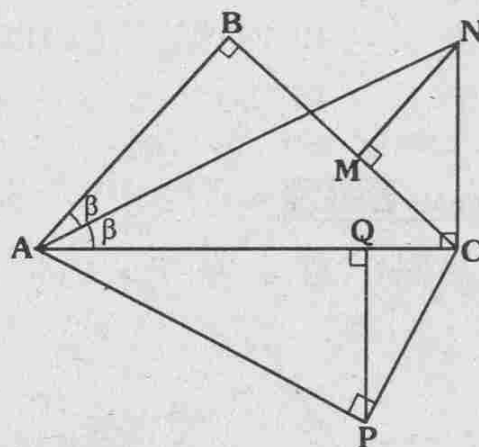
En el gráfico, $CD = 3$, $AP = 7$ y $AB = BC$. Calcule HC .



- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N°147

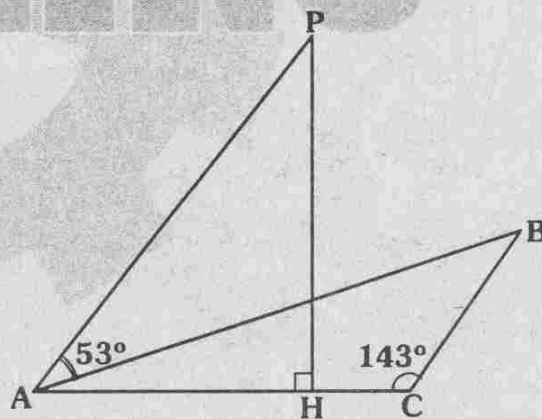
En el gráfico, $m\angle NAP = 45^\circ$, $MN = a$ y $PQ = b$. Calcule AC .



- A) $b + 2a$ B) $a + 2b$
C) $2(a + b)$ D) $3(b + a)$
E) $3(b - a)$

PROBLEMA N°148

En el gráfico, $AP = AB$ y $AH = 6$, calcule HC .



- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

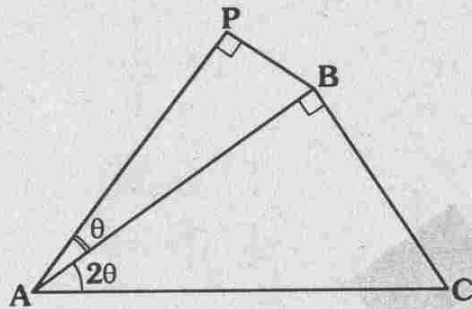
PROBLEMA N°149

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en su región interior se ubica el punto P tal que $AB = BC$ y $(PC)^2 = 2(PB)^2 + (AP)^2$. Calcule $m\angle APB$.

- A) 120° B) 135° C) 125°
D) 130° E) 150°

PROBLEMA N°150

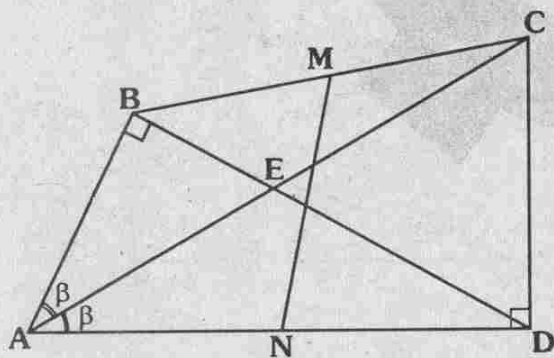
En el gráfico, $AC = 4(PB)$, calcule θ .



- A) 15° B) 18° C) 21°
D) $22^\circ 30'$ E) $18^\circ 30'$

PROBLEMA N°151

En el gráfico, $BM = MC$, $AN = ND$ y $(BE)^2 + (AD)^2 = 20$, calcule MN.

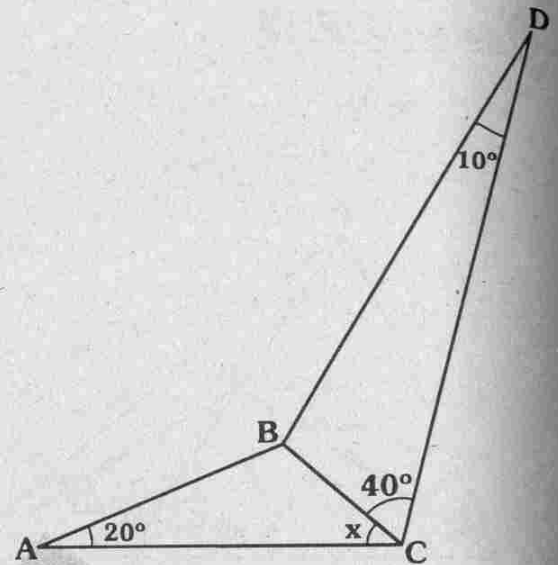


- A) 4 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA N°152

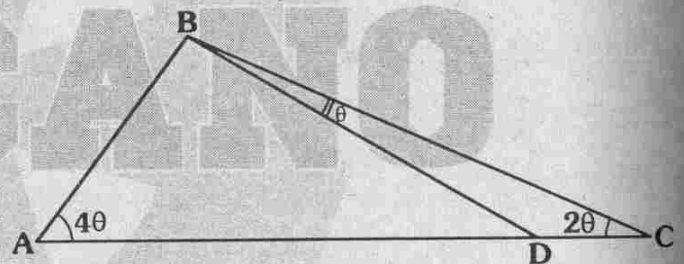
En el gráfico, $BD = AB + AC$.
Calcule x.

- A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 70°



PROBLEMA N°153

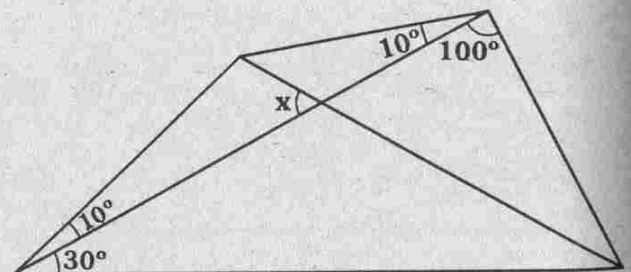
En el gráfico, $BC = AD$, calcule θ .



- A) 5° B) 6° C) $7,5^\circ$
D) 10° E) 20°

PROBLEMA N°154

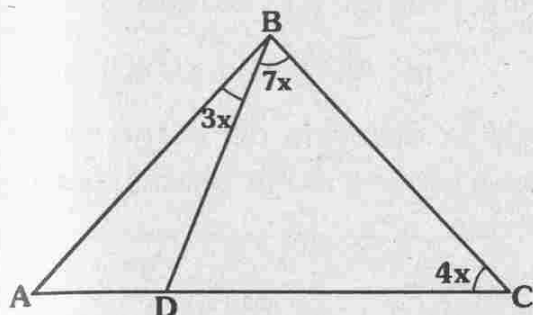
En el gráfico, calcule x.



- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 55°

PROBLEMA N°155

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x .



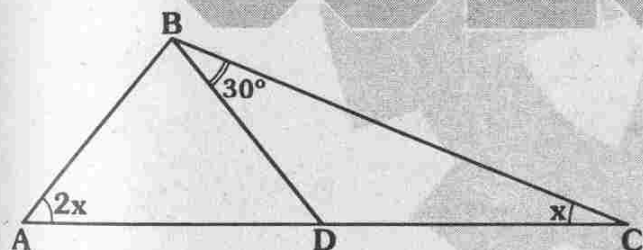
- A) 10° B) 5° C) 12°
D) 8° E) $7,5^\circ$

PROBLEMA N°156

En el gráfico:

$m\angle ABD > 90^\circ$ y $AD = CD$

Calcule x .



- A) 15° B) 30° C) 20°
D) 25° E) 10°

PROBLEMA N°157

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ y en $\overline{BQ}$ se ubica P, tal que $\overline{BQ} \perp \overline{CP}$, $m\angle ACP = 15^\circ$, $m\angle BAP = m\angle PAC$ y $QC = 2(PB)$. Calcule $m\angle PAB$.

- A) 15° B) 18° C) $22^\circ 30'$
D) $18^\circ 30'$ E) 16°

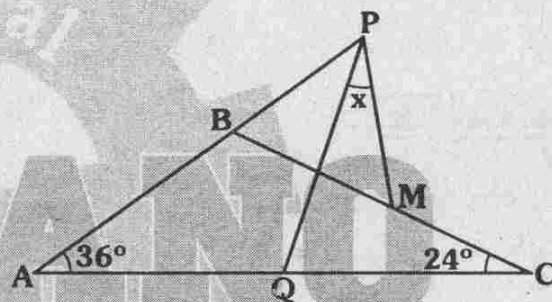
PROBLEMA N°158

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la mediana BM, tal que $BC = 8$ y $2(m\angle ABH) - m\angle HBC = 90^\circ$. Calcule HM.

- A) 2 B) 4 C) 6
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°159

En el gráfico, $BC = 2(PB)$, $BM = MC$ y $AQ = QC$. Calcule x .

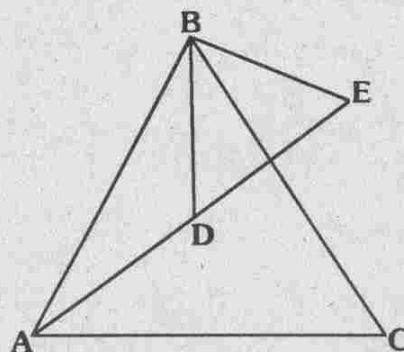


- A) 12° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA N°160

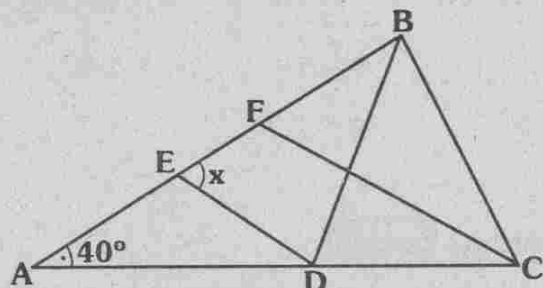
En el gráfico, los triángulos ABC y BDE son equiláteros y $AD = 22$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$.

- A) 11
B) 22
C) $11\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{2}$
E) 5,5



PROBLEMA N°161

En el gráfico, $BE=FC$, $FC=EB$ y $BD=BC$. Calcule x

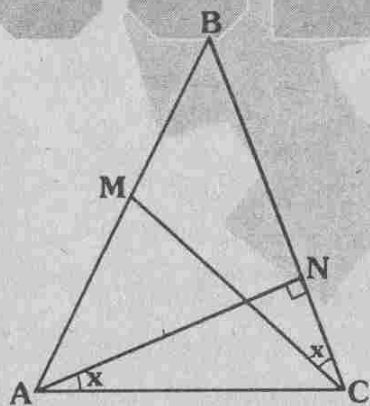


- A) 70° B) 80° C) 50°
D) 60° E) 77°

PROBLEMA N°162

En el gráfico $AB=BC$ y $MB=2(NC)$. Calcule x .

- A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 30°



PROBLEMA N°163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $BD=AC$, $m\angle ACB = 3\theta$ y $m\angle BAC = 2(m\angle ABD) = 4\theta$.

Calcule θ .

- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 12° E) 24°

PROBLEMA N°164

En el triángulo isósceles ABC, $AB=BC=a$ y $AC=b$, se traza la ceviana interior AP, tal que:

$$m\angle ABC = 4(m\angle CAP)$$

Calcule la distancia del punto medio de $\overline{AB}$ a la proyección ortogonal de C sobre $\overline{AP}$.

- A) $\sqrt{a^2 + b^2}$ B) $a + b$
C) $\frac{a+b}{2}$ D) $2(a+b)$
E) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

PROBLEMA N°165

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ se ubica M y en $\overline{AC}$ el punto N, si $MC=a$, $BC=b$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $m\angle NMC = 2(m\angle BAC)$. Calcule MN.

- A) $a + b$ B) $2a + b$
C) $2b + a$ D) $2b - a$
E) $2a - b$

PROBLEMA N°166

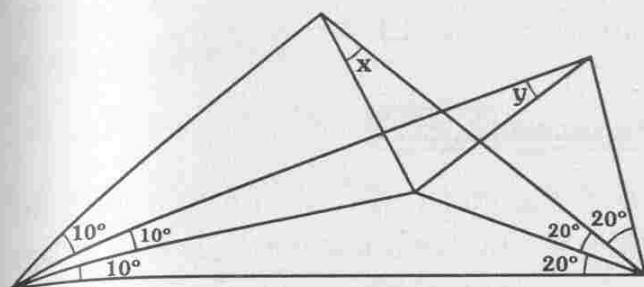
Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BR}$ y la ceviana exterior $\overline{BS}$ ($\overline{BR} \perp \overline{BS}$). S en la prolongación de $\overline{AC}$. Si $AB=RC$; $m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle RBC = m\angle BCR + m\angle ABR$.

Calcule $m\angle BSA$.

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N°167

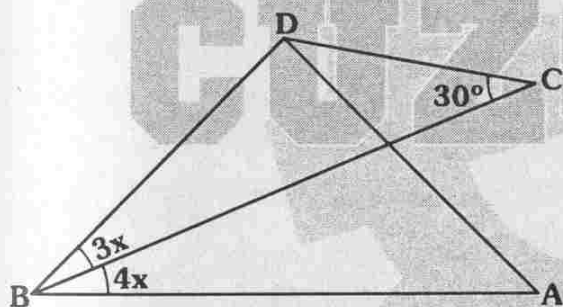
Del gráfico, calcule $x+y$.



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA N°168

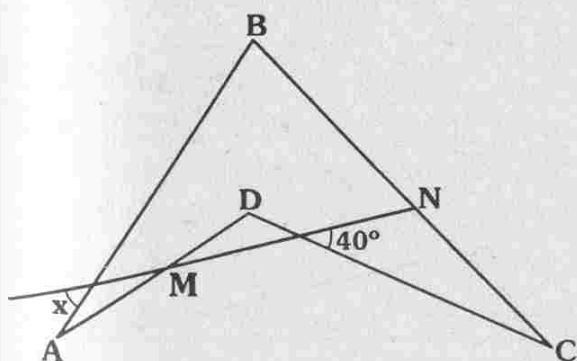
En el gráfico, $AB = BC$ y $AD = BD$.
Calcule x .



- A) 6° B) 5° C) 10°
D) 12° E) 7,5°

PROBLEMA N°169

En el gráfico, $AB = CD$, $AM = MD$ y $BN = NC$. Calcule x .



- ❖ A) 50° B) 65° C) 80°
❖ D) 40° E) 70°

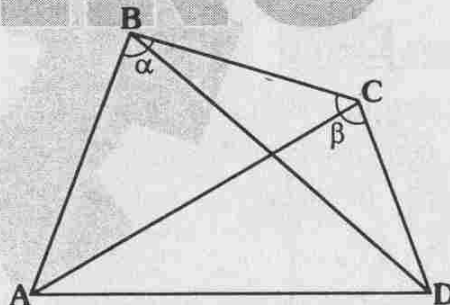
PROBLEMA N°170

❖ En el triángulo ABC , se traza la bisectriz interior BD , luego $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$) tal que $m\angle HAC = 37^\circ$;
❖ $BH = 9$ y $AC = 15$. Calcule AH .

- ❖ A) 2 B) 2,5 C) 3
❖ D) 3,5 E) 4

PROBLEMA N°171

❖ Según el gráfico, $\alpha + \beta = 210^\circ$,
❖ $AC = AD = BD$; $AB = 6$ y $CD = 2\sqrt{3}$.
❖ Calcule AD .



- ❖ A) 8 B) 6 C) 4
❖ D) $2\sqrt{21}$ E) $2\sqrt{13}$

PROBLEMA N°172

❖ Exteriormente y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ubica el punto P , sea M punto medio de $\overline{AC}$, se cumple:

$m\angle BAC = \alpha$ y

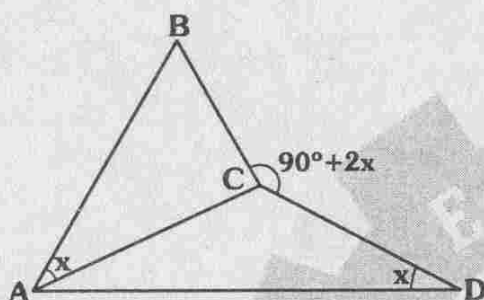
$6(m\angle MCP) = 3(m\angle CMP) = 2(m\angle BPM)$

Calcule $m\angle BPC$ en función de α .

- A) α B) $\frac{\alpha}{2}$ C) 2α
D) $90^\circ - \alpha$ E) $45^\circ - \alpha$

PROBLEMA N°173

En el gráfico, $AC = CD$ y $AB + BC = AD$. Calcule x .



- A) $37^\circ/2$ B) $53^\circ/2$ C) 15°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA N°174

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, por P se traza una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{AB}$ en M.

Además $m\angle BAC = 15^\circ$; $m\angle ABP = 30^\circ$; $m\angle ABC = 120^\circ$ y $AM = 4\sqrt{2}$.

Calcule PC.

- A) 4 B) 8 C) 2
D) 3 E) 5

PROBLEMA N°175

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, sea M punto medio de $\overline{BC}$. La prolongación de $\overline{MH}$ interseca a la prolongación de $\overline{BA}$ en N.

Si $BC = 6$ y $3(AH) = HC$. Calcule MN.

- A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) 6 E) 9

PROBLEMA N°176

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM y en $\overline{AC}$ se ubica el punto D de modo que $m\angle AMD = 90^\circ$ y la distancia de B hacia $\overline{AC}$ es la mitad de AD, si $m\angle BAM = 30^\circ$, calcule $m\angle CMD$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 37° E) 53°

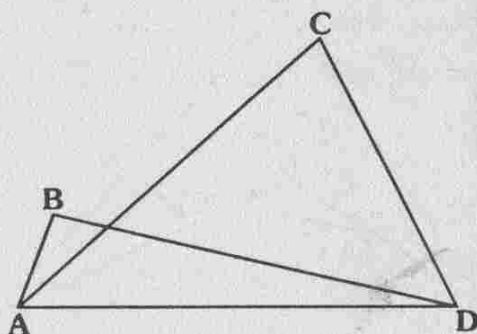
PROBLEMA N°177

En el triángulo ABC, el ángulo ACB mide 60° , se traza la bisectriz interior BE, luego la mediatriz de $\overline{AB}$ contiene a E e interseca a la prolongación de $\overline{BC}$ en F, calcule $m\angle BFE$.

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 25°

PROBLEMA N°178

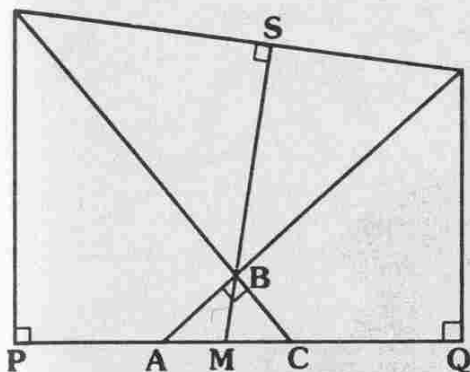
En el gráfico, $m\angle BAD = m\angle CDA$; $AC = BD$, $AD = AB + CD$ y $AB \neq CD$. Calcule $m\angle CDA$.



- A) 37° B) 60° C) 45°
 D) 75° E) 53°

PROBLEMA N°179

Del gráfico, $AM = MC$ y $BS = 4$.
 Calcule PQ.



- A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$
 D) 8 E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA N°180

En el triángulo ABC recto en B se traza la mediana BM y la ceviana interior $\overline{CN}$, $\overline{CN} \cap \overline{BM} = \{L\}$, $BL = LM$.

Calcule $\frac{MN}{CN}$

- A) $1/3$ B) 1 C) $1/2$
 D) $1/4$ E) $2/3$

PROBLEMA N°181

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AE en cuya prolongación se ubica P, de modo que $m\angle APC = 90^\circ$, si B dista "a" de $\overline{AE}$, $PC = b$ y $m\angle BCP = 2(m\angle ACB)$.
 Calcule BC.

- A) $4a - b$ B) $2a + b$
 C) $\frac{3a + b}{2}$ D) $2b + a$
 E) $a + b$

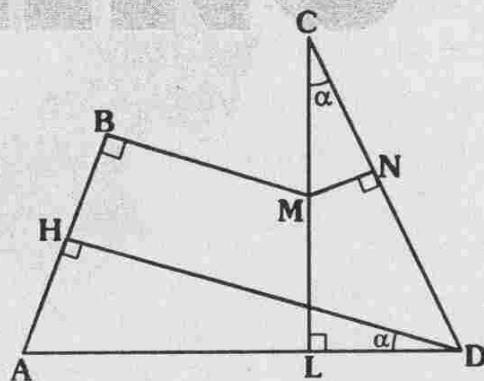
PROBLEMA N°182

En el triángulo ABC, $m\angle BAC = 50^\circ$, $m\angle BCA = 100^\circ$, se trazan las alturas CQ y BH; si $CQ - CH = 2$. Calcular AC.

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3
 D) 4 E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA N°183

Del gráfico, $MN = 2$, $BM = 5$, $CM = ML$.
 Calcule DH.



- A) 7 B) 9 C) 11
 D) 13 E) 14

PROBLEMA N°184

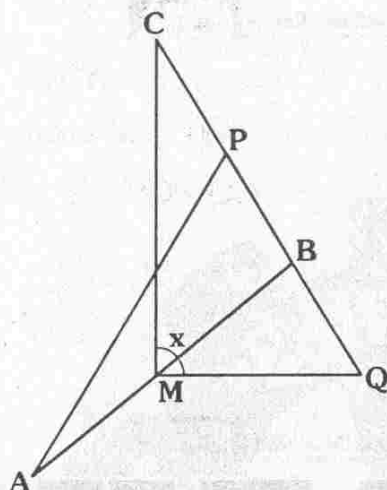
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$, si $AE = BC$,
 $2(m\angle BAE) = 3(m\angle BCA)$ y
 $m\angle ABE = 90^\circ$.
 Calcule $m\angle EBC$.

- A) 26,5 B) 22,5 C) 18°
D) 14° E) 15°

PROBLEMA N°185

Del gráfico $AM = MB$; $CP = BQ$ y $AP = QC$. Calcule x .

- A) 120°
B) 150°
C) 135°
D) 90°
E) 60°



PROBLEMA N°186

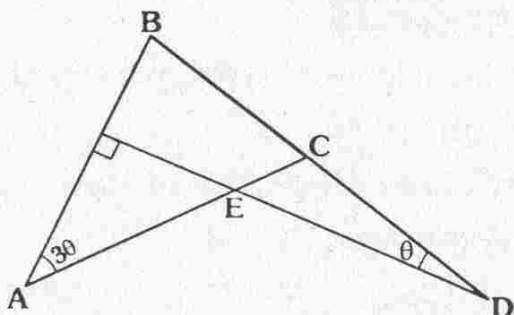
En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el triángulo ABM se traza la altura $\overline{BH}$, donde $BH = 5$; si $AB = 2(HM)$ y $m\angle ABH = 2(m\angle MAC)$.

Calcule la distancia de C a $\overline{BH}$.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°187

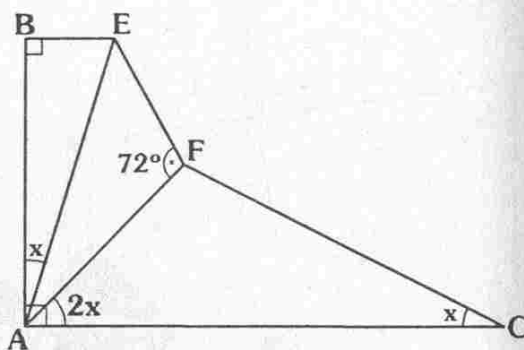
Del gráfico, $AE = CD$ y $ED = AB$. Calcule θ .



- A) 15° B) 10° C) 8°
D) 18° E) 14°

PROBLEMA N°188

En el gráfico, $CF = 2(AB)$. Calcule x .



- A) 15° B) 10° C) 9°
D) 18° E) $22^{\circ}30'$

PROBLEMA N°189

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que:

$$\frac{m\angle DCA}{3} = \frac{m\angle BAC}{7} = m\angle DCB = 10^{\circ}$$

y $AB = DC$.

Calcule $m\angle DBC$.

- A) 30° B) 15° C) $\frac{45^{\circ}}{2}$
D) 20° E) 75°

PROBLEMA N°190

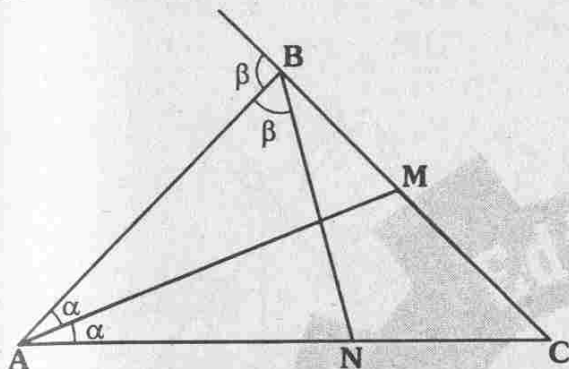
En el triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la ceviana interior $\overline{CN}$ que interseca a $\overline{BM}$ en su punto medio H, si las distancias de C a N y a $\overline{BH}$ están en la razón de 5 a 3 respectivamente.

Calcule $m\angle NHB$.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N°191

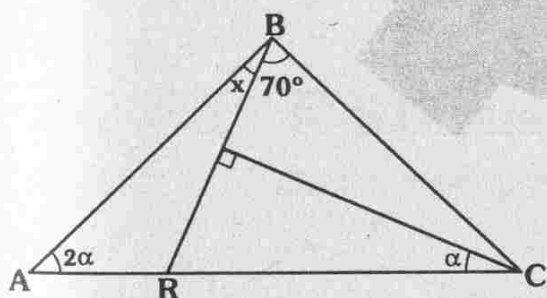
Del gráfico, $BN = CN$, $AB = 8$, $MC = 3$. Calcule AC .



- A) 5 B) 4 C) 5,5
D) 11 E) 9

PROBLEMA N°192

Del gráfico, calcule x .



- A) 120° B) 10° C) 30°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N°193

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubica el punto P , tal que:

$$m\angle APC = 90^\circ ; \quad m\angle PAB = m\angle PCA$$

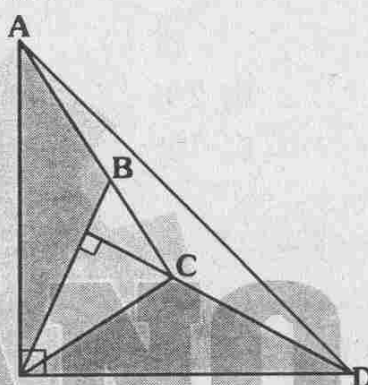
Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $(AB)^2 + (AC)^2 = 36$. Calcule PM .

- A) 4,5 B) 6 C) 4
D) 3 E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA N°194

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Si $AB = 3$ y $BC = 2$.

Calcule AD .

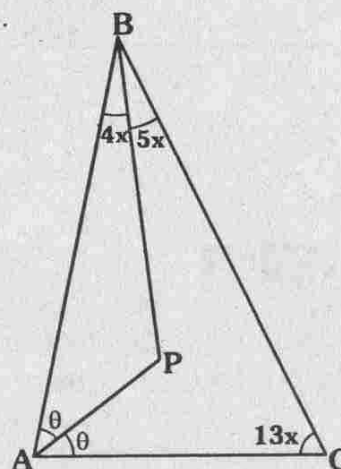


- A) $2\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{6}$
D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA N°195

Del gráfico, $AC = BP$.

Calcule x .

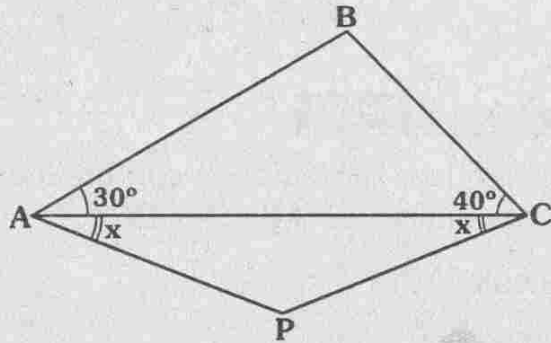


- A) 4° B) 5° C) $4,5^\circ$
D) $7,5^\circ$ E) 6°

PROBLEMA N°196

Del gráfico, $AP = PC = BC$.

Calcule x .

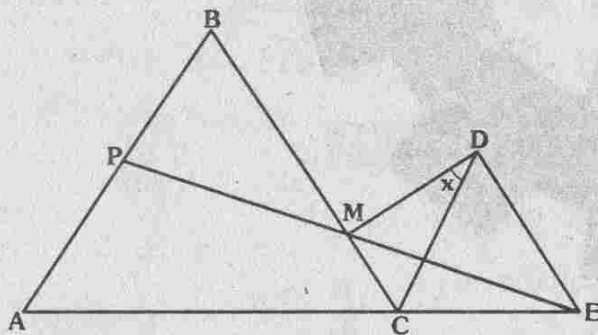


- A) 10° B) 20° C) 35°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA N°197

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AP = PB$ y $PM = ME$.

Calcule x .



- A) 15° B) 75° C) $53^\circ/2$
D) 30° E) $37^\circ/2$

PROBLEMA N°198

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto Q tal que :

$$\frac{m\angle ABQ}{3} = \frac{m\angle QBC}{2} = \frac{m\angle BAQ}{7} = m\angle QAC = 10^\circ$$

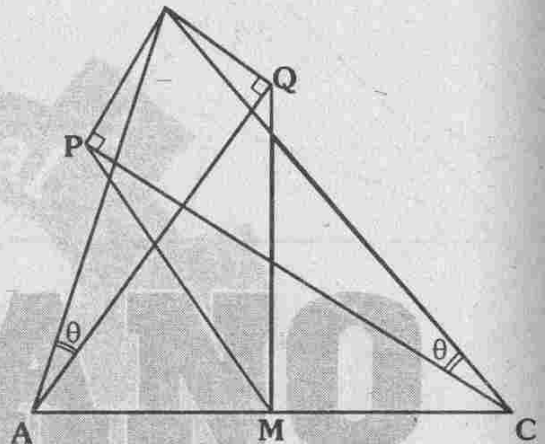
Calcule: $m\angle QCA$

- A) 20° B) 30° C) 10°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N°199

Del gráfico, $AM = MC$.

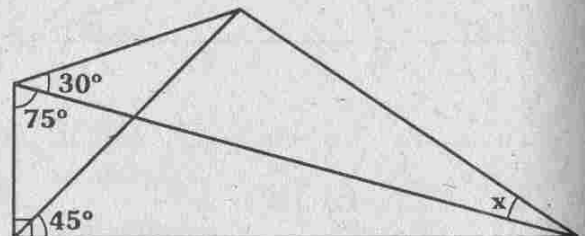
Calcule $\frac{PM}{QM}$



- A) 1 B) $3/2$ C) $5/4$
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA N°200

Del gráfico, calcule x .



- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 13° E) 14°

Problemas Resueltos

Ciclo

Semestral

Intensivo

PROBLEMA N°201

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior AQ, tal que $AC + QC = 2(AB)$. Calcule $m\angle QAC$.

- A) 30° B) $22,5^\circ$ C) 14°
 D) $18,5^\circ$ E) $26,5^\circ$

PROBLEMA N°202

Se ubica el punto P en la región interior del triángulo ABC, tal que $AP = BC$, $m\angle PAC = 22^\circ$, $m\angle PCB = m\angle ACP$ y $m\angle PBC = 79^\circ$. Calcule $m\angle PCB$.

- A) 11° B) 36° C) 22°
 D) 57° E) $\frac{57^\circ}{2}$

PROBLEMA N°203

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica Q en la región interior, tal que:

$$m\angle BCQ = 10^\circ \quad \text{y}$$

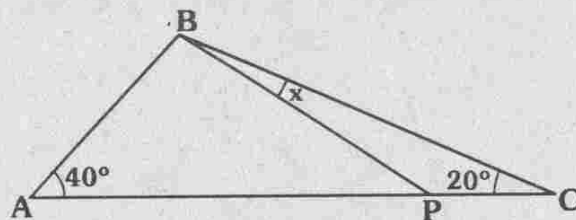
$$m\angle BAQ = m\angle QAC = 20^\circ$$

Calcule $m\angle CBQ$.

- A) 10° B) 30° C) 15°
 D) 20° E) 15°

PROBLEMA N°204

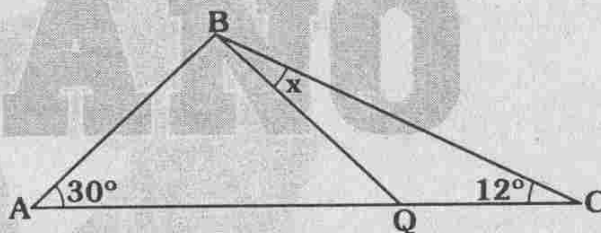
En el gráfico, $AP = BC$. Calcule x.



- A) 5° B) 15° C) 30°
 D) 10° E) 40°

PROBLEMA N°205

En el gráfico, $BC = AQ$. Calcule x.

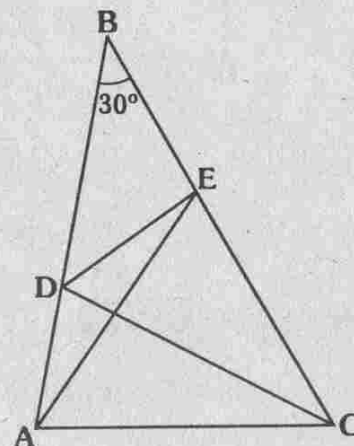


- A) 10° B) 12° C) 6°
 D) 20° E) 10°

PROBLEMA N°206

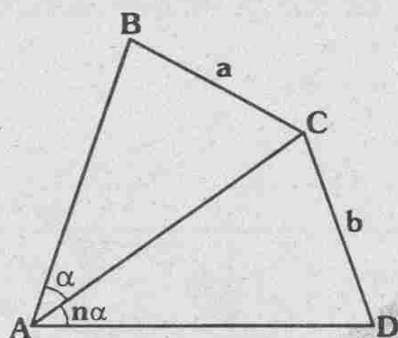
En el gráfico, $AC = AE = CD$, $AD = a$ y $EC = b$. Calcule ED

- A) $\frac{a+b}{2}$
 B) $\sqrt{a^2 + b^2}$
 C) $\sqrt{ab}$
 D) $2\sqrt{a^2 + b^2}$
 E) $2\sqrt{ab}$



PROBLEMA N°207

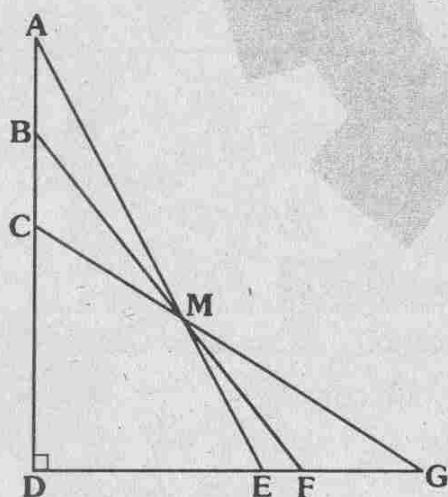
En el gráfico, $AB = AC = AD$ y $n \in \mathbb{Z}^+ (n > 1)$, indique la proposición correcta:



- A) $a > nb$ B) $a < nb$ C) $a < 2b$
D) $a > 2b$ E) $b < na$

PROBLEMA N°208

En el gráfico, $BM = MF$; $AB = 2$; $BC = 3$; $EF = 1$ y $FG = 4$, calcule BM .



- A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{190}$ C) $\sqrt{19}$
D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{35}$

PROBLEMA N°209

En la región interior del triángulo ABC se ubica D, tal que:

$$AB = BC = AD \quad y$$

$$m\angle BCD = \frac{m\angle DCA}{2} = \frac{m\angle ADC}{9}$$

Calcule $m\angle BCD$.

- A) $7,5^\circ$ B) 10° C) 15°
D) $22,5^\circ$ E) 30°

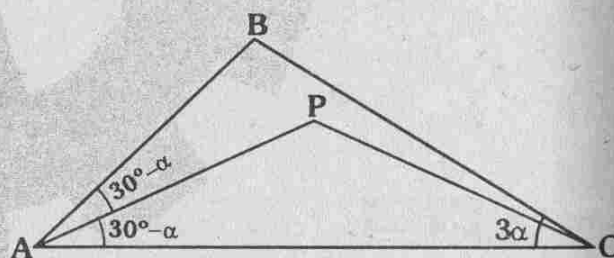
PROBLEMA N° 210

En el triángulo ABC se traza la altura BH (H en $\overline{AC}$). Si $m\angle ABH = 18^\circ$ y $BC = 2(AH) + AB$. Calcule $m\angle BCA$.

- A) 18° B) 36° C) 30°
D) 12° E) 24°

PROBLEMA N° 211

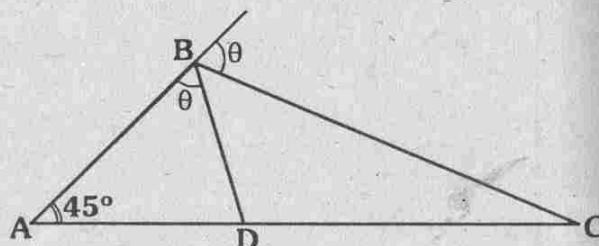
En el gráfico, $AB = AP = PC$. Calcule α .



- A) 20° B) 12° C) 10°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N° 212

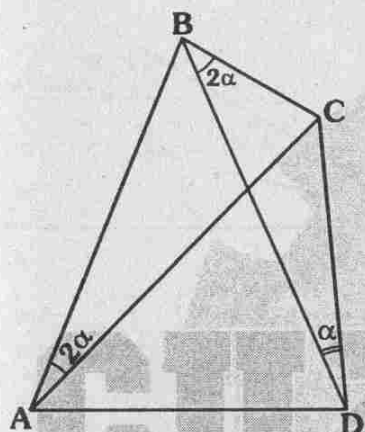
En el gráfico, $CD = 3(AD)$. Calcule $\frac{BC}{AB}$.



- A) 3 B) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ C) $\sqrt{34}$
 D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{15}$

PROBLEMA N° 213

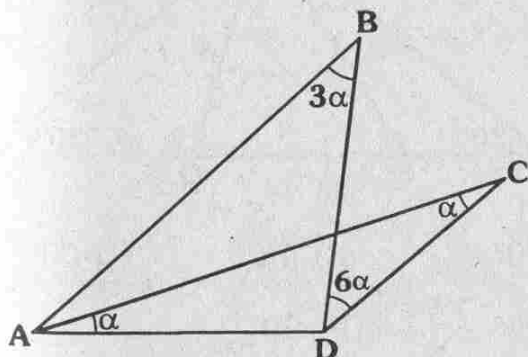
En el gráfico, $AB = BD$ y $AD = DC$.
 Calcule α .



- A) 5° B) $7,5^\circ$ C) 10°
 D) 20° E) 18°

PROBLEMA N° 214

En el gráfico, $AB = AC$ y $AD = DC$.
 Calcule α .



- A) 5° B) 10° C) 12°
 D) 18° E) 15°

PROBLEMA N° 215

Interior al triángulo isósceles ABC
 ($AB = BC$) se ubica P, que pertenece a la
 bisectriz del ángulo A.

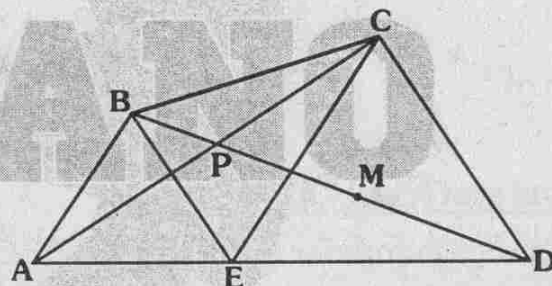
Si $m\angle BCP = 3(m\angle ACP) = 30^\circ$

Calcule $m\angle PBC$.

- A) 70° B) 80° C) 100°
 D) 120° E) 90°

PROBLEMA N° 216

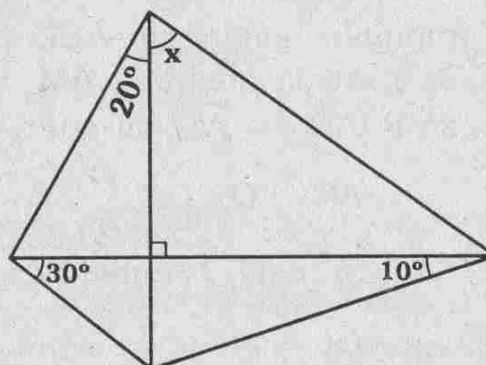
En el gráfico, calcule PM, si $BC = 8$;
 $AB = BE$; $EC = CD$; $AP = PC$ y
 $BM = MD$.



- A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
 D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 217

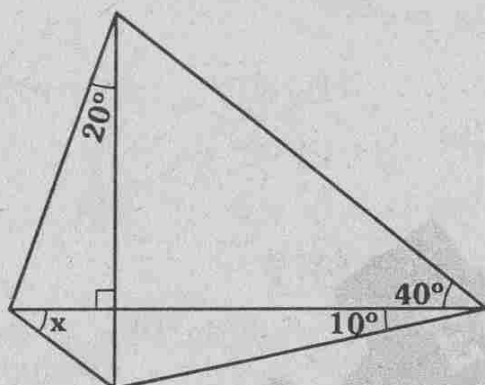
Del gráfico, calcule x.



- A) 80° B) 60° C) 65°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA N° 218

En el gráfico, calcule x .



- A) 15° B) 30° C) $7,5^\circ$
D) 10° E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 219

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P, tal que $AB = AP = PC$. Si $m\angle BAP = 30^\circ$ y $m\angle PAC = m\angle PCA = 15^\circ$. Calcule $m\angle BCP$.

- A) 15° B) 45° C) 37°
D) 30° E) $37^\circ/2$

PROBLEMA N° 220

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la mediana AM, luego se ubican P y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$AP = PQ = QC$$

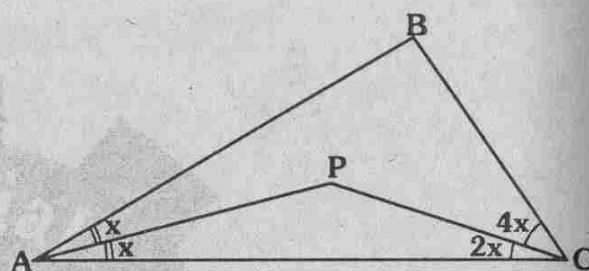
$$\text{Si } m\angle PBQ = 2(m\angle MAC)$$

Calcule $m\angle MAP$.

- A) 30° B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) 37°
D) 23° E) $\frac{53^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 221

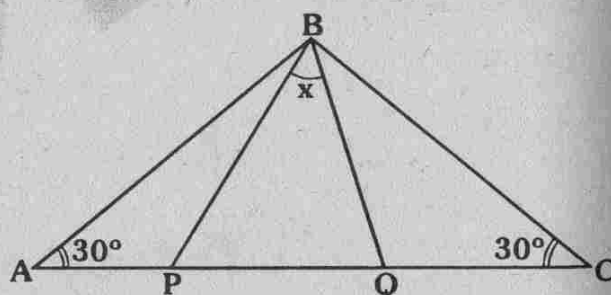
En el gráfico, $BC = PC$. Calcule x .



- A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA N° 222

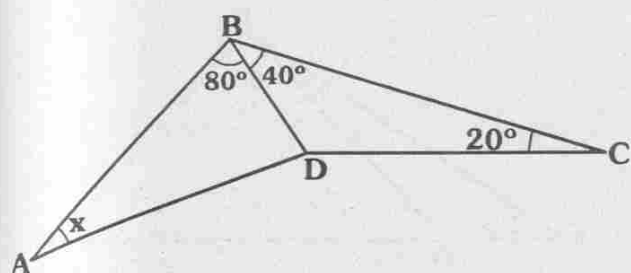
En el gráfico, $\frac{AP}{5} = \frac{PQ}{7} = \frac{QC}{8}$. Calcule x .



- A) 90° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 223

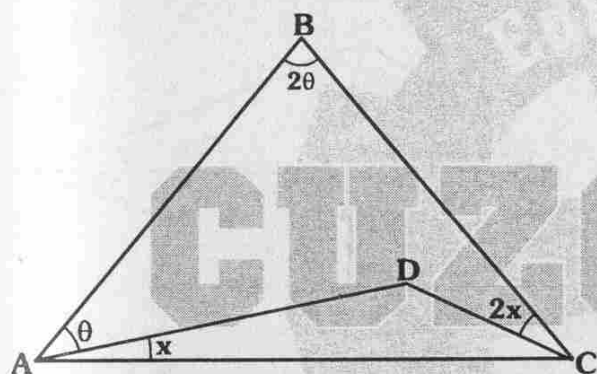
Del gráfico, $AB = DC$. Calcule x .



- A) 140° B) 20° C) 30°
D) 25° E) 18°

PROBLEMA N° 224

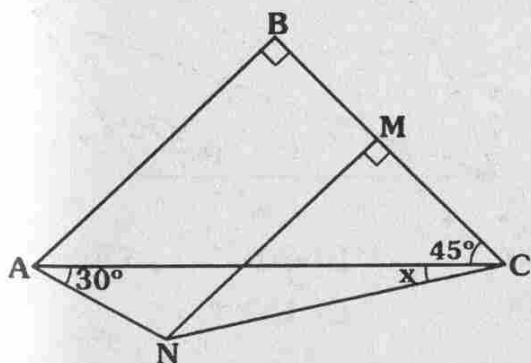
Del gráfico $AB = BC = AD$. Calcule x .



- A) 10° B) 12° C) 16°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA N° 225

Del gráfico, $BM = MC$. Calcule x .

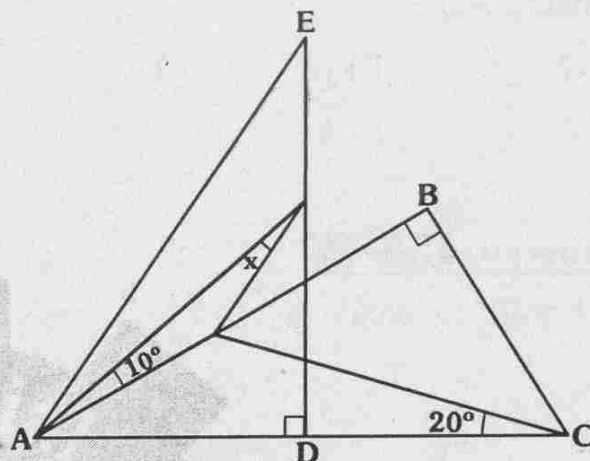


- A) 5° B) 8° C) 16°
D) 15° E) 21°

PROBLEMA N° 226

Del gráfico, los triángulos ABC y EDA son congruentes si $BC = DC$.

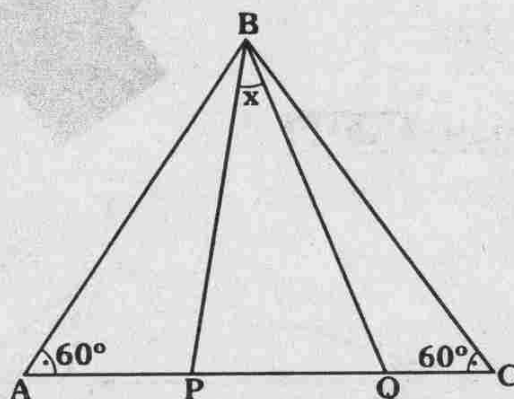
Calcule x .



- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA N° 227

Del gráfico, $\frac{AP}{5} = \frac{PQ}{7} = \frac{QC}{3}$. Calcule x .



- A) 20° B) 45° C) 30°
D) 40° E) 15°

PROBLEMA N° 228

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{AQ}$ tal

que:

$$2(m\angle CAQ) + 3(m\angle BAQ) = 90^\circ ;$$

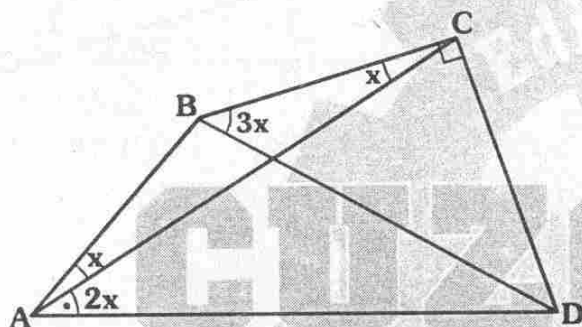
$$BQ = 2 ; QC = 3$$

Calcule AQ.

- A) 7 B) 6 C) 5
D) 4 E) 8

PROBLEMA N° 229

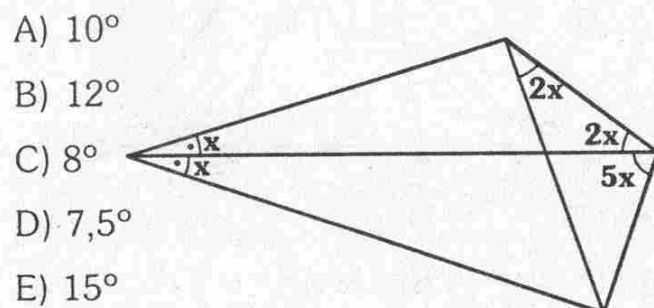
Del gráfico, calcule x.



- A) 10° B) 20°
C) 15° D) 18°
E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 230

Del gráfico, calcule x.

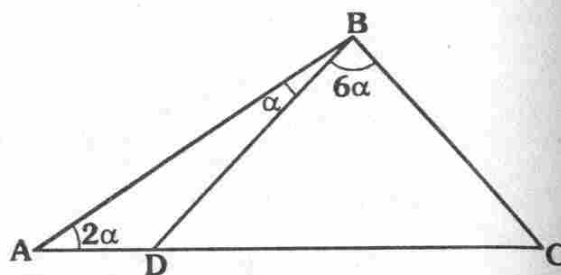


- A) 10°
B) 12°
C) 8°
D) $7,5^\circ$
E) 15°

PROBLEMA N° 231

En el gráfico, $AB = CD$.

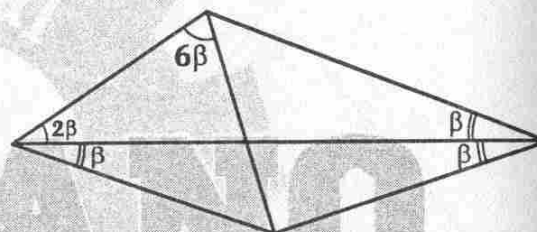
Calcule α .



- A) 8° B) 9° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 232

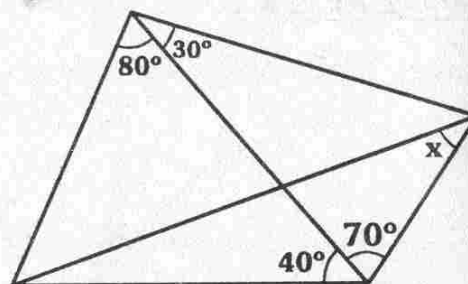
Del gráfico, calcule β .



- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 233

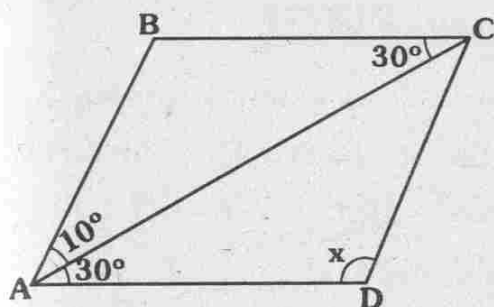
Del gráfico, calcule x.



- A) 50° B) 20° C) 50°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N° 234

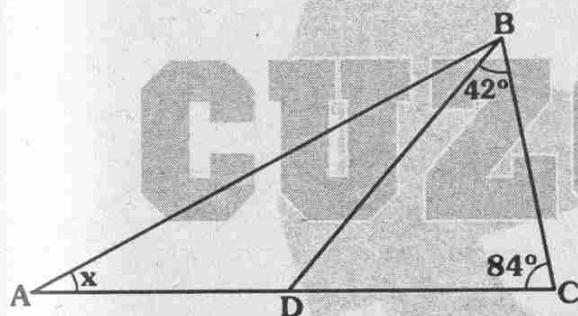
En el gráfico, $AB = AD$. Calcule x.



- A) 105° B) 110° C) 135°
D) 120° E) 100°

PROBLEMA N° 235

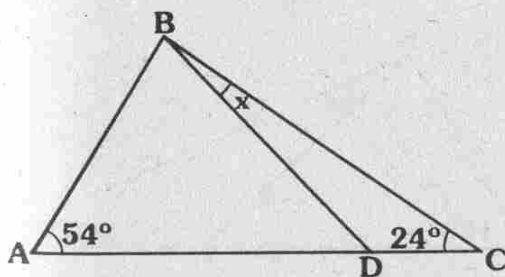
En el gráfico, $AD=BC$.
Calcule x .



- A) 30° B) 6° C) 24°
D) 21° E) 42°

PROBLEMA N° 236

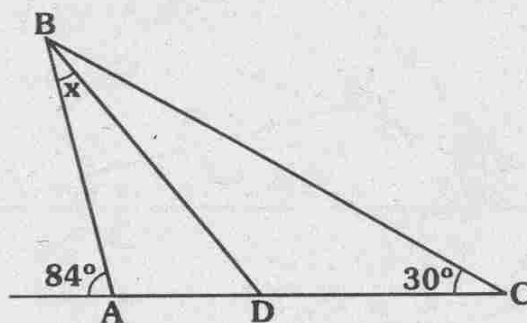
En el gráfico, $AD=BC$, calcule x .



- A) 30° B) 24° C) 6°
D) 12° E) 18°

PROBLEMA N° 237

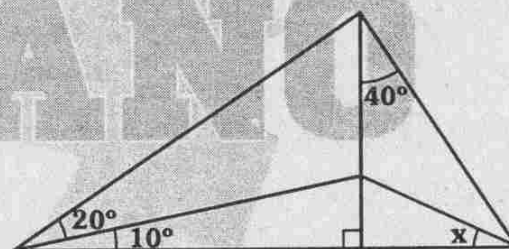
En el gráfico, $AB=DC$, calcule x .



- A) 30° B) 24° C) 6°
D) 18° E) 42°

PROBLEMA N° 238

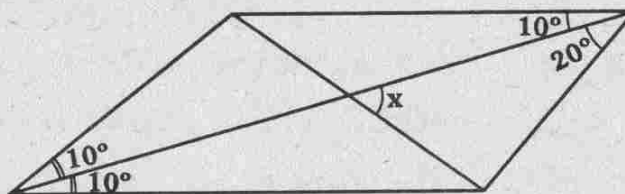
Del gráfico, calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 25°

PROBLEMA N° 239

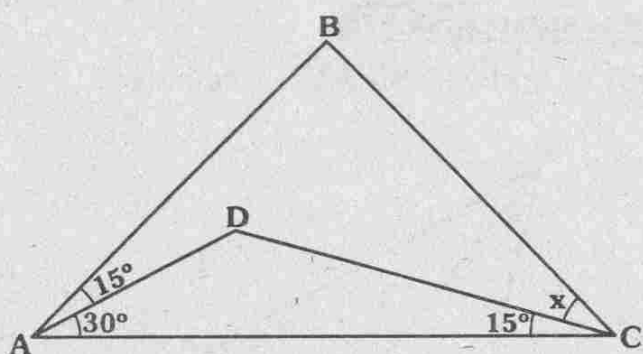
Del gráfico, calcule x .



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 240

En el gráfico, $AB=CD$. Calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 241

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\angle BAC = 30^\circ \text{ y } m\angle ACB = x$$

se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$.

Si: $AB = CD$, $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$,

$$m\angle BDC = 30^\circ + x$$

Calcule x.

- A) $27,5^\circ$ B) 30° C) $22,5^\circ$
D) 45° E) $26,5^\circ$

PROBLEMA N° 242

Se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ en el triángulo ABC, si

$$m\angle BAC = m\angle ACD = 45^\circ, \quad AB = CD \text{ y}$$

$$m\angle BDC = 45^\circ + m\angle ACB.$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 15° B) $22,5^\circ$
C) $26,5^\circ$ D) $18,5^\circ$
E) 30°

PROBLEMA N° 243

El punto D es exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que $m\angle BAD = 45^\circ$, $m\angle CAD = 30^\circ$,

$$m\angle ADC = 105^\circ \text{ y } AB = CD.$$

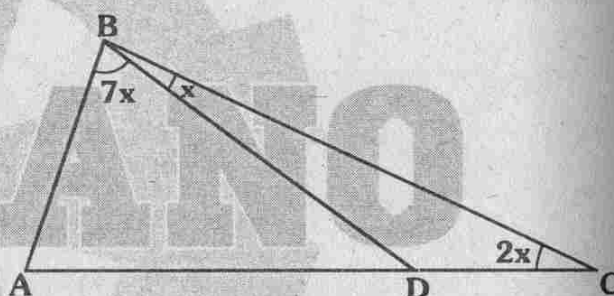
Calcule $m\angle ADB$.

- A) 10° B) 15° C) 30°
D) $53^\circ/2$ E) $37^\circ/2$

PROBLEMA N° 244

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.

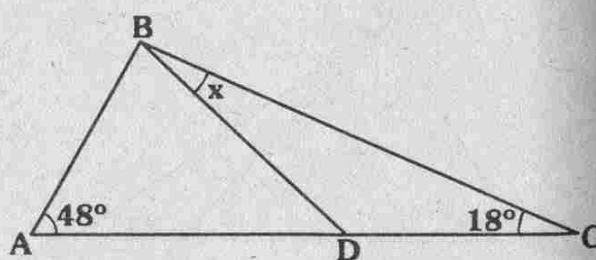


- A) 10° B) 20° C) 12°
D) $7,5^\circ$ E) 15°

PROBLEMA N° 245

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.

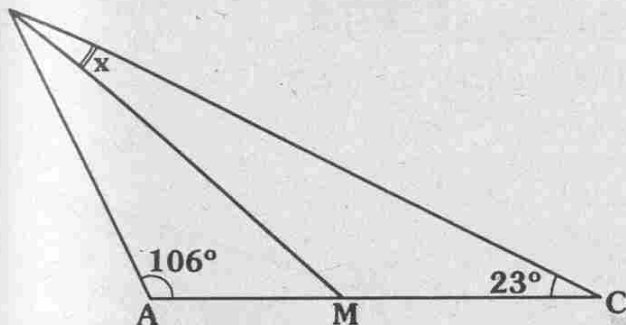


- A) 10° B) 20° C) 18°
D) $45^\circ/2$ E) 12°

PROBLEMA N° 246

En el gráfico, $AM = MC$.

Calcule x



- A) 30° B) 23° C) 37°
D) 14° E) 17°

PROBLEMA N° 247

En el triángulo ABC en su región interior se ubica el punto P, tal que:

$$m\angle PAC = 20^\circ, \quad m\angle PBC = 10^\circ$$

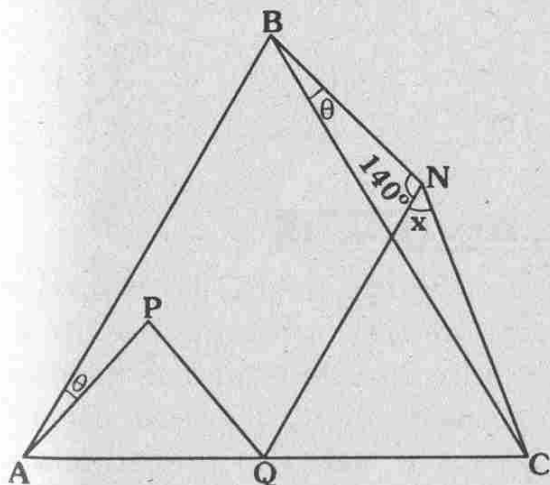
$$\text{y } m\angle PCB = 40^\circ, \quad BP = AP + AC$$

Calcule $m\angle PCA$.

- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 248

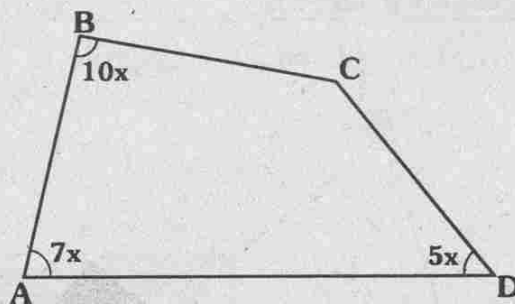
Del gráfico, $AB = BC$, $BN = PQ$ y el triángulo APQ es equilátero. Calcule x .



- ❖ A) 30° B) 50° C) 40°
❖ D) 70° E) 20°

PROBLEMA N° 249

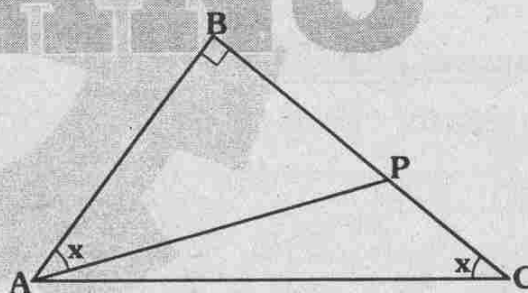
Del gráfico, $AB = BC = CD$. Calcule x .



- A) 10° B) 8° C) 9°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 250

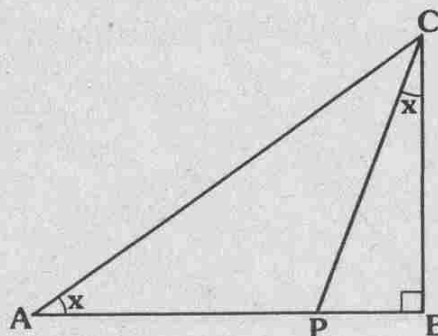
Del gráfico, $AB = 2(PC)$. Calcule x .



- A) $53^\circ/2$ B) 24° C) 18°
D) 37° E) 38°

PROBLEMA N° 251

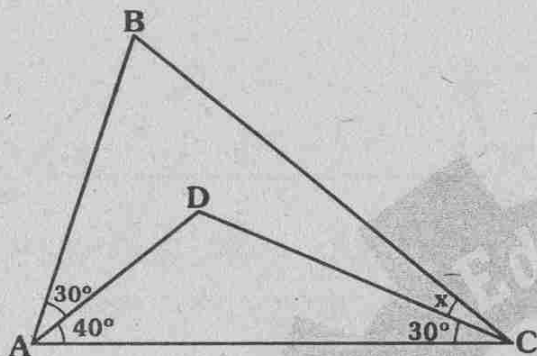
Del gráfico, $AP = BC$, calcule x .



- A) 36° B) 18° C) $\frac{37^\circ}{2}$
D) 14° E) $\frac{127^\circ}{4}$

PROBLEMA N° 252

Del gráfico, $AB = CD$. Calcule x .

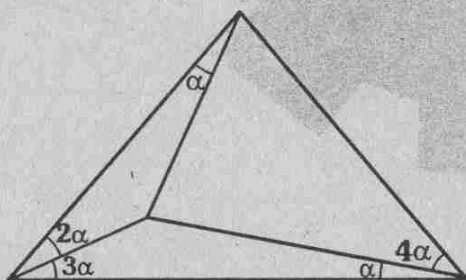


- A) 10° B) 20° C) 15°
D) 7° E) 12°

PROBLEMA N° 253

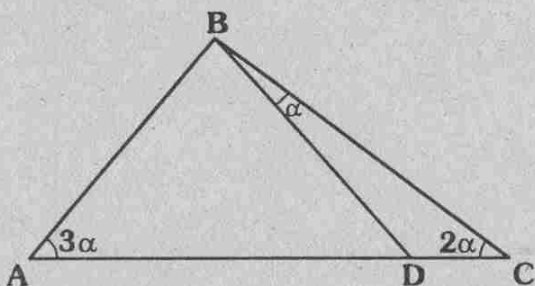
Del gráfico, calcule α .

- A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 12°
E) 9°



PROBLEMA N° 254

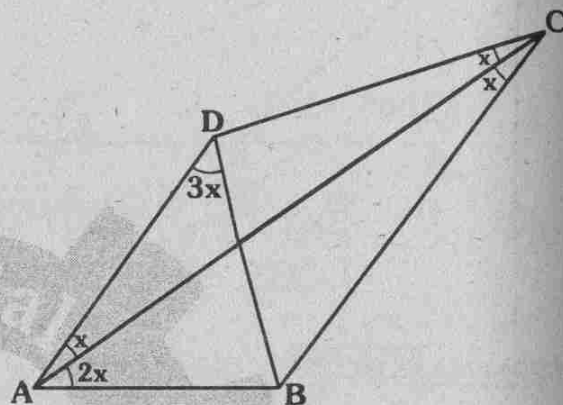
Del gráfico $AD = BC$, calcule α .



- A) 15° B) 10° C) 20°
D) 9° E) 12°

PROBLEMA N° 255

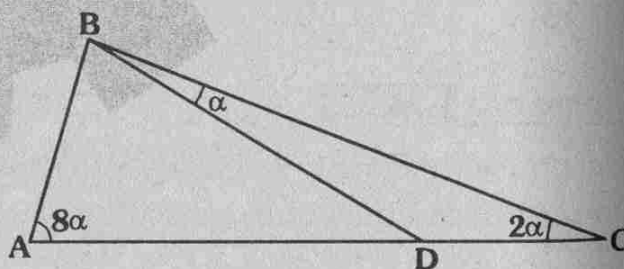
Del gráfico, calcule x .



- A) 9° B) 12° C) 10°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA N° 256

Del gráfico, $AB = CD$, calcule α .



- A) 20° B) 10° C) 15°
D) 12° E) 18°

PROBLEMA N° 257

En un triángulo ABC se traza las tres bases medias, obteniendo un nuevo triángulo, en este último se hace el mismo procedimiento y así sucesivamente se hace "n" veces el procedimiento, si

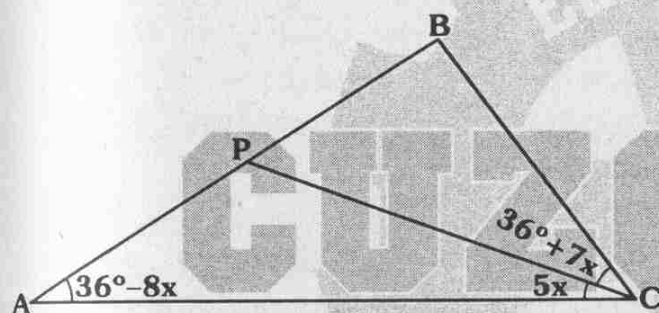
M es el perímetro de ABC y N el perímetro del último triángulo.

Indique: $\frac{N}{M}$.

- A) n B) n^n
C) n^2 D) 2^n
E) 2^{-n}

PROBLEMA N° 258

En el gráfico, $AP=BC$. Calcule x .

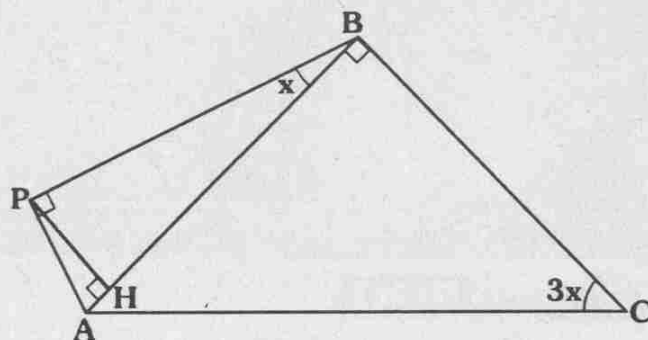


- A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4° E) $2,5^\circ$

PROBLEMA N° 259

En el gráfico, $BC = 4(PH)$.

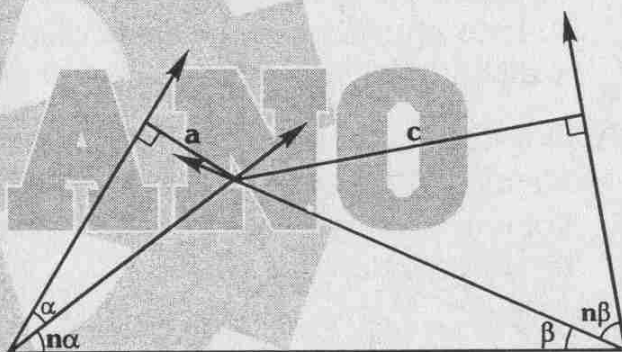
Calcule x .



- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 16° E) 20°

PROBLEMA N° 260

En el gráfico, n y $m \in \mathbb{N}$ indique la relación correcta ($n > 1 \wedge m > 1$).



- A) $c > nma$ B) $c < nma$
C) $a < nm$ D) $a < nmc$
E) $\frac{a}{n} = \frac{c}{m}$

Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

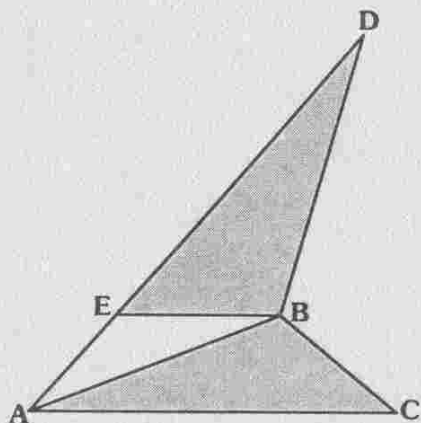
- I. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y el perímetro, son congruentes.
- II. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y la mediana relativa a dicho lado, son congruentes.
- III. Dos triángulos tienen entre lados y ángulos internos, cinco elementos en común, entonces son necesariamente congruentes.

- A) VFV B) FVF C) FFF
D) VFF E) VVV

PROBLEMA N° 262

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $ED = AC$, calcule $\frac{AB}{BD}$.

- A) 2
B) 1
C) 3
D) 5
E) 7



PROBLEMA N° 263

En el triángulo ABC, se ubica M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que $AM = NM$, $AB = NC$ y $m\angle MBC = m\angle MCN = 40^\circ$.

Calcule $m\angle NMB$.

- A) 20° B) 10° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 264

En el triángulo ABC, se ubica Q en la región interior, tal que $AB = AC$; $AQ = QC$ y $m\angle ABQ + 2(m\angle QBC) = 90^\circ$.

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 53° E) 90°

PROBLEMA N° 265

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que:

$$\frac{m\angle AQB}{4} = \frac{m\angle QBC}{3} = \frac{m\angle ABC}{2} = m\angle BCQ$$

Calcule $m\angle BCQ$.

- A) 10° B) 9° C) 18°
D) 20° E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 266

En el triángulo ABC se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$ y se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{BC}$ en P tal que:

$$m\angle PCA = 15^\circ \text{ y } \frac{AP}{BP} = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$$

Calcule $m\angle MBC$.

- A) 30° B) $53^\circ/2$ C) 15°
D) 14° E) 18°

PROBLEMA N° 267

En el triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{AM}$, tal que $m\angle ACM = 60^\circ - 2(m\angle MAC)$ y $AH = MC$.

Calcule $m\angle BAM$.

- A) 10° B) 15° C) 30°
D) 8° E) 20°

PROBLEMA N° 268

En los lados AB, BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos D, E y H se ubican los puntos D, E y H, tal que $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ y $m\angle BAC = 2(m\angle BCA) = 2(m\angle BDE)$, si $DB = 2(AH)$. Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 33°

PROBLEMA N° 269

Los lados de un triángulo miden 15, $n+7$ y $10+n$. Calcule la medida del ángulo opuesto al menor lado, sabiendo que "n" es el menor valor entero, con $n \neq \{0;1\}$.

- A) 53° B) 16° C) 74°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N° 270

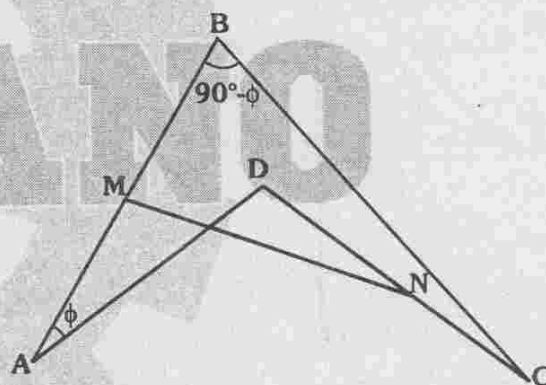
En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$ tal que $AD = BC$ y $m\angle ABD = 45^\circ$. Calcule, $m\angle BCD$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
D) $37^\circ/2$ E) $53^\circ/2$

PROBLEMA N° 271

En el gráfico, $AM = MB$, $CN = ND$, $BC = 16$ y $AD = 12$. Calcule MN.

- A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 5



PROBLEMA N° 272

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($m\angle ABC > 90^\circ$), se traza la ceviana interior BM, tal que $m\angle MBC = 90^\circ$, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica P y se traza $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$ perpendiculares a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $BM=2$; $PS=4$ y $PR=1$.

- Calcule $m\angle ACB$.
A) 15° B) $22,5^\circ$ C) 30°
D) $26,5^\circ$ E) $18,5^\circ$

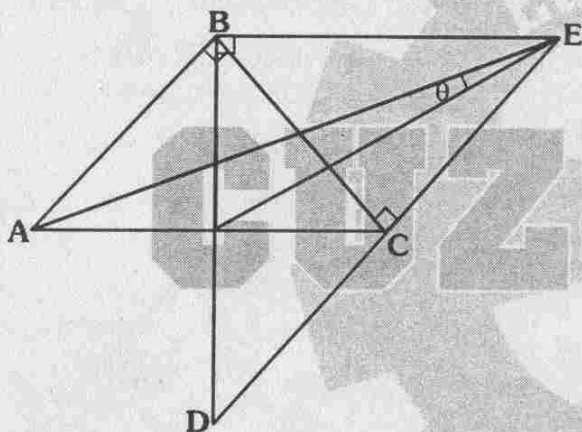
PROBLEMA N° 273

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, tal que $DC = 2(BD)$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta E tal que $AC = 2(BE)$ y $AD = 2\sqrt{3}$. Calcule ED.

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 274

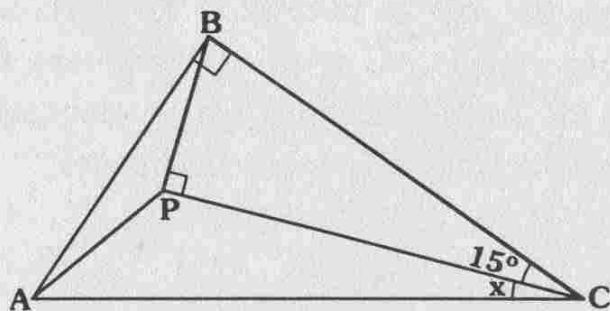
En el gráfico, $AB = BC$ y $DC = CE$. Calcule θ .



- A) 8° B) 14° C) 16°
D) 37° E) $37/2$

PROBLEMA N° 275

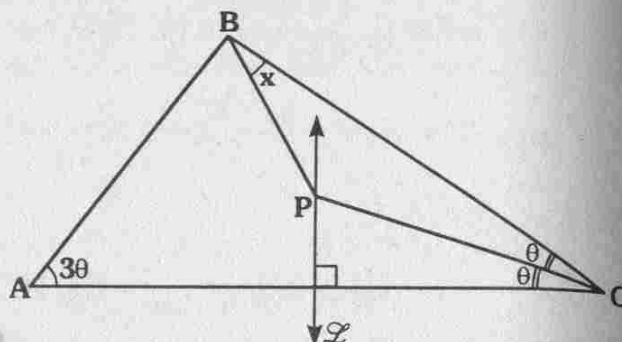
En el gráfico, $AP = PB$, calcule x.



- A) $3^\circ 30'$ B) $12^\circ 30'$ C) $7^\circ 30'$
D) $11^\circ 30'$ E) 15°

PROBLEMA N° 276

En el gráfico, $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB = PC$, calcule x.



- A) 30° B) $26,5^\circ$ C) 36°
D) $18,5^\circ$ E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 277

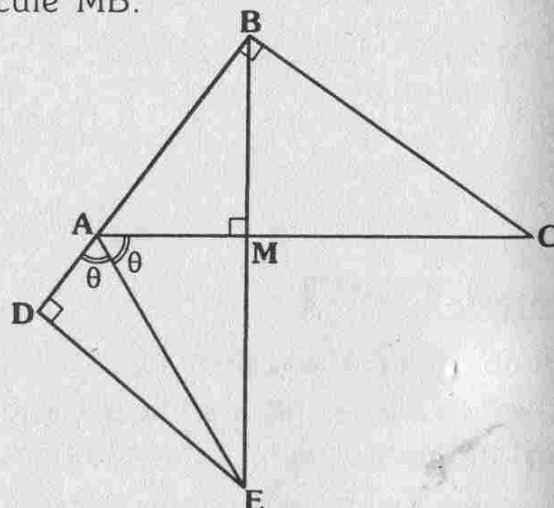
En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $m\angle BAC = 32^\circ$, $m\angle ACB = 23^\circ$ y $m\angle ABP = 72^\circ$.

Calcule $\frac{PB}{BC}$.

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}/2$ E) $2/5$

PROBLEMA N° 278

En el gráfico, $AB + AM = 12$ y $EM = 5$, calcule MB.

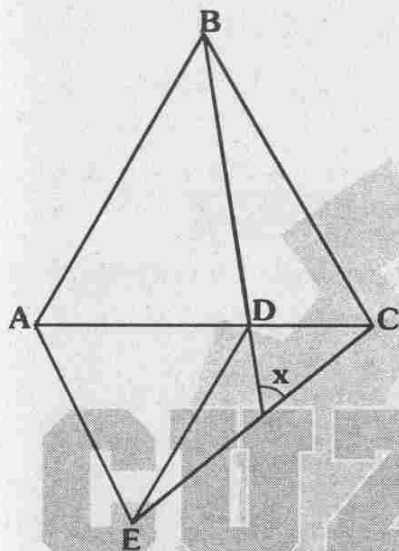


- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 279

Del gráfico los triángulos ABC y ADE son equiláteros.

Calcule x .



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 280

En un triángulo ABC se ubican los puntos M y N en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ respectivamente, si $AB = MC$, $AC = MN$; $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$, $m\angle BNM = 35^\circ$.

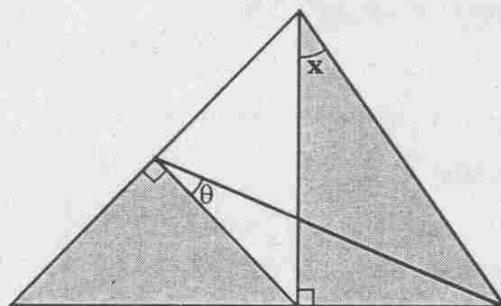
Calcule $m\angle BAC$.

- A) 35° B) 55° C) 70°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA N° 281

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes.

Calcule x en función de θ .



- A) θ B) $\theta + 30^\circ$
C) 2θ D) $90^\circ - \theta$
E) $90^\circ - 2\theta$

PROBLEMA N° 282

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $BD = AC$, $m\angle BCA = 50^\circ$ y $m\angle CBD = 30^\circ$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 80° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 283

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AP}$ tal que $AP = PC$, luego se ubica H en $\overline{AP}$ tal que :

$$m\angle AHB = 90^\circ; \quad BH = 12$$

$$\text{y} \quad BP = 13$$

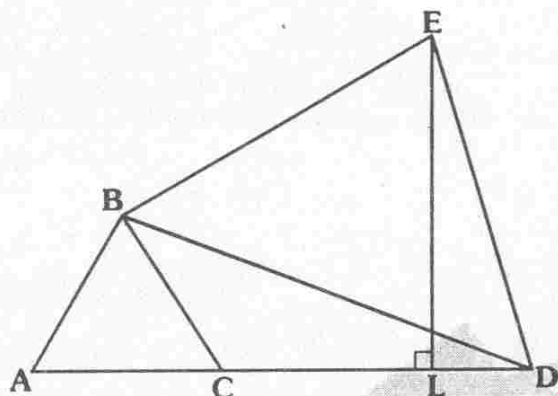
Calcule PC.

- A) 25 B) 23
C) 20 D) 18
E) 16

PROBLEMA N° 284

Del gráfico, los triángulos ABC y BED son equiláteros $AD = 6$.

Calcule EL.

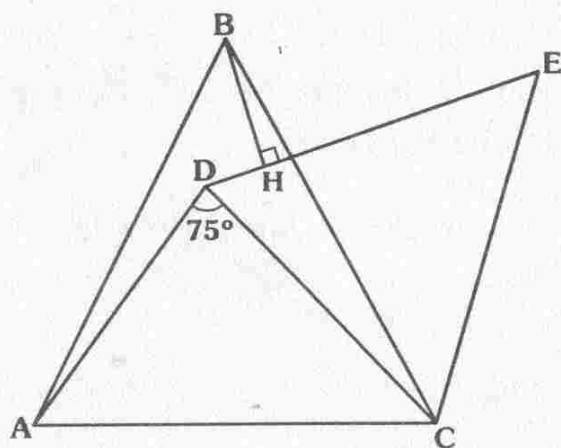


- A) 3 B) $6\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$
E) 4

PROBLEMA N° 285

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AD = 8$.

Calcule la distancia de H a $\overline{BE}$.



- A) 8 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

PROBLEMA N° 286

En la región interior de un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B se ubica el punto P, tal que:

$$6(PC) = 3(PB) = 2(PA)$$

Calcule $m\angle BPC$.

- A) 30° B) 105° C) 120°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA N° 287

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que

$$m\angle BAD = 2(m\angle ABD) \text{ y } AB = DC.$$

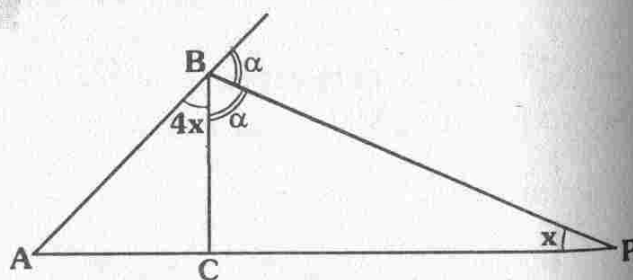
Calcule $m\angle BCA$.

- A) 15° B) 45° C) 30°
D) 20° E) 60°

PROBLEMA N° 288

Del gráfico, $CP = AB + BC$.

Calcule x.

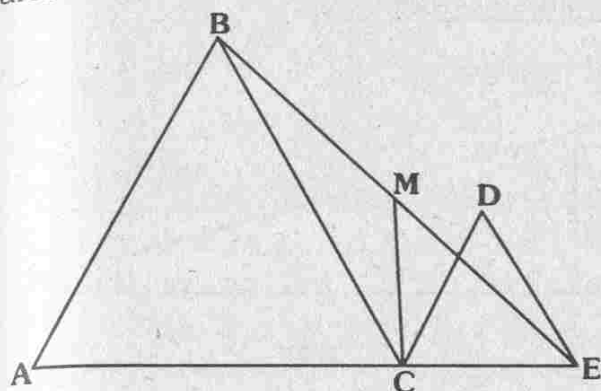


- A) 10° B) 18° C) 9°
D) 15° E) 36°

PROBLEMA N° 289

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros, $BM = ME$ y $BD = 6$.

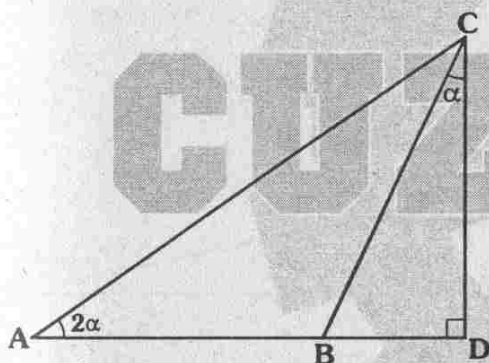
Calcule CM.



- A) 4 B) 2 C) 3
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 290

Del gráfico, $AB = CD$. Calcule α



- A) 37° B) 30° C) 53°
D) $37^\circ/2$ E) $53^\circ/2$

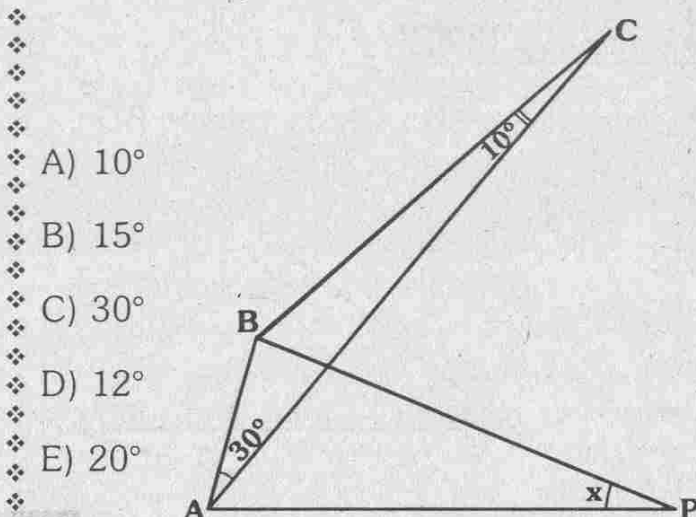
PROBLEMA N° 291

En el triángulo ABC, se ubica un punto interior P, tal que $BC = AP$,
 $m\angle PBC = m\angle PCB = m\angle PAC = \frac{m\angle ABP}{5}$.
Calcule $m\angle BAP$.

- A) 30° B) 20° C) 40°
D) 15° E) 50°

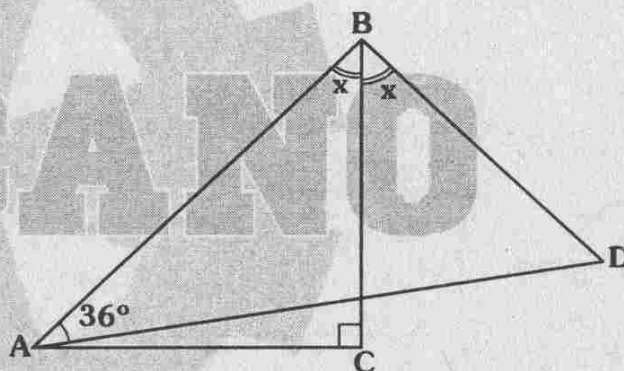
PROBLEMA N° 292

Del gráfico, $BC = AP = BP$. Calcule x



PROBLEMA N° 293

Del gráfico, $AD = 2(BC)$. Calcule x.



- A) 40° B) 42° C) 46°
D) 48° E) 36°

PROBLEMA N° 294

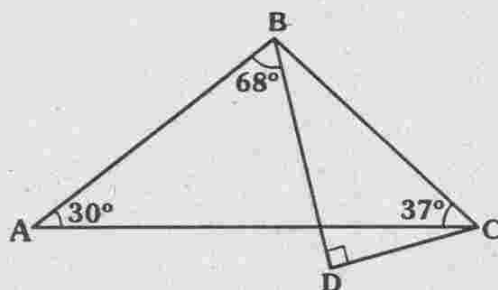
En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos Q y P respectivamente tal que $AQ = PC$, las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en L (punto interior al triángulo ABC), si $m\angle ABC = 2(m\angle BCL)$.
Calcule $m\angle ACB$.

- A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 20°

PROBLEMA N° 295

En el gráfico, $AB = 12\sqrt{2}$, calcule BD.

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) $5\sqrt{2}$
- E) $6\sqrt{2}$

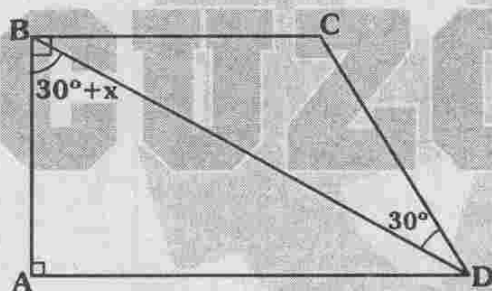


PROBLEMA N° 296

En el gráfico, $3(BC) = 2(AD)$.

Calcule x.

- A) 15°
- B) $22^\circ 30'$
- C) 30°
- D) $26^\circ 30'$
- E) $18^\circ 30'$



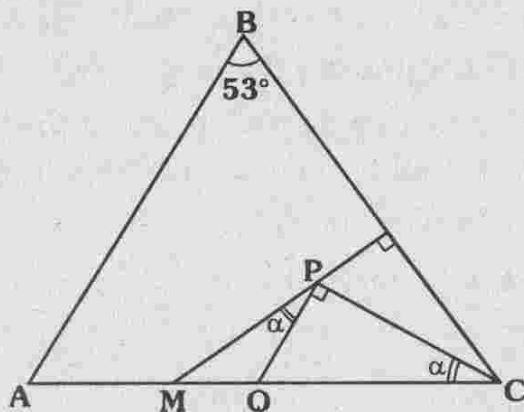
PROBLEMA N° 297

En el gráfico, se tiene que:

$$AB = 10 \quad \text{y} \quad BC = QC = 6$$

Calcule MP.

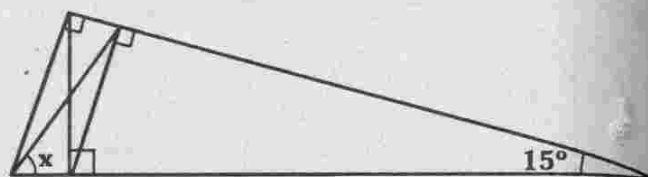
- A) 2
- B) 3
- C) 6
- D) 4
- E) 5



PROBLEMA N° 298

Del gráfico, calcule x.

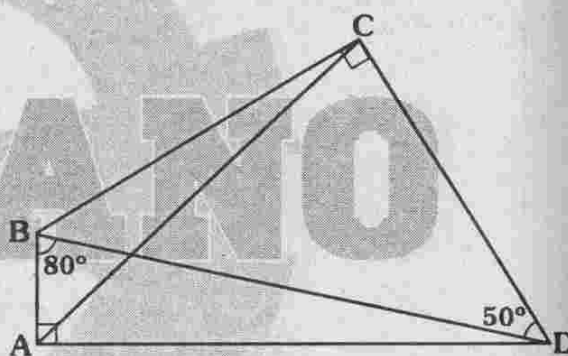
- A) 70°
- B) 69°
- C) 61°
- D) 58°
- E) 53°



PROBLEMA N° 299

Del gráfico, calcule $\frac{AC}{BD}$.

- A) $1/2$
- B) $1/3$
- C) $\sqrt{3}/3$
- D) $\sqrt{2}/2$
- E) $\sqrt{3}/2$

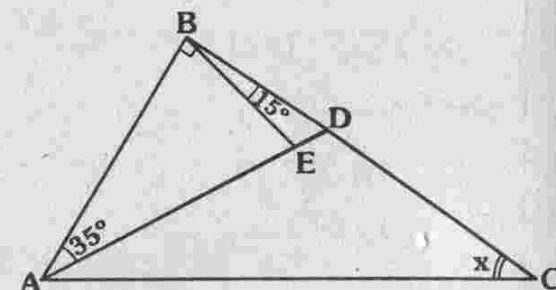


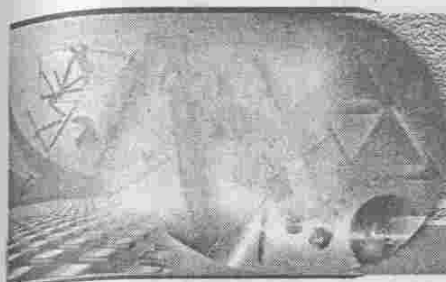
PROBLEMA N° 300

Del gráfico $DC = 2(BE)$.

Calcule x.

- A) 275°
- B) $17,5^\circ$
- C) $22,5^\circ$
- D) 16°
- E) 18°





Problemas Resueltos

Oímpicos

Esta breve sección está dirigida a estudiantes que deseen afianzar aún más sus conocimientos de geometría, sobre congruencia de triángulos. Contiene diversos problemas de Olimpiadas Matemáticas y de algunos foros geométricos. Tomar en cuenta que además de los conocimientos básicos es importante una adecuada argumentación.

PROBLEMA N°1

VIII olimpiada del cono sur 2007-exámen selectivo, Argentina

Dado un triángulo equilátero ABC , sea M punto del lado BC , con $M \neq B$ y $M \neq C$. Se considera el punto N tal que el triángulo BMN sea equilátero y A y N estén en distintos semiplanos respecto de $\overline{BC}$. Sean P , Q y R puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente. Demostrar que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA N°2

38° international mathematical Olympiad (Mar de Plata-Argentina)/ 35° imo(1994)

Se tiene el triángulo isósceles ($AB = BC$), en la prolongación de la altura BH se toma el punto M tal que $\overline{MC} \perp \overline{BC}$, en $\overline{BC}$ se toma E y en la prolongación de $\overline{BA}$ el punto F , tal que $\overline{EF}$ interseca a $\overline{AC}$ en N . Demostrar que $\overline{MN} \perp \overline{EF}$ si y sólo si $EN = NF$.

PROBLEMA N°3

(6° th Russian 1998 problems)

En el triángulo ABC , M es el punto medio

de $\overline{CA}$ y $\overline{BL}$ es la bisectriz angular de B , la línea paralela a $\overline{BC}$ por L encuentra a $\overline{BM}$ en E y la línea a través de M paralela a $\overline{BA}$ encuentra a $\overline{BL}$ en D , demostrar que $\overline{ED}$ es perpendicular a $\overline{BL}$.

PROBLEMA N°4

Se tiene el triángulo ABC , en el cual se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Demostrar que el ángulo BCA mide 60° si y solo si $AE + BD = AB$.

PROBLEMA N°5

Se tiene el triángulo equilátero ABC , se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, M es punto medio de $\overline{AQ}$ y O es centro del triángulo PBQ .

Demostrar que $m\angle OMC = 90^\circ$.

PROBLEMA N°6

Se tiene el triángulo ABC de circuncentro O , se ubica, M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\angle ABC = m\angle MON$.

Demuestre que AC es menor o igual que el perímetro del triángulo MBN .

PROBLEMA N°7

En el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros AMB, BNC y CSD. Si P, Q y R son puntos medios de $\overline{MN}$, $\overline{NS}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Demuestre que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA N°8

P es un punto interior del triángulo ABC, tal que $m\angle PAC = m\angle PBC$; las perpendiculares de P, trazadas a $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ cortan a estos en L y M respectivamente. Demuestre que $DL = DM$, cuando D es punto medio de $\overline{AB}$.

PROBLEMA N°9

Canadá 1998

En el triángulo ABC se cumple $m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle ABC = 60^\circ$, X es un punto en el interior del triángulo tal que $m\angle XBA = 20^\circ$ y $m\angle XCA = 10^\circ$. Demuestre que $\overline{AX}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

PROBLEMA N°10

En un triángulo ABC, la mediana BB' y la altura CF son congruentes y $m\angle CBB' = m\angle FCB$. Demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

PROBLEMA N°11

Olimpiada de mayo 2008

Se tiene el rectángulo ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$ tal que $m\angle APD = 90^\circ$. En los triángulos ABP y PDC se trazan las altu-

ras $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ respectivamente. Probar que el centro del rectángulo está en $\overline{QR}$.

PROBLEMA N°12

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la mediana CQ, tal que $m\angle BQC = m\angle PBQ$ y $AP = 2(PC)$. Demuestre que $m\angle ABC = 90^\circ$.

PROBLEMA N°13

Sea el triángulo equilátero ABC, ubiquemos P un punto en la región interior, desde el cual se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{PR} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PS} \perp \overline{AC}$, con $Q \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$ y $S \in \overline{AC}$, indique la región en la cual PQ, PR y PS son las longitudes de los lados de un triángulo.

PROBLEMA N°14

XLIX Olimpiada Nacional de Matemáticas (tercera ronda-Bulgaria 2000)

Dado el cuadrilátero convexo ABCD, tal que $m\angle BCD = m\angle CDA$, la bisectriz del ángulo ABC interseca al segmento CD en E, probar que $m\angle AEB = 90^\circ$ si y solo si $AB = AD + BC$.

PROBLEMA N°15

En el triángulo ABC se ubica D en $\overline{AC}$ tal que $AC = BD$ y

$$\frac{m\angle BAC}{3} = \frac{m\angle DBC}{2} = \frac{m\angle ACB}{4}$$

Halle $m\angle BAC$.

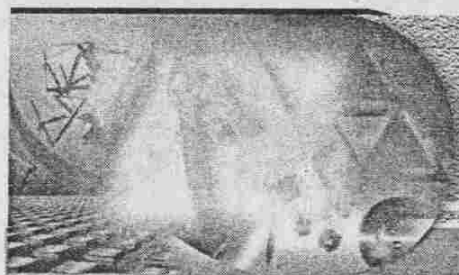


SOLUCIONARIO

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

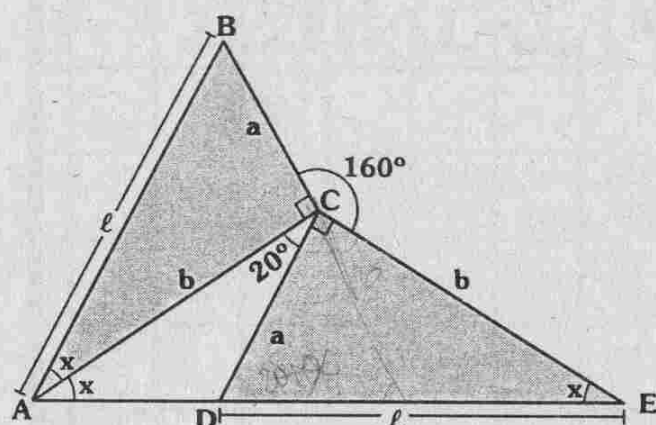




Solucionario

Ciclo Anual

RESOLUCIÓN N° 1



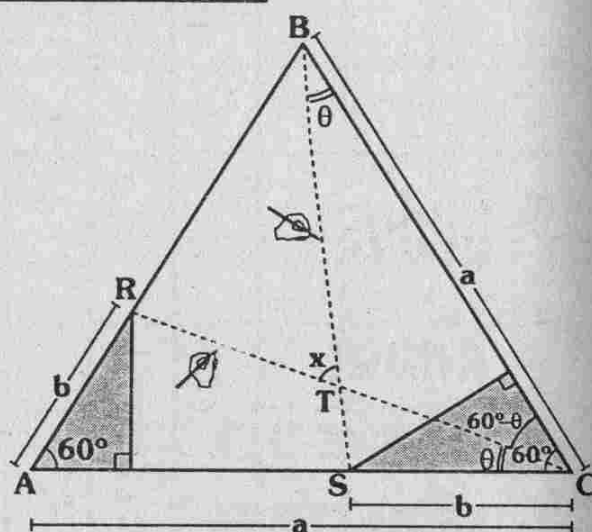
- Nos piden x .
- Dato: $\triangle ACE \cong \triangle ECD$
- Lo primero que debemos hacer es reconocer que lados tienen igual longitud (no dejarse llevar por el gráfico, sino por razonamientos lógicos).
- Sea: $AC = b$ y $BC = a$
- Para $\overline{CD}$ (cateto), sólo hay dos posibilidades, que mida "a" o "b".
- Si $CD = b$, habría contradicción pues:
 $m\angle ADC > 90^\circ$
- Luego:
 $CD = a$ y $CE = b$
- Como:
 $\triangle ACB \cong \triangle ECD \Rightarrow m\angle CED = x$
- $\triangle ACE$: isósceles $\Rightarrow m\angle CAD = x$

$$\triangle ACE: x + x + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 35^\circ$$

Clave **E**

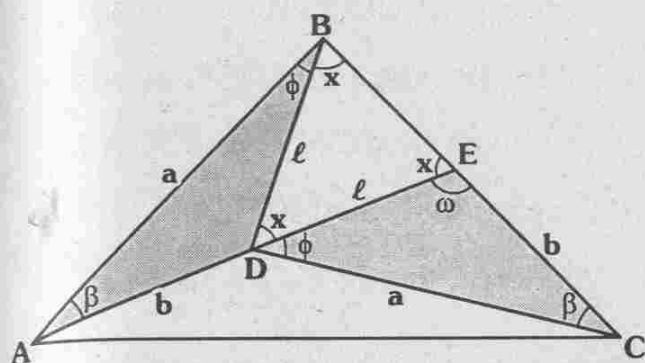
RESOLUCIÓN N° 2



- Nos piden x .
- Como los triángulos rectángulos son congruentes, aprovechamos que las hipotenusas tienen igual longitud, $AR = SC$.
- $\triangle ABC$: equilátero, luego notamos:
- $\triangle RAC \cong \triangle SCB$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle ACR = m\angle CBS = \theta$
- También: $m\angle BCT = 60^\circ - \theta$
- En $\triangle TCB$:
 $x = \theta + 60^\circ - \theta$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 3

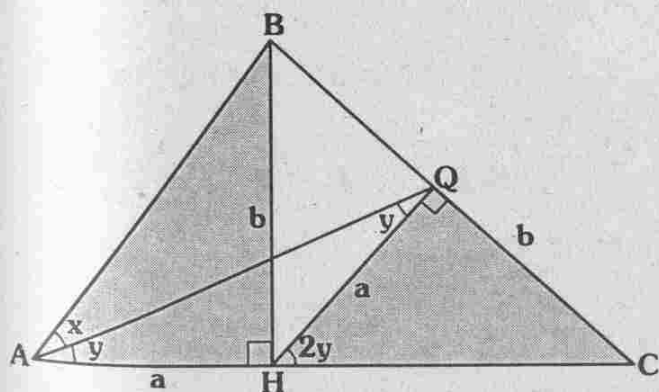


- Se nos pide x .
- Por dato: $\triangle ABD \cong \triangle CDE$
- Primero hay que reconocer que lados y ángulos se repiten en ambos triángulos.
- Sea $m\angle BAD = \beta$, se observa $x > \beta$
- En $\triangle DEC$: $\omega > x \Rightarrow \omega \neq \beta$
 $\Rightarrow m\angle DCE = \beta$
- Como: $\beta + \phi = x \Rightarrow m\angle DEB = x$
- Por la congruencia: $DB = DE$
- Luego: $\triangle DEB$ es equilátero.

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 4



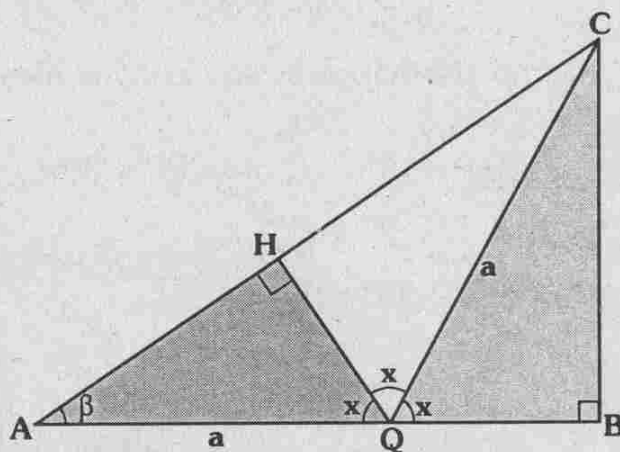
- Piden: x/y .

- Tenemos: $\triangle AHB \cong \triangle HQC$
- Sea $AH = a$ y $BH = b$, en
 $\triangle BHQ$: $b > HQ \Rightarrow HQ = a$
- Luego: $\triangle AHQ$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle QHC = 2y$
- Por la congruencia:
 $2y = x + y \Rightarrow x = y$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

Clave B

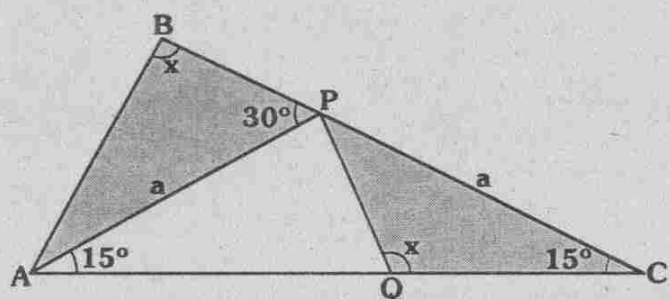
RESOLUCIÓN N° 5



- Piden x
- Dato: $\triangle AHQ \cong \triangle CBQ$
- Reconocemos rápidamente $AQ = QC$.
- Es decir $\triangle AQC$ es isósceles, entonces:
 $AH = HC$ y $m\angle AQH = m\angle HQC$
- Como: $m\angle CQB > \beta \Rightarrow m\angle CQB = x$
- En Q : $x + x + x = 180^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave B

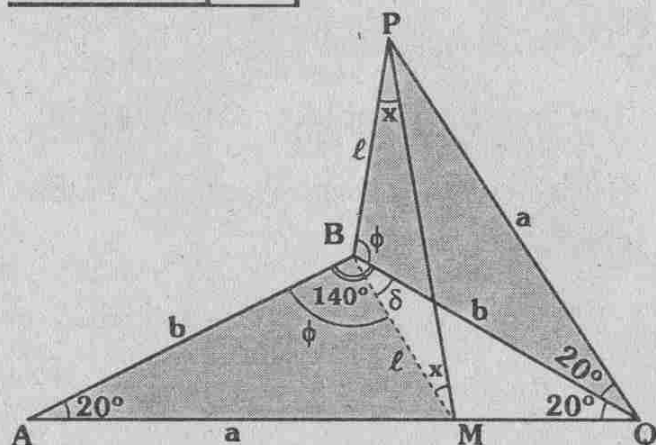
RESOLUCIÓN N° 6



- Piden x .
- Dato: $\triangle ABP \cong \triangle PQC$
- $\Rightarrow AP = PC$, es decir $\triangle APC$ es isósceles.
- En $\triangle APC$, por ángulo exterior:
 $m\angle BPA = 30^\circ$
- Como los triángulos son congruentes, entonces:
 $m\angle BAP = 15^\circ$ y $m\angle QPC = 30^\circ$
- Luego:
 $x + 30^\circ + 15^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 135^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 7

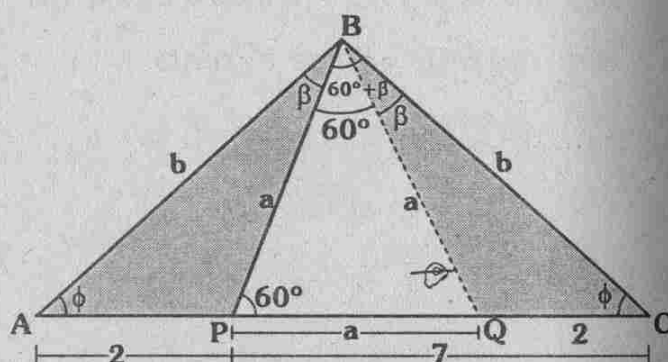


- Piden x .
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que el $\triangle ABQ$ es isósceles.

- Se traza $\overline{BM}$, pues:
 $\triangle BAM \cong \triangle BQP$ (LAL)
- $\Rightarrow BM = MP$, luego el $\triangle MBP$ es isósceles
- También: $m\angle ABM = m\angle PBQ = \phi$
- Como: $\phi + \delta = 140^\circ$
- $\triangle MBP$: $x + x + \underbrace{\phi + \delta}_{140^\circ} = 180^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 8



- Se nos pide: a .
- Del gráfico, tenemos que el $\triangle ABC$ es isósceles, entonces $AB = BC$.
- Se traza $\overline{BQ}$ tal que $m\angle QBC = \beta$
- Luego: $m\angle PBQ = 60^\circ$
- Como: $\phi + \beta = 60^\circ \Rightarrow \triangle PBQ$ es equilátero
- $\triangle ABQ \cong \triangle QBC \Rightarrow QC = 2$

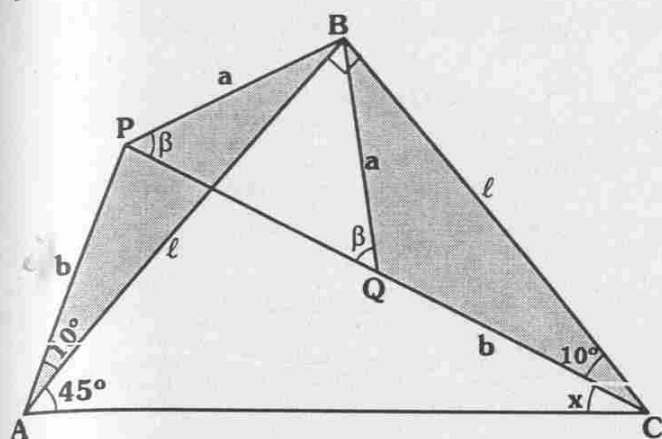
Finalmente:

$$a + 2 = 7$$

$$\therefore a = 5$$

Clave A

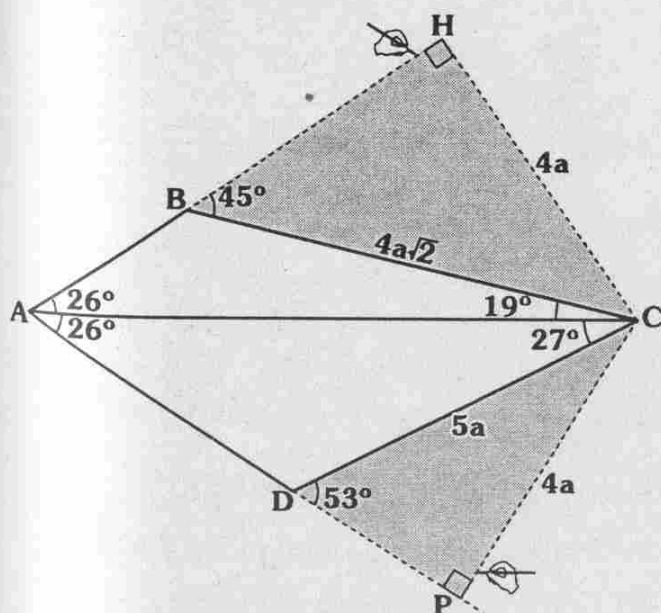
RESOLUCIÓN N° 9



- Se nos pide x .
- Nos damos cuenta rápidamente:
 $\triangle PBQ$ y $\triangle ABC$ son isósceles
 $\Rightarrow PB = BQ$ y $AB = BC$
 $\triangle APB \cong \triangle CBQ$ (LLL)
 $\Rightarrow m\angle BCQ = 10^\circ$
- Finalmente: $x + 10^\circ = 45^\circ$
 $\therefore x = 35^\circ$

Clave A

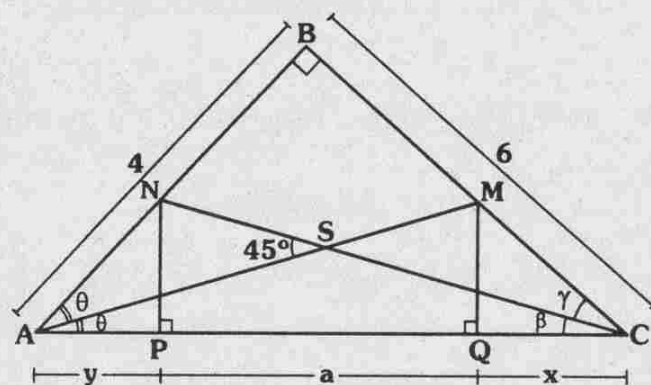
RESOLUCIÓN N° 10



- Piden: $\frac{BC}{DC}$
- Como: $\vec{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$, se traza $\overline{CH} \perp \vec{AB}$ y $\overline{CP} \perp \vec{AD}$.
- También notamos:
 $m\angle CBH = 45^\circ$ y $m\angle CDP = 53^\circ$
ambos son notables.
- $\triangle DPC$: sea $CP = 4a \Rightarrow BC = 5a$
- Por T. de la bisectriz: $CP = CH = 4a$
- $\triangle BHC$, como $CH = 4a \Rightarrow BC = 4a\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{4a\sqrt{2}}{5a}$
 $\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 11



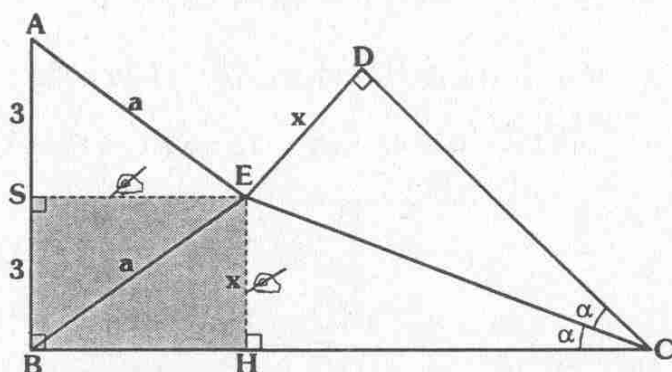
- Nos piden: $x - y$
- En $\triangle ASC$: $\theta + \beta = 45^\circ$
- En $\triangle ABC$: $2\theta + \beta + \gamma = 90^\circ$
 $\Rightarrow \beta = \gamma$
- Es decir $\vec{CN}$ es bisectriz del $\angle ACB$
- Por teorema de la bisectriz:

$$CP = CB \Rightarrow x + a = 6 \quad \dots (I)$$

$$AQ = AB \Rightarrow y + a = 4 \quad \dots \text{(II)}$$

- Restando (I) y (II):

$$x - y = 2$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 12**

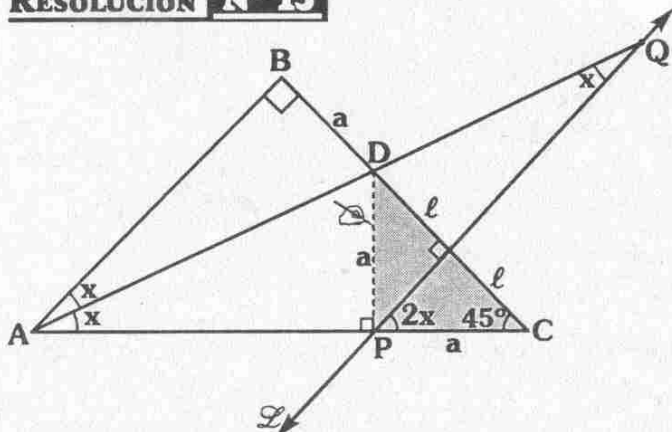
- Nos piden $\mathbf{x}$.
- Se traza $\overline{EH} \perp \overline{BC}$, por teorema de la bisectriz:

$$EH = ED = x$$

- $\triangle AEB$: isósceles, $\overline{ES}$ es altura y mediana.

$$\Rightarrow AS = SB = 3$$

$$\therefore x = 3$$

Clave A**RESOLUCIÓN N° 13**

- Nos piden **x**.

- Como $\vec{\mathcal{L}}$ es mediatriz de:

$$\overline{CD} \Rightarrow PD = PC$$

- También:

$$* \quad \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle BAD = x$$

* $\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle BAC$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = x$$

- Por recíproco del teorema de la bisectriz.

- Como $DB=DP$ y $m\angle DBA = 90^\circ$

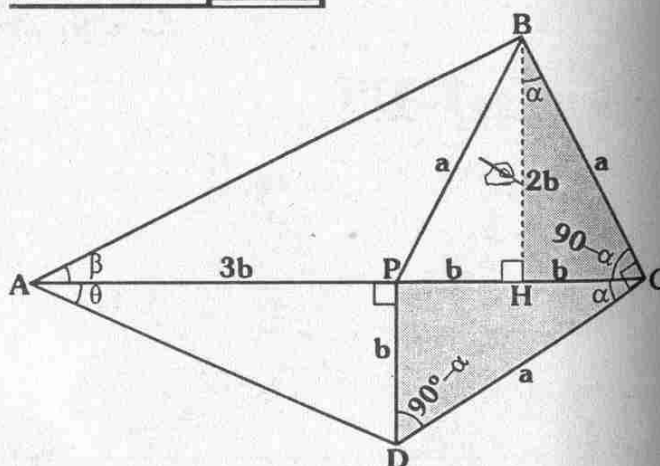
$$\Rightarrow m \angle DPA = 90^\circ$$

- $\triangle DPC$: isósceles $\Rightarrow m\angle PCD = 45^\circ$

$$\Rightarrow 2x = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 14

- Piden: $m \nless \text{BAD}$

- De los datos:

$$PC=2b \quad y \quad AP=3b$$

- Hallemos lo que nos piden por partes:

$$m\angle BAD = \beta + \theta$$

- Para ello en el $\triangle PBC$, que es isósceles tracemos la altura BH , con ello tendremos: $PH = PC = b$

- También:

$$\triangle PDC \cong \triangle HCB \text{ (ALA)} \Rightarrow PD = b$$

$$BH = 2b$$

- $\triangle APD$: $AP = 3b$ y $PD = b$

$$\Rightarrow \theta = \frac{37^\circ}{2}$$

- $\triangle AHB$: $AH = 4b$ y $BH = 2b$

Es decir: $AH = 2(BH)$

$$\Rightarrow \beta = \frac{53^\circ}{2}$$

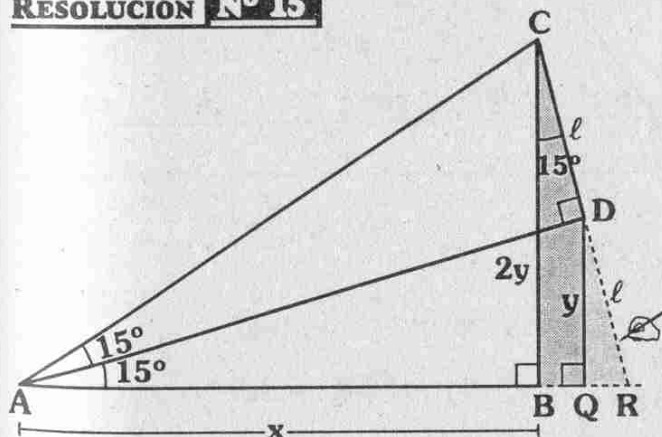
- Finalmente:

$$m\angle BAD = \frac{53^\circ}{2} + \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore m\angle BAD = 45^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 15



- Nos piden: $\frac{x}{y}$

- Primero al "completar ángulos", nos damos cuenta:

$$m\angle CAD = m\angle DAB = 15^\circ$$

- Nos conviene prolongar $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, pues el $\triangle ACR$ será isósceles, luego:

$$CD = DR$$

- $\triangle CBR$, por base media:

$$CB = 2y$$

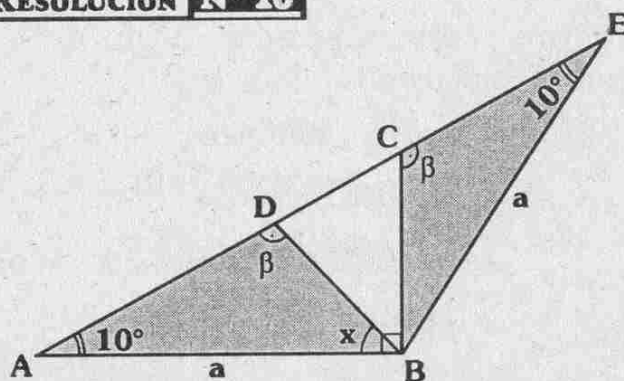
- $\triangle ABR$: notable de 30° y 60° :

$$\Rightarrow x = 2y\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2\sqrt{3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 16



- Nos piden x .

- Tenemos por dato:

$$\triangle ABD \cong \triangle EBC$$

- Reconozcamos "lados y ángulos" iguales en ambos triángulos.

- Del gráfico: $m\angle BCE > 90^\circ$

- Como los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABD$ son agudos, entonces:

$$m\angle ADB = m\angle BCD = \beta$$

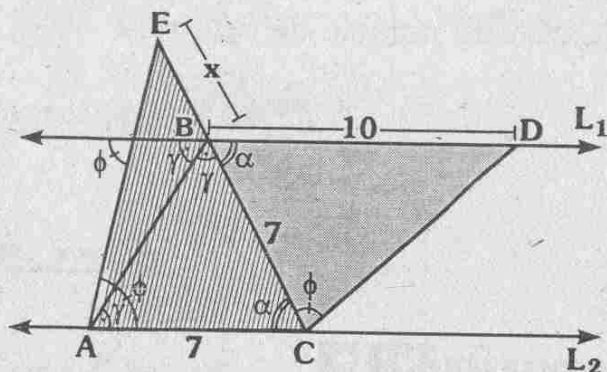
$$\Rightarrow AB = BE$$

- $\triangle ABE$: isósceles $\Rightarrow m\angle DAB = 10^\circ$

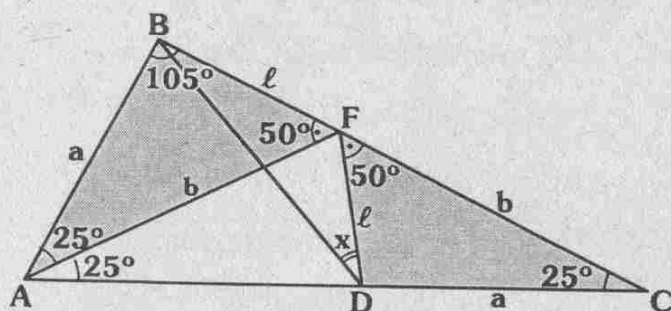
- $\triangle ABC$: Por ángulo exterior:

$$\beta = 90^\circ + 10^\circ = 100^\circ$$

- $$\therefore x = 70^\circ$$

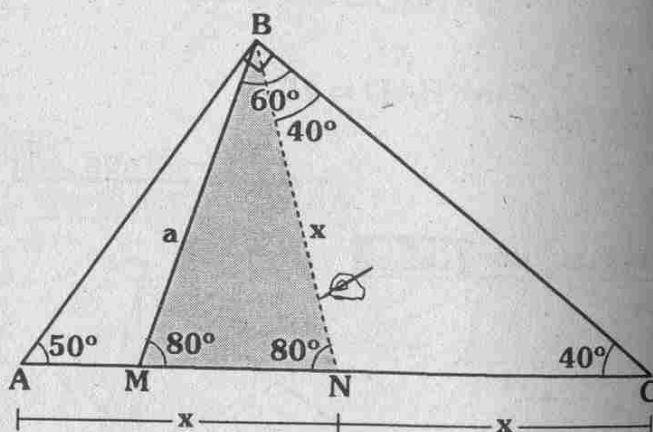
RESOLUCIÓN Nº 17

- Clave
- 
- D

RESOLUCIÓN N° 18

148

- Clave E

RESOLUCIÓN N° 19

- Piden: AC
- De los datos, tenemos:

$$m\angle BMC = 80^\circ$$
- En el $\triangle ABC$ se traza la mediana BN, por teorema:

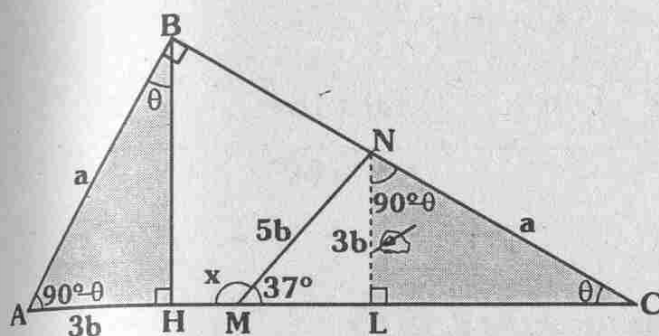
$$AN = NC = BN = x$$
- $\triangle BNC$: isósceles $\Rightarrow m\angle BNM = 80^\circ$
- $\triangle MBN$: $x = a$

$$\Rightarrow AC = 2x$$

$$\therefore AC = 2a$$

Clave C

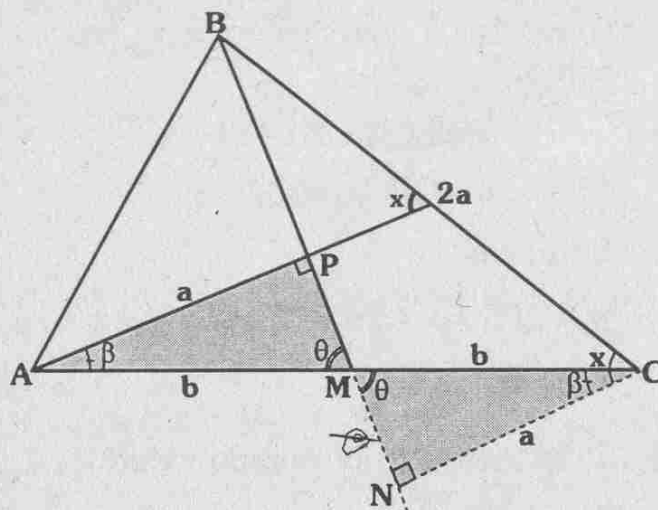
RESOLUCIÓN N° 20



- Nos piden x .
- De los datos:
 $AH = 3b$ y $MN = 5b$
- Como:
 $AB = NC$ y $m\angle ABH = m\angle NCA$
- Trazamos:
 $\overline{NL} \perp \overline{AC}$
- $\triangle AHB \cong \triangle NLC$ (LAL)
 $\Rightarrow NL = 3b$
- $\triangle MLN$ notable de 37° .
 $\therefore x = 143^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 21



- Piden x .
- Para ubicar un triángulo rectángulo donde " x " sea la medida de un ángulo interior, se prolonga $\overline{BM}$ y se traza $\overline{CN} \perp \overline{BM}$, entonces:

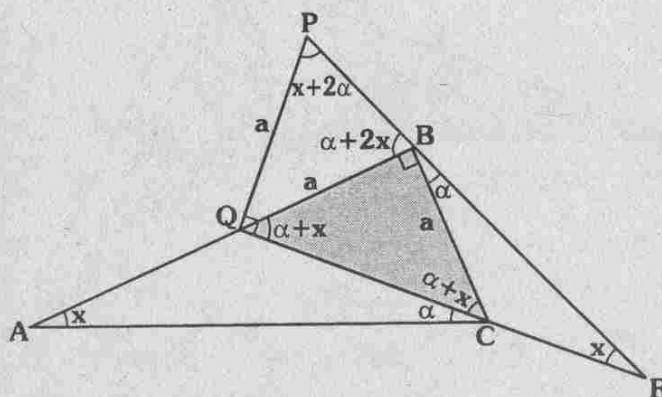
$$\triangle APM \cong \triangle CNM \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow AP = NC = a$$

- Como $\overline{AP} \parallel \overline{NC} \Rightarrow m\angle NCB = x$
- En $\triangle BNC$: $BC = 2(NC)$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 22



- Nos piden x .

- Tenemos como dato que los triángulos ABC y PQR son congruentes, ahora reconozcamos que elementos se repiten como:

$$m\angle BCA = 2\alpha + x \quad y$$

$$m \triangleleft \text{QRC} = x$$

- Entonces:

$$m\angle QPR = x + 2\alpha; \quad m\angle BAC = x; \quad y$$

$$PQ = BC$$

- En el $\triangle AQC$, por ángulo exterior:

$$m\angle BQC = \alpha + x$$

- $\triangle BQC$: isósceles $\Rightarrow \alpha + x = 45^\circ$

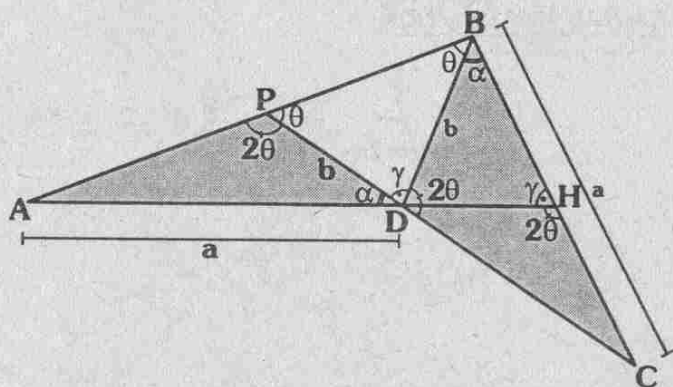
- También:

 ΔPQB : isósceles

$$2\alpha + x = \alpha + 2x \Rightarrow x = \alpha$$

$$\Rightarrow x + x = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 23**

- Piden θ
- $\triangle PDB$: isósceles $\Rightarrow PD = DB$

- Por ángulo exterior en $\triangle PDB$:

$$m\angle BDC = 20$$

- Luego:

$$m \angle PDB = m \angle DHB = \gamma$$

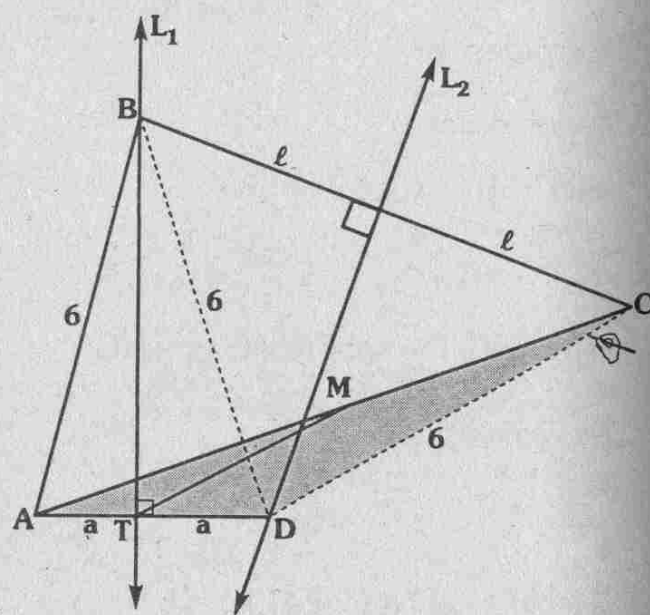
$$\Rightarrow m \angle PDA = m \angle DBC = \alpha$$

- $\triangle ADP \cong \triangle CBD$ (LAL)

$$\Rightarrow m_{\angle APD} = 2\theta$$

- En P: $2\theta + \theta = 180^\circ$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

Clave  D**RESOLUCIÓN N° 24**

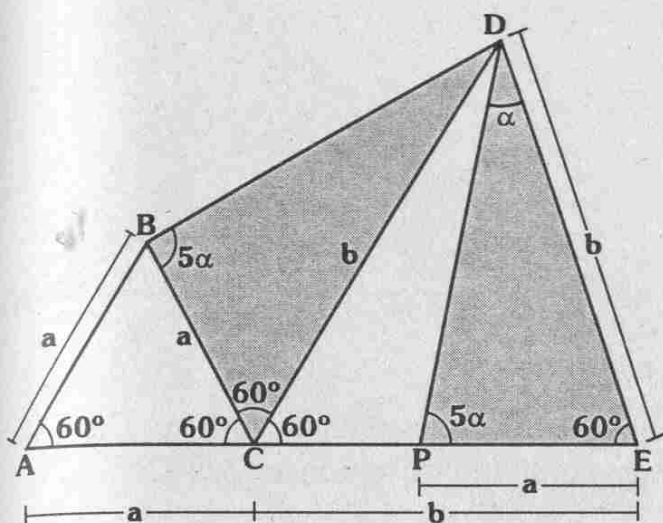
- Piden: TM
- Por teorema de la mediatriz:

$$AB = BD = DC = 6$$
- Como $AM = MC$ y $AT = TD$, en el $\triangle ACD$,
 $\overline{TM}$ es base media.

$$\therefore \text{TM} = 3$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 25



- Piden α .
- Al completar las medidas angulares y lados de los triángulos equiláteros notamos:

$$\triangle BCD \cong \triangle PED \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle DPE = 5\alpha$$

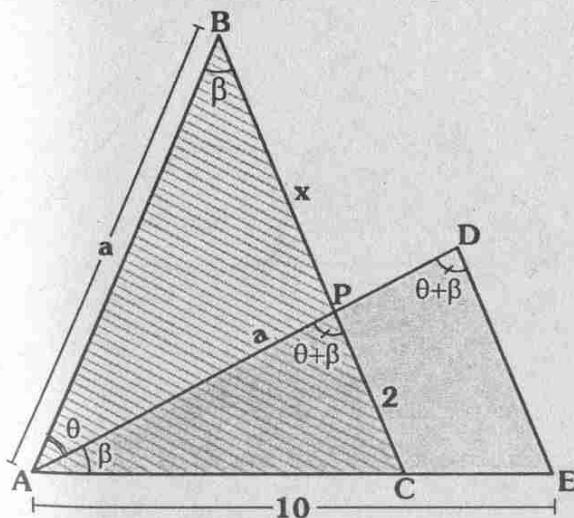
- En $\triangle PDE$:

$$\alpha + 5\alpha + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 26



- Piden x .
- Completemos medidas angulares de la siguiente forma:

$$\text{Sea: } m\angle BAP = \theta$$

$$\Rightarrow m\angle APC = \theta + \beta$$

- Como $\overline{PC} \parallel \overline{DE} \Rightarrow m\angle ADE = \theta + \beta$

$$\triangle BAC \cong \triangle ADE \text{ (LAL)}$$

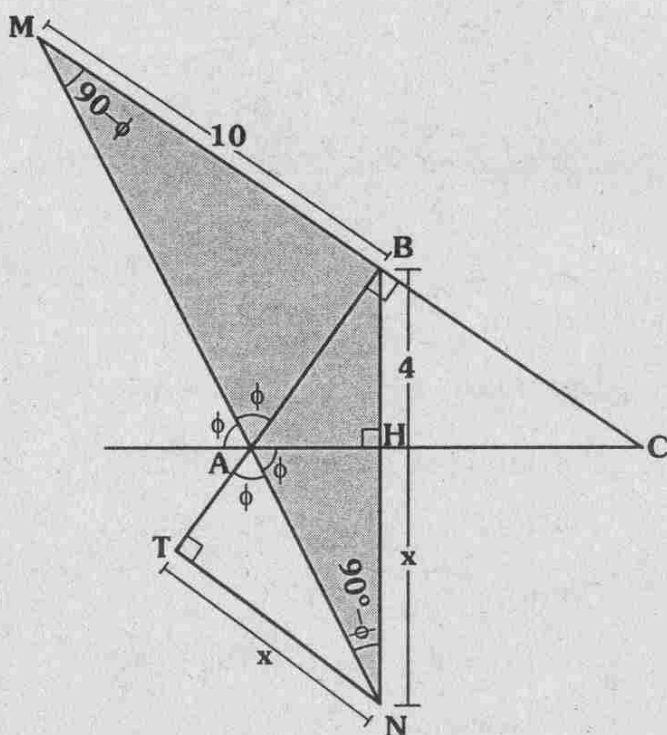
$$\Rightarrow BC = AE$$

$$x + 2 = 10$$

$$\therefore x = 8$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 27



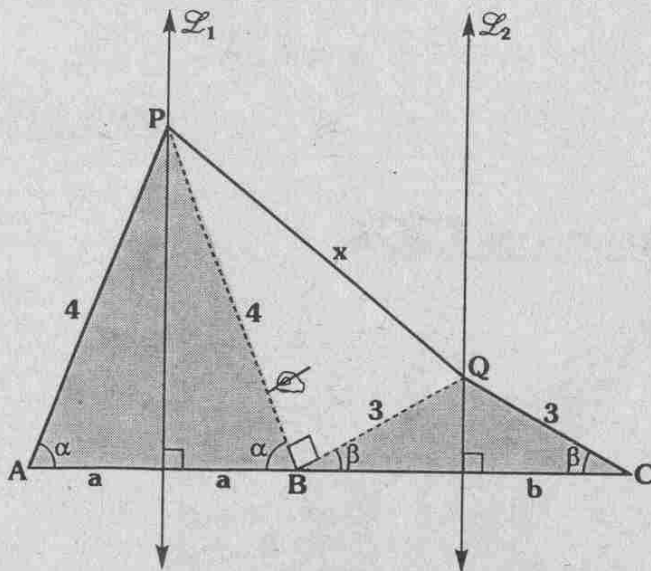
- Piden x .
- Por teorema de la bisectriz:

$$NT = NH = x$$

- En $\triangle AHN$ y $\triangle ABM$:
 $m\angle AMB = m\angle ANH = 90^\circ - \phi$
- $\triangle MNB$: isósceles
 $\Rightarrow x + 4 = 10$
 $\therefore x = 6$

Clave C

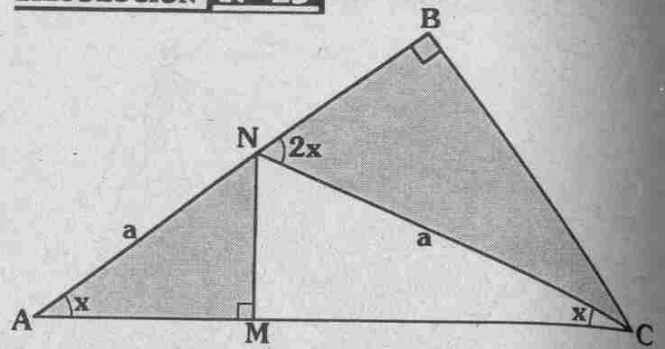
RESOLUCIÓN N° 28



- Piden x .
- Del dato: $AP=4$ y $QC=3$.
- Por teorema de la mediatriz:
 $AP = PB = 4$ y $BQ = QC = 3$
- Como:
 $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow m\angle PBQ = 90^\circ$
- En $\triangle PBQ$:
 $x^2 = 3^2 + 4^2$
 $\therefore x = 5$

Clave B

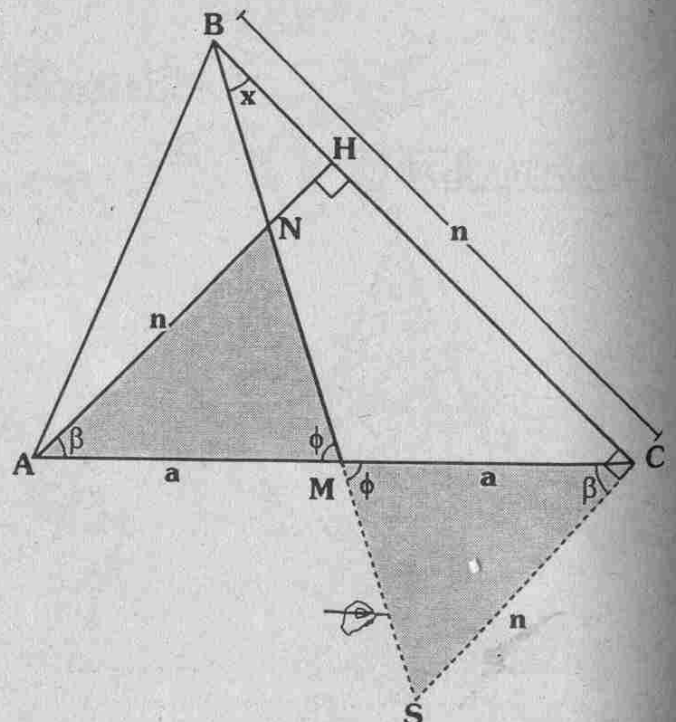
RESOLUCIÓN N° 29



- Piden x .
- Como los triángulos AMN y CBN son congruentes, entonces $AN=NC$.
- $\triangle ANC$: isósceles
- Por ángulo exterior en el $\triangle ANC$:
 $m\angle CNB = 2x$
- Por la congruencia como los "ángulos" deben ser respectivamente iguales:
 $m\angle ANM = 2x \Rightarrow x + 2x = 90^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 30



- Piden: x .
- Prolongamos $\overline{BM}$ y trazamos $\overline{CS} \parallel \overline{AN}$ pues tendremos:

$$\triangle NAM \cong \triangle SCM \text{ (ALA)}$$

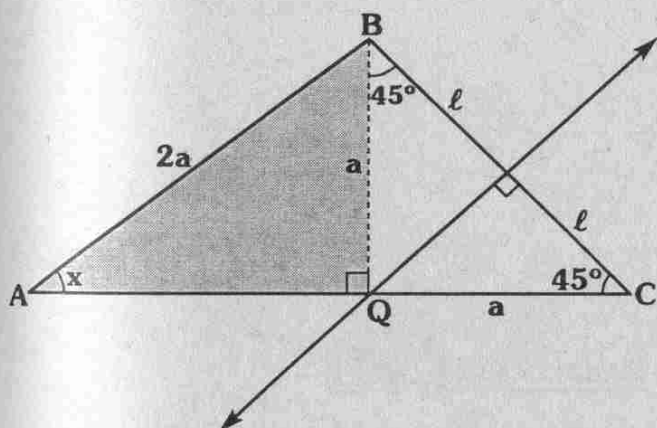
$$\Rightarrow CS = n \text{ y } m\angle BCS = 90^\circ$$

- En $\triangle BCS$: $BC = CS$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave B

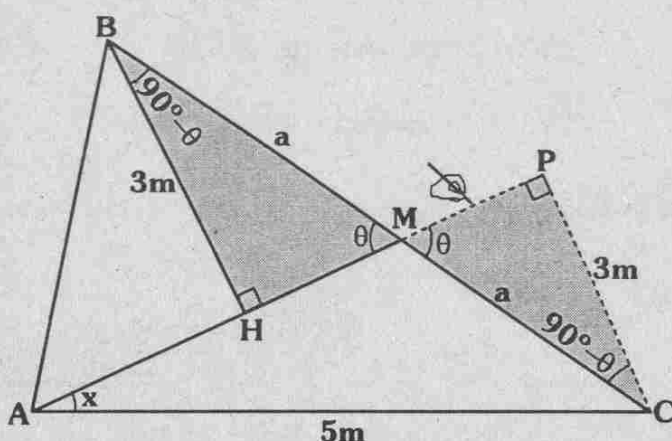
RESOLUCIÓN N° 31



- Piden x .
- Por teorema de la mediatriz:
 $QC = QB$
 $m\angle QBC = 45^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BQC = 90^\circ$
- $\triangle AQB$: notable, pues $AB = 2(BQ)$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave E

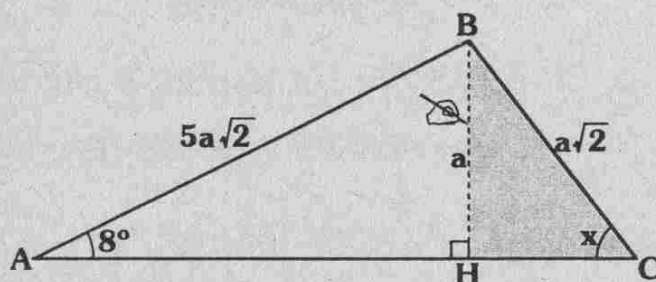
RESOLUCIÓN N° 32



- Piden x .
- Como $MB = MC$, se prolonga $\overline{AM}$ y se traza $\overline{CP} \perp \overline{AM}$
 $\Rightarrow \triangle BHM \cong \triangle CPM \text{ (LAL)}$
 $\Rightarrow PC = BH = 3m$
- En $\triangle APC$, como $AC = 5m$ y $PC = 3m$.
 $\therefore x = 37^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 33

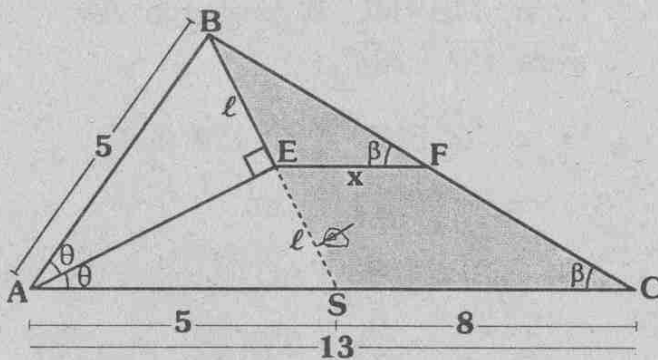


- Nos piden x .
- Dato: $m\angle ABC > 90^\circ$; $m\angle BAC = 8^\circ$
 $AB = 5(BC)$
- Convenientemente:
 $AB = 5a\sqrt{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
- $\triangle AHB$: notable de 8°
 $\Rightarrow BH = a$
- $\triangle BHC$: notable:
 $\therefore x = 45^\circ$

Clave B

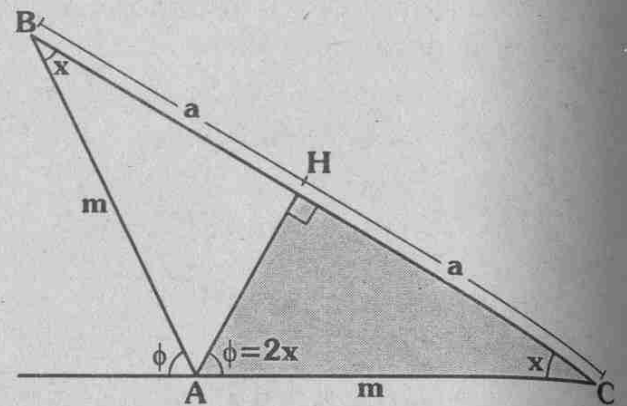
RESOLUCIÓN N° 34



- Piden x .
- Prolongamos $\overline{BE}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en S , pues tendremos:
- En $\triangle ABS$, $\overline{AE}$ es bisectriz y altura
 $\Rightarrow AB = AS$ y $BE = ES$
- Ahora en $\triangle BSC$, $\overline{EF} \parallel \overline{SC}$ y como $BE = ES$
 $\Rightarrow \overline{EF}$ es base media
- Como $AC = 13 \Rightarrow SC = 8$
 $\therefore x = 4$

Clave C

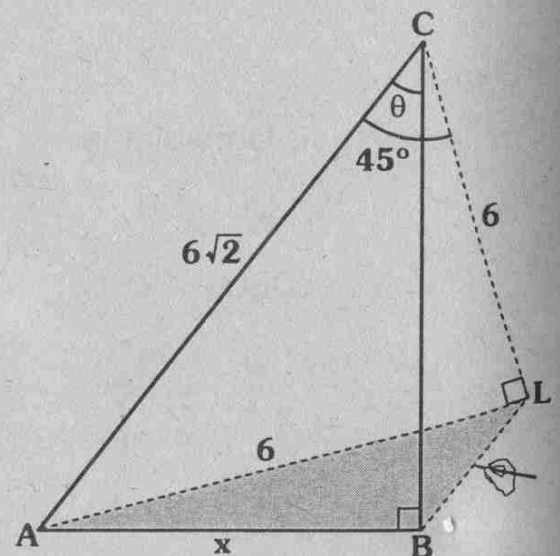
RESOLUCIÓN N° 35



- Piden x .
- Como $\overline{AH}$ es mediatriz de $\overline{BC}$
 $\Rightarrow AB = AC$, luego el $\triangle ABC$ es isósceles.
 $\Rightarrow \phi = 2x$
- En $\triangle AHC$: $x + 2x = 90^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 36



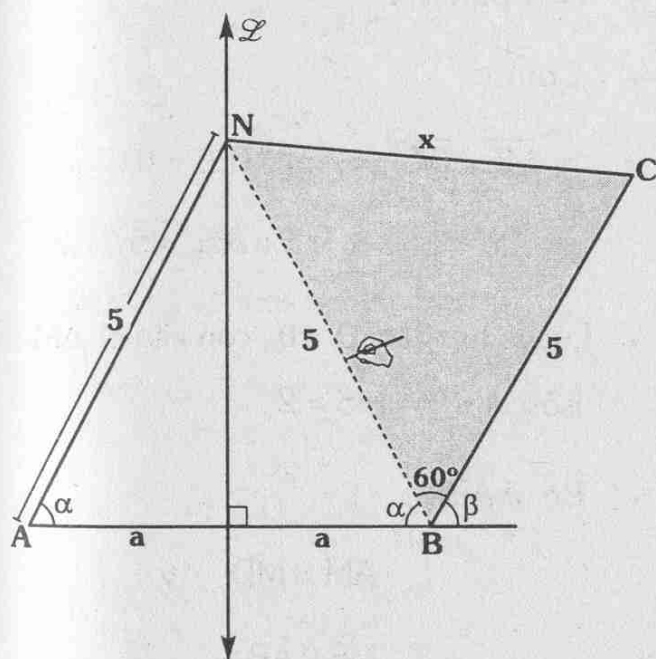
- Nos piden: el mayor valor entero de x .

- Como $\theta < 45^\circ$, ubicamos L en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.
- Tal que: $m\angle ACL = m\angle CAL = 45^\circ$
- $\triangle ALC$: notable de 45°
 $\Rightarrow AL = LC = 6$
- En $\triangle ALB$, como $m\angle ABL > 90^\circ$
 $\Rightarrow x < 6$

$$\therefore x_{\text{máx. entero}} = 5$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 37



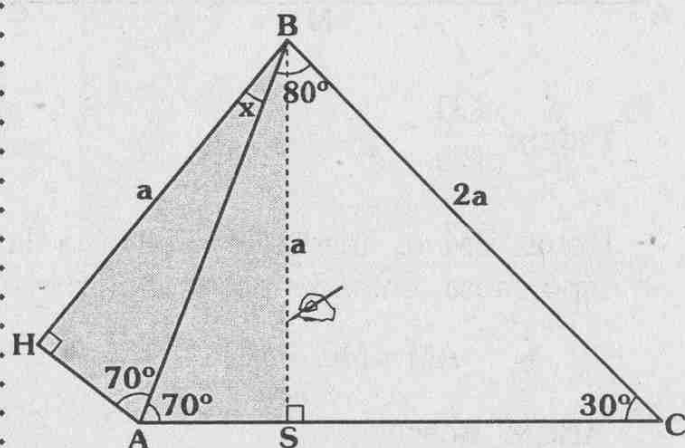
- Piden x .
- Dato: $\alpha + \beta = 120^\circ$ y $AN = BC = 5$
- Por teorema de la mediatriz:
 $AN = NB = 5$
- $\triangle ANB$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle NAB = m\angle ABN = \alpha$

- Luego: $m\angle NBC = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle NBC$ es equilátero

$$\therefore x = 5$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 38



- Piden x .
- Trazamos $\overline{BS} \perp \overline{AC}$ (S en $\overline{AC}$).
- $\triangle BSC$ notable de 30°
 $\Rightarrow BS = a$
- Como $BH = BS$, por el recíproco del teorema de la bisectriz.

$$m\angle SAB = m\angle HAB = 70^\circ$$

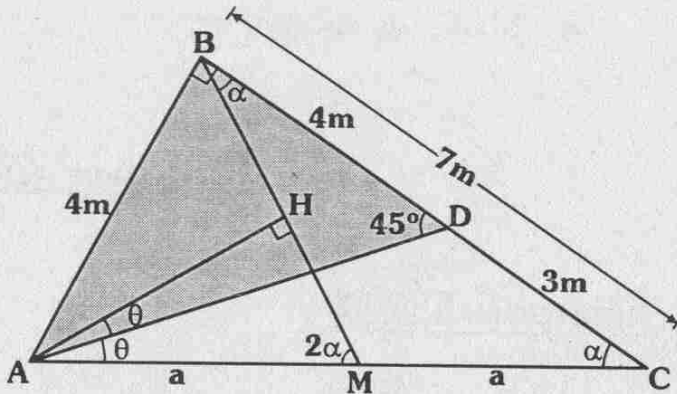
- En $\triangle AHB$:

$$x + 70^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 39



- Piden: $\frac{CD}{BD}$
- Como $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- $\triangle BCM$ isósceles
- $\angle AHM$: $2\alpha + 2\theta = 90^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 45^\circ$
- En $\triangle ADC$, por ángulo exterior:

$$m\angle ADB = \alpha + \theta = 45^\circ$$

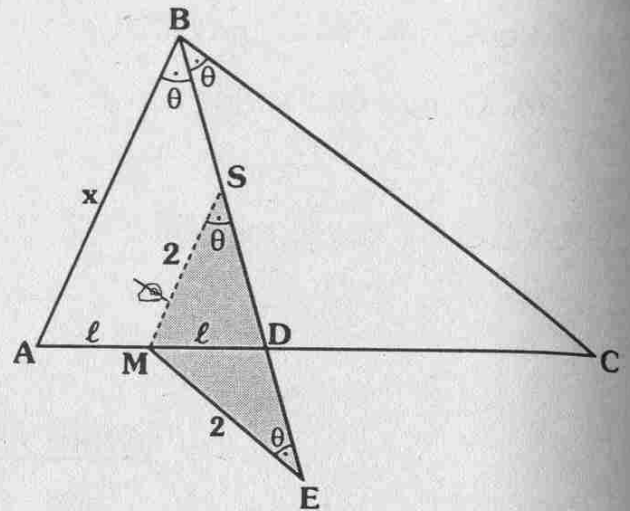
- $\angle ABD$: notable de 45° :
 $AB = BD = 4m$
 $\Rightarrow DC = 3m$

- Finalmente:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{3m}{4m} = \frac{3}{4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 40



- Nos piden x .
- Como:
- $\overline{ME} \parallel \overline{BC} \Rightarrow m\angle MEB = \theta$
- $AM = MD \Rightarrow$ se traza $\overline{MS} \parallel \overline{AB}$
- Luego: $m\angle MSD = \theta$, con ello el $\triangle MSE$ isósceles $\Rightarrow MS = 2$.
- En $\triangle ABD$:

$$AM = MD \quad y$$

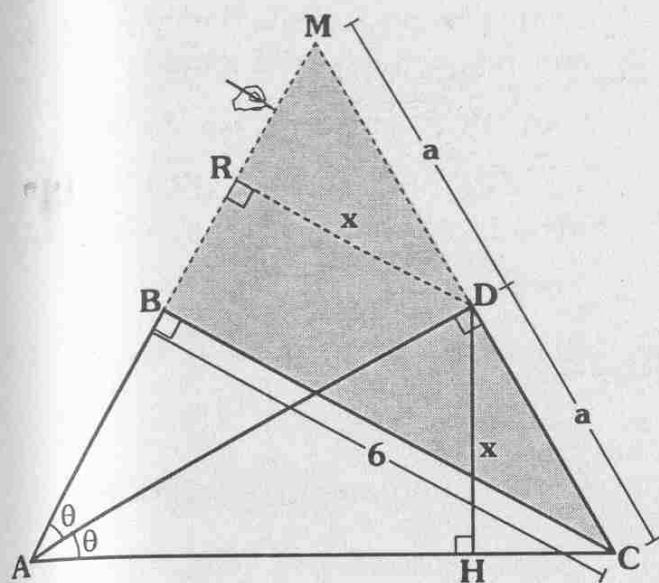
$$\overline{MS} \parallel \overline{AB}$$

$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, por teorema:

$$MS = \frac{AB}{2}$$

$$\therefore x = 4$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 41

- Piden **x**.
- Como $\overline{AD}$ es bisectriz del $\sphericalangle CAB$ y $m\angle ADC = 90^\circ$, nos conviene prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, pues así tendremos:

$\triangle MAC$ es isósceles, como $\overline{AD}$ es altura, también es mediana

$$\Rightarrow CD = DM$$

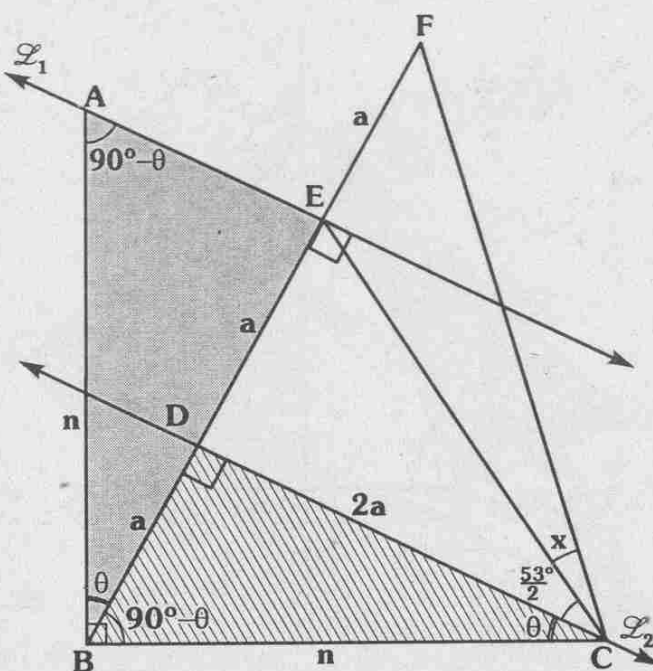
- Por teorema de la bisectriz:

$$DH = DR = x$$

- $\triangle MBC$: $\overline{DR}$ es base media

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\therefore x = 3$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 42**

- Piden $\mathbf{x}$.
- Como $\overrightarrow{\mathcal{L}}_1$ y $\overrightarrow{\mathcal{L}}_2$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente, entonces:

$$BD = DE = EF = a$$

- Como:

$$AB=BC \text{ y } m\angle ABC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AEB \cong \triangle BDC \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow DC = 2a$$

- Con ello:

$\triangle EDC$: notable de $53^\circ/2$

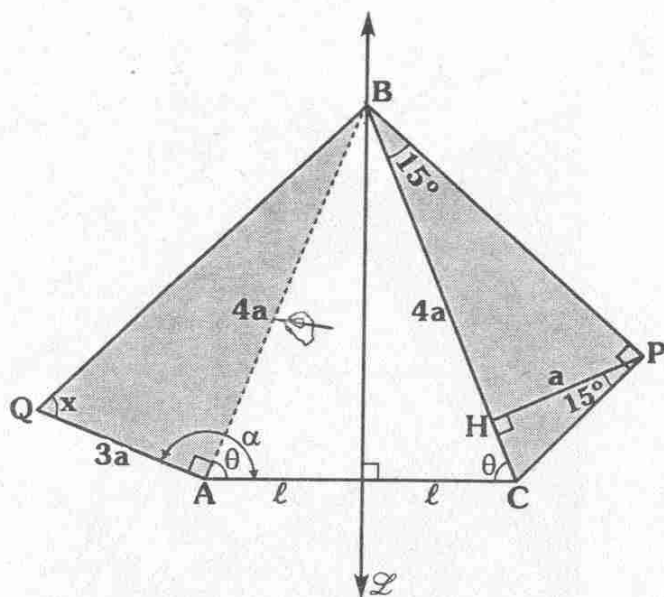
△FDC: notable de 45°

$$\Rightarrow x + \frac{53^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30'$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 43

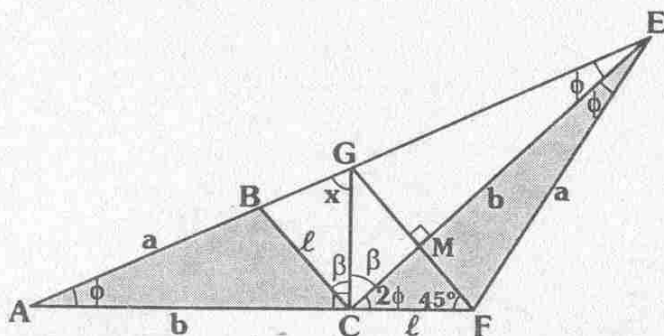


- Piden x .
- En $\triangle BPC$, por el teorema del triángulo de 15° y 75° :
 $BC = 4(PH) = 4a$
- Por teorema de la mediatriz:
 $BC = AB = 4a$
- Como $\alpha - \theta = 90^\circ \Rightarrow m\angle QAB = 90^\circ$
- En $\triangle QAB$: $QA = 3a$ y $AB = 4a$ entonces

$$x = 53^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 44



- Piden x .
- Tenemos por dato $\triangle ABC \cong \triangle EFC$, debemos reconocer que lados y ángulos son respectivamente iguales.

$$m\angle BCA = m\angle FCE \Rightarrow AB = EF$$

$CE \neq BC$, pues en el $\triangle BCE$, $\overline{CG}$ es bisectriz (si $CE = BC$, $x = 90^\circ$ pero $x \neq 90^\circ$)

- Ahora tenemos: $AC = CE$ y $BC = CF$
 $\Rightarrow \triangle ACE$: isósceles

De la congruencia: $m\angle CEF = \phi$

$\triangle GEF$: isósceles $\Rightarrow GM = MF$

$\Rightarrow \triangle GCF$: isósceles

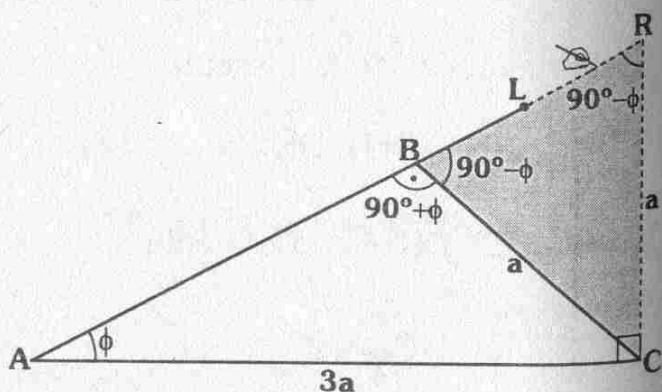
$$2\phi = 45^\circ \Rightarrow \phi = \frac{45^\circ}{2}$$

- En $\triangle ACG$: $x + \frac{45^\circ}{2} = 90^\circ$

$$\therefore x = 67^\circ 30'$$

Clave C

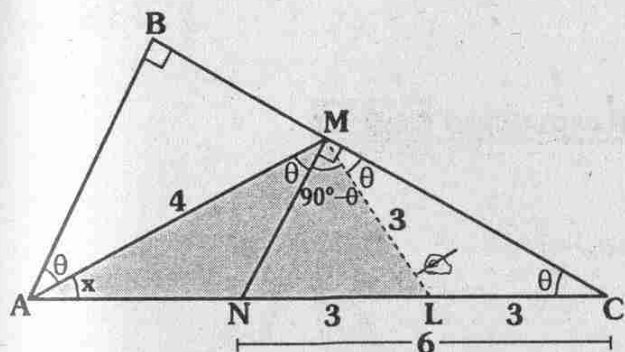
RESOLUCIÓN N° 45



- Piden: ϕ
- Al prolongar $\overline{AB}$ nos damos cuenta:
 $m\angle LBC = 90^\circ - \phi$

- Ahora tracemos $\overline{CR} \perp \overline{RA}$
- Pues: $m\angle BRC = 90^\circ - \phi$
- $\triangle BRC$: isósceles $\Rightarrow CB = CR$
- $\triangle ACR$: notable

$$\Rightarrow \phi = \frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30'$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 46**

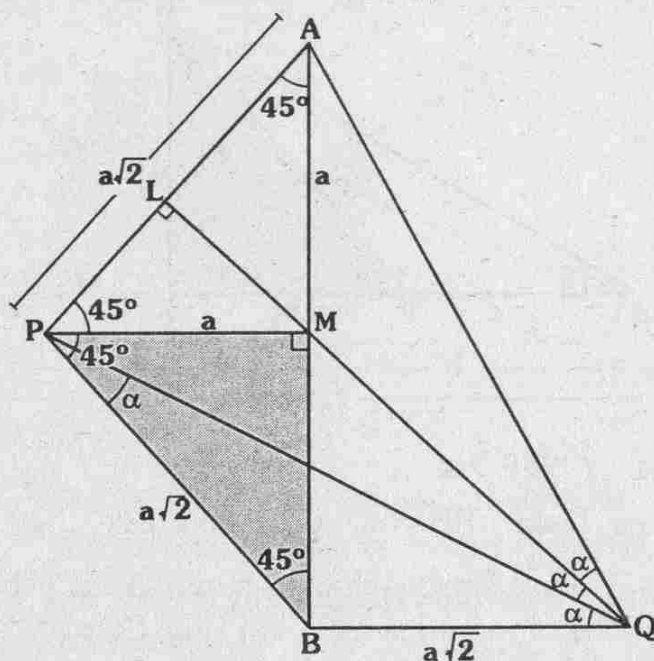
- Piden x .
- En $\triangle NMC$, se traza la mediana $\overline{ML}$, entonces por teorema:

$$NL = LC = LM = 3$$

- $\triangle LCM$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle LMC = \theta$
 $\Rightarrow m\angle LMA = 90^\circ$

- $\triangle AML$: notable

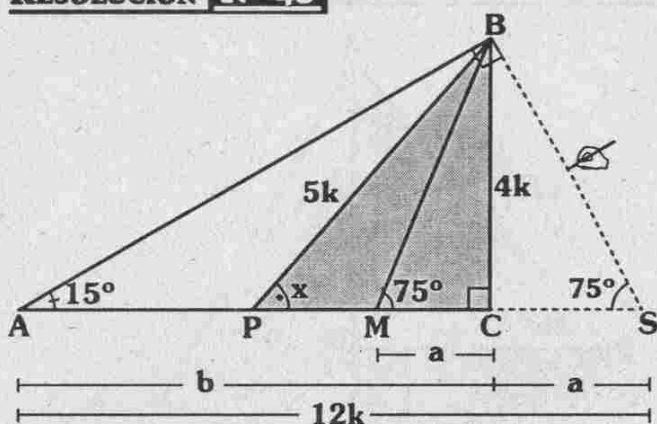
$$\therefore x = 37^\circ$$

Clave **B****RESOLUCIÓN N° 47**

- Piden: $\frac{BQ}{AP}$
- Por dato: $AM = MB$ y $PB = (AM)\sqrt{2}$
- $\triangle PQA$ es isósceles, pues $\overline{QL}$ es bisectriz y altura, entonces $MA = MP$.
- En $\triangle PMB$, como $PM = MB = a$ y $PB = a\sqrt{2} \Rightarrow m\angle PMB = 90^\circ$
- $\triangle PMA$: $AP = a\sqrt{2}$
- Como: $m\angle BPA = 90^\circ \Rightarrow \overline{BP} \parallel \overline{QL}$
 $\Rightarrow m\angle BPQ = \alpha$, luego el $\triangle PBQ$ es isósceles $\Rightarrow BQ = a\sqrt{2}$
- Finalmente: $\frac{BQ}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$

$$\therefore \frac{BQ}{AP} = 1$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 48

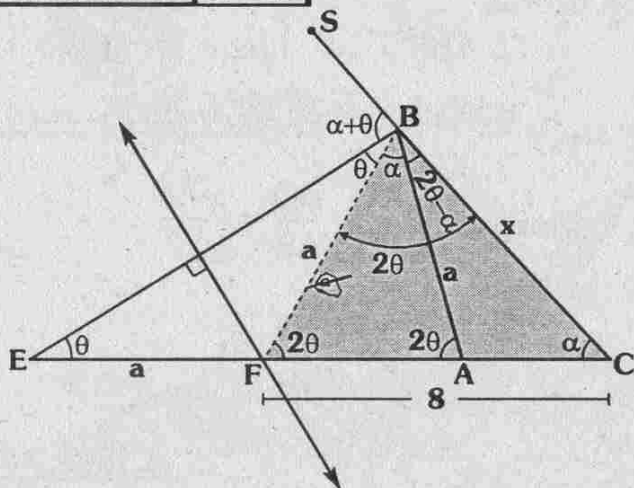
- Piden x .
- Dato: $PB=5k$ y $a+b=12k$
- Para aprovechar la suma de a y b , prolongamos $\overline{AC}$, tal que $CS=a$.

$$\Rightarrow AS = a + b = 12k$$
- $\triangle MBS$ isósceles $\Rightarrow m\angle CSB = 75^\circ$
- Luego: $m\angle SBA = 90^\circ$
- Por teorema del triángulo de 15° y 75° :

$$BC = \frac{AS}{4} \Rightarrow BC = 4k$$

- $\triangle PCB$: $PB=5k$ y $BC=4k$

$$\therefore x = 53^\circ$$

Clave **D****RESOLUCIÓN N° 49**

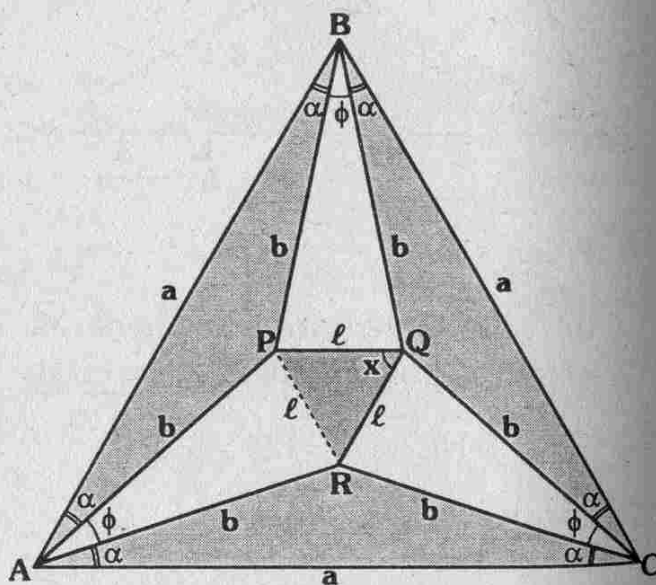
- Por teorema de la mediatriz $FA=FB$:
 $\Rightarrow \triangle AFB$ y $\triangle FBA$ son isósceles
- Como $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, entonces:

$$m\angle ABC = m\angle EBA = \alpha + \theta$$
- En $\triangle ABC$, por ángulo exterior:

$$m\angle ABC = 2\theta - \alpha$$
- Luego: $m\angle BFC = m\angle FBC = 2\theta$
 $\Rightarrow \triangle FBC$: isósceles

$$\therefore x = 8$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 50

- Piden $\mathbf{x}$.
- De los datos:

$$\triangle APB \cong \triangle BQC \cong \triangle ARC \text{ (LLL)}$$
- Luego:

$$m\angle RAP = m\angle PBQ = m\angle QRC = \phi$$
- Pues: $2\alpha + \phi = 60^\circ$

También: $\triangle PAR \cong \triangle PBQ \cong \triangle QCR$

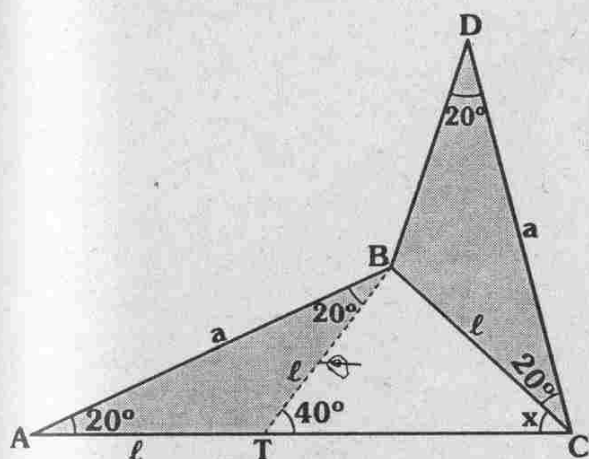
$$\Rightarrow PQ = QR = PR$$

$\Rightarrow \triangle PQR$: equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 51



Piden x .

Como:

$$AB = BC \text{ y } m\angle BAC = 20^\circ$$

busquemos la congruencia, para ello, trazamos $\overline{BT}$, de tal modo que:

$$m\angle TBA = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABT \cong \triangle DCB \text{ (ALA)}$$

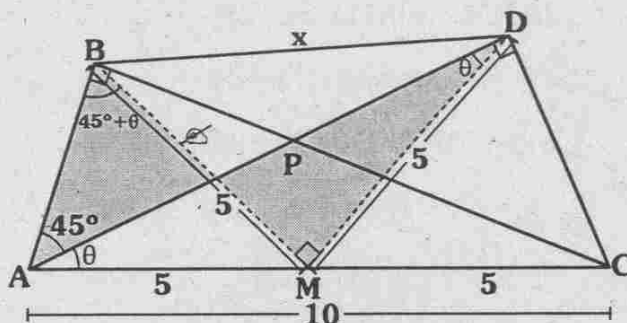
$$\Rightarrow AT = TB = BC = BD$$

Luego: $\triangle CBT$ es isósceles:

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 52



Piden x .

Como $\overline{AC}$ es hipotenusa para los triángulos ABC y ADC , se traza la mediana $\overline{BM}$ entonces $\overline{MD}$ también será mediana.

Por teorema:

$$AM = MC = BM = DM = 5$$

En la parte sombreada:

$$45^\circ + 45^\circ + \theta = m\angle BMD + \theta$$

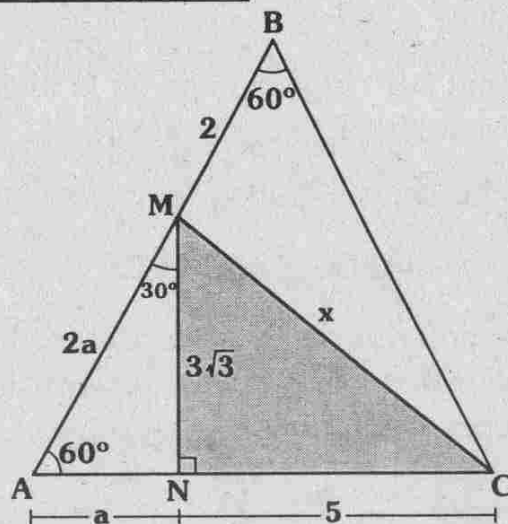
$$\Rightarrow m\angle BMD = 90^\circ$$

En $\triangle BMD$:

$$x = 5\sqrt{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 53



- Piden x .
- $\angle ANM$ notable de 30°
- Sea $AN=a \Rightarrow AM=2a$
- Como $\triangle ABC$ es equilátero:

$$2a+2=a+5$$

$$\Rightarrow a=3$$

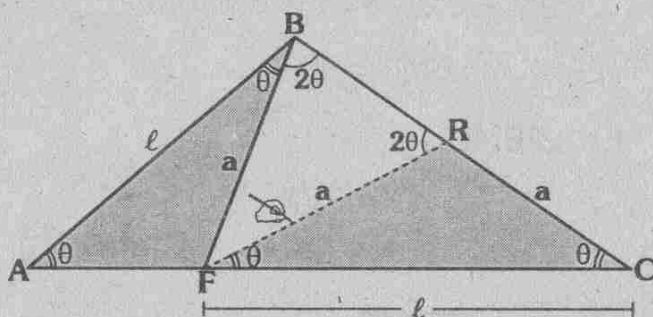
- En $\triangle ANM$: $MN=3\sqrt{3}$
- En $\triangle MNC$, por teorema de Pitágoras

$$x^2=5^2+(3\sqrt{3})^2$$

$$\therefore x=2\sqrt{13}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 54



- Piden: θ
- Como $AB=PC$, ello nos da la idea de buscar de alguna manera la $\cong$.
- También, del gráfico tenemos:

$$m\angle FBC = 2(m\angle FCB)$$

- Por criterios de construcción, se traza $\overline{FR}$ tal que $m\angle CFR = \theta$, entonces $\triangle FRC$ y $\triangle BRF$ son isósceles.

- Luego:

$$\triangle ABF \cong \triangle FCR \text{ (LAL)}$$

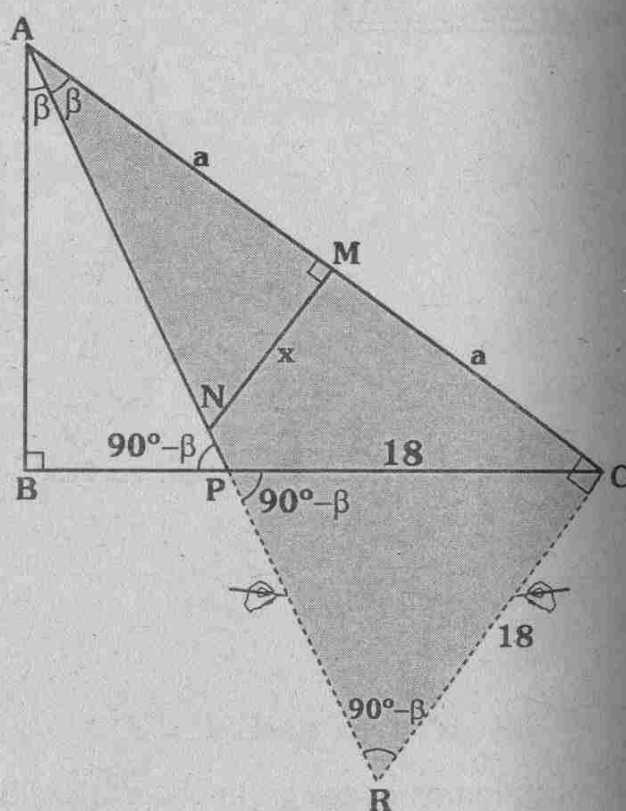
$$\Rightarrow m\angle BAF = \theta$$

$$\triangle ABC: \theta + 3\theta + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 36^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 55



- Piden: x
- Tenemos por dato que $AM=MC$, lo cual nos sugiere usar de alguna forma la base media.
- Para ello tracemos $\overline{CR} \parallel \overline{MN}$ y prolongamos $\overline{AP}$, luego tendremos:

$$m\angle CPR = m\angle CRP = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \triangle PCR: \text{isósceles} \Rightarrow RC = 18$$

• $\triangle ACR$: $\overline{NM}$ es base media

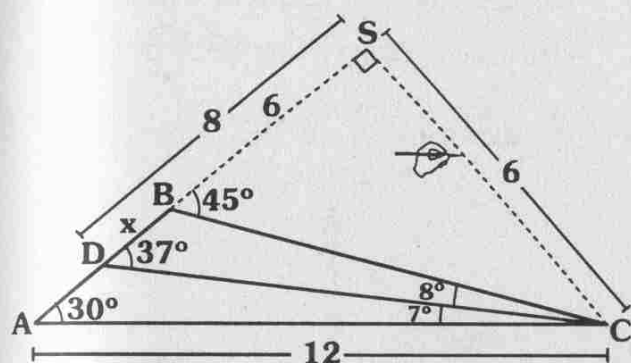
• Por teorema:

$$x = \frac{18}{2}$$

$$\therefore x = 9$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 56



• Piden x .

• Para aprovechar la presencia de los "ángulos", 30° , 37° y 45° prolonguemos $\overline{AB}$ y tracemos $\overline{CS} \perp \overline{AB}$.

• Luego:

$$\triangle ASC \text{ notable de } 30^\circ \Rightarrow CS = 6$$

$$\triangle BSC \text{ notable de } 45^\circ \Rightarrow BS = 6$$

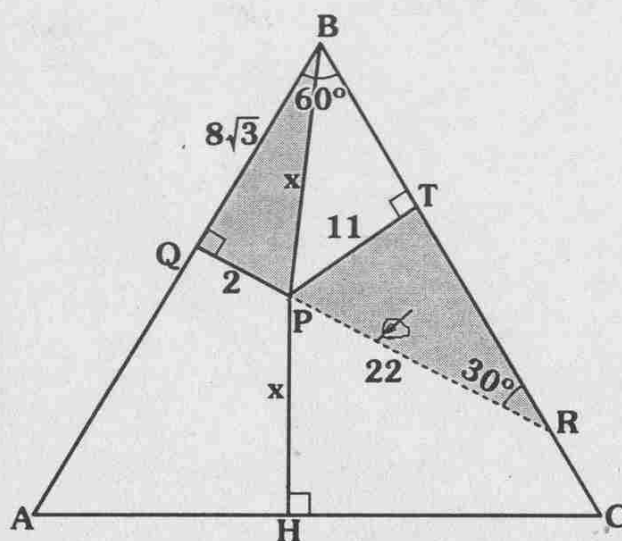
$$\triangle DSC \text{ notable de } 37^\circ \Rightarrow DS = 8$$

$$\Rightarrow x + 6 = 8$$

$$\therefore x = 2$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 57



• Piden x .

• Para aprovechar la presencia de los ángulos rectos y del " 60° ", prolonguemos $\overline{QP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en R .

• $\triangle PTR$: notable de 30°

$$\text{Como } PT = 11 \Rightarrow PR = 22$$

• $\triangle BQP$: notable de 30°

$$\text{Como } QR = 24 \Rightarrow QB = 8\sqrt{3}$$

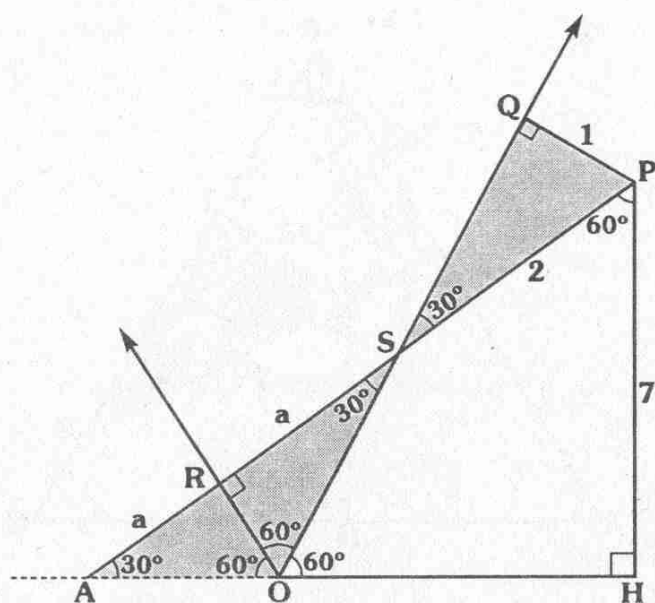
• En $\triangle PQB$:

$$x^2 = (8\sqrt{3})^2 + (2)^2$$

$$\therefore x = 14$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 58



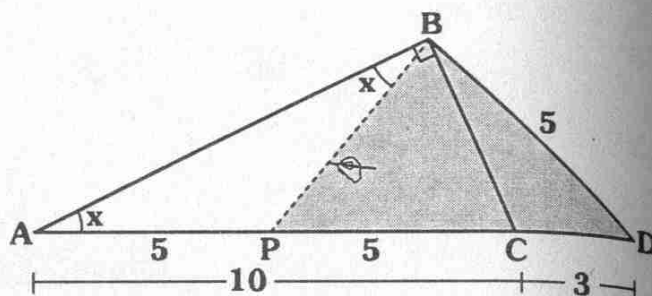
- Piden RP
- Al prolongar $\overline{HD}$ y $\overline{PR}$ se cortan en A
- $\triangle AOS$: isósceles $\Rightarrow AR = RS = a$
- $\triangle SQP$: notable de $30^\circ \Rightarrow PS = 2$
- Luego: $RP = a + 2$
- $\triangle AHP$: notable de 30°
 $\Rightarrow 2a + 2 = 14$
 $\Rightarrow a = 6$
- Finalmente:

$$RP = a + 2$$

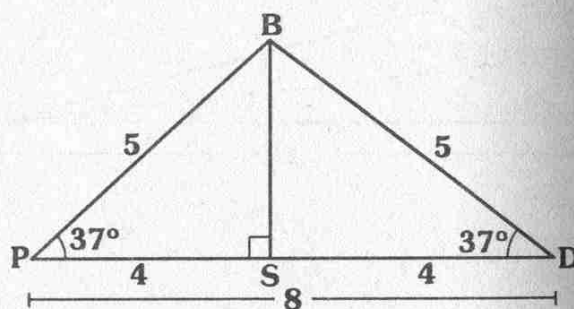
$$\therefore RP = 8$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 59



- Piden x .
- En $\triangle ABC$, se traza la mediana $\overline{BP}$, entonces $AP = PC = BP = 5$
- Analicemos el $\triangle PBD$:

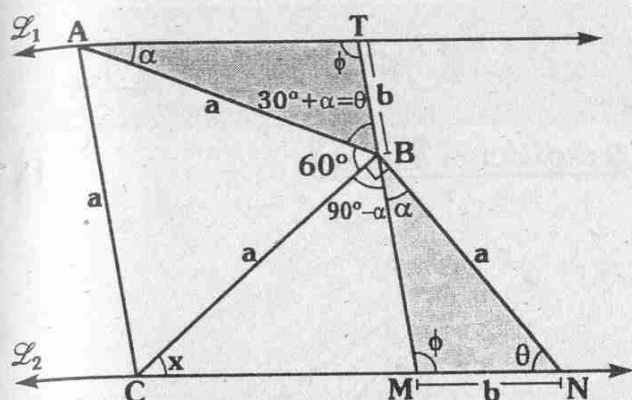


- Se traza la altura $\overline{BS}$
 $\Rightarrow PS = SD = 4$
- $\triangle PSD$ notable $\Rightarrow m\angle SPB = 37^\circ$
- En $\triangle APB$:

$$x + x = 37^\circ$$

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30'$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 60

• Piden x .

• Dato: $\theta - \alpha = 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ + \alpha$

$\triangle ABC$: equilátero

• En "B", notamos:

$$m\angle ABT = 30^\circ + \alpha \text{ y } m\angle ABC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ABM = \alpha$$

• Luego: $m\angle MBN = \alpha$

• Como:

$$\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \Rightarrow m\angle ATB = m\angle BMN = \phi$$

$$\triangle ATB \cong \triangle DMN \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow BN = a$$

• $\angle CBN$: notable

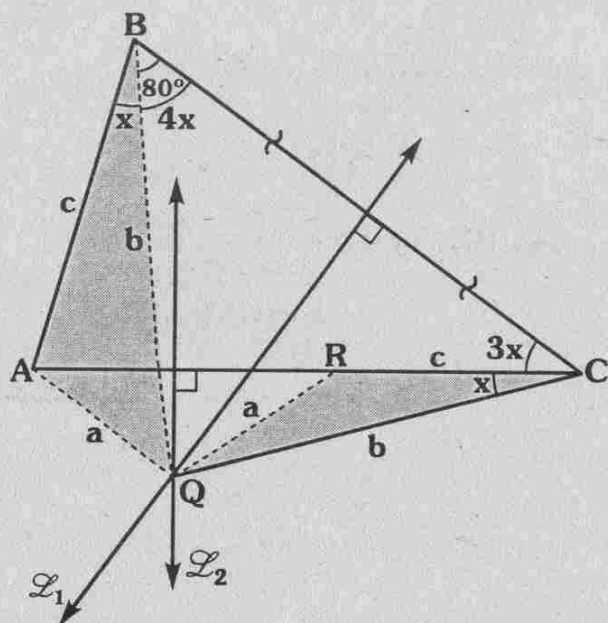
$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave B



Solucionario

Ciclo **Cepre-Uni**

RESOLUCIÓN N° 61

- Piden $\mathbf{x}$.
 - Como:
- $\overline{\mathcal{L}}_1$ es mediatriz de $\overline{BC} \Rightarrow QC = QB$
- $\overline{\mathcal{L}}_2$ es mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow QA = QR$

$$\triangle QAB \cong \triangle QRC \text{ (LLL)}$$

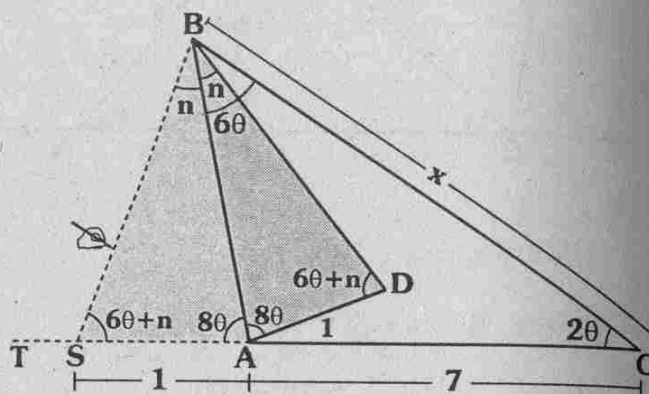
$$\Rightarrow m\angle RCQ = m\angle ABQ = x$$

- En "B":

$$4x + x = 80^\circ$$

$$\therefore x = 16^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 62

- Piden $\mathbf{x}$.
- Al prolongar $\overline{CA}$, por ángulo exterior tenemos:

$$m\angle BAD = 80$$

- Como $\overline{AB}$ es bisectriz del $\angle TAD$, por los criterios de trazos auxiliares (pág. 56)

- Nos conviene trazar $\overline{BS}$, tal que:

$$m \triangleleft_{\text{ABS}} n$$

$$\Rightarrow \triangle SAB \cong \triangle DAB (ALA)$$

$$\Rightarrow SA = 1 \quad y \quad m_{ASB} = 6\theta + n$$

- Notamos ahora:

$$m \angle CSB = m \angle SBC = 60 + n$$

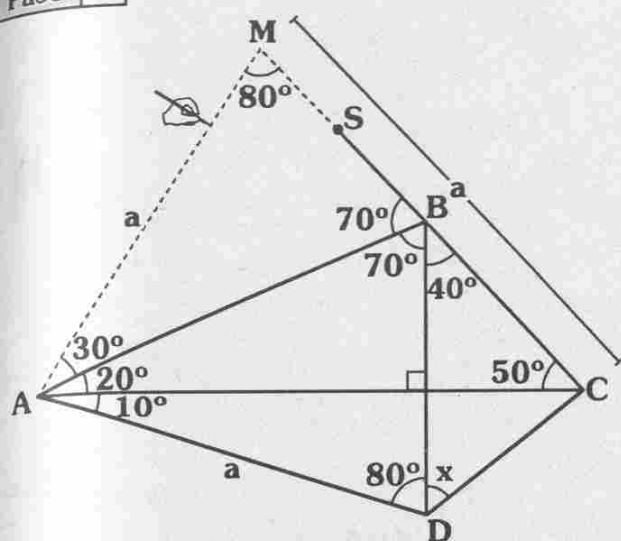
- ΔSBC : isósceles

$$\therefore x = 8$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 63

Paso 1

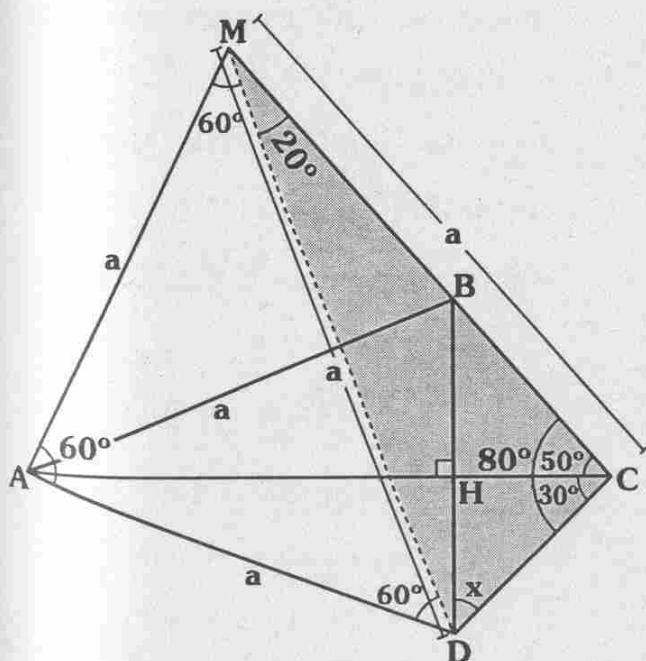


- Al prolongar $\overline{CB}$, nos damos cuenta que: $m\angle SBA = m\angle ABD = 70^\circ$
- Lo cual nos sugiere trazar $\overline{AM}$, tal que $m\angle MAB = 30^\circ$, pues así:

$$\triangle MAB \cong \triangle DAB \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow AM = AD$$

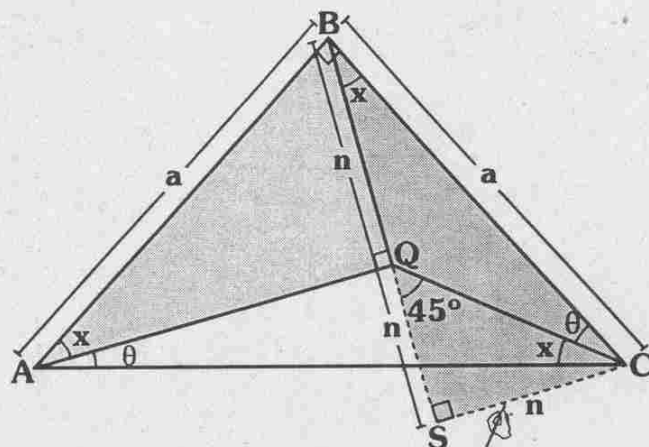
Paso 2



- Trazamos $\overline{DM}$, pues el $\triangle AMD$ resulta ser equilátero:
 $\Rightarrow DM = a$ y $m\angle DMC = 20^\circ$
- $\triangle DMC$: isósceles $\Rightarrow m\angle MCD = 80^\circ$
 $\Rightarrow m\angle ACD = 30^\circ$
- $\triangle DHC$: $x + 30^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 64



- Piden θ
- Por dato:
 $m\angle BAQ = m\angle QBC = m\angle QCA = x$
 $\Rightarrow m\angle ABQ = 90^\circ - x \Rightarrow m\angle AQB = 90^\circ$
y como $AB = BC$, el gráfico nos sugiere prolongar $\overline{BQ}$ y trazar $\overline{CS} \perp \overline{BQ}$, pues:
 $\triangle AQB \cong \triangle BSC$
- Como:
 $x + \theta = 45^\circ \Rightarrow m\angle CQS = 45^\circ$
- $\triangle QSC$: $QS = SC = n$

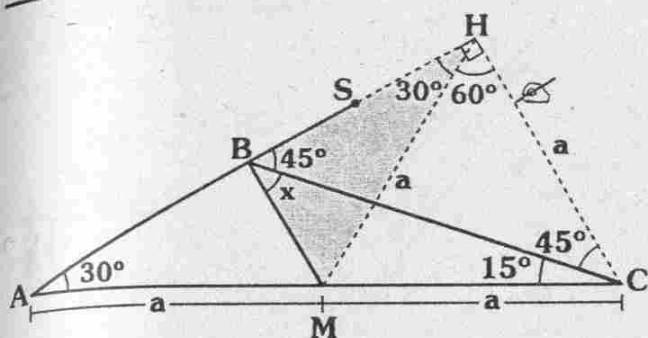
- $$x = \frac{53^\circ}{2} \Rightarrow \theta = \frac{37^\circ}{2}$$

-

-

- Clave
- A

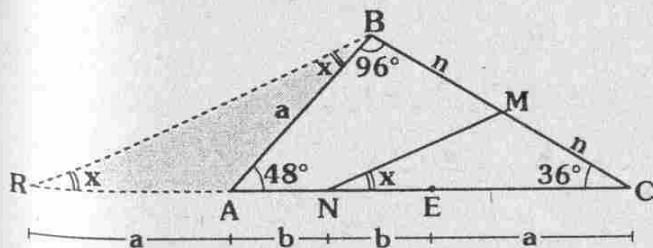
RESOLUCIÓN N° 68



- Piden x .
- Al prolongar $\overline{AB}$ verificamos:
 $m\angle CBS = 45^\circ$
- Para aprovechar la presencia del 30° y 45° , trazamos $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.
 $\Rightarrow \triangle AHC$ y $\triangle BHC$ son notables
 $\triangle AHC$: $AC = 2(HC) \Rightarrow HC = a$
 $\triangle BHC$: $BH = HC = a$
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $HM = a$
- $\triangle MBH$: isósceles
- Como $m\angle BHM = 30^\circ \Rightarrow m\angle HBM = 75^\circ$
 $\Rightarrow x + 45^\circ = 75^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 69



- Piden x .

- Como $BM = MC$, busquemos otro punto medio, para ello prolonguemos $\overline{CA}$ hasta R tal que:

$$AR = a \Rightarrow RN = NC$$

- En $\triangle RCB$, notamos que $\overline{NM}$ es base media, entonces:

$$\overline{RB} \parallel \overline{NM} \Rightarrow m\angle BRC = x$$

- $\triangle RAB$: isósceles $\Rightarrow m\angle RBA = x$
- $\triangle BAR$: $x + x = 48^\circ$

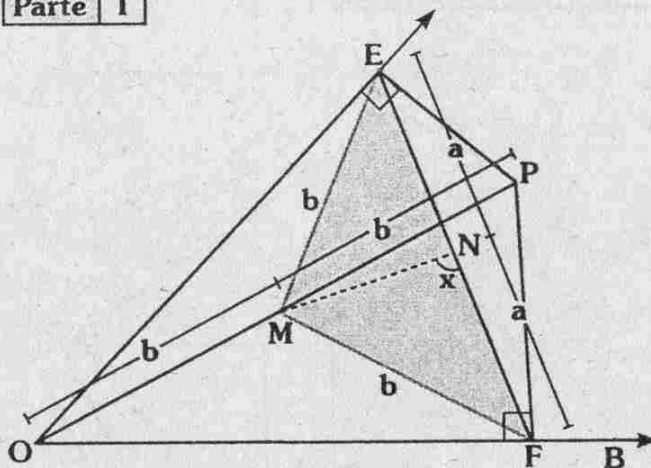
$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave A

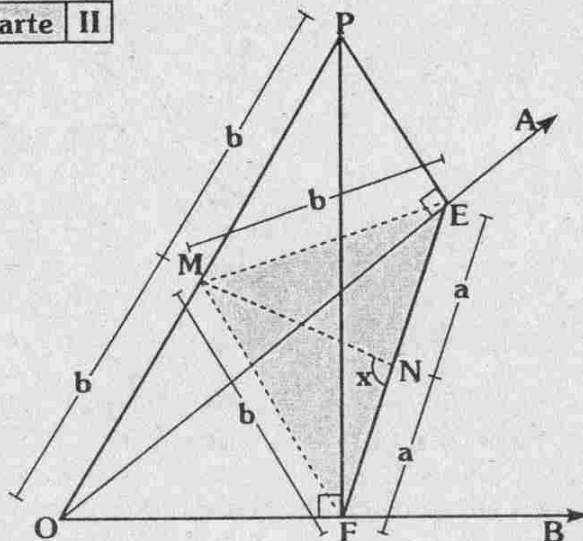
RESOLUCIÓN N° 70

Se presentan dos posibilidades:

Parte I



Parte II



- Para ambos gráficos, como $\overline{OP}$ es hipotenusa común para los triángulos OEP y OFP , ubicamos M punto medio de $\overline{OP}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa.

$$ME = MF = \frac{OP}{2} = b$$

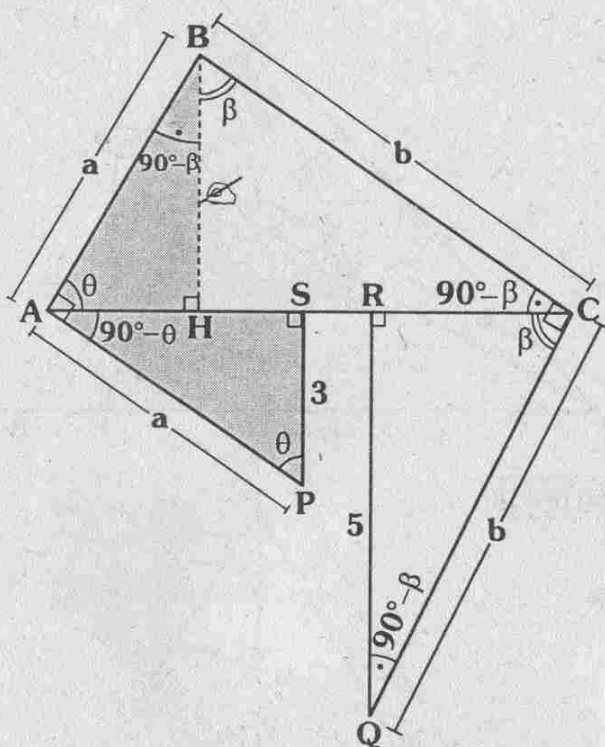
- $\triangle FME$: isósceles

Como $EN = NF \Rightarrow \overline{MN}$ es mediana y altura

$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{MN} \perp \overline{BF}$$

RESOLUCIÓN N° 71



- Nos piden AC .
- Nos conviene trazar BH , pues al completar ángulos, verificamos:
- $\angle PAS \cong \angle ABH$ (ALA) $\Rightarrow AH = 3$

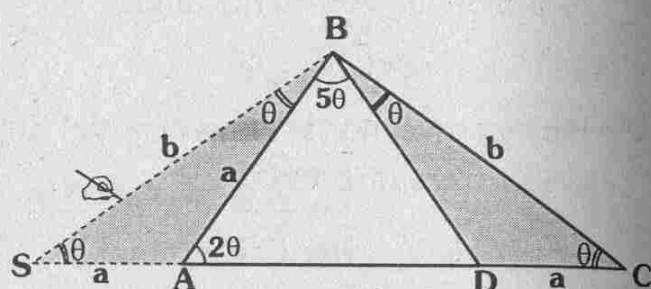
$$\angle BCH \cong \angle CQP \text{ (ALA)} \Rightarrow HC = 5$$

$$\Rightarrow AC = AH + HC$$

$$\therefore AC = 8$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 72



- Nos piden θ
- Como $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$, por los criterios de trazos auxiliares, se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S", tal que:

$$m\angle ASB = \theta$$

$$\Rightarrow \triangle ASB \text{ y } \triangle BDC \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AS = AB = a \text{ y } SB = BC = c$$

- Luego:

$$\triangle BSA \cong \triangle BCD \text{ (LAL)}$$

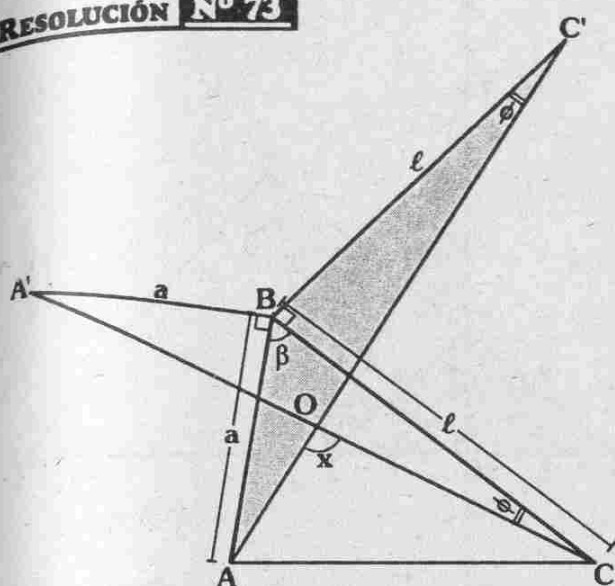
$$\Rightarrow m\angle DBC = \theta$$

$$\triangle ABC: 9\theta = 180^\circ$$

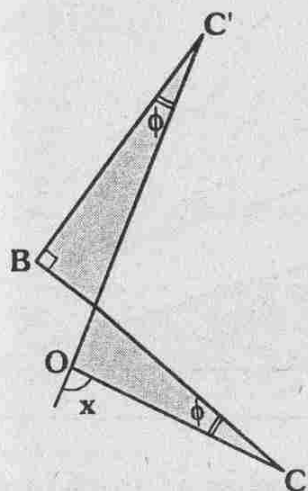
$$\therefore \theta = 20^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 73



- Piden x .
- De acuerdo al gráfico, sea $m\angle ABC = \beta$
 $\Rightarrow \triangle A'BC \cong \triangle ABC'$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BC'A = m\angle BCA' = \phi$
- Analizando parte del gráfico:



Por teorema:

$$m\angle C'OC + \phi = 90^\circ + \phi$$

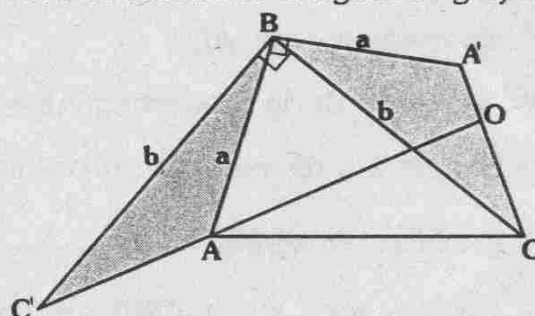
$$\Rightarrow m\angle C'OC = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave C

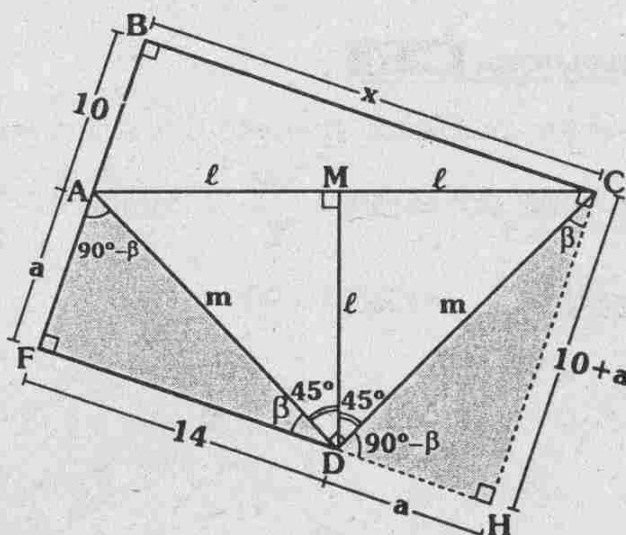
Observación

• Si consideramos el siguiente gráfico:



• También se demuestra $m\angle AOC = 90^\circ$ lo cual queda como ejercicio para el lector.

RESOLUCIÓN N° 74

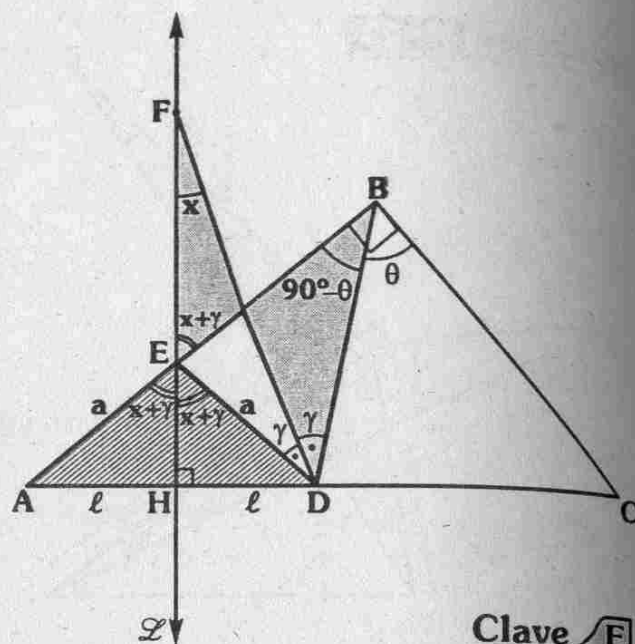


- Nos piden x .
- Como: $AM = MD = MC \Rightarrow m\angle ADC = 90^\circ$
y $AD = DC$
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{FD}$ ($H \in \overline{FD}$)
- Como: $\overline{BC} \parallel \overline{FH}$ y $\overline{FB} \parallel \overline{HC}$
 $\Rightarrow x = 14 + a$ y $HC = 10 + a$
- $\triangle AFB \cong \triangle DHC$ (ALA)
 $\Rightarrow 10 + a = 14 \Rightarrow a = 4$
 $\therefore x = 18$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 75

- Piden x en función de θ .
- $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.
- Por teorema de la mediatriz: $AE = ED$
 $\Rightarrow \overline{EH}$ es altura, mediana y bisectriz.
 $\Rightarrow m\angle AEH = m\angle HED = x + \gamma$
- En $\triangle$: $x + x + \gamma = \gamma + 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow x = 45^\circ - \frac{\theta}{2}$

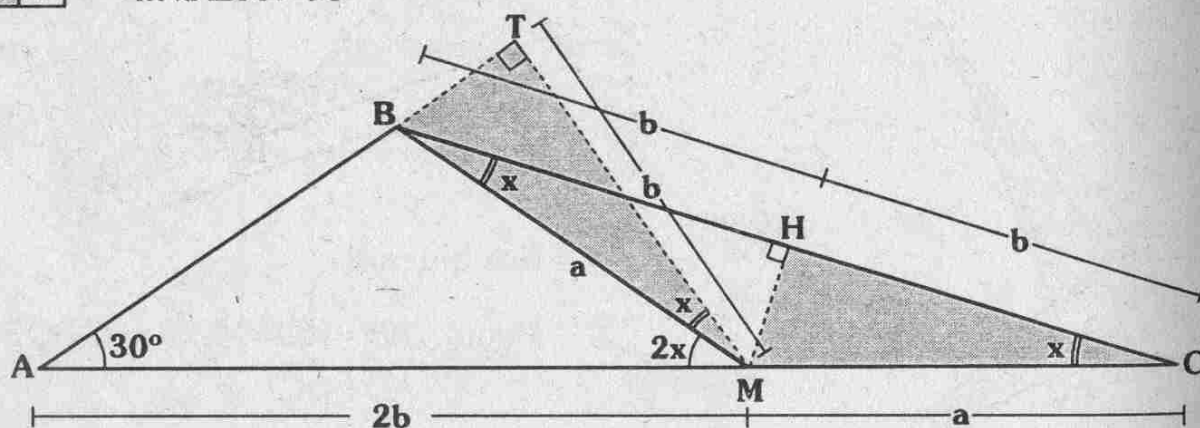


Clave E

RESOLUCIÓN N° 76

- Este problema presenta dos soluciones. Notemos primero: $m\angle ABM \neq 90^\circ$, pues si fuera $90^\circ \Rightarrow BM = \frac{AM}{2}$ y como $BC = BM + MC$ (absurdo).

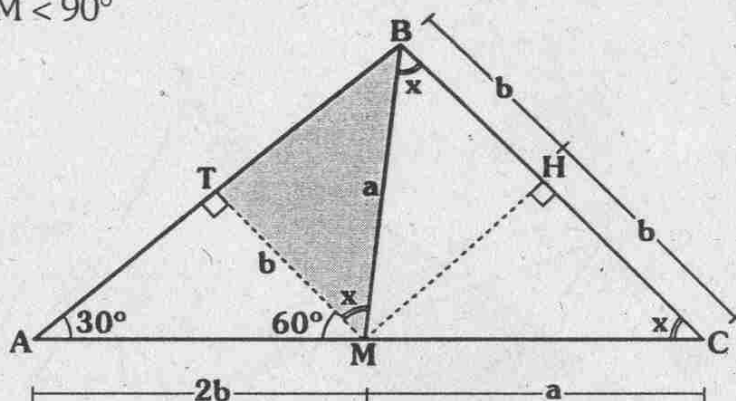
Caso 1 $m\angle ABM > 90^\circ$



- Como $m\angle ABM > 90^\circ$ Al trazar $\overline{MT} \perp \overline{AB}$ para aprovechar la medida de 30° , T estará en la prolongación de $\overline{AB}$.
- $\triangle ATM$: notable de $30^\circ \Rightarrow$ Si $AM = 2b \Rightarrow MT = b$
- $\triangle BMC$: isósceles $\Rightarrow$ al trazar la altura MN
- Se tendrá $BH = HC = b$
- $\triangle BMT \cong \triangle MHC \Rightarrow m\angle BMT = m\angle MCH = x$
- Luego: $3x = 60^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$

Caso 2

$m\angle ABM < 90^\circ$



- En este caso la altura trazada de M está en la parte interna del $\triangle AMB$.
- Análogamente: $\triangle TMB \cong \triangle HCM \Rightarrow m\angle TMB = x$
- En $\triangle MBC$: $x + x = 60^\circ + x$
 $\therefore x = 60^\circ$
- De ambos casos, tendríamos: $x = 20^\circ$ ó $x = 60^\circ$
- Sólo aparece en las claves: 20° .

Clave A**RESOLUCIÓN N° 77**

- Piden x , en función de β y α .
- Como $\overline{\mathcal{L}}_1$ y $\overline{\mathcal{L}}_2$ son mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ respectivamente por teorema:

$$RB = RC \text{ y } RA = RP$$

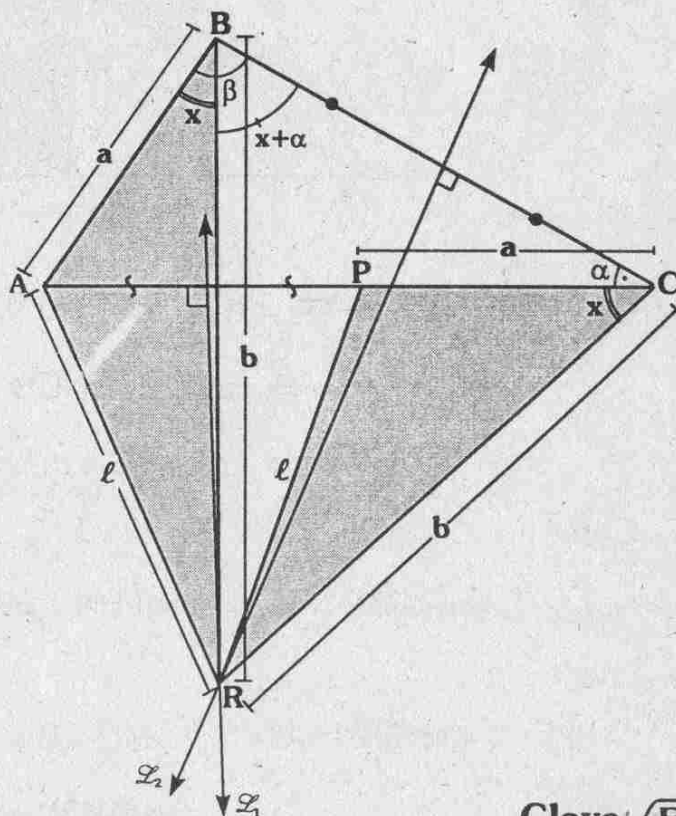
$$\Rightarrow \triangle ABR \cong \triangle PCR \text{ (LLL)}$$

$$\Rightarrow m\angle ABR = x$$

- $\triangle RBC$: isósceles $\Rightarrow m\angle RBC = x + \alpha$

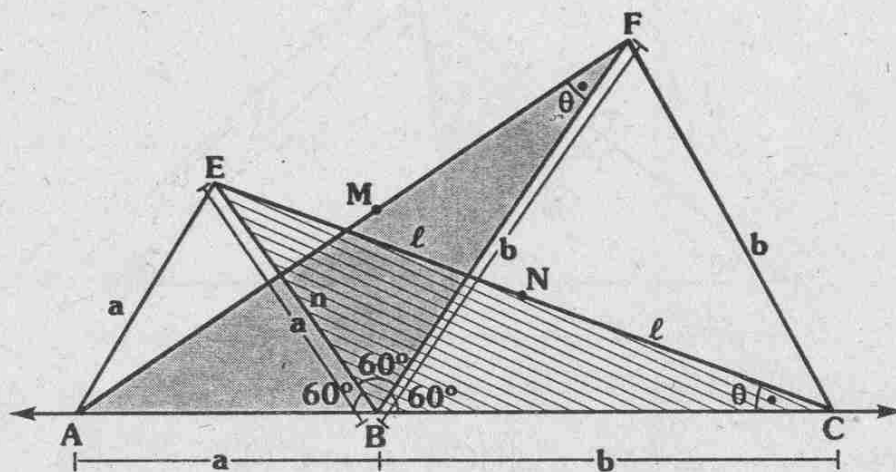
$$\Rightarrow x + x + \alpha = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

**Clave E**

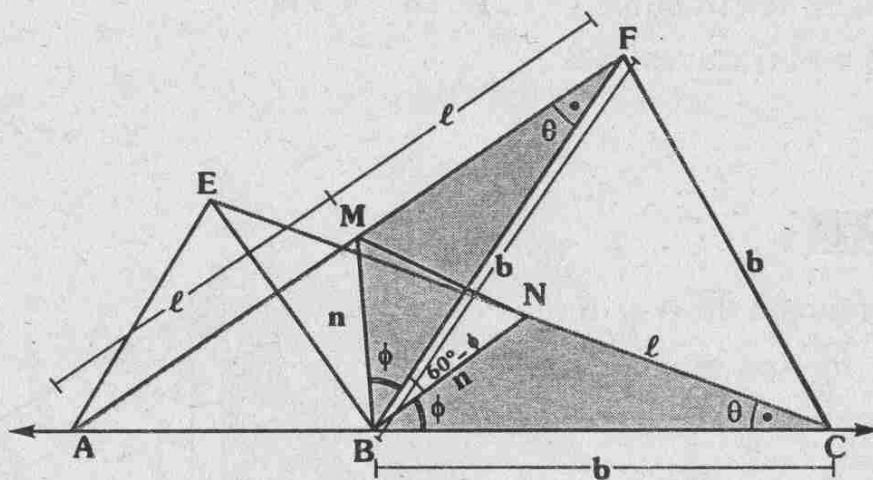
RESOLUCIÓN N° 78

Paso 1



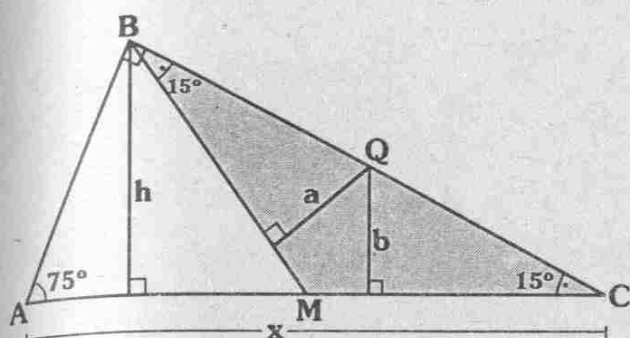
- $\triangle ABF \cong \triangle EBC$ (LAL) $\Rightarrow AF = EC = 2l$ y $m\angle AFB = m\angle ECB = \theta$

Paso 2



- Como $AF = EC \Rightarrow MF = NC$ y $m\angle MFB = m\angle NCB$
 $\Rightarrow \triangle MFB \cong \triangle NCB$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle NBC = m\angle MBF = \phi$ y $MB = NB$
- Como :
 $m\angle FBC = 60^\circ \Rightarrow m\angle FBN = 60^\circ - \phi$
- Luego:
 $m\angle MBN = 60^\circ$ y $MB = NB$
 $\therefore \triangle MBN$ es equilátero.

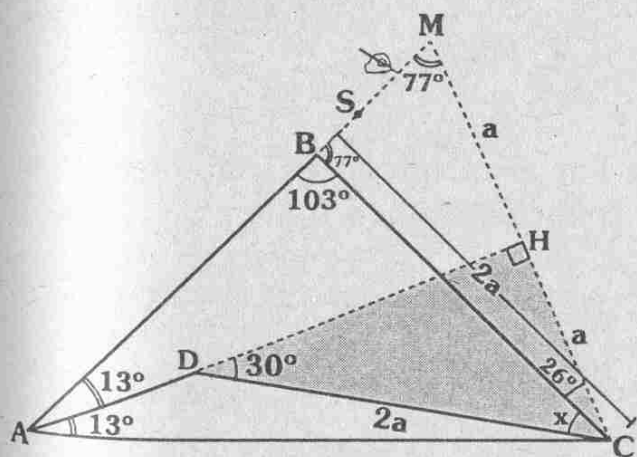
RESOLUCIÓN N° 79



- Piden x .
- Como $\overline{BM}$ es mediana del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow BM = AC = MC$
- $\triangle BMC$ isósceles, por teorema (pág. 39 - 40)
 $\Rightarrow h = a + b$
- Por teorema del triángulo de 15° :
 $x = 4h$
 $\therefore x = 4(a + b)$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 80

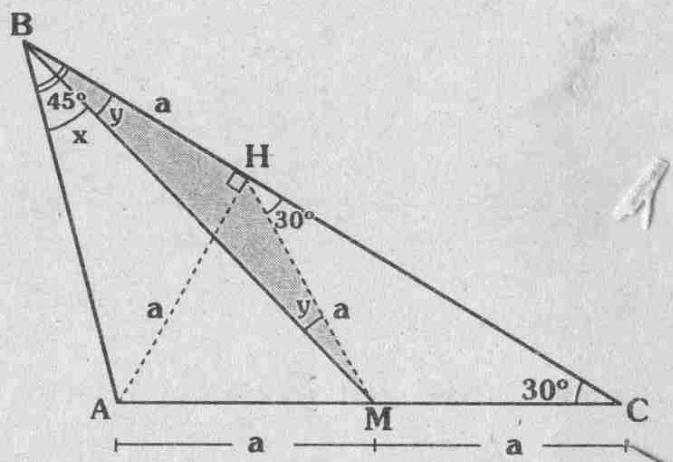


- Piden x .
- $m\angle SBC = 90^\circ - \alpha$ y $m\angle BAC = 2\alpha$;
para $\alpha = 13^\circ$

- De acuerdo a los criterios de construcción trazamos $\overline{CM}$, tal que $M \in \overline{AB}$ y $m\angle AMC = 77^\circ$, con ello $\triangle AMC$ y $\triangle BMC$ son isósceles.
- $\triangle AMC$: $\overline{AH}$ es bisectriz, altura y mediana, entonces $MH = MC = a$
- $\triangle BMC$: isósceles $\Rightarrow BC = MC = 2a$
- Como:
 $CD = 2a \Rightarrow \angle DHC$: notable de 30°
 $\Rightarrow x + 26^\circ = 60^\circ$
 $\therefore x = 34^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 81



- Piden x
- Dato $AM = MC$
- Se traza la altura $\overline{AH}$ del triángulo ABC .
- Luego reconocemos que los $\angle_s$ AHB y AHC son notables de 45° y 30° respectivamente.

• Como:

$$AM = MC \Rightarrow AH = a \text{ y } BH = a$$

• En $\triangle AHC$: $HM = a$

• $\triangle BHM$: isósceles

$$\Rightarrow y + y = 30^\circ$$

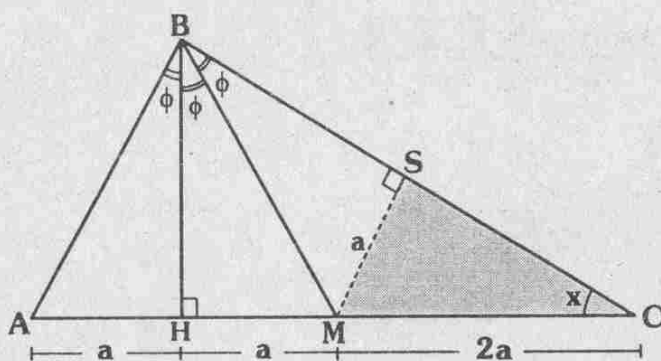
$$y = 15$$

• Como: $x + y = 45^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 82



• Piden: x

• En el $\triangle ABM$, $\overline{BH}$ es altura y bisectriz

$\Rightarrow \triangle ABM$: isósceles, $\overline{BH}$ también es mediana $\Rightarrow AH = HM$

• Como $\overline{BM}$ es bisectriz del $\angle HBS$ entonces por teorema:

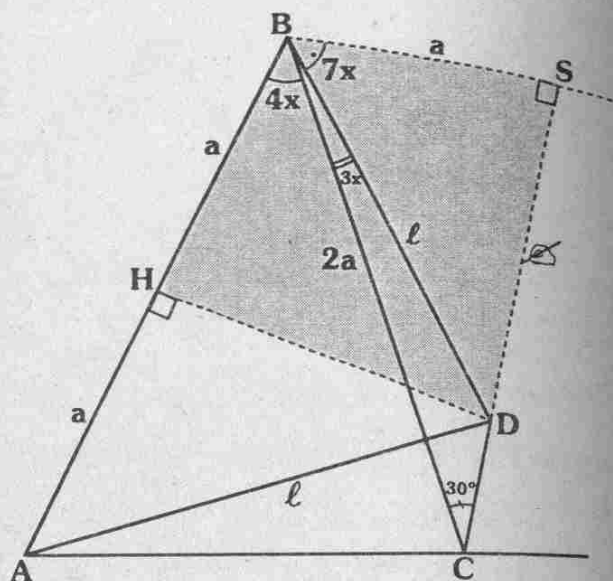
$$\Rightarrow MH = MS = a$$

• $\triangle MSC$ notable

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 83



• Piden: $m\angle ABC = 4x$

• Como $\triangle ABC$ es isósceles, trazamos la altura $\overline{DH}$, la cual también es mediana

$$\Rightarrow BH = HA = a$$

• Se traza $\overline{BS} \perp \overline{CD}$ (S en $\overline{CD}$)

• $\triangle CBS$ notable de 30°

$$\Rightarrow BS = \frac{BC}{2} = a$$

• Por el recíproco del teorema de la bisectriz, debido a que:

$$BH = BS \Rightarrow m\angle DBS = 7x$$

• $\triangle CSB$:

$$3x + 7x = 60^\circ \Rightarrow x = 6^\circ$$

$$\therefore m\angle ABC = 24^\circ$$

Clave D

Diagram of a triangle ABC with a shaded triangle MDC . Point D is on AB , and point M is on AC . The line segment MD is dashed. The lengths are labeled as follows: $AD = a$, $DB = a$, $MC = b$, $CB = b$, $MD = l$, and $DC = l$. The angles are labeled as follows: $\angle MDC = 3x$, $\angle DCB = 3x$, and $\angle BCD = 2x$. A vertical line segment of length $2l$ is shown to the right of the triangle.

- $$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} = \ell \quad y \quad \overline{MD} \parallel \overline{CB}$$

- $$\therefore x = 22,5^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 85

The diagram illustrates a geometric problem involving a triangle ABC . The base AC is horizontal and has a midpoint R , where a vertical line segment represents the perpendicular bisector (Mediatriz) of $\overline{AC}$. An altitude BH is drawn from vertex B to the base line, meeting it at H . A median AT is drawn from vertex A to the opposite side BC , intersecting the altitude BH at point T . Several points and segments are labeled:

- k_1 : Length of side AB .
- k_2 : Length of altitude BH .
- b : Length of segment BT .
- b' : Length of segment TR .
- a : Length of segment BR .
- a' : Length of segment RT .
- n : Length of segments AR and RC , representing half the length of the base AC .
- θ : Angle between AB and BH , and also between BH and BT .

- $$\therefore \text{BC} = k_1 + 2k_2$$

Clave  C

- Al ubicar "F" punto medio de $\overline{AC}$, tendremos:

- $\triangle AEC$: $\overline{MP}$ es base media:

$$\Rightarrow MF = 9 \quad \text{y} \quad \overline{MF} \parallel \overline{EC}$$

- $\triangle ABC$: $\overline{NF}$ es base media:

$$\Rightarrow NF = 9 \quad \text{y} \quad \overline{NP} \parallel \overline{BA}$$

- Como: $\overline{MF} \parallel \overline{EC}$ y

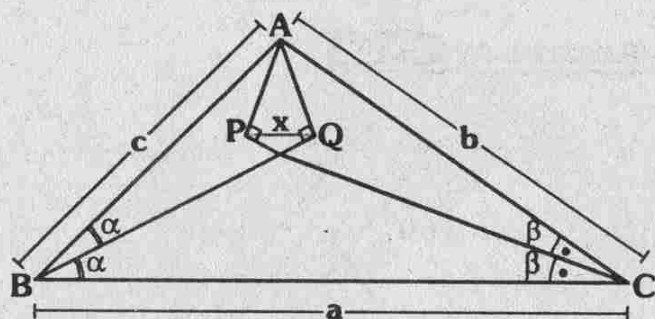
$$\overline{NP} \parallel \overline{BA} \Rightarrow m\angle MFN = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MFN \text{ es equilátero}$$

$$\therefore x = 9$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 87



- Sea p: semiperímetro del $\triangle ABC$:

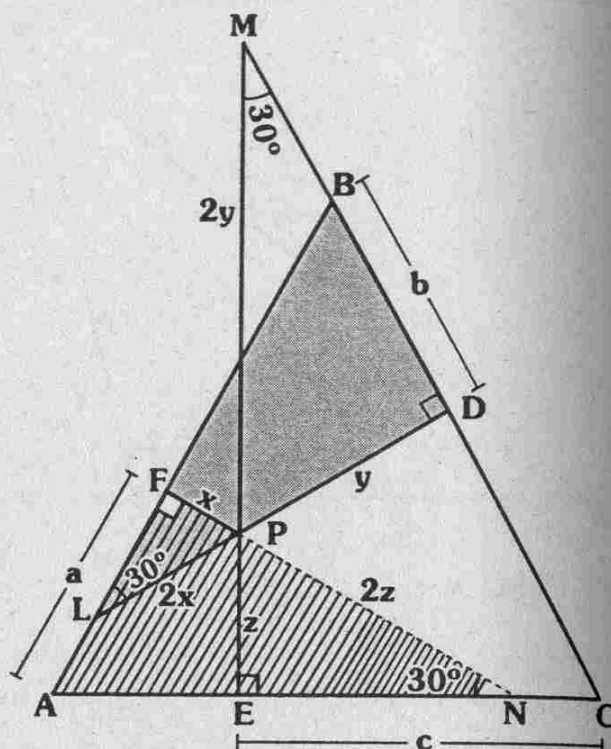
$$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Por teorema (pág. 40)

$$x = p - a$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 88



- Piden: $\frac{x+y+z}{a+b+c}$

- $\triangle LFP$, $\triangle PEN$ y $\triangle PDM$ notables de 30° , entonces:

$$NP = 2z \quad ; \quad LP = 2x \quad \text{y} \quad PM = 2y$$

- $\triangle AFN$, $\triangle LDB$ y $\triangle MEC$

$$2z + x = a\sqrt{3} \quad \dots (I)$$

$$2x + y = b\sqrt{3} \quad \dots (II)$$

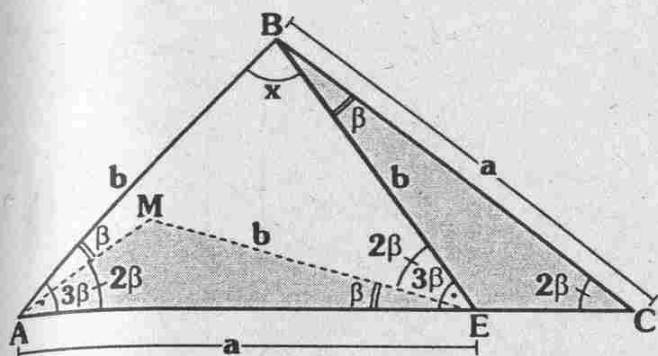
$$2y + z = c\sqrt{3} \quad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$3(x+y+z) = \sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\therefore \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 89

• Piden x .

• En $\triangle ABC$:

$$x + 6\beta = 180^\circ \quad \dots (I)$$

• Se traza $\overline{EM}$ y $\overline{AM}$ tal que:

$$m\angle MAE = 2\beta \quad y$$

$$m\angle AEM = \beta$$

• $\triangle MAE \cong \triangle ECB$ (ALA)

$$\Rightarrow ME = BE$$

• Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág. 46-47)

$$x = 120^\circ - 2\beta \quad \dots (II)$$

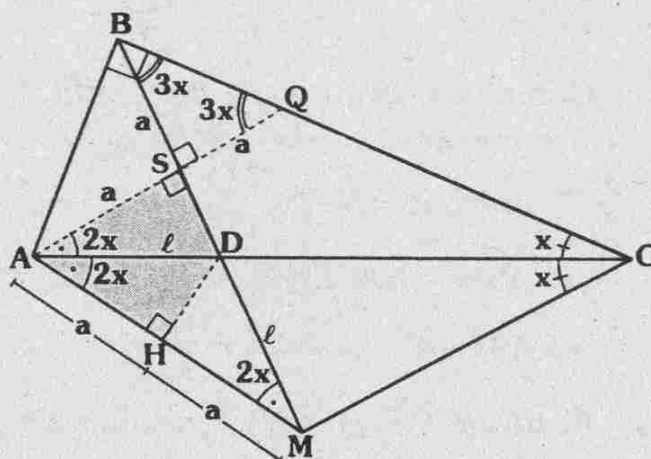
• De (I) y (II):

$$120^\circ - 2\beta + 6\beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 15^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 90

• Piden x .

• Al completar ángulos, tenemos:

$$m\angle AMD = 2x \Rightarrow \triangle ADM : \text{isósceles}$$

• Como $\overrightarrow{CA}$ es bisectriz del $\angle BCM$, nos conviene trazar $\overline{AQ}$ tal que:

$$m\angle CAQ = 2x$$

$$\Rightarrow \triangle AQC \cong \triangle AMC \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow AQ = AM = 2a$$

• En $\triangle ABQ$, como $m\angle AQB = 3x$, $\overline{BS}$ es mediana, luego $AS = SD$.

• Al trazar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$, tendremos $AH = HM$, por ser $\triangle ADM$ isósceles

• Como: $AS = AH$, $\triangle SAD \cong \triangle HAD$
(LAL) $\Rightarrow m\angle ASD = 90^\circ$

$$\angle BSQ: 3x + 3x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 91

- Piden x .
- Como $\vec{EA}$ es bisectriz del $\angle BEC$, nos conviene trazar $\overline{AS}$ tal que:

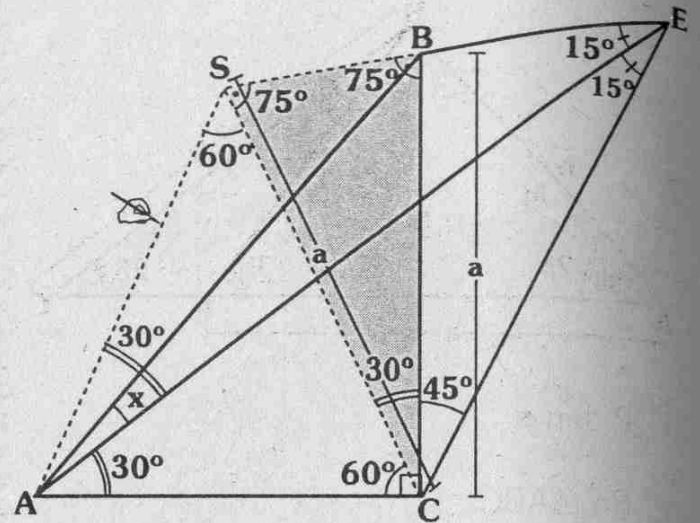
$$m\angle SAE = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle SAE \cong \triangle ACE \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow AS = AC$$

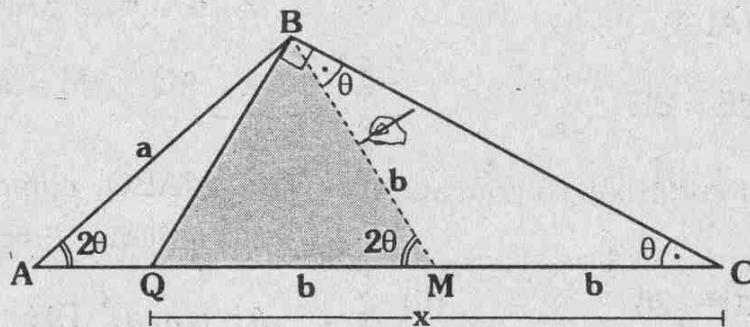
- Al trazar $\overline{CS}$ el $\triangle ASC$ resultar ser equilátero.
- $\triangle SCB$: isósceles $\Rightarrow SC = CB = a$
- $\triangle ACB$: $AC = CB \Rightarrow 30^\circ + x = 45^\circ$

$$\therefore x = 15^\circ$$



Clave B

RESOLUCIÓN N° 92

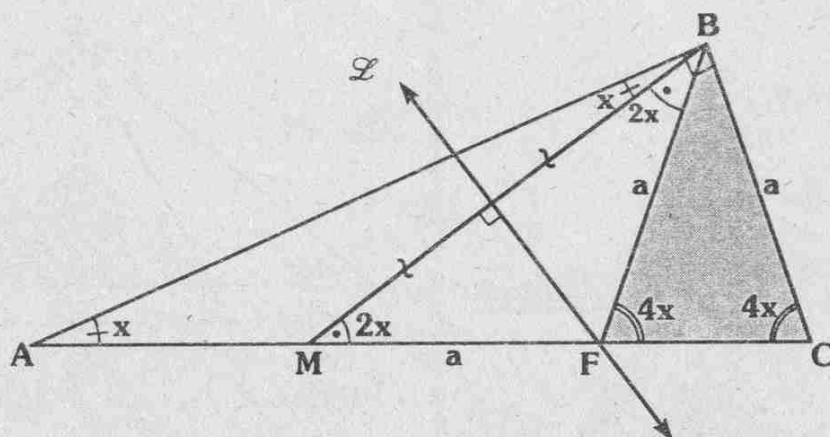


- Piden x , en función de "a".
- En el $\triangle QBC$, se traza la mediana $\overline{BM}$, entonces: $QM = MC = MB$
- $\triangle MBC$ es isósceles

$$\Rightarrow m\angle MBC = \theta \text{ y } m\angle BMQ = 2\theta$$
- $\triangle ABM$: isósceles $\Rightarrow a = b$

$$\therefore x = 2a$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 93

- Nos piden x .
- Como $\overline{BM}$ es mediana del $\triangle ABC \Rightarrow AM = MC = MB$,
con ello: $m\angle MAB = m\angle ABM = x$
- $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{MB}$, por teorema: $FM = FB$
- $\triangle FBC$: isósceles $\Rightarrow m\angle BFC = m\angle FCB = 4x$
- $\triangle ABC$: $x + 4x = 90^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$

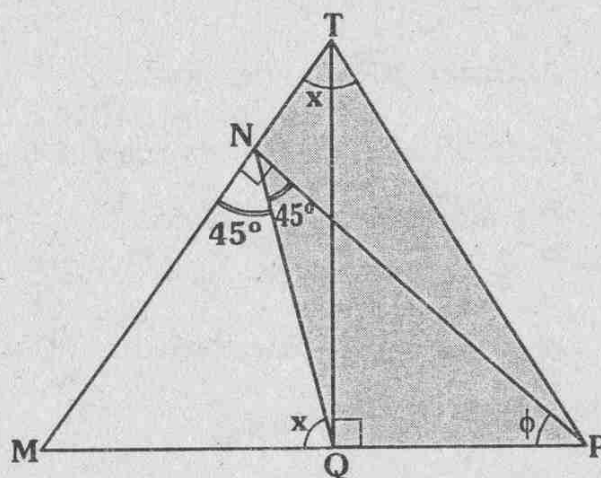
Clave D**RESOLUCIÓN N° 94**

- Piden x , en función de ϕ .
- Por lo analizado en en la pág. 58
- Se tendrá:

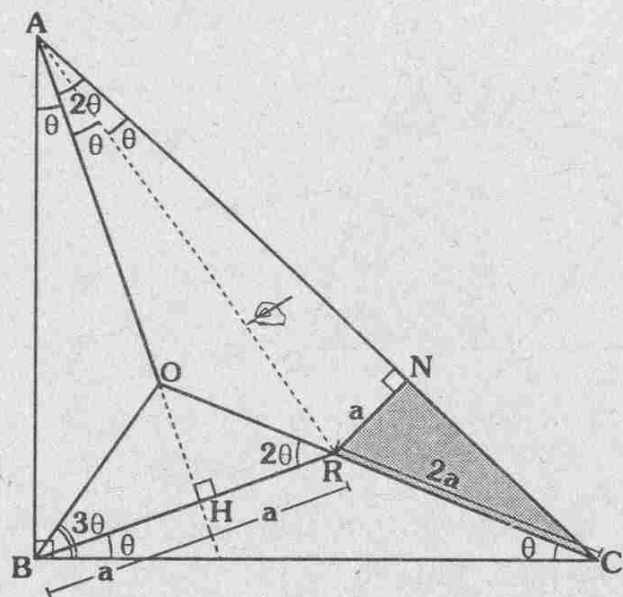
$$m\angle MQN = x$$

- En $\triangle NQP$:

$$\alpha = 45^\circ + \phi$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 95



- Piden θ .
- En $\triangle AOC$, como:

$$m\angle OBC = 3(m\angle BCC)$$

nos conviene trazar $\overline{BR}$ tal que:
 $m\angle CBR = \theta$, entonces: $\triangle BRC$ y
 $\triangle BOR$ son isósceles.

- Luego: $BR = RC$ y $BO = OR$
- Al prolongar $\overline{AO} \Rightarrow \overline{AO} \perp \overline{BR}$
- $\triangle BOC$: $BH = HR$
- Al trazar $\overline{AR}$, tendremos:

$$AB = BR \Rightarrow m\angle BAH = m\angle HAR = \theta$$

- Por teorema de la bisectriz:

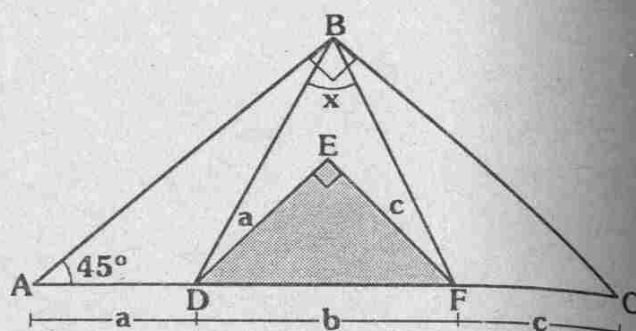
$$HR = RN = a$$

- $\triangle RNC$: notable $\Rightarrow m\angle RCN = 30^\circ$
- $\triangle ABC$: $4\theta + 30^\circ = 90^\circ$

$$\theta = 15^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 96

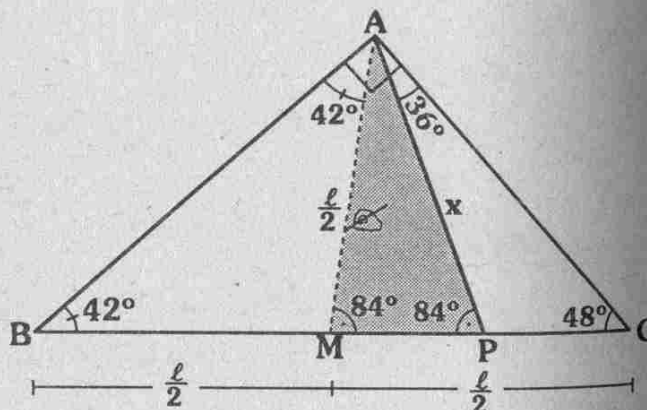


- Piden x .
- $\triangle DEF$: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por teorema (pág. 35 y 36)

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 97



- Piden x , en función de l .
- En $\triangle BAC$, se traza la mediana $\overline{AM}$, por teorema:

$$BM = MC = MA = \frac{l}{2}$$

- $\triangle AMB$, por ángulo exterior:

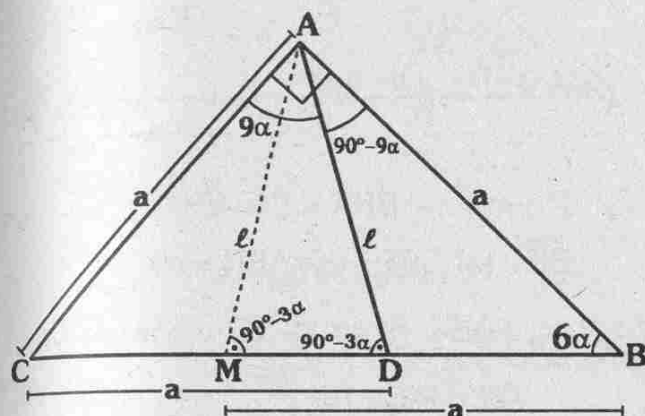
$$m\angle AMP = 84^\circ$$

• $\triangle MAP$: isósceles

$$\therefore x = \frac{\ell}{2}$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 98



• Dato: $m\angle ABD = 30^\circ$ y

$$m\angle DAC = \frac{90}{2}$$

• Nos piden: θ

• Hagamos: $\theta = 2\alpha$

$$\Rightarrow m\angle ABD = 6\alpha \quad y$$

$$\Rightarrow m\angle DAC = 9\alpha$$

• Como: $m\angle ABM = 6\alpha$ y

$$m\angle ADC = 90^\circ - 3\alpha$$

• Se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\angle AMD = 90^\circ - 3\alpha$$

$$\Rightarrow \triangle MAD \text{ y } \Rightarrow \triangle MAB: \text{isósceles}$$

• Luego:

$$\triangle CDA \cong \triangle BMC \text{ (LAL)} \Rightarrow AC = a$$

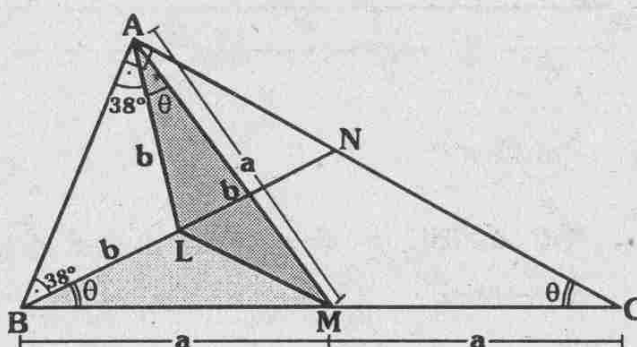
• $\triangle CAB$: isósceles $\Rightarrow 6\alpha = 45^\circ$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15^\circ}{2}$$

$$\therefore \theta = 15^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 99



• Piden: $m\angle LAM$

• En los triángulos ABC y ABN , $\overline{AM}$ y $\overline{AL}$ son medianas, por teorema:

$$BM = MC = AM = a \quad y$$

$$BL = LN = AL = b$$

• $\triangle BLA$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle LAB = 38^\circ$$

• $\triangle AMB$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle LAM = \theta$$

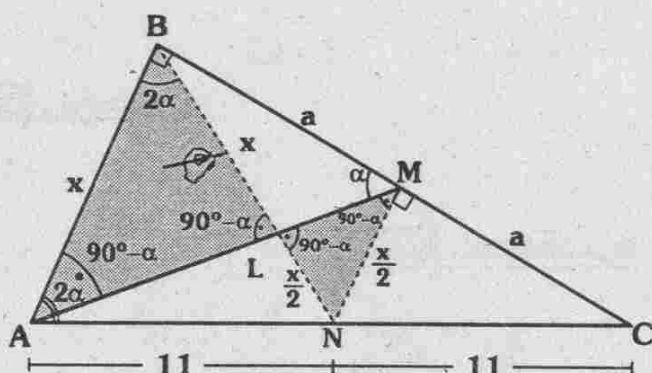
• $\triangle ABC$:

$$38^\circ + 2\theta = 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 26^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 100



- Piden x .
- En $\triangle ABC$, se traza la mediana $\overline{BN}$, entonces:

$$AN = NC = BN = 11$$

- También:

$$m\angle ABN = m\angle DAN = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \triangle ABL : \text{isósceles} \Rightarrow BL = x$$

- En $\triangle ABC$, $\overline{NM}$ es base media, luego:

$$MN = \frac{x}{2} \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{AB}$$

- $\triangle LMN : \text{isósceles} \Rightarrow LN = \frac{x}{2}$

$$x + \frac{x}{2} = 11$$

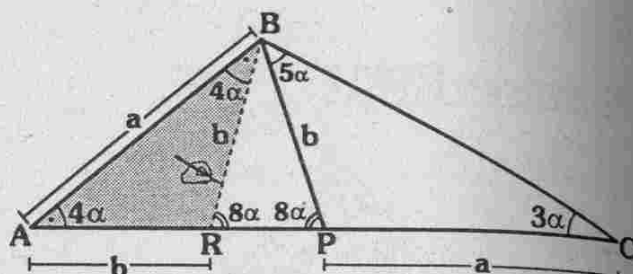
$$\therefore x = \frac{22}{3}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 101

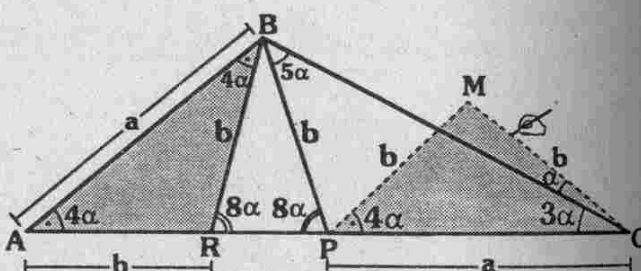
Nos piden $m\angle PBC$.

Paso 1



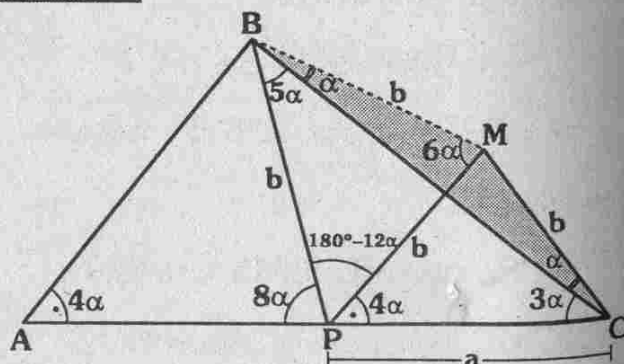
- Como $m\angle BPA = 2(m\angle BAP)$, se traza $\overline{BR}$, tal que: $m\angle ABR = 4\alpha$
 $\Rightarrow \triangle ABR$ y $\Rightarrow \triangle RBP$: isósceles
 $AR = RB = BP$

Paso 2



- Como $AB = PC$ entonces construimos:
 $\triangle PMC \cong \triangle ARB \Rightarrow PM = MC = b$ y
 $m\angle MPC = m\angle MCP = 4\alpha$

Paso 3



Como $m\angle BPM = 180^\circ - 12\alpha$ y $\triangle BPM$ es isósceles

$$\Rightarrow m_{\angle PBM} = m_{\angle PMB} = 6\alpha$$

Luego: $m \angle MBC = \alpha$

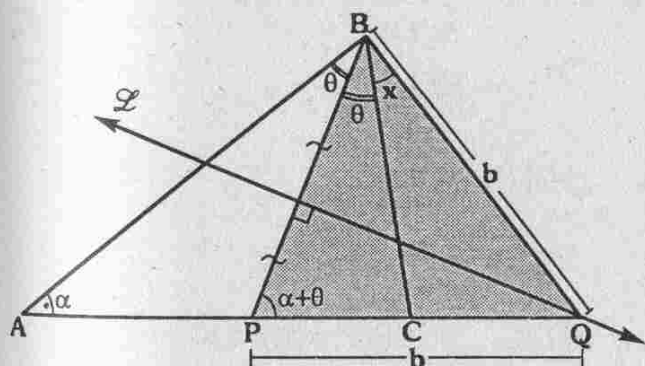
 $\triangle BMC$: isósceles

$$\Rightarrow BM = MC = b$$

 ΔPBM : equilátero

$$\Rightarrow 6\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

$$\therefore m\angle PBC = 50^\circ$$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 102**

- Piden x en función de α .

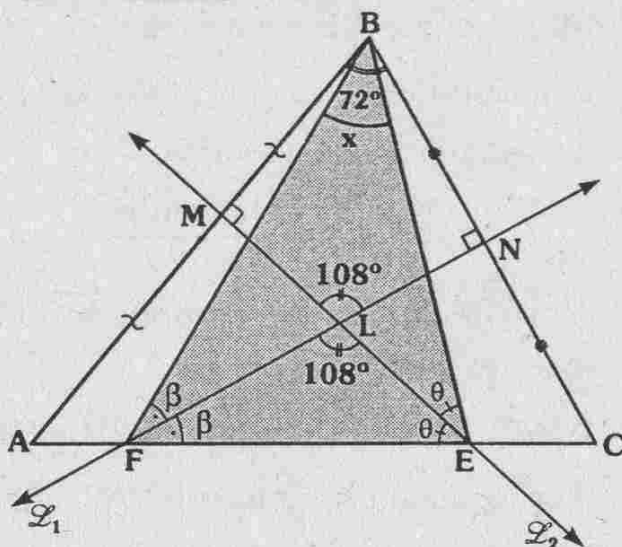
- Como $\overline{\mathcal{L}}$ es mediatriz de $\overline{PB}$, por teorema:

$$QB = QP \Rightarrow \triangle PQB \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle PBQ = m\angle BPQ$$

$$x + \theta = \alpha + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x} = \alpha$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 103**

- Piden x .

- $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente

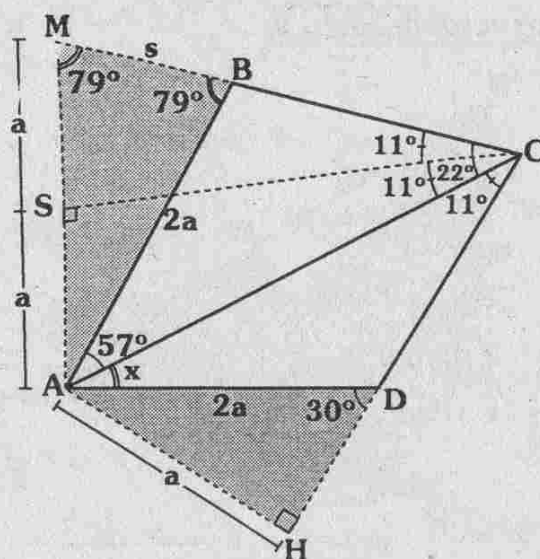
$$\Rightarrow EA = EB \quad y \quad FB = FC$$

- $\triangle FBC$ y $\triangle AEB$: isósceles $\Rightarrow \overline{EM}$ y $\overline{FN}$

- Son también bisectrices:

- $\triangle FBC: 90^\circ + \frac{x}{2} = 108^\circ$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave **D****RESOLUCIÓN N° 104**

- Piden: $m\angle NPM$
- En $\triangle QPN$, como:

$$m\angle QPN = 2(m\angle QNP)$$
 nos conviene trazar $\overline{QT}$ tal que:

$$m\angle TQN = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle NTQ \text{ y } \triangle TQP : \text{isósceles}$$
- Así tenemos: $QP = QT = TN = NM$
- En $\triangle MNT$ se traza la altura $\overline{NH}$, la cual es bisectriz y mediana

$$\Rightarrow MH = HT = b$$
- En $\triangle MTQ$, se traza la altura TS , ahora tendremos:

$$\triangle HMN \cong \triangle STQ \Rightarrow TS = b$$
- $\triangle MST$: notable de 30°
- $\triangle MTS$, por ángulo exterior:

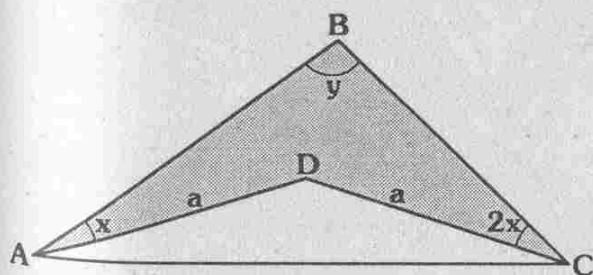
$$m\angle MTN = 30^\circ + 2\alpha$$
- $\triangle NHT$:

$$4\alpha + 30^\circ + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

$$\therefore m\angle NPM = 20^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 107



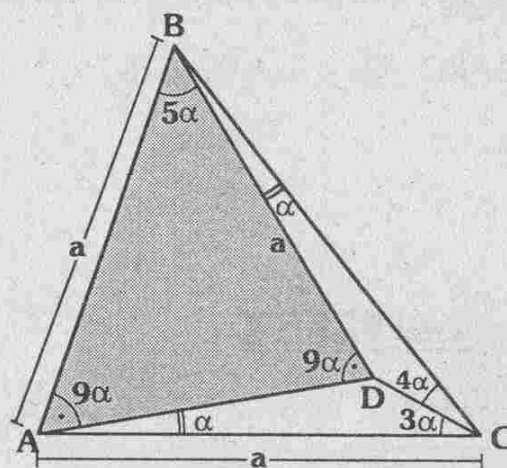
- Piden: $x + y$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág 46-47):

$$y = 120^\circ - x$$

$$\therefore x + y = 120^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 108



- Piden: $m\angle BAC$
- En $\triangle ACBD$:

$$m\angle ADB = 9\alpha$$

$$\Rightarrow AB = BD$$
- $\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow m\angle DB = 9\alpha$

$$\Rightarrow 9\alpha + 9\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15^\circ}{2}$$

$$\therefore m\angle BAC = 75^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 109

- Piden x .
- Como $BD = AC$ y dada la relación de medidas angulares, nos conviene prolongar $\overline{BC}$ y trazar $\overline{AR}$ tal que:

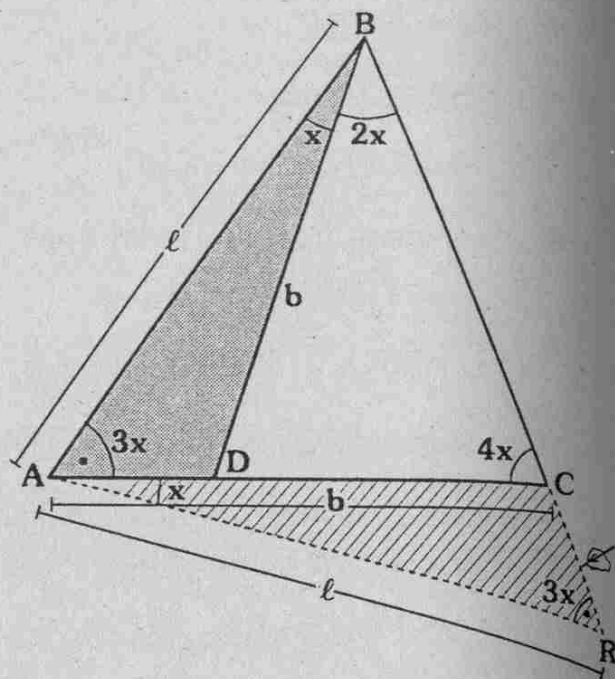
$$m\angle CAR = x \Rightarrow m\angle ARC = 3x$$

- Luego:

$$\triangle ABR: \text{isósceles} \Rightarrow AB = AR$$

- $\triangle ABD \cong \triangle RAC$ (LAL) $\Rightarrow m\angle DAB = 3x$
- $\triangle ABC: 3x + 3x + 4x = 180^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$



Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 110

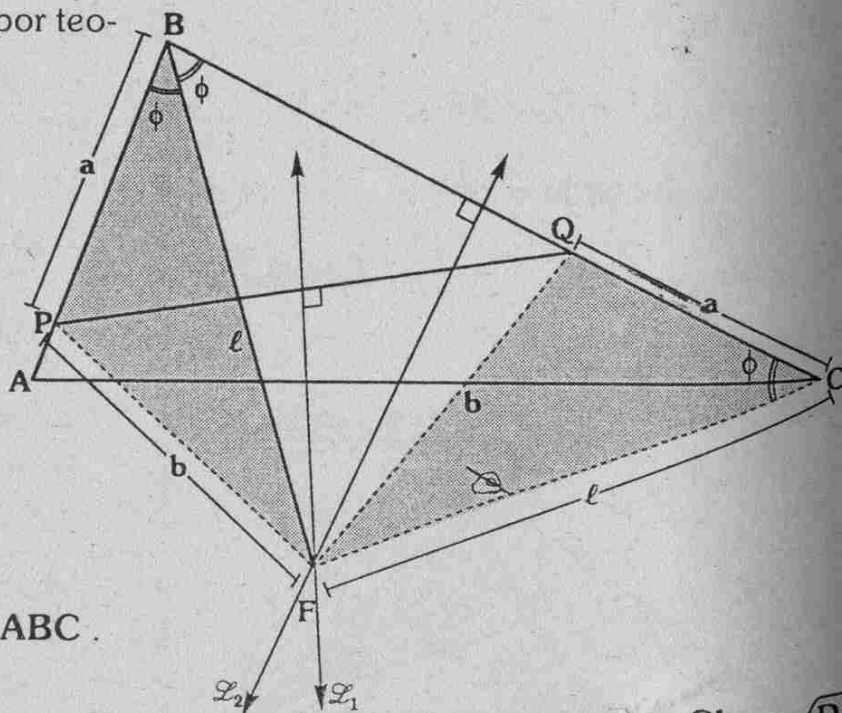
- Piden x .
- Como $\overline{\mathcal{L}_1}$ y $\overline{\mathcal{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, por teorema:

$$FP = FQ \quad \text{y}$$

$$FB = FC$$

- $\triangle FBC$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle FBC = m\angle FCB = \phi$
- $\triangle PBF \cong \triangle QCF$ (LLL)
 $\Rightarrow m\angle FBP = \phi$

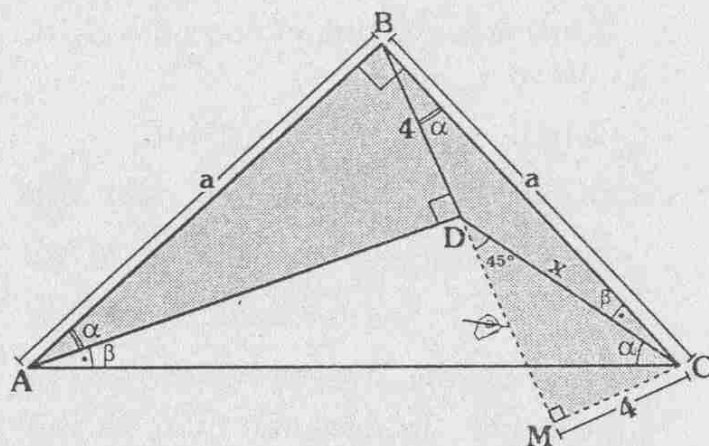
$\therefore \overline{BF}$ es bisectriz del $\angle ABC$.



Clave **D**

RESOLUCIÓN Nº 111

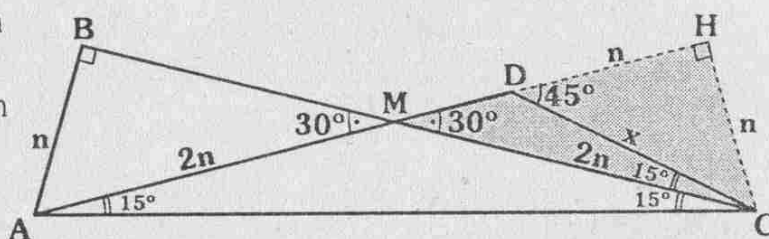
- Nos piden x .
- De los datos: $\alpha + \beta = 45^\circ$
- $\triangle ABD \cong \triangle BCM$ (ALA)
- $\Rightarrow MC = BD = 4$
- $\triangle DCM$: notable de 45°



$$\therefore x = 4\sqrt{2}$$

Clave **D**RESOLUCIÓN **Nº 112**

- Piden x .
- $\triangle ABM$: notable de $30^\circ \Rightarrow AM = 2n$
- $\triangle AMC$: isósceles $\Rightarrow AM = MC = 2n$
- $\triangle MHC$: notable de $30^\circ \Rightarrow HC = n$
- $\triangle BHC$: notable de 45°



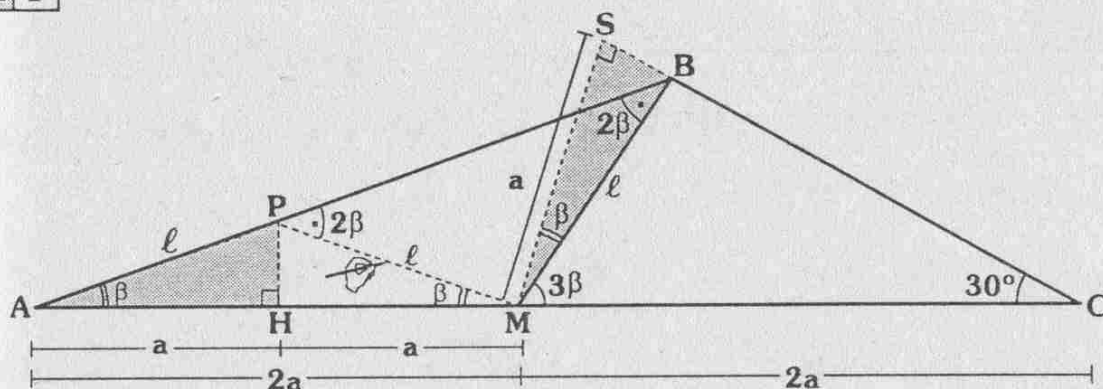
$$\therefore x = n\sqrt{2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 113

Este problema tiene dos soluciones:

Solución	1
-----------------	----------



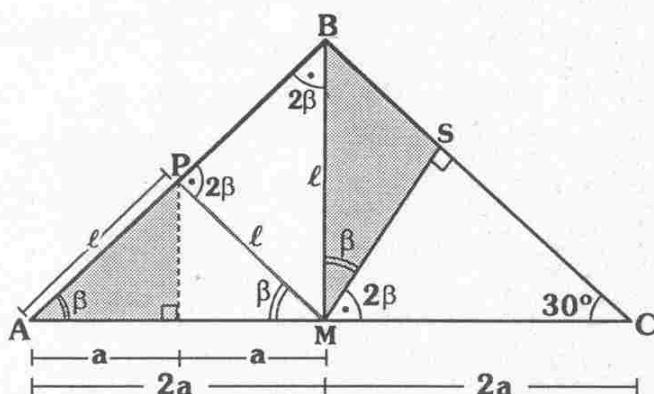
- Consideremos que el ángulo $\angle MBC$ es obtuso.
- Como: $m\angle MBA = 2(m\angle MAB)$
entonces se traza $\overline{MP}$ tal que $m\angle AMP = \beta$, luego $\triangle APM$ y $\triangle PMB$ son isósceles.
- En el triángulo APM , se traza la altura $\overline{PH}$, la cual también es mediana ($AH = HM = a$).
- Se traza $\overline{MS} \perp \overline{BC}$, pues $\angle MSC$ es notable de 30° , entonces $MC = 2(MS)$
- $\triangle AHP \cong \triangle MSB \Rightarrow m\angle SMB = \beta$
- Luego:

$$4\beta = 60^\circ$$

$$\therefore \beta = 15^\circ$$

Solución 2

- Ahora consideremos $m\angle MBC < 90^\circ$, el procedimiento es análogo:



$$m\angle MBC < 90^\circ \Rightarrow S \in \overline{BC}$$

- Luego: $2\beta = 60^\circ$

$$\therefore \beta = 30^\circ$$

Nota

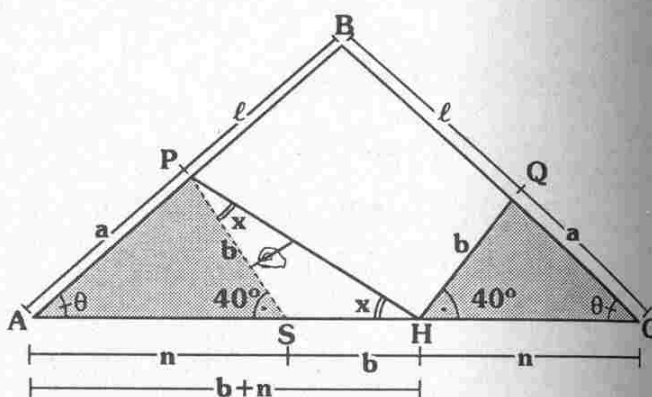
El caso en que $m\angle MBC = 90^\circ$, está descartado pues $a \neq \ell$.

- De ambas soluciones, tenemos:

$$\beta = 15^\circ \quad \text{ó} \quad \beta = 30^\circ$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 114



- Piden x .
- Por dato: $AB = BC$ y $PB = BQ$, entonces: $AP = QC$
- Como $AH = b + n$, se ubica S en $\overline{AH}$ tal que $AS = n$, así tenemos:

$$\triangle SAP \cong \triangle HCQ \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow PS = HQ$$

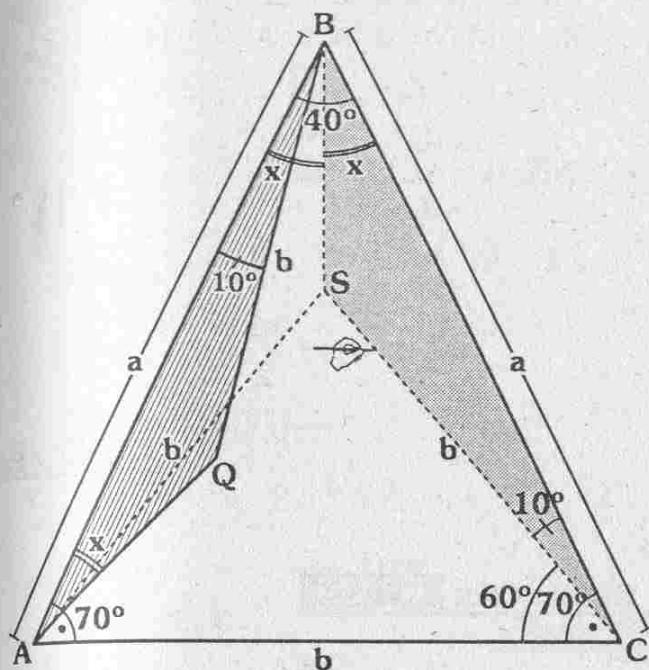
- $\triangle PSH$ es isósceles, luego:

$$x + x = 40^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden x .
- Como el $\triangle ABQ$ tiene dos lados que miden "a" y "b" y el ángulo entre ellos mide 10° , se busca un triángulo congruente a él.
- Se traza $\overline{CS}$ tal que $m\angle SCB = 10^\circ$ y $SC = b$, con ello

$$\triangle ABQ \cong \triangle BCS \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle SBC = x$$

- Como $SC = CA$ y $m\angle SCA = 60^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ASC \text{ es equilátero}$$

- Debido a que:

$$AB = BC \text{ y}$$

$$AS = SC$$

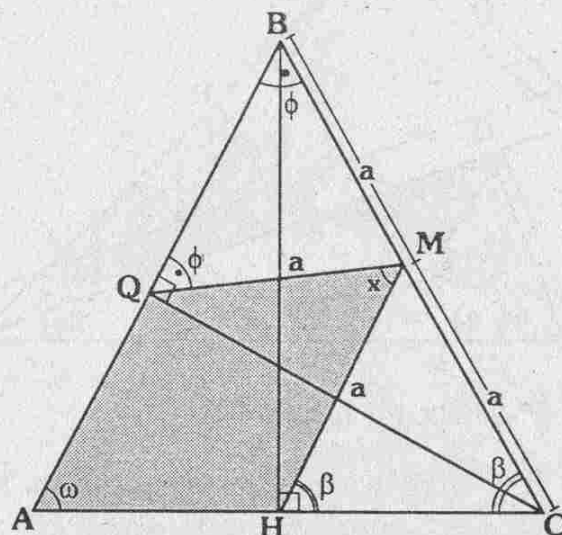
$$\Rightarrow m\angle ABS = m\angle SBC = x$$

$$\Rightarrow x + x = 40^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 116



- Piden x en función de ω .
- Como M es punto medio de $\overline{BC}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa, en

$$\triangle BQS \text{ y } \triangle BHC:$$

$$MB = MC = MQ = MH$$

- $\triangle BQM$ y $\triangle HMC$: isósceles

$$\triangle: x + \omega = \phi + \beta$$

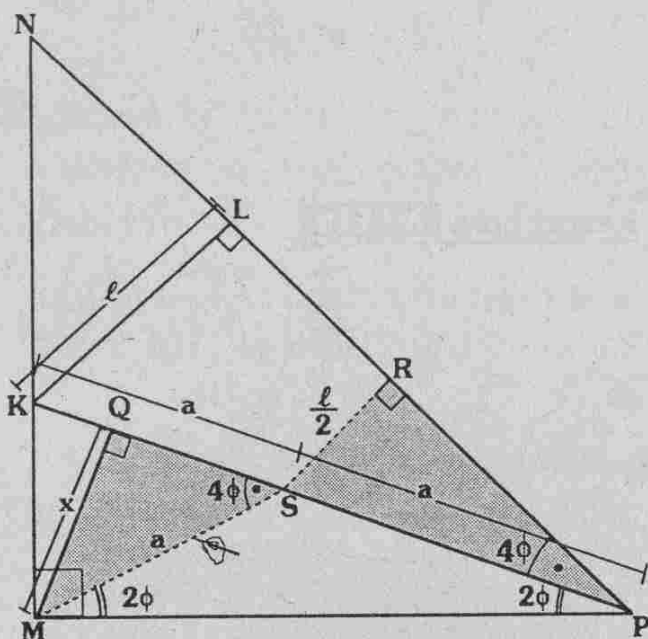
- $\triangle ABC$: $\phi + \beta + \omega = 180^\circ$

$$x + \omega + \omega = 180^\circ$$

$$\therefore x = 180^\circ - 2\omega$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 117



- Piden x en función de l .
- En $\triangle PMK$ se traza la mediana $\overline{MS}$, por teorema $KS = SP = MS = a$.
- En $\triangle KLP$, se traza $\overline{SR} \perp \overline{NP}$, por teorema de la base media:

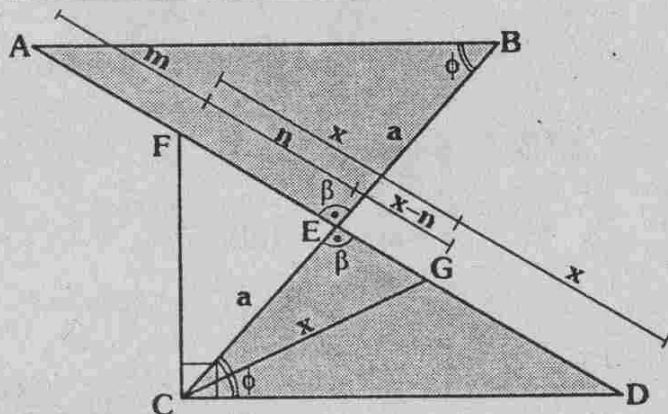
$$SR = \frac{l}{2}$$

- En $\triangle MSQ \cong \triangle SPR$ (ALA)

$$\therefore x = \frac{l}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 118



- Piden x .
- En $\triangle FCD$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$FG = GD = CG = x$$

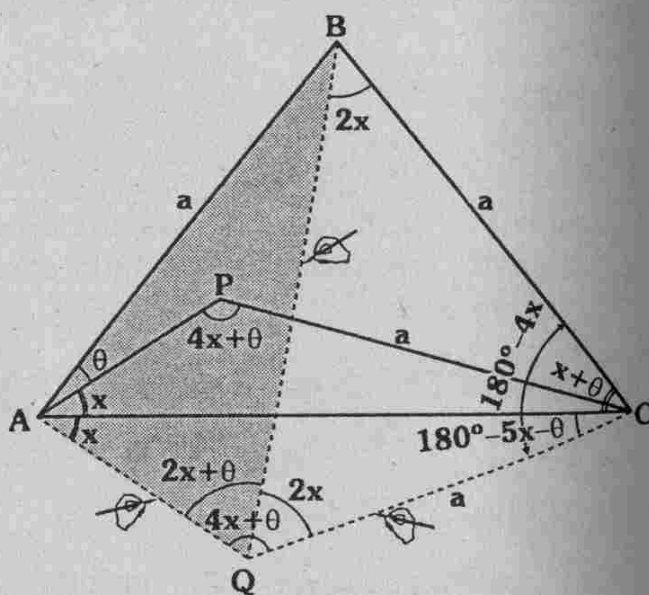
- $\triangle BEA \cong \triangle CED$ (ALA)

$$\Rightarrow x + x - n = m + n$$

$$\therefore x = n + \frac{m}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 119



- Nos piden x .
- Trazamos el triángulo AQC congruente con el triángulo BQC, tal que:

$$m\angle PAC = m\angle QAC;$$

$$m\angle APC = m\angle AQC = 4x + \theta$$

$$\Rightarrow QC = PC = a$$

- Al completar "ángulos", notemos:

$$m\angle ACQ = 180^\circ - 5x - \theta$$

$$\Rightarrow m\angle QCB = 180^\circ - 4x$$

• Como $QC = CB$

$$\Rightarrow m\angle CQB = m\angle QBC = 2x$$

$$\Rightarrow m\angle BQA = 2x + \theta$$

• $\triangle ABQ$: isósceles

$$\Rightarrow AB = BQ = a$$

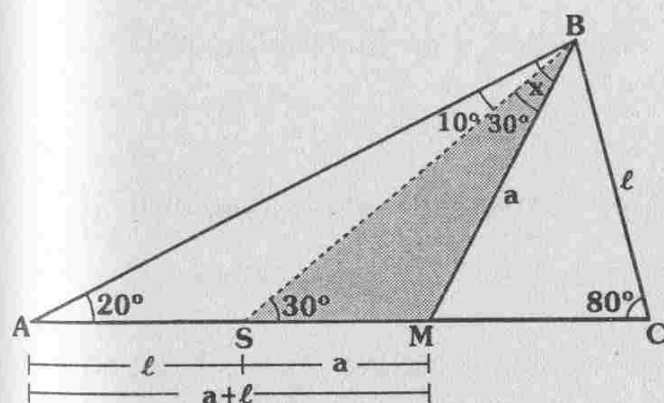
• $\triangle QBC$: equilátero:

$$2x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 120



• Piden x .

• Como $\triangle ABC$ isósceles donde:

$$m\angle A = 20^\circ \text{ y } m\angle C = 80^\circ,$$

se ubica S en $\overline{AM}$ tal que $AS = l$,
(ver pag. 57 y 58) entonces:

$$m\angle ABS = 10^\circ \Rightarrow m\angle BSC = 30^\circ$$

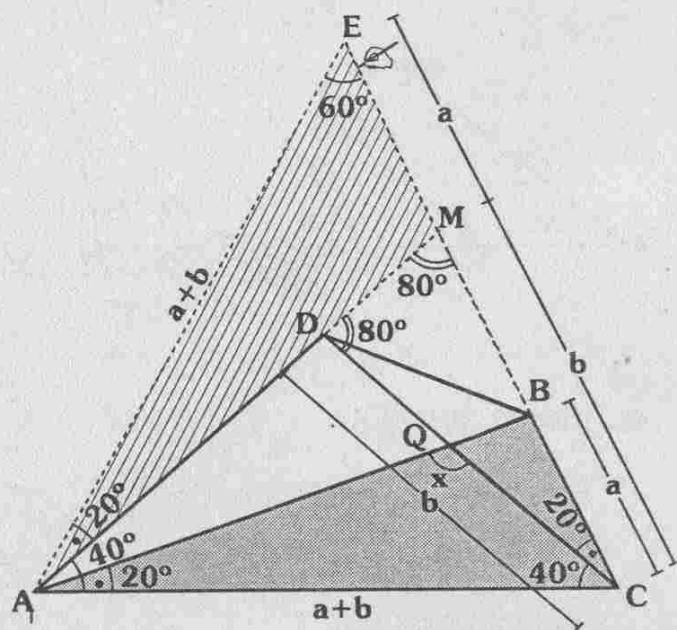
• Como $AM = a + l \Rightarrow SM = a$, luego
 $\triangle SMB$ es isósceles

$$\Rightarrow m\angle SBM = 30^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 121



• Piden x .

• Con $m\angle ACD = 60^\circ$ y el $\triangle DCM$ resulta ser isósceles, con $DC = CM = b$, nos conviene prolongar $\overline{CM}$ hasta "E" tal que $MB = a$, entonces:

$\triangle AEC$ es equilátero

$$\triangle AEM \cong \triangle ACB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = 20^\circ$$

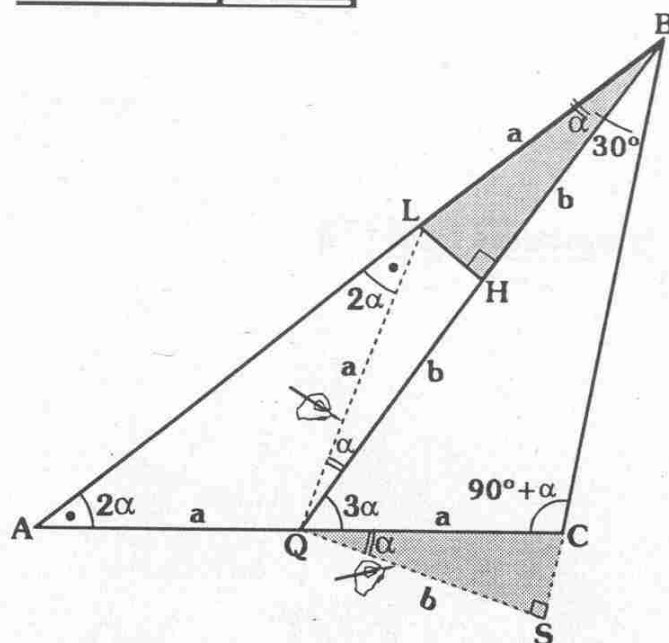
• $\triangle AQC$:

$$x + 20^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

Clave D

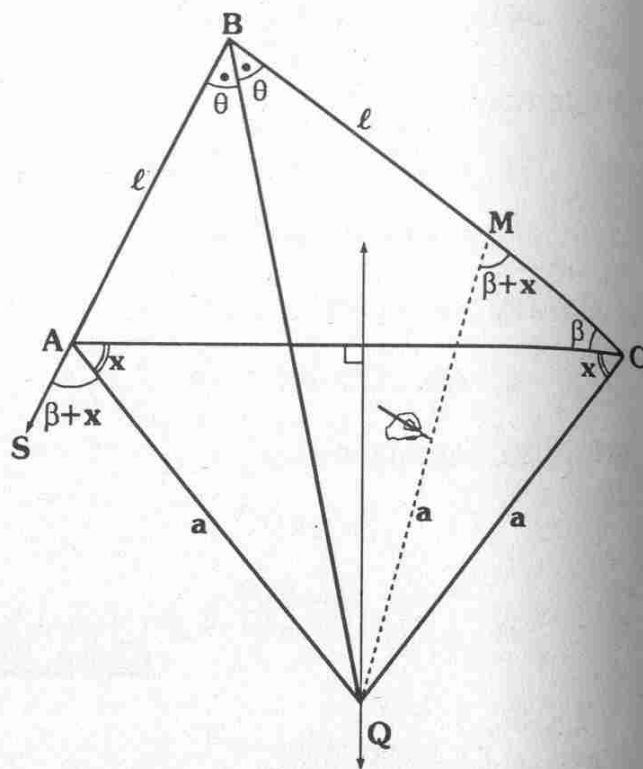
RESOLUCIÓN N° 122



- Piden: $m\angle BQC$
- En $\triangle AQC$: $m\angle BQC = 3\alpha$
- Como $m\angle BAQ = 2(m\angle QBA)$, trazamos $\overline{QL}$ tal que :
 $m\angle LQB = \alpha \Rightarrow AQ = QL = LB = a$
- En $\triangle QLB$, se traza la altura $\overline{LH}$, luego $QH = HB = b$.
- Se traza:
 $\overline{QS} \perp \overline{BC} \Rightarrow m\angle CQS = \alpha$
- $\triangle QSC \cong \triangle LHB$ (ALA) $\Rightarrow QS = b$
- $\triangle BSQ$: notable de 30°
 $\Rightarrow 4\alpha = 60^\circ$
 $\alpha = 15^\circ$
 $\therefore m\angle BQC = 45^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 123



- Piden x en función de $m\angle B$.
- Sea $m\angle B = 2\theta$
- Por teorema de la mediatriz:
 $QA = QC$
- Como el $\triangle ABC$ es escaleno, consideremos (sin pérdida de generalidad) que $BC \geq AB$.
- Se ubica M en $\overline{BC}$, tal que $BM = BA$
 $\triangle ABQ \cong \triangle MBQ$ (LAL) $\Rightarrow QM = a$
- $\triangle QMC$: isósceles
- Por la congruencia:
 $m\angle QMC = m\angle QAS = \beta + x$
- En $\triangle ABC$:

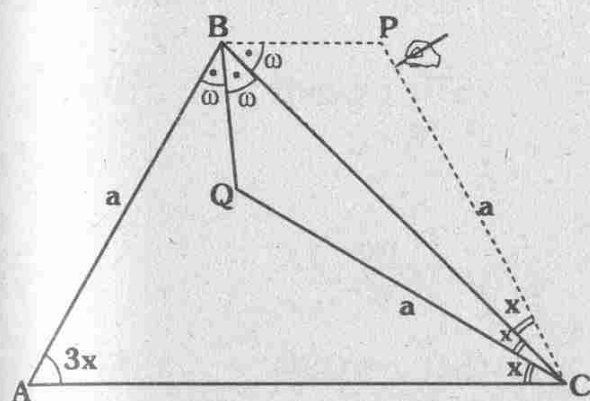
$$\beta + 2x = \beta + 2\theta$$

$$\Rightarrow x = \theta$$

$$\therefore x = \frac{m\angle B}{2}$$

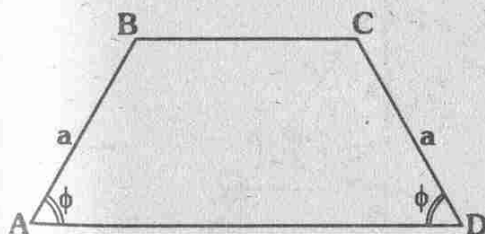
Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 124



- Piden: $m\angle ABC$
- Como $m\angle BAC = 3x$ y $m\angle ACB = 2x$ y $AB = QC = a$, nos conviene trazar $\overline{CP}$ tal que $m\angle BCP = x$ y $CP = a$.
- $\triangle QCB \cong \triangle PCB$ (LAL) $\Rightarrow m\angle CBP = \omega$

Considerando:



Se cumple: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

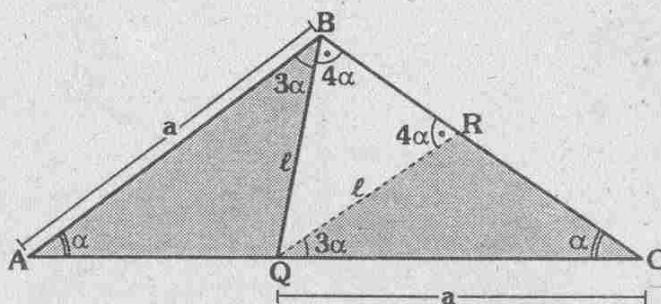
(Ver pág. 77)

- En el problema, como $AB = CP$ y $m\angle BAC = m\angle ACP \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{BP}$

- Luego: $\omega = 2x$
- En $\triangle ABC$: $3x + 2x + 2\omega = 180^\circ$
 $\Rightarrow x = 20^\circ$
- Como: $m\angle ABC = 2\omega$
 $m\angle ABC = 4x$
 $\therefore m\angle ABC = 80^\circ$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 125



- Piden: $m\angle BAC$.
- Dada la distribución de medidas angulares α , 3α y 4α , nos conviene trazar $\overline{QR}$ tal que:

$$m\angle RQC = 3\alpha$$

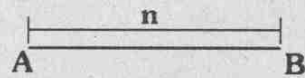
$$\Rightarrow m\angle QRB = 4\alpha$$

- $\triangle ABQ \cong \triangle CQR$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BAQ = \alpha$
- $\triangle ABC$: $\alpha + 7\alpha + \alpha = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha = 20^\circ$
 $\therefore m\angle BAC = 20^\circ$

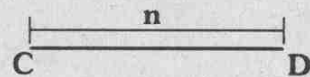
Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 126

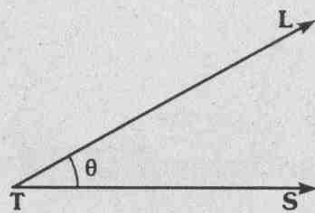
- Para indicar el valor de verdad de las proposiciones, hay que tener presente:



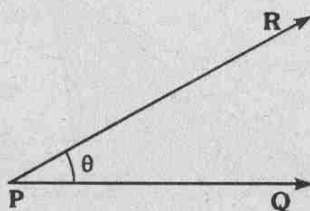
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \dots (V)$$



$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \dots (F)$$



$$\sphericalangle STL \cong \sphericalangle QPR \quad \dots (V)$$



$$\sphericalangle STL = \sphericalangle QPR \quad \dots (F)$$

- Con ello:

I) V

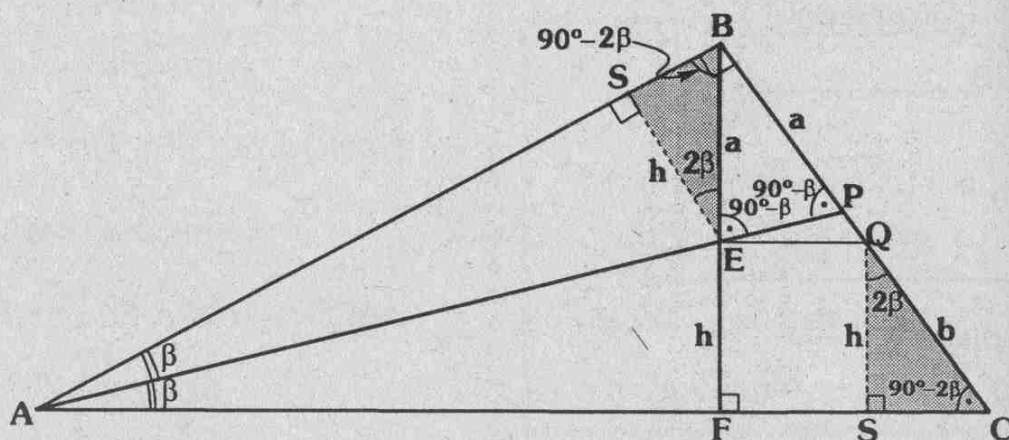
II) F

III) F

IV) V

Clave B

RESOLUCIÓN N° 127



- Sea $BP = a$ y $QC = b$
- Nos piden la relación entre a y b .

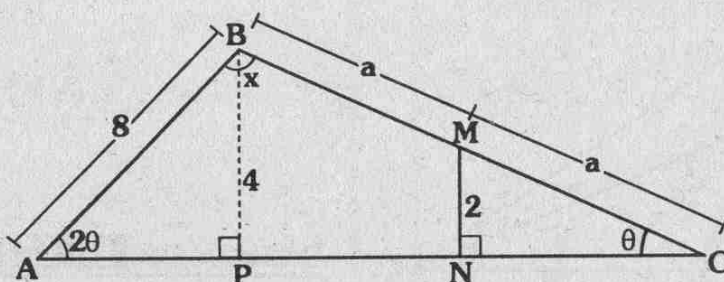
- $\triangle EBP$: isósceles $\Rightarrow BE = BP = a$
- Por teorema de la bisectriz: $ES = EF$

$$\triangle ESB \cong \triangle QSC \text{ (ALA)} \Rightarrow a = b$$

$$\therefore BP = QC$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 128



- Piden x .
- $\triangle ABC$: $x + 3\theta = 180^\circ$
- Se traza $\overline{BP} \perp \overline{AC}$, por base media en el $\triangle PBC$: $BP = 4$
- $\triangle APB$: notable de 30°

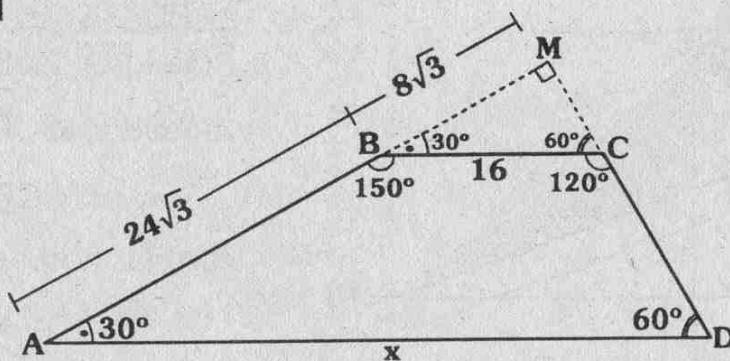
$$2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$$

$$x + 3(15^\circ) = 180^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 129



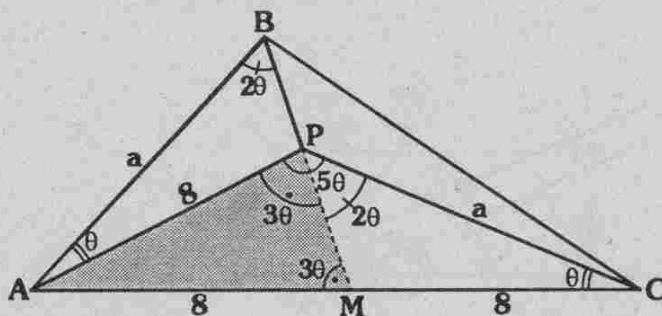
- Piden x .

- Del gráfico $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- $\triangle BMC$: notable de $30^\circ \Rightarrow BM = 8\sqrt{3}$
- $\triangle AMD$: notable, como $AM = 32\sqrt{3}$

$$\therefore x = 64$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 130

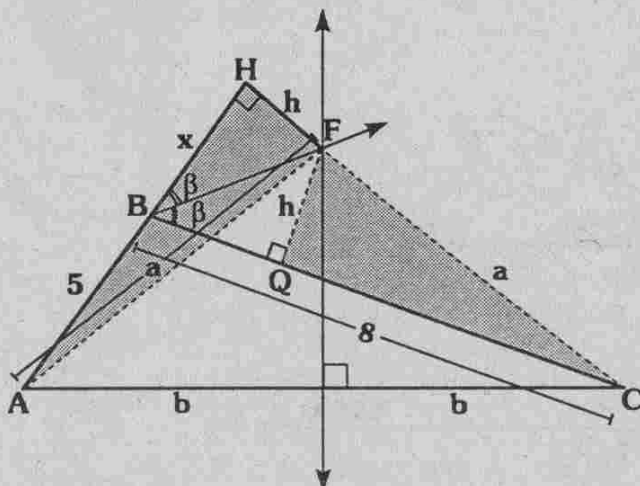


- Piden AC.
- Al prolongar $\overline{BP}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, nos damos cuenta.
- $\triangle AMP$: isósceles $\Rightarrow AP = AM = 8$
- $\triangle ABP \cong \triangle CPM$ (ALA) $\Rightarrow MC = AP = 8$

$$\therefore AC = 16$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 131



- Piden x.
- Por teorema de la mediatriz: $FA = FC$
- Por teorema de la bisectriz:

$$FH = FQ$$

$$BQ = x$$

- $\triangle AFH \cong \triangle CFQ \Rightarrow AH = CQ = x + 5$

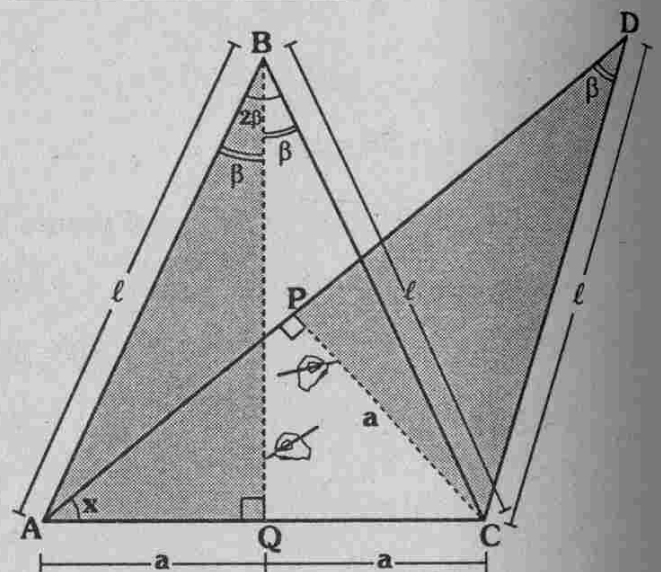
$$\Rightarrow \overline{BC} = CQ + BQ$$

$$8 = x + 5 + x$$

$$\therefore x = 1,5$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 132

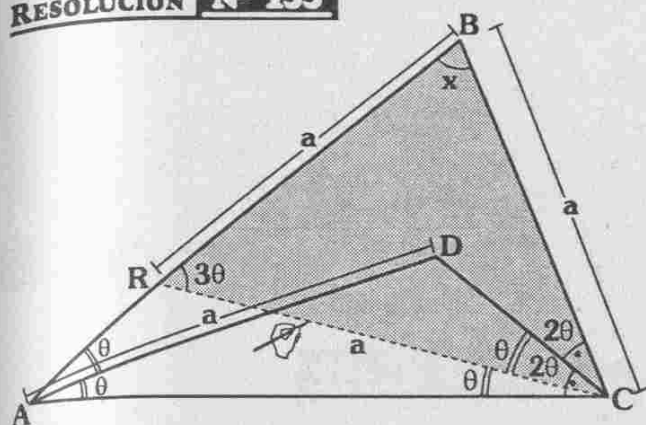


- Piden x.
- $\triangle ABC$: isósceles, se traza la altura $\overline{BQ} \Rightarrow \overline{BQ}$ es bisectriz y mediana.
- $\triangle AQB \cong \triangle CPD$ (ALA)
- $\Rightarrow CP = AQ = QC$
- $\triangle APC$: notable

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave D

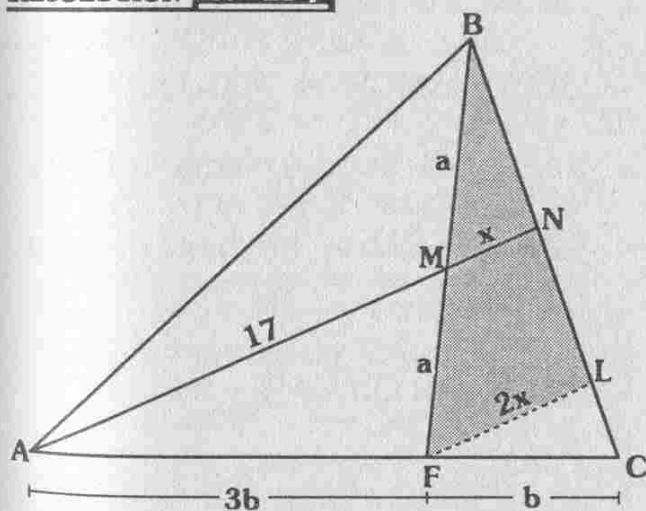
RESOLUCIÓN N° 133



- Piden x .
- Al trazar $\overline{CR}$ tal que: $m\angle RCA = \theta$, se tiene:
 $\triangle BRC$: isósceles $\Rightarrow RB = BC$
 $\triangle RAC \cong \triangle BCA$ (ALA) $\Rightarrow RC = a$
- $\triangle RBC$: equilátero
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 134



- Piden x .
- Como $BM = MF$, se traza $\overline{FL} \parallel \overline{MN}$, entonces en el $\triangle FLB$, $\overline{MN}$ es base media, luego: $FL = 2x$ y $\overline{FL} \parallel \overline{MN}$.
- En $\triangle ANC$, observamos: $\overline{FL} \parallel \overline{AN}$ y

$$AF = 3(FC) \Rightarrow AN = 8x \dots (\text{ver nota})$$

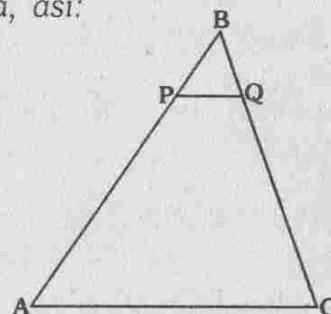
$$x + 17 = 8x$$

$$\therefore x = \frac{17}{7}$$

Clave E

Nota

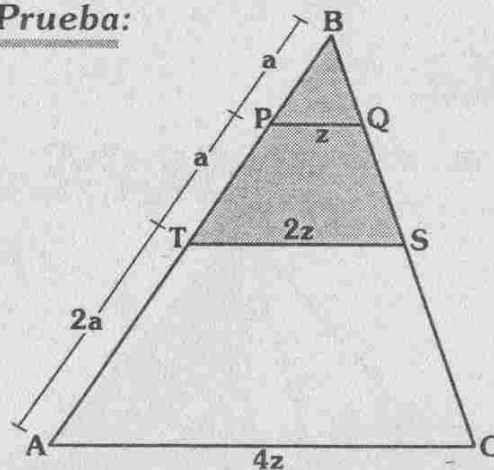
En el tema de semejanza de triángulos, se hará la prueba general pero en este caso se puede hacer la prueba con el teorema de la base media, así:



$$\text{Si: } AP = 3(PB) \text{ y}$$

$$\overline{AC} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow AC = 4(PQ)$$

Prueba:



Se ubica T en $\overline{AB}$, tal que $AT = TB$, luego se traza: $\overline{TS} \parallel \overline{AC}$.

Por base media:

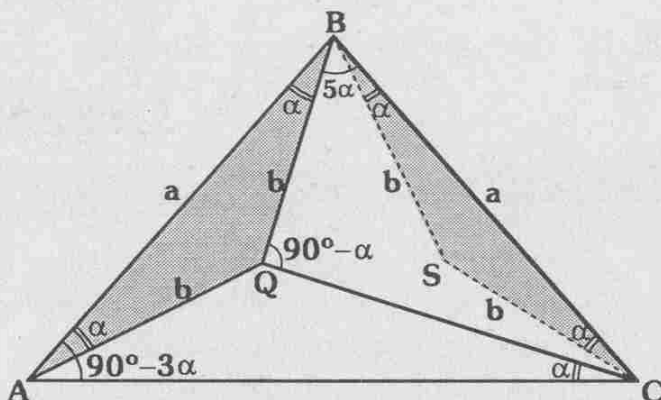
$$\triangle TSB : TS = 2(PQ)$$

$$\triangle ABC : AC = 2(TS)$$

$$\therefore AC = 4(PQ)$$

RESOLUCIÓN N° 135

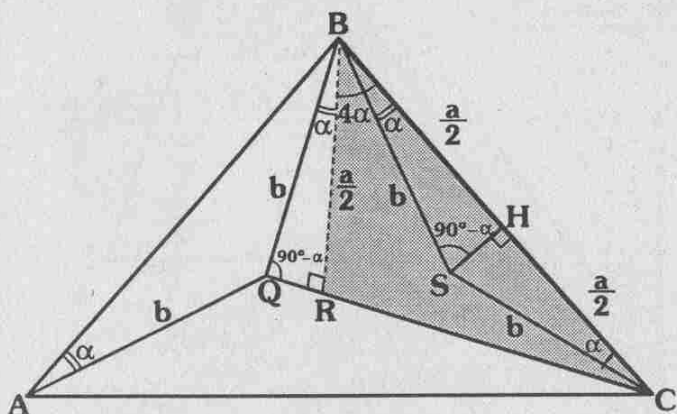
Paso 1



- Piden: $m\angle BQC$
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\angle CBS = \alpha$ y $BS = BQ$
 $\Rightarrow \triangle ABQ \cong \triangle CBS$ (LAL) $\Rightarrow CS = b$
- Como $AB = BC$ y
 $m\angle ABC = 6\alpha \Rightarrow m\angle BAC = 90^\circ - 3\alpha$
 $\Rightarrow m\angle BQC = 90^\circ - \alpha$

Paso 2

- Trabajemos solo en el $\triangle BQC$:



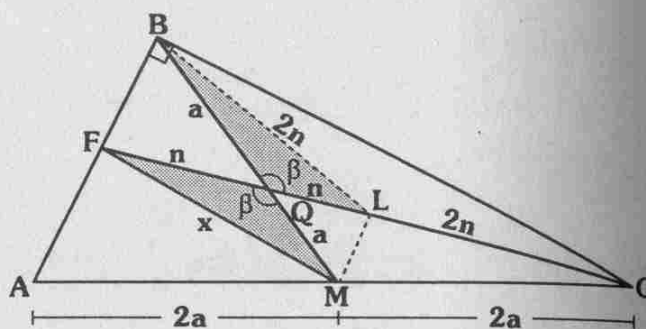
- Se trazan $\overline{BR} \perp \overline{QC}$ y $\overline{SH} \perp \overline{BC}$,
 como $\triangle BCS$ es isósceles con:
 $BS = CS \Rightarrow BH = HC$

- $\triangle RBC$: notable de 30°
 $\Rightarrow 4\alpha = 60^\circ$
 $\Rightarrow \alpha = 15^\circ$

$$\therefore m\angle BQC = 75^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 136



- Piden x .
- Dato: $CQ = 12$
- Se traza $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$
- $\triangle BQL \cong \triangle MQF \Rightarrow FQ = QL = n$
- $\triangle AFC$, $\overline{ML}$ es base media $\Rightarrow FL = LC$
- $\triangle FBC$: $\overline{BL}$ es mediana relativa a la hipotenusa $\Rightarrow BL = 2n$
- $\triangle FQM \cong \triangle LQB \Rightarrow x = 2n$
- Como:

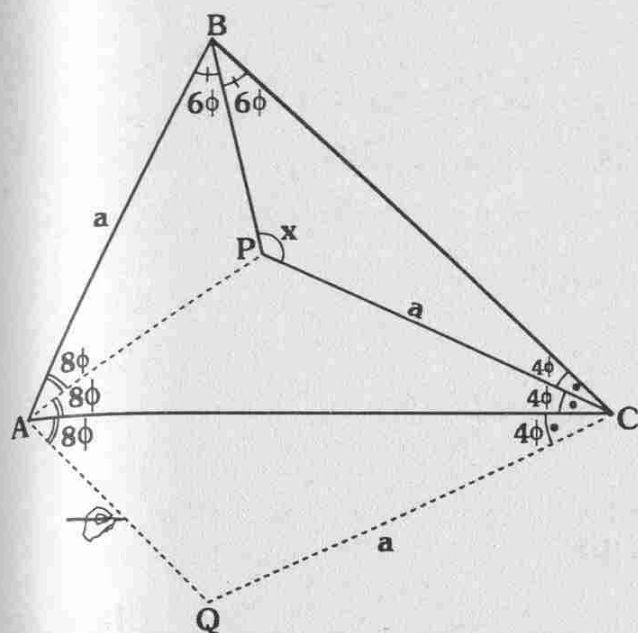
$$3n = 12$$

$$\Rightarrow n = 4$$

$$\therefore x = 8$$

Clave B

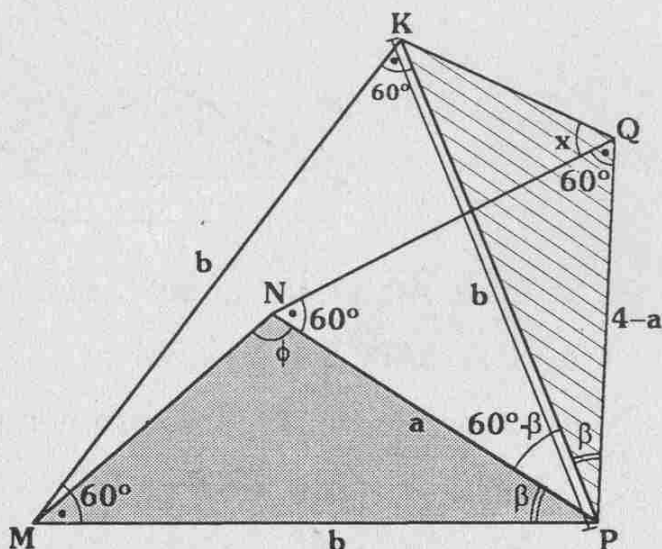
RESOLUCIÓN N° 137



- Piden x .
- En $\triangle PBC$: $x + 10\phi = 180^\circ$... (I)
- Se traza $\overline{CQ}$ tal que $CQ = a$ y $m\angle ACQ = 4\phi$
- Luego: $\triangle PCA \cong \triangle QCA$ (LAL)
- Como $m\angle ABC = m\angle ACQ$ y $BA = CQ$
 $\Rightarrow \overline{AQ} \parallel \overline{BC} \Rightarrow m\angle PAC = 8\phi$
- Por la congruencia: $m\angle PAC = 8\phi$
- Por la observación (pág. 77)
 $m\angle BAP = m\angle CAP = 8\phi$
- $\triangle ABC$: $16\phi + 12\phi + 8\phi = 180^\circ$
 $\Rightarrow \phi = 5^\circ$
- En (I): $x + 10(5^\circ) = 180^\circ$
 $\therefore x = 130^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 138



- Piden x .
- Como $\triangle MKP$ y $\triangle NQP$ son equiláteros, se tendrá:

$$\triangle NPM \cong \triangle QPK \text{ (LAL)}$$

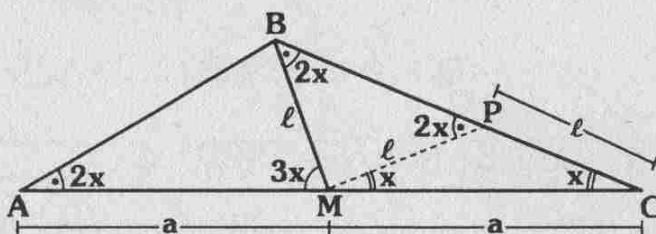
$$\Rightarrow x + 60^\circ = \phi$$

$$\therefore x = \phi - 60^\circ$$

Clave C

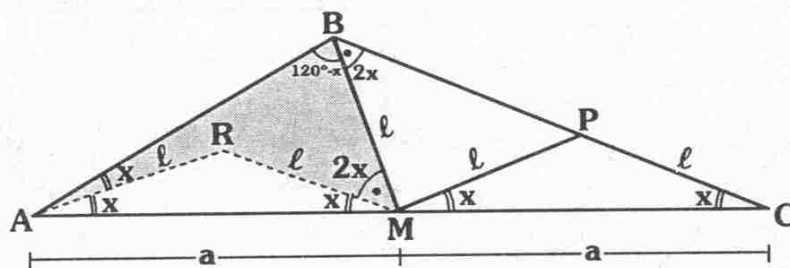
RESOLUCIÓN N° 139

Paso 1



- Piden: $m\angle MBC$
- Como $m\angle MBC = 2(m\angle MCB)$ nos conviene trazar $\overline{MP}$ tal que $m\angle CMP = x$, entonces $MP = PC = MB$.

Paso 2

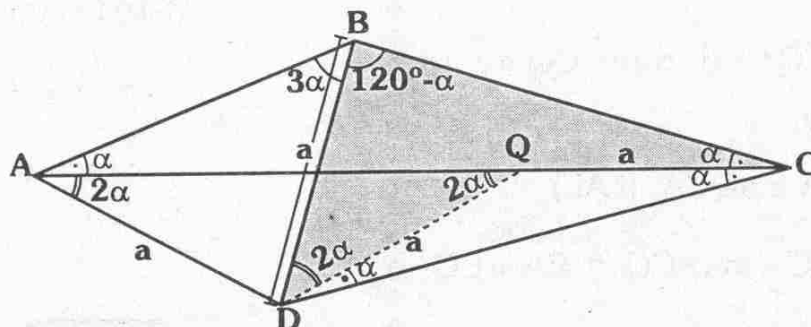


- Se traza $\overline{AR}$ y $\overline{MR}$ tal que: $m\angle RAM = m\angle AMR = x$
- $\triangle ARM \cong \triangle APC \Rightarrow AR = RM = l$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\angle ABM = 120^\circ - x$
- $\triangle ABM: 2x + 3x + 120^\circ - x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$

$$\therefore m\angle MBC = 30^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN **N° 140**



- Piden α .
- En $\triangle ADC$ como $m\angle DAC = 2(m\angle ACD)$, trazamos $\overline{DQ}$ tal que:
 $m\angle QDC = \alpha \Rightarrow \triangle DQC$, $\triangle AQD$ son isósceles, luego: $AD = DQ = QC = a$
- $\triangle ADB$: isósceles $\Rightarrow BD = a$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\angle DBC = 120^\circ - \alpha$
- En $\triangle DBC$: $3\alpha + 2\alpha + 120^\circ - \alpha = 180^\circ$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Clave **C**

Solucionario

Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN N° 141

• Piden x .

• Por dato:

$$AD = BQ \quad \text{y} \quad \overline{AD} \perp \overline{BQ}$$

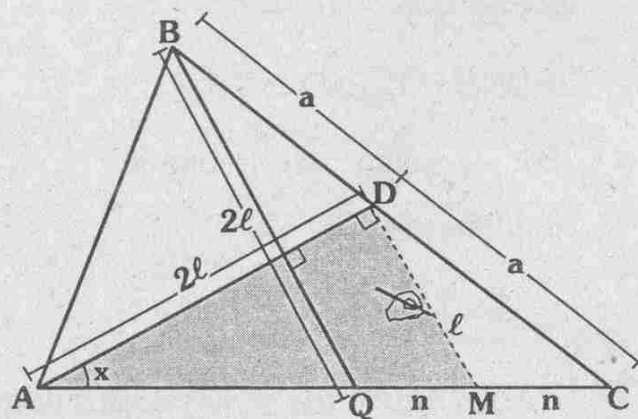
• En $\triangle QBC$ se traza la base media $\overline{DM}$, entonces:

$$BQ = 2(DM) \quad \text{y} \quad \overline{BQ} \parallel \overline{DM}$$

• $\triangle ADM$ notable, pues $AD = 2(DM)$

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2}$$

Clave **D**



RESOLUCIÓN N° 142

• Piden x .

• Datos: $\alpha + \beta = 60^\circ$

$$AD = 2a; \quad CD = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad BC = a$$

• En $\triangle ABD$, se traza la mediana $\overline{BM}$,

• Por teorema: $AM = MD = BM = a$

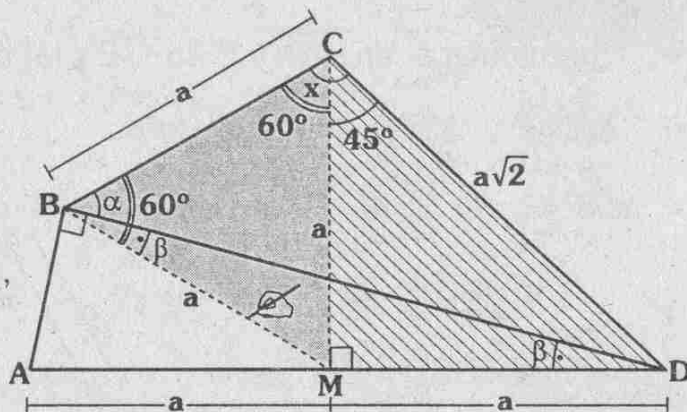
$$m\angle MBD = \beta$$

• Como $BM = BC$ y $m\angle MBC = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBC$ es equilátero.

• Como $CM = MD = a$ y $CD = a\sqrt{2} \Rightarrow m\angle MCD = 45^\circ$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Clave **C**



- Piden AB.
- Dato: $\triangle ABC$ es equilátero:

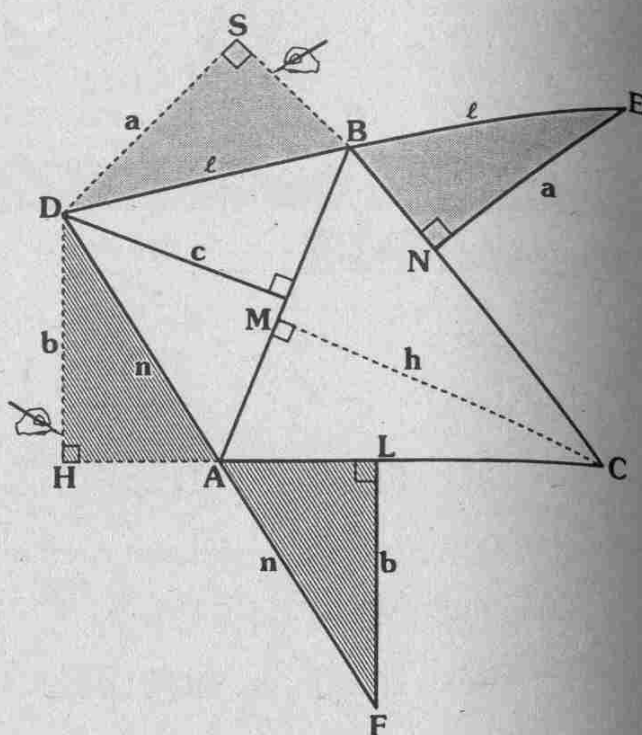
$$a + b - c = 4\sqrt{3}$$

- $\triangle ALF \cong \triangle AHD \Rightarrow DH = b$
- $\triangle DNE \cong \triangle BSD \Rightarrow DS = a$
- Por teorema del triángulo equilátero (pág. 42)

$$h = a + b - c \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

- $\triangle ABC$ equilátero y su altura mide $4\sqrt{3}$, por lo tanto:

$$AB = 8$$



Clave B

- Nos piden "**x**" en función de "**ℓ**".

- Ubiquemos N en $\overline{AC}$ y S en $\overline{CE}$, tal que: $AN = a$ y $ES = b \Rightarrow NC = b$ y $CS = a$
- $\triangle ANB$ y $\triangle SDE$ son equiláteros.

- $\triangle BNC \cong \triangle CSD$ (LAL) $\Rightarrow CD = \ell$

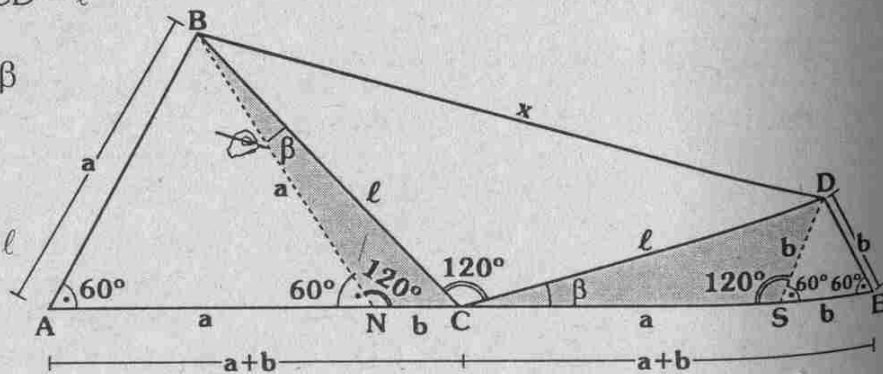
$$y \quad m \triangleleft NBC = m \triangleleft SCD = \beta$$

$$\Rightarrow m\angle BCD = 120^\circ$$

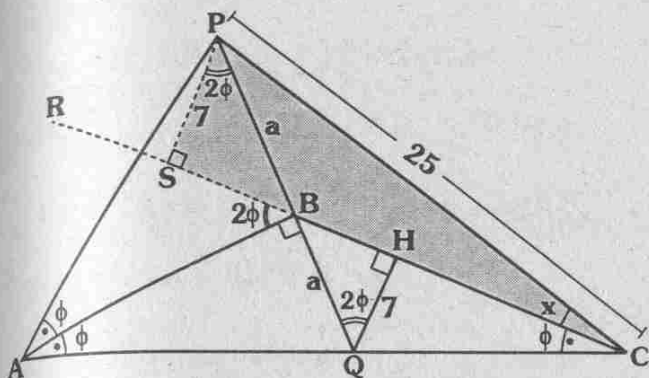
- $\triangle BCD$, como $BC = CD = \ell$

y $m\angle BCD = 120^\circ$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \ell\sqrt{3}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 145

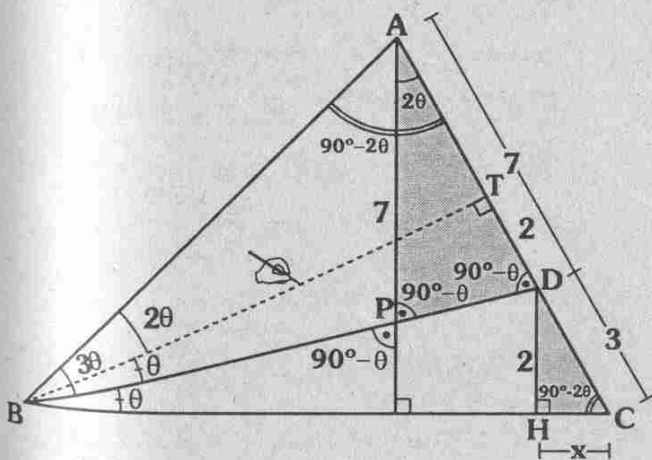


- Piden x .
- $\triangle ABC$: isósceles y como $m\angle ABR = 2\phi$
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = \phi$
- $\triangle APQ$: isósceles, pues $\overline{AT}$ es altura y bisectriz, entonces $PB = BQ$.
- $\triangle PBS \cong \triangle QBH$ (ALA) $\Rightarrow PS = QH = 7$
- $\triangle PSC$ es notable:

$$\therefore x = 16^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 146



- Piden x .
- Completando medidas angulares.

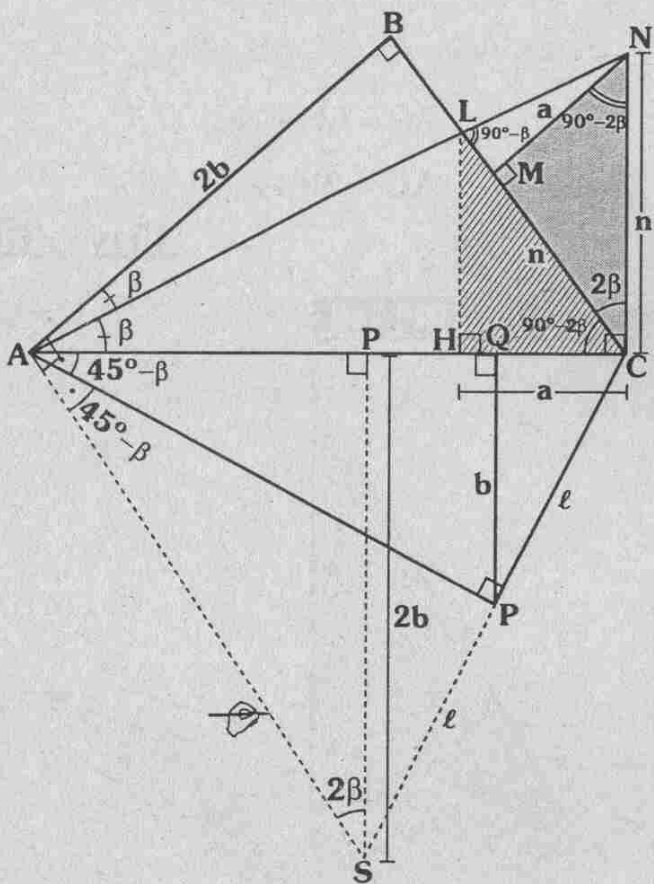
- $m\angle ACB = m\angle BAC = 90^\circ - 2\theta$
 $\Rightarrow m\angle ABC = 4\theta \Rightarrow m\angle DAC = \theta$
- $\triangle PAD$: isósceles $\Rightarrow PA = AD = 7$
- $\triangle ABC$, se traza la altura $\overline{AT}$, la cual es mediana y bisectriz.
 $\Rightarrow TC = TA = 5 \Rightarrow TD = 2$
- Por teorema de la bisectriz: $TD = DH = 2$
- $\triangle DHC$: por teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2^2 = 3^2$$

$$\therefore x = \sqrt{5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 147



- Piden "AC" en función de "a" y "b".
- Notemos que el $\triangle LNC$ es isósceles.
- Trazemos $\overline{LH} \perp AC$.

- $\triangle LHC \cong \triangle NMC$ (ALA) $\Rightarrow HC = a$
- Ya conocemos parte de $\overline{AC}$, faltaría AH.
- Por teorema de la bisectriz:

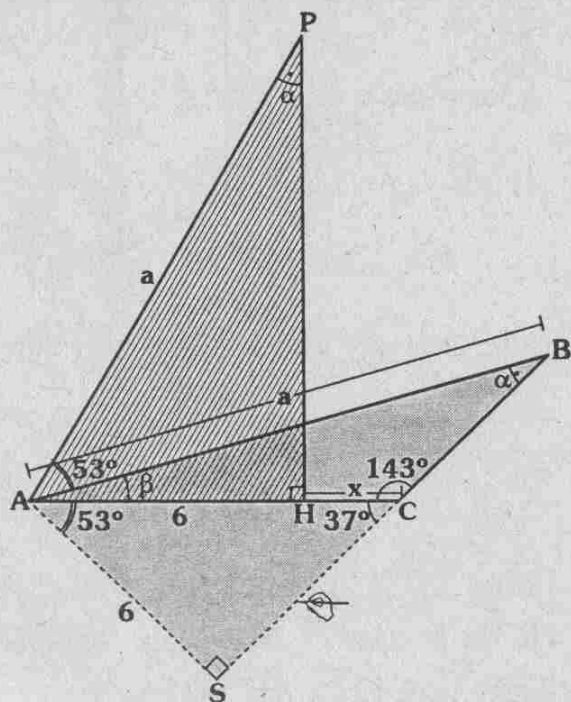
$$AH = AB \quad \dots (I)$$
- Como: $m\angle NAP = 45^\circ$

$$\Rightarrow m\angle PAC = 45^\circ - \beta$$
- Prolongamos $\overline{CP}$ hasta S, tal que:

$$m\angle CAP = m\angle PAS = 45^\circ - \beta$$
- $\triangle CAS$: isósceles $\Rightarrow CL = CN$ y $CP = PS$
- Se traza: $\overline{ST} \perp \overline{AC}$
- $\triangle STC$: $\overline{PQ}$ es base media $\Rightarrow ST = 2b$
- $\triangle ABC \cong \triangle STA$ (ALA)
 pues $AC = AS \Rightarrow AB = 2b$

$$\therefore AC = 2b + a$$

Clave B

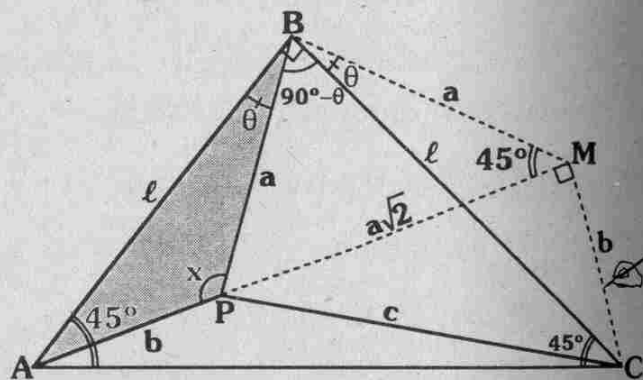
RESOLUCIÓN N° 148

- Piden x .
- Notamos: $\alpha + \beta = 37^\circ$
 $\Rightarrow m\angle APH = m\angle ABC = \alpha$
- $\triangle AHP \cong \triangle ASB$ (ALA) $\Rightarrow AH = AS = 6$
- $\triangle ASC$: notable de $37^\circ \Rightarrow AC = 10$

$$x + 6 = 10$$

$$\therefore x = 4$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 149

- Piden x .
- Dato: $c^2 = 2a^2 + b^2$
- Como $AB = BC$ construimos:
 $\triangle BMC \cong \triangle BPA$, tal que $BM = BP = a$
 y $MC = AP = b$, con ello $m\angle MBC = \theta$
 y $m\angle PBM = 90^\circ \Rightarrow PM = a\sqrt{2}$
- Del dato, notamos:
 $(PC)^2 = (PM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow m\angle PMC = 90^\circ$
- De la congruencia: $x = 45^\circ + 90^\circ$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 150

• Piden θ .

• Como $m\angle BAC = 2(m\angle BAP)$, se traza la bisectriz del $\angle BAC$ y trazamos la perpendicular BL a dicha bisectriz, prolongamos $\overline{BL}$, hasta que corte a $\overline{AC}$.

• $\triangle BAM$: isósceles

• Por teorema de la bisectriz:

$$BP = BL = a$$

• Como $\triangle BAM$ isósceles $\Rightarrow BL = LM = a$

• Se traza la mediana $\overline{BN}$ relativa a $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$.

Por teorema: $AN = NC = BN = 2a$

• $\triangle NBM$: isósceles

• $\triangle ALM$: $\theta + 4\theta = 90^\circ$

$$\therefore \theta = 18^\circ$$

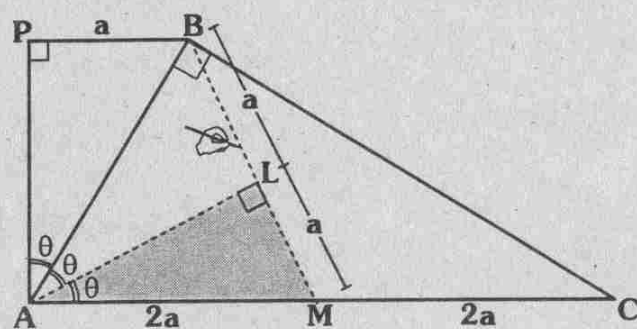


Observación

Este problema tiene otra solución, de la observación dada en la pág. 75

Puede ser que $\overline{BM}$ sea mediana, pues $BM = \frac{AC}{2}$

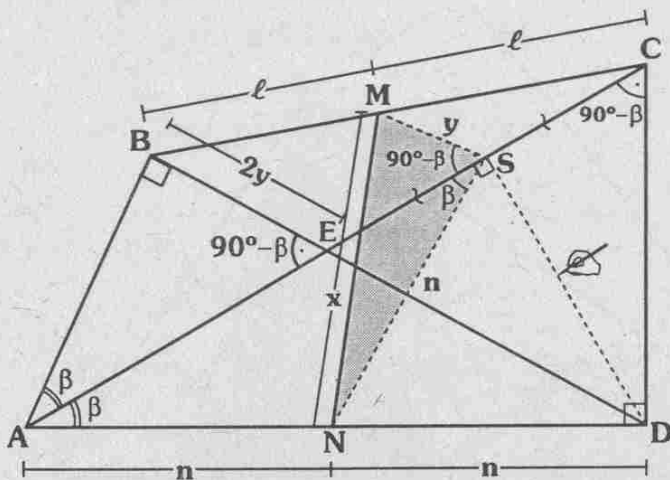
La figura quedaría así:



En este caso, $\triangle ALM$ es notable: $\theta = 30^\circ \Rightarrow$ Los valores de θ son: 18° ó 30° .

Clave B

RESOLUCIÓN N° 151



- Piden x .
- Dato: $(BE)^2 + (AD)^2 = 20$
- Notemos primero que el $\triangle EDC$ es isósceles, pues:

$$m\angle CED = m\angle ACD = 90^\circ - \beta$$

- Busquemos la forma de aprovechar la presencia de los puntos medios, para ello se traza $\overline{DS} \perp \overline{EC}$, entonces: $ES = SC$.

- $\triangle BEC$: $\overline{MS}$ es base media

$$\Rightarrow MS = \frac{BE}{2} = y \quad ; \quad \overline{BE} \parallel \overline{MS}$$

- $\triangle ASD$: $\overline{SN}$ es mediana

$$\Rightarrow AN = ND = NS \quad ; \quad m\angle ASN = \beta$$

- Como:

$$m\angle MSN = 90^\circ \Rightarrow x^2 = y^2 + n^2$$

- Por dato:

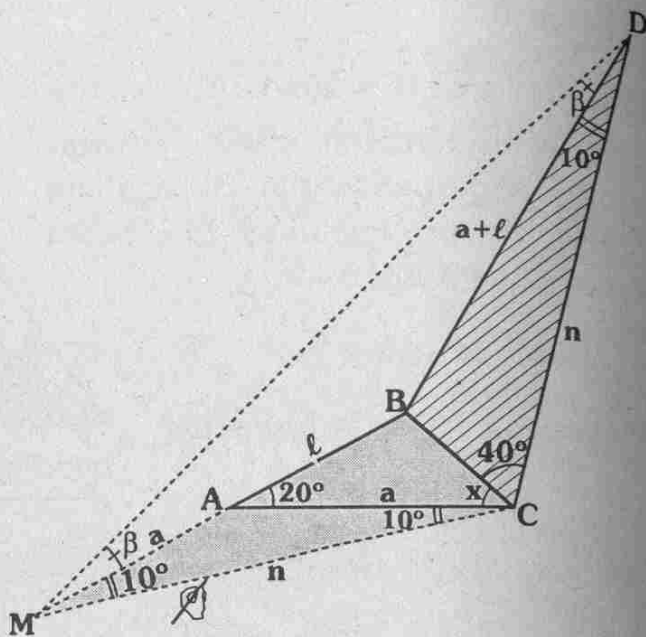
$$(2y)^2 + (2n)^2 = 20$$

$$\Rightarrow y^2 + n^2 = 5$$

$$\therefore x = \sqrt{5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 152



- Piden x .

- Dato: $BD = AB + AC$

- Para aprovechar el dato, prolongamos $\overline{BA}$ hasta M tal que:

$$AM = AC \Rightarrow \triangle MAC \text{ isósceles}$$

- Luego:

$$m\angle AMC = m\angle ACM = 10^\circ$$

- Como:

$$BM = BD \Rightarrow \triangle MBD \text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle DMB = m\angle MDC \Rightarrow MC = CD$$

- $\triangle MBC \cong \triangle DBC$ (LLL)

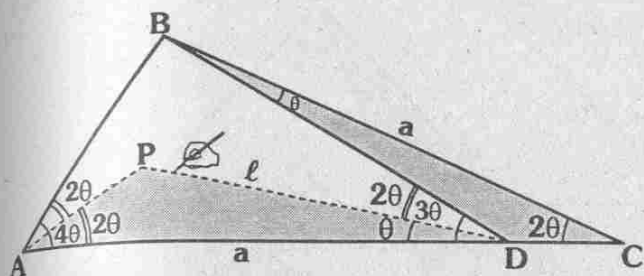
$$\Rightarrow x + 10^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 153

Paso 1



- Piden θ .
- Como $AD = BC$, busquemos la forma de aprovechar dicho dato, para ello tracemos:

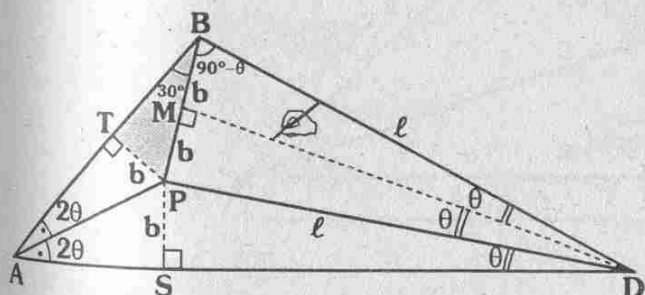
$$\triangle APD \cong \triangle CDB$$

$$\text{Tal que: } m\angle PAD = m\angle BCD = 2\theta$$

$$m\angle PDA = m\angle DBC = \theta$$

$$\Rightarrow BD = DP$$

Paso 2



- Trabajemos en el $\triangle ABD$.
- Como $\triangle DPB$ es isósceles de base $\overline{PB}$ se traza la altura DM , la cual también es mediana y bisectriz.
- Por teorema de la bisectriz:

$$PM = PS = PT$$

$$\angle PTB: \text{ notable de } 30^\circ$$

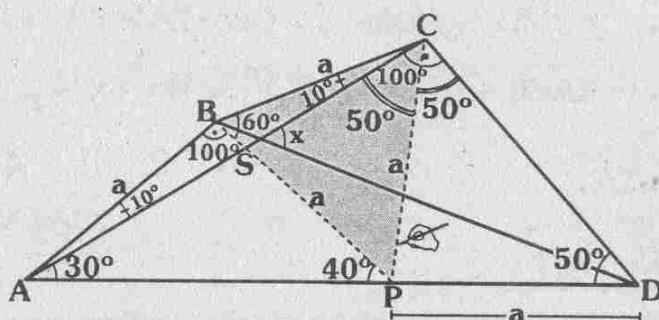
$$\text{En } \triangle ABD:$$

$$4\theta + 3\theta + 30^\circ + 90^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 10$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 154



- Nos piden x .
- Se traza $\overline{BP}$ tal que $BP = BA = a$
 $\Rightarrow m\angle APB = 40^\circ \Rightarrow m\angle PBC = 60^\circ$
- $\triangle PBC$: es equilátero, luego:
 $m\angle ACP = 50^\circ$
- $\triangle PCD$: isósceles $\Rightarrow PD = PC = a$
- $\triangle BPD$: isósceles, como $m\angle BPA = 40^\circ$
 $\Rightarrow m\angle ADB = m\angle PBD = 20^\circ$
- $\triangle ASD$:
 $x = 30^\circ + m\angle ADB$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 155

- Piden x .

$$\triangle ABC: \beta + 14x = 180^\circ \quad \dots (I)$$

- Como: $\frac{m\angle DBC}{7x} = \frac{m\angle ABD}{3x} + \frac{m\angle ACB}{4x}$

- Nos conviene trazar $\overline{DM}$, tal que:

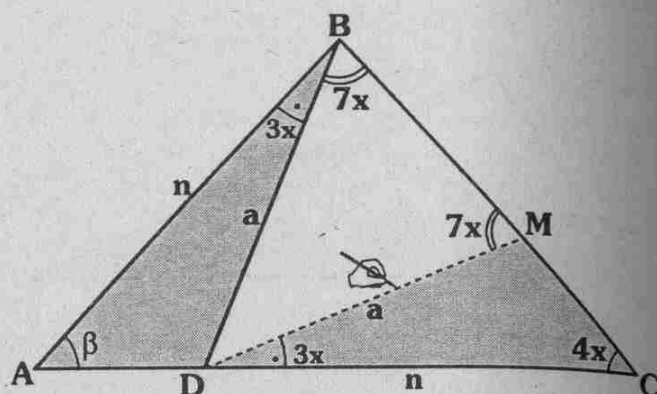
$$m\angle CDM = 3x \Rightarrow m\angle DMB = 7x$$

- $\triangle BMD$ isósceles $\Rightarrow DB = DM$

- $\triangle ABD \cong \triangle CDM$ (LAL) $\Rightarrow \beta = 4x$

- En (I): $4x + 14x = 180^\circ$

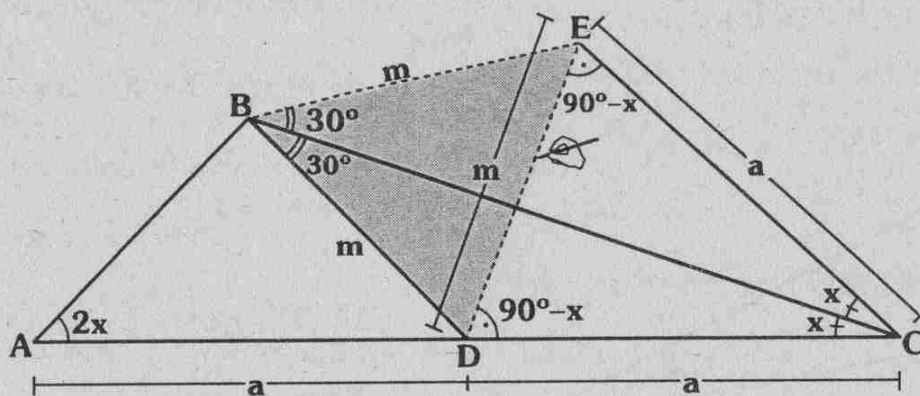
$$\therefore x = 10^\circ$$



Clave A

RESOLUCIÓN N° 156

Paso 1



- Piden x .

- Dato: $m\angle ABD > 90^\circ$ y $AD = DC = a$

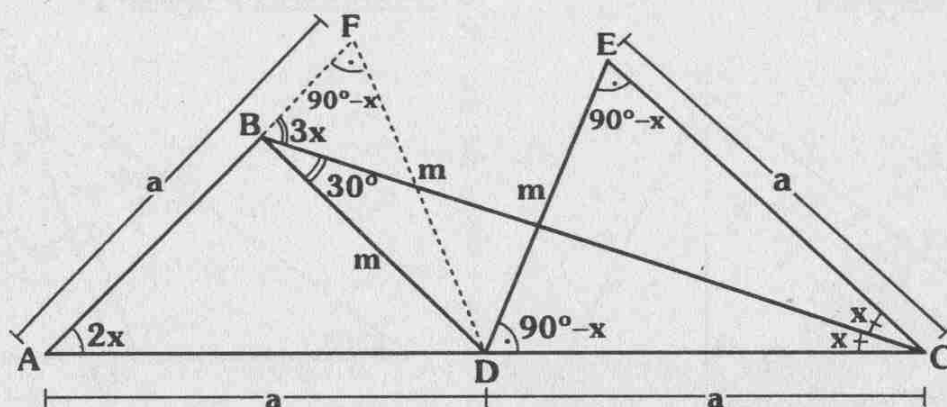
- Trazamos $\overline{CE}$ tal que: $m\angle BDE = x$ y $m\angle CBE = 30^\circ \Rightarrow \triangle BCD \cong \triangle BCE$

- Con ello tendremos: $m\angle BAD = m\angle DCE = 2x$

- $\triangle DBE$: equilátero

- Notar que tenemos ahora: $m\angle BAD = 2x$ y $AD = a$ y por otra parte: $m\angle DCE = 2x$ y $DC = a$.

Paso 2



- Como $m\angle ABD = 2(m\angle ACB)$, se traza $\overline{DF}$ tal que:
 $m\angle AFD = 90^\circ - x \Rightarrow \triangle AFD$: isósceles y $\triangle DAF \cong \triangle DCE$ (LAL) $\Rightarrow FD = DF = m$
- $\triangle BDF$: isósceles $\Rightarrow 30^\circ + 3x = 90^\circ - x$

$$\therefore x = 15^\circ$$

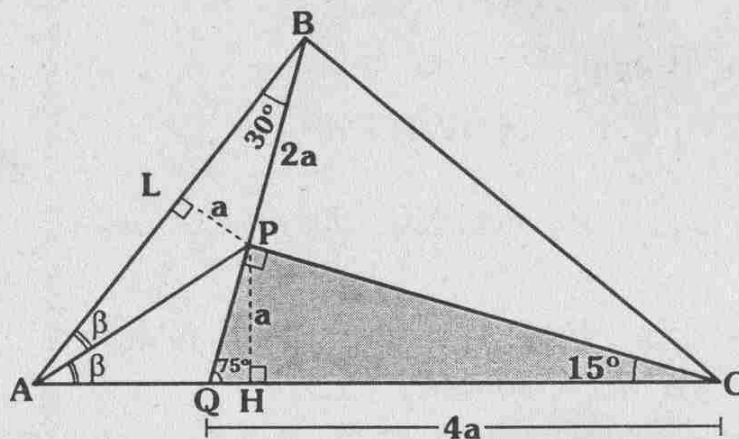
Clave  A

Nata

Otra solución es cuando $F=B$, en este caso: $x=30^\circ$

RESOLUCIÓN N° 157

- Nos piden β .
 - Dato: $QC = 2(PB)$
 - En $\triangle QPC$ por teorema:
 $QC = 4(PH) \Rightarrow PH = a$ y $QC = 4a$
 - Del dato: $PB = 2a$
 - Por teorema de la bisectriz: $PH = PL = a$
 - $\angle BLP$: notable de 30°
 - $\triangle ABQ$: $2\beta + 30^\circ = 75^\circ$
-



$$\therefore \beta = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$$

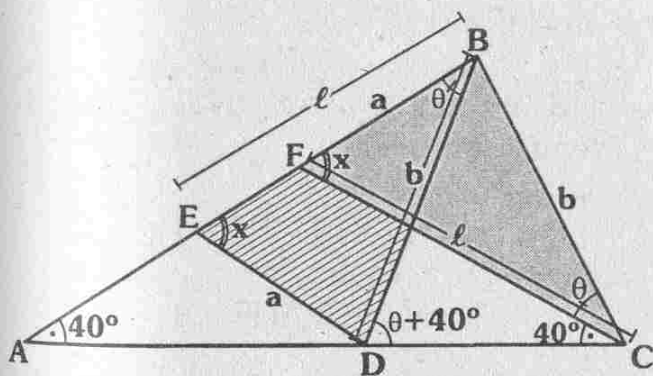
Clave C

- Piden x .
- Como $\triangle ABD$ y $\triangle CBE$ son equiláteros
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBE$ (LAL)
 $\Rightarrow AD = EC = 22$ y $m\angle BEC = 120^\circ$
- Trazamos $\overline{CD}$ y ubicamos su punto medio "L".
- Por teorema de la base media en:
 $\triangle ACD$: $CM = 11$ y $\overline{ML} \parallel \overline{AE}$
 $\triangle DCE$: $CN = 11$ y $\overline{NL} \parallel \overline{EC}$
- Como $m\angle BEC = 120^\circ$, por ángulo entre paralelas: $m\angle MLN = 120^\circ$
- $\triangle MLN$ por teorema:

$$x = 11\sqrt{3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 161

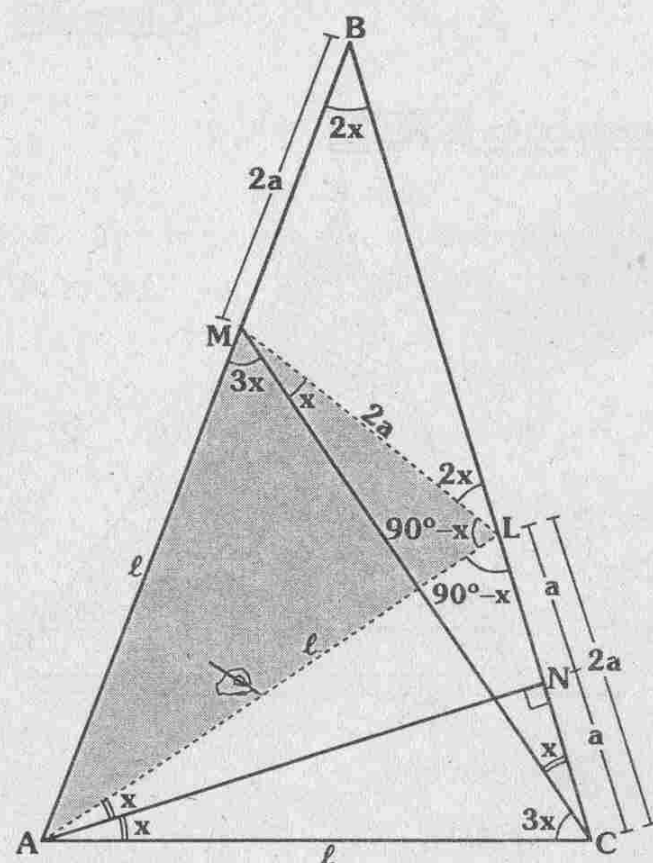


- Piden x .
- De los datos, deducimos rápidamente:
 $\triangle FBC \cong \triangle EDB$ (LLL)
 $\Rightarrow m\angle DEB = m\angle CFB = x$;
 $m\angle BCF = m\angle EBD = \theta$
- Como $\triangle DBC$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle BDC = m\angle DCB = 40^\circ + \theta$

- Luego: $m\angle DCF = 40^\circ$
- $\triangle AFC$, por ángulo exterior:
 $x = 40^\circ + 40^\circ$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 162



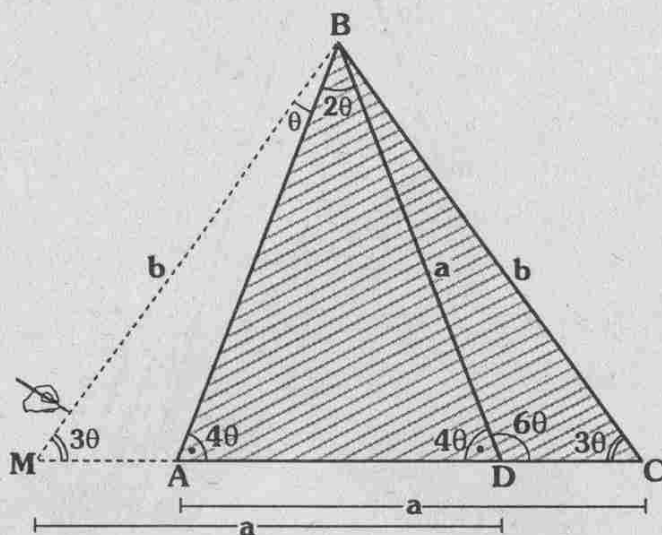
- Piden x .
- Como $AB = BC$ y $m\angle NAC = x$
 $\Rightarrow m\angle ACB = m\angle CAB = 90^\circ - x$
Luego: $m\angle ABC = 2x$
- En $\triangle BMC$, como:
 $m\angle MBC = 2(m\angle MCB)$
nos conviene trazar $\overline{ML}$, tal que
 $m\angle CML = x$, entonces:
 $MB = ML = LC = 2a$

- Como $LN = NC \Rightarrow \triangle ALC$ isósceles, con $AL = AC$ y $m\angle ALC = 90^\circ - x$.
- $\triangle ALM \cong \triangle ALC$ (LAL)
 $\Rightarrow AC = AM \Rightarrow m\angle ACM = 3x$
- $\triangle ANC$: $x + 4x = 90^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$

Clave C

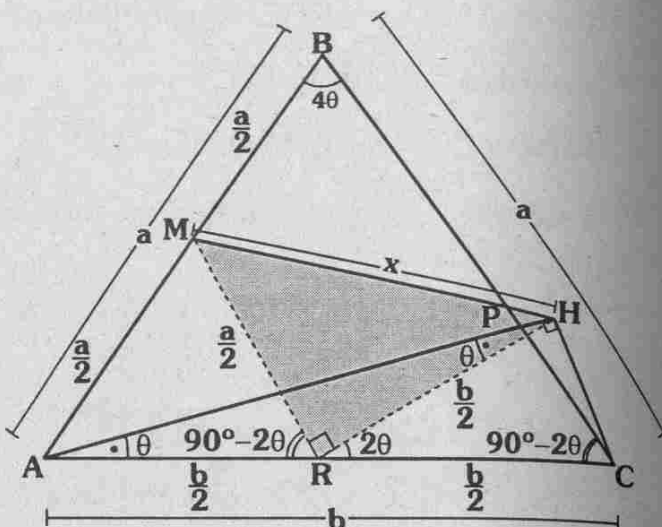
RESOLUCIÓN N° 163



- Nos piden θ .
- En $\triangle DBC$ como:
 $m\angle BDC = 2(m\angle DCB)$
trazamos $\overline{BM}$ tal que: $m\angle BMD = 30^\circ$,
entonces $MB = BC$ y $MD = DB$.
- $\triangle BMD \cong \triangle BCA$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BDM = m\angle BAC = 40^\circ$
- En "D": $40 + 60 = 180^\circ$
 $\therefore \theta = 18^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 164



- Piden x , en función de "a" y "b".
- Se ubica "R", punto medio de $\overline{AC}$.
- $\overline{MR}$ es base media para el $\triangle ABC \Rightarrow MR = \frac{a}{2}$ y $\overline{MR} \parallel \overline{BC}$, luego
 $m\angle MRA = 90^\circ - 20^\circ$.
- $\overline{HR}$ es mediana relativa a la hipotenusa en:

$$\triangle AHC \Rightarrow HR = HA = HC = \frac{b}{2}$$

$$\text{y } m\angle AHR = \theta$$

- Como:
 $m\angle HRC = 20^\circ \Rightarrow m\angle MRH = 90^\circ$
- Finalmente en el $\triangle MRH$:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 165

- Nos piden x en función de "a" y "b".
- Al prolongar $\overline{MN}$, nos damos cuenta:

$$m\angle CMN = 2\beta \quad y$$

$$m\angle CNT = 90^\circ - \beta$$

Nos conviene trazar $\overline{CS}$ tal que:

$$m\angle NSC = 90^\circ - \beta$$

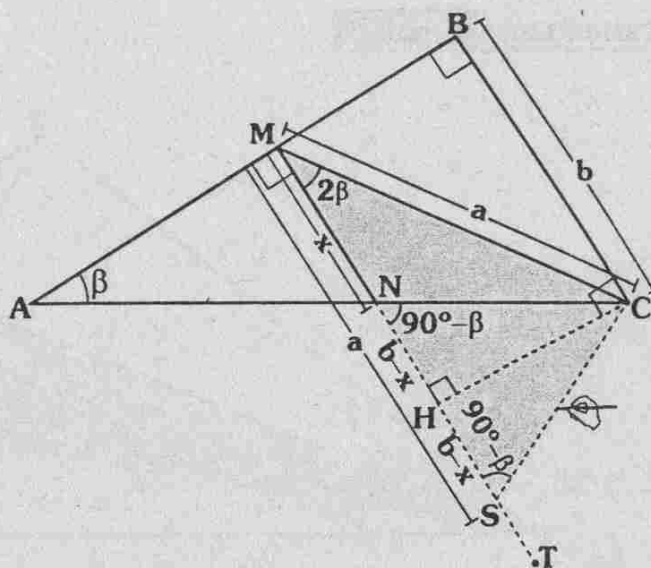
- $\triangle CMS$ y $\triangle NSC$: isósceles, luego:

$$SM = MC = a$$

- En $\triangle NCS$, se traza la altura $\overline{CH}$, la cual también es mediana, como $BC = MH = b \Rightarrow NH = b - x$, luego: $NH = HS = b - x$

- Finalmente: $MH + HS = MS \Rightarrow b + b - x = a$

$$\therefore x = 2b - a$$

**Clave D****RESOLUCIÓN N° 166**

- Nos piden x .
- Del gráfico, en el $\triangle ABC$: $\alpha + \theta = 70^\circ$
- Trazamos $\overline{RM}$ tal que:

$$m\angle MRC = \theta$$

$$\Rightarrow m\angle RMB = \alpha + \theta \Rightarrow RB = RM$$

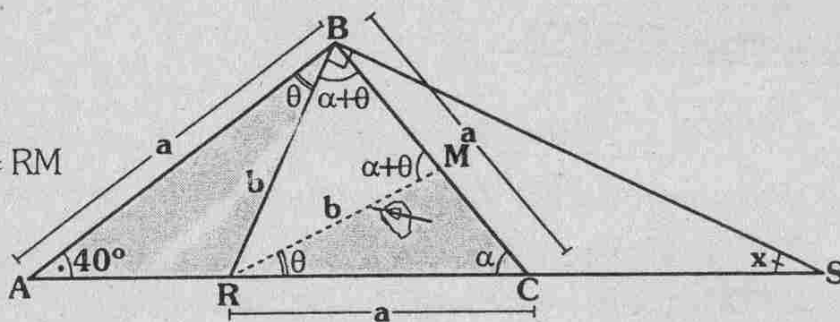
- $\triangle ABR \cong \triangle CRM$ (LAL)

$$\Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

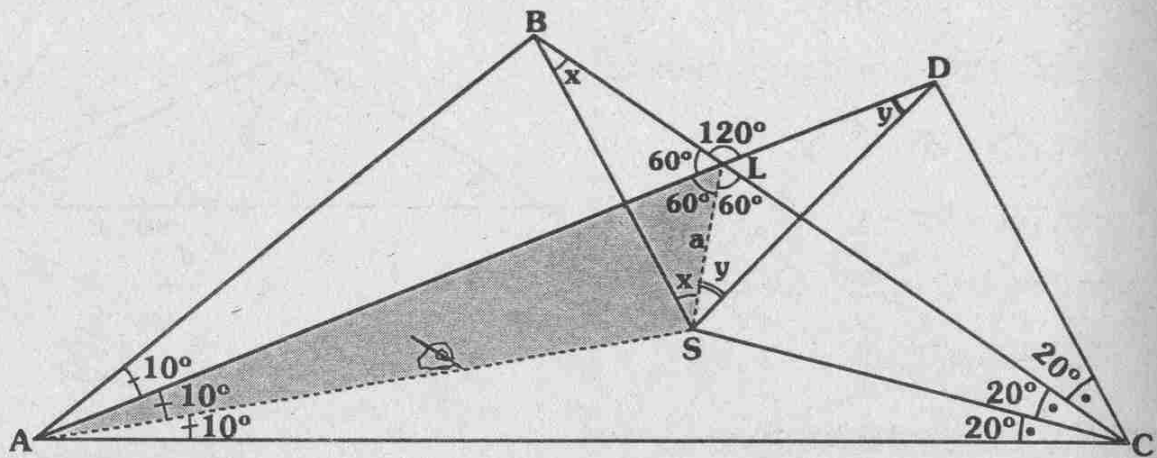
- Como $\alpha = 40^\circ \Rightarrow BC = a$, luego el $\triangle RBC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle CRB = 70^\circ$

- $\angle RBS$: $x + m\angle CRB = 90^\circ$

$$\therefore x = 20^\circ$$

**Clave B**

RESOLUCIÓN N° 167



- Piden $x + y$.
- Por la observación dada en la pág. 73, en $\triangle ALC$, como $\overline{AS}$ y $\overline{CS}$ son bisectrices
 $\Rightarrow m\angle ALS = m\angle CLS = 60^\circ$
- $\triangle ALB \cong \triangle ALS$ (ALA) $\Rightarrow BL = LS \Rightarrow m\angle BSL = x$
- $\triangle CLS \cong \triangle CLD$ (ALA) $\Rightarrow LS = LD \Rightarrow m\angle LSD = y$
- En $\angle BSD$: $2x + 2y = 120^\circ$

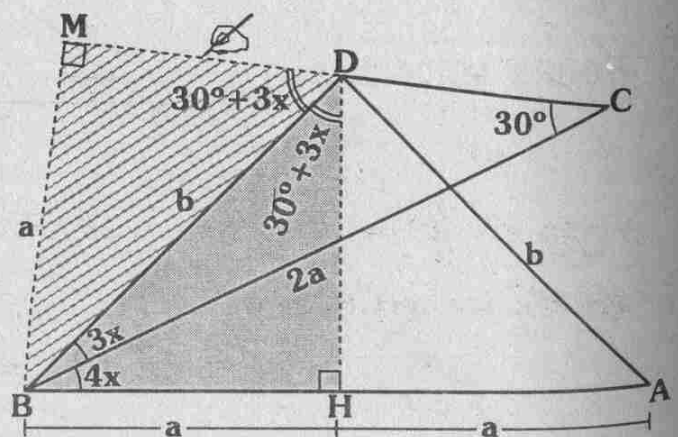
$$\therefore x + y = 60^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 168

- Piden x .
- Para aprovechar la presencia del "30°" y $AB = BC$, primero en el $\triangle ADB$ que es isósceles ($DB = DA$), se traza la altura $\overline{DH} \Rightarrow BH = HA = a$; se traza $\overline{BM} \perp \overline{CD}$ (M en $\overline{CD}$).
- $\angle BMC$ notable de 30°

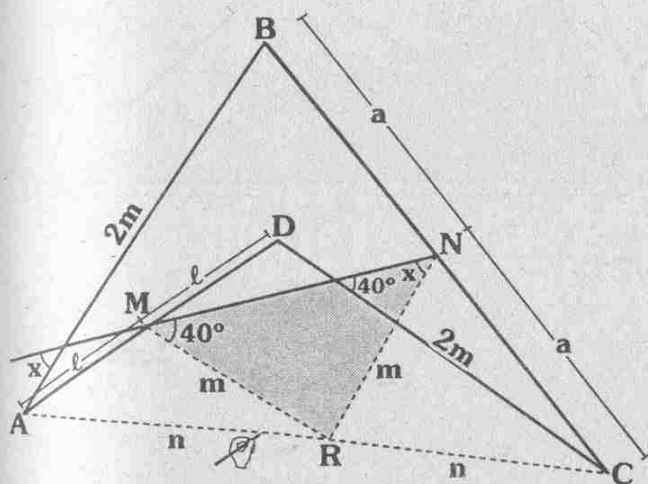
$$\Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = a$$



- $$BM = BH \Rightarrow m\angle MDB = m\angle BDH$$

$$\triangle BHD: \quad 7x + 30^\circ + 3x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 6^\circ$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 169**

- Piden **x**.
- Dato $AB = CD$
- Se ubica R, punto medio de $\overline{AC}$,
- En $\triangle ADC$, $\overline{MR}$ es media

$$\Rightarrow MR = \frac{CD}{2} \quad y$$

$\overline{MR} // \overline{DC}$

- En $\triangle ABC$, $\overline{RN}$ es base media

$$\Rightarrow RN = \frac{AB}{2} \quad \text{y} \quad \overline{RN} \parallel \overline{AB}$$

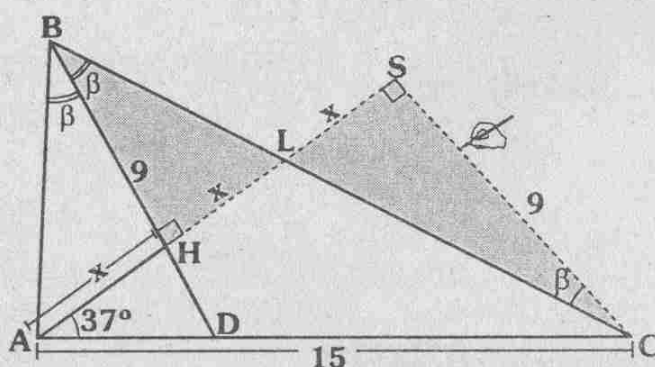
- $$-m\angle RMN = 40^\circ ; \quad y$$

$$-m \nabla RNM = x$$

- También: $MR = RN$

- ΔMRN : isósceles

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave **D****RESOLUCIÓN N° 170**

- Piden $\mathbf{x}$.
- Se prolonga $\overline{AH}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overline{AH}$, con S en $\overline{AH}$.

- $\triangle ASC$: notable de 37°

$$\Rightarrow CS = 9 \quad y$$

$$AS = 12$$

- $\triangle ABL$: isósceles $\Rightarrow AH = HL = x$

- $\triangle BHL \cong \triangle CSL \Rightarrow HL = LS = x$

- Como $\underbrace{AS}_{3x} = 12$

$$\therefore x = 4$$

Clave **E**

• Piden x.

- Dato: $AD = DB = DC$

- Como:

$$\alpha + \beta = 210^\circ \Rightarrow m\angle ALD = 30^\circ$$

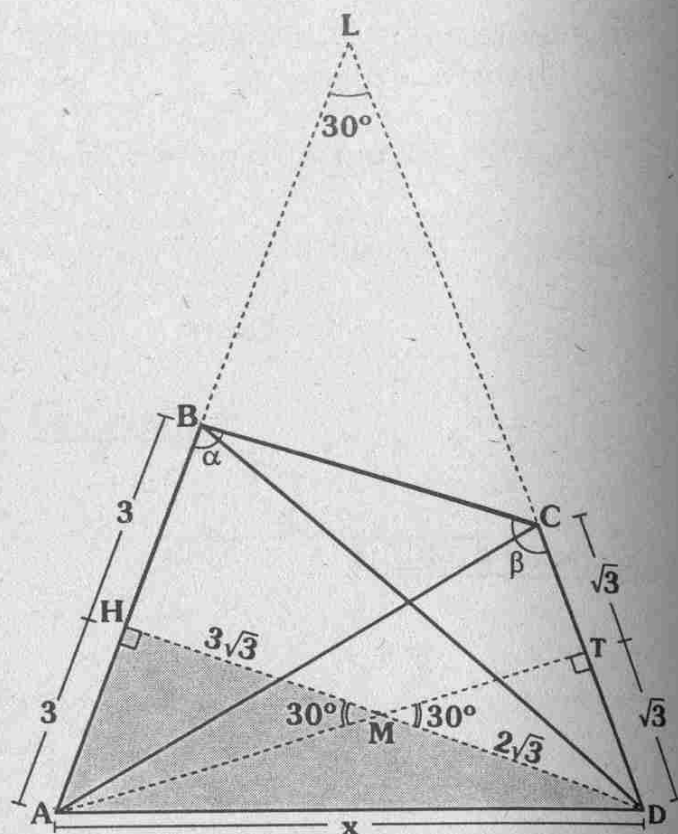
- En los triángulos isósceles ADB y DAC, se trazan las alturas $\overline{DH}$ y $\overline{AT} \Rightarrow AH = HB = 3$ y $CT = TD = \sqrt{3}$.

- $\triangle AHM$ y $\triangle MTD$: notable de 30°

$$\Rightarrow HM = 3\sqrt{3} \quad y$$

$$MD = 2\sqrt{3}$$

- $\triangle AHD$: $x^2 = 3^2 + (5\sqrt{3})^2$

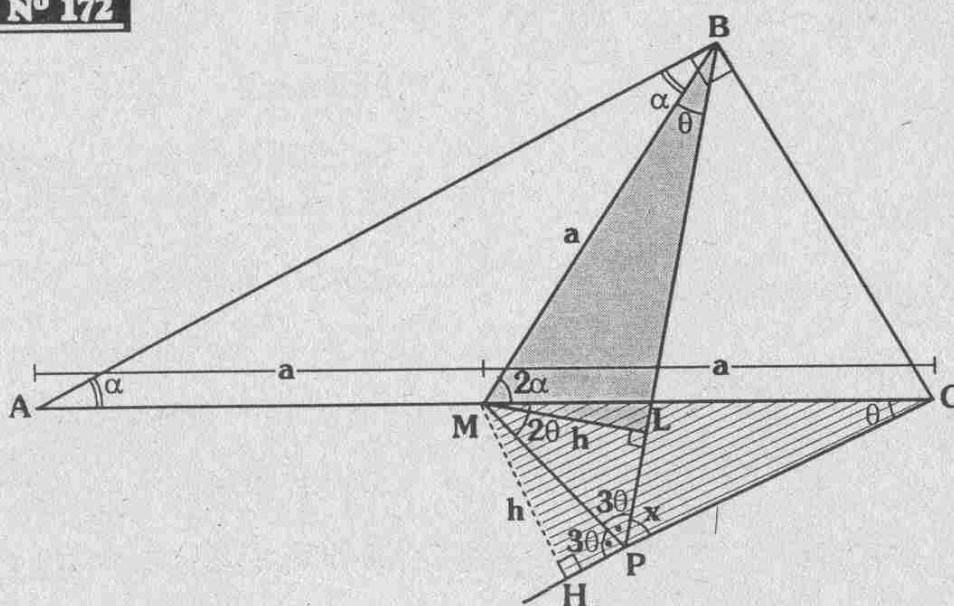


$$\therefore x = 2\sqrt{21}$$

Clave D

- Piden $\mathbf{x}$ en función de α

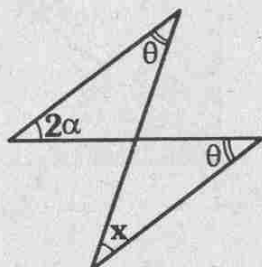
- $\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa, por teorema: $AM = MC = MB$
- Por teorema de la bisectriz: $MH = ML$



$$\triangle MLB \cong \triangle HMC$$

$$\Rightarrow m\angle MBP = \theta$$

Del gráfico:



$$x + \theta = 2\alpha + \theta$$

$$\therefore x = 2\alpha$$

Clave **C**

- Se prolonga $\overline{BC'}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en N, $\triangle ABN$ es isósceles

$$\Rightarrow AB = AN$$

- $\triangle CND$: isósceles $\Rightarrow m\angle DCN = x$

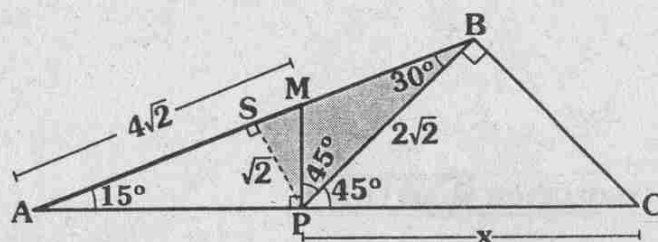
- En "C":

$$90^\circ + 2x + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 174



- Piden x .
- En $\triangle APM$, por teorema $AM = 4(PS)$

$$\Rightarrow PS = \sqrt{2}$$

- $\triangle PSB$: notable de 30°

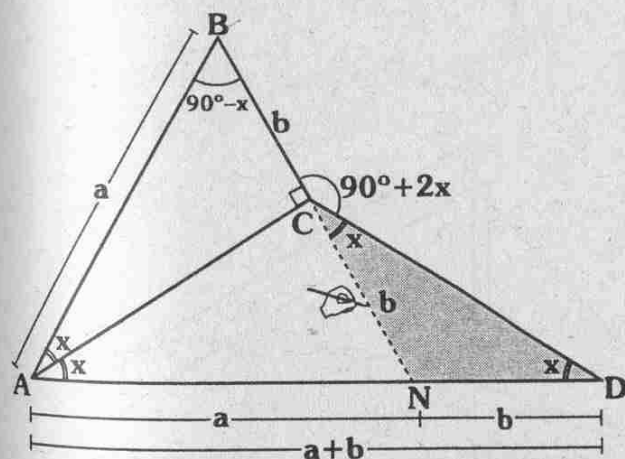
$$\Rightarrow PB = 2\sqrt{2}$$

- $\triangle PBC$: notable de 45° , como $PB = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = 4$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 173



- Piden x .
- De los datos:

$$m\angle ABC = 90^\circ - x$$

$$\Rightarrow m\angle ACB = 90^\circ$$

RESOLUCIÓN N° 175

- Piden MN
- En $\triangle ABC$ se traza la mediana:

$$BL \Rightarrow AL = LC = BN$$

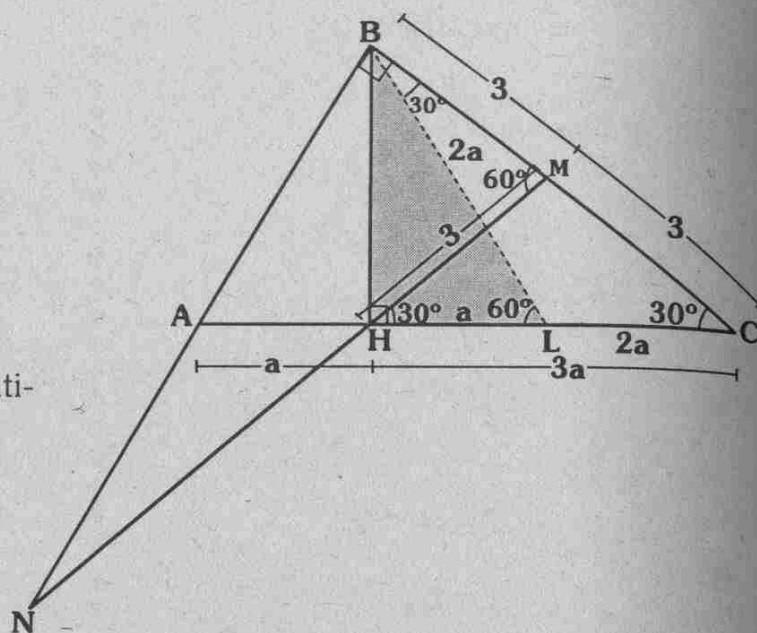
- $\triangle BHL$: notable de 30° y 60°
 $\Rightarrow m\angle BCH : 30$

- En $\triangle BHC$: $\overline{HM}$ es mediana relativa a $\overline{BC} \Rightarrow MB = MC = MN$

- $m\angle BMH = 60^\circ$

- $\triangle NBM$: notable de 30° y 60°

$$\therefore MN = 6$$



Clave D

RESOLUCIÓN N° 176

- Nos piden x .
- Por teorema de la base media

$$MR = \frac{BH}{2}$$

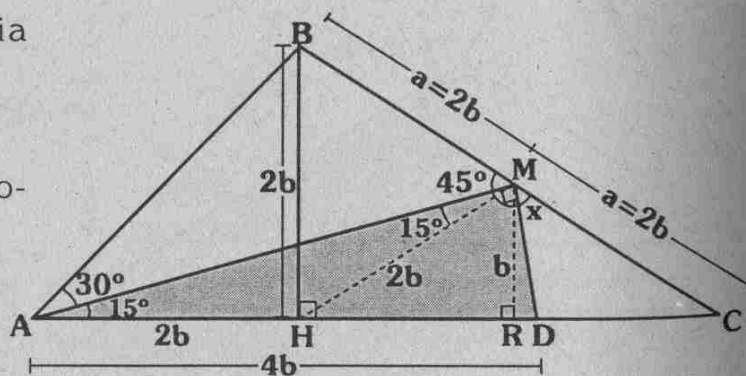
- Luego, como $AD = 4(MR)$, por teorema: $m\angle MAD = 15^\circ$

- $\triangle ABN$: notable de 45°
 $\Rightarrow AH = HB$

- En $\triangle BHC$: $\overline{HM}$ es mediana $\Rightarrow HM = MB = MC$

- $\triangle HMB$: equilátero $\Rightarrow m\angle BMA = 45^\circ$

$$\therefore x = 45^\circ$$



Clave B

Piden x.

- Por teorema de la mediatriz:

$$EA = EB$$

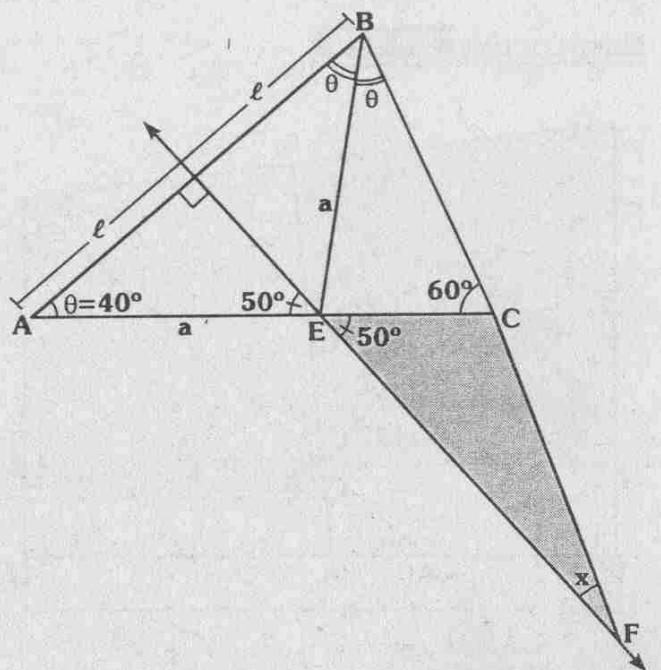
- $\Delta ABC:$

$$3\theta + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 40^\circ$$

- $\Delta ECF:$

$$x + 50^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave **A**

• Nos piden **x**.

- Como $AB \neq CD$, consideremos sin pérdida de generalidad: $CD > AB$

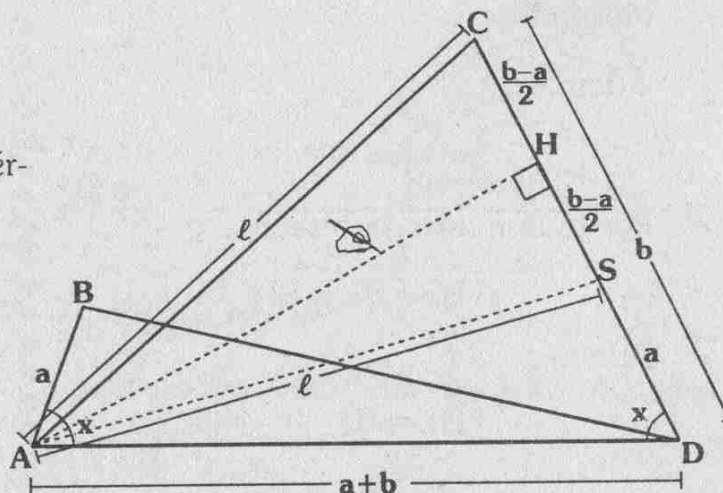
- Se ubica S en $\overline{CD}$ tal que:

$$DS = AB = a$$

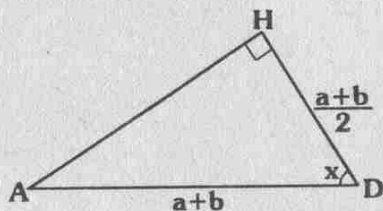
- $\triangle ABD \cong \triangle ASD$ (LAL)

$$\Rightarrow AS = DB = \ell$$

- ΔACS : isósceles, aquí se traza la altura $\overline{AH}$, por teorema: $CH = HS = \frac{b-a}{2}$



- Del gráfico:



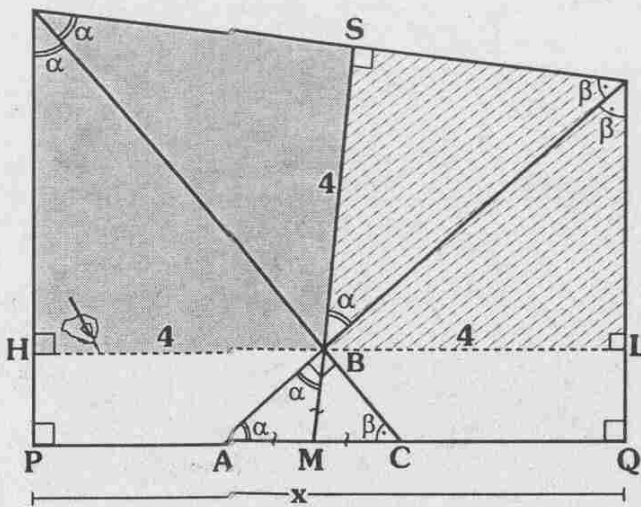
- $\triangle AHD$: notable $\therefore x = 60^\circ$

Clave B

Notes

Si se considera $AB > CD$, se comprueba en forma análoga.

RESOLUCIÓN N° 179



- Piden x .
- $\triangle ABC$: $\overline{BM}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- Además:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$
- Por teorema de la bisectriz:

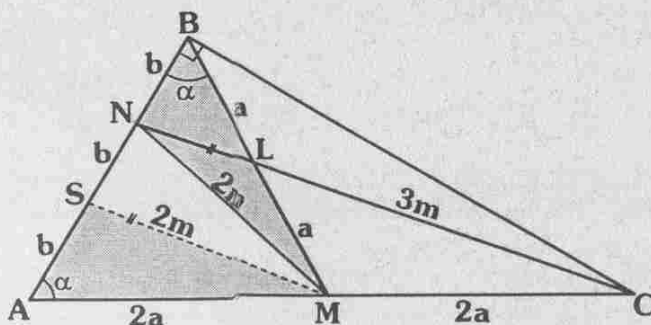
$$BS = BL = BH$$
- Además:

$$HL = PQ$$

$$\therefore x = 8$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 180

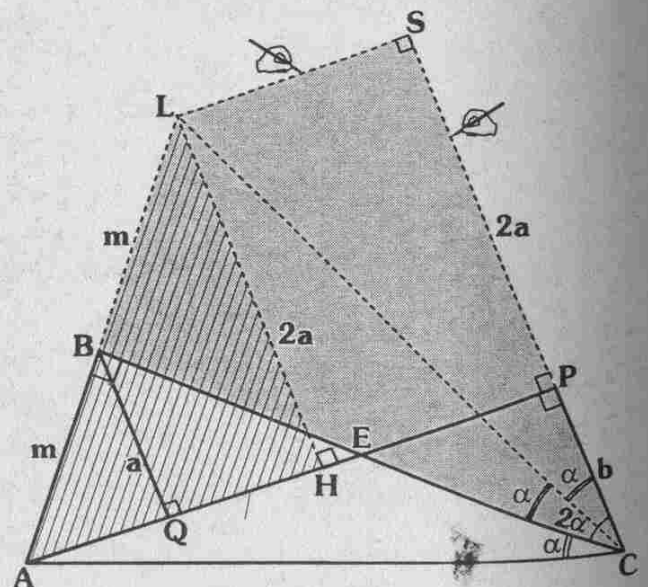


- Piden: $\frac{MN}{CN}$
- Trazamos $\overline{MS} \parallel \overline{NS}$
- $\triangle MSB$: $\overline{NL}$ es base media
 $\Rightarrow BN = NS$
- $\triangle ANC$: $\overline{MS}$ es base media
 $\Rightarrow AS = SN$
- $\triangle ABC$: $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa
 $\Rightarrow m\angle MAB = m\angle MBA$
- $\triangle AMS \cong \triangle BMN$ (LAL) $\Rightarrow MN = MS$

$$\therefore \frac{MN}{CN} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$$

Clave C

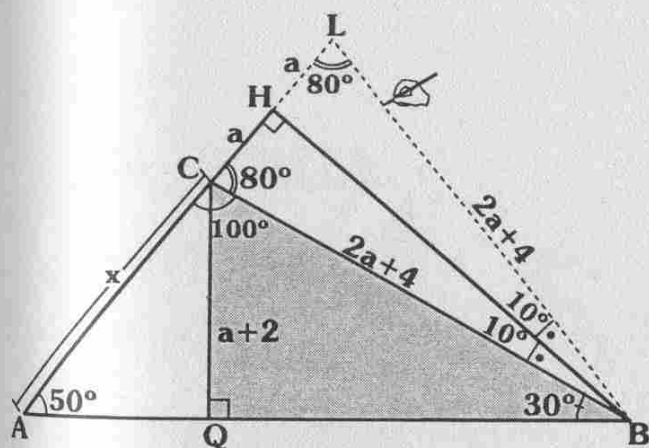
RESOLUCIÓN N° 181



- Piden: BC.
- Trazamos $\overline{CL}$ tal que: $m\angle BCL = \alpha$

- $\triangle LCA$: isósceles $\Rightarrow AB = BL$
- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{AP}$
- $\triangle ALH$: $\overline{BQ}$: base media
 $\Rightarrow LH = 2(BQ)$
- Por teorema de la bisectriz $BC = SC$;
 además $SP = LH$.

$$\therefore BC = 2a + b$$

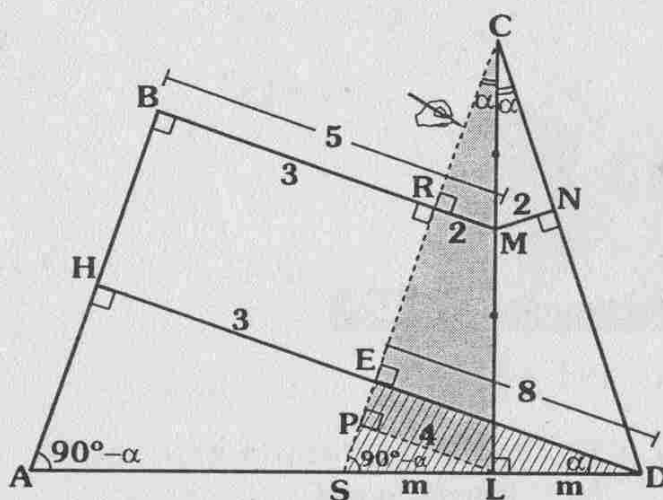
Clave **B****RESOLUCIÓN N° 182**

- Piden x .
- Dato:
 $CQ - CH = 2 \rightarrow CQ = \underbrace{CH}_a + 2$
- En la prolongación de $\overline{AH}$ se ubica el punto L tal que:
 $BC = BL \Rightarrow CH = HL$
- $\triangle CQB$: notable de 30° y 60°
 $\Rightarrow BC = 2(CQ)$

- $\triangle ALB$: isósceles

$$x + 2\cancel{a} = 2\cancel{a} + 4$$

$$\therefore x = 4$$

Clave **D****RESOLUCIÓN N° 183**

- Piden: HD
- Trazamos $\overline{CS} \parallel \overline{AB}$ tal que $\triangle SCB$: isósceles

$$\Rightarrow MN = MR \quad y$$

$$SL = LD$$

- $\triangle CPL$: $\overline{RM}$ es base media
- $\triangle DSE$: $\overline{PL}$ es base media

$$\Rightarrow ED = 2(PL) = 8$$

$$\Rightarrow HD = 3 + 8$$

$$\therefore HD = 11$$

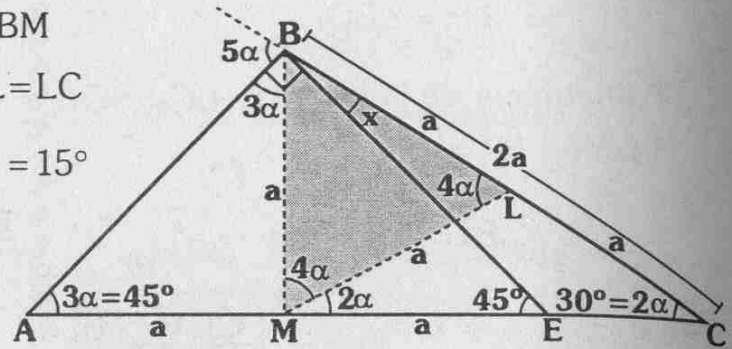
Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 184

- Piden x .
- $\triangle ABE$: $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa.
- $\triangle BMC$: trazamos $\overline{ML}$ tal que $BL=BM$
- Además el $\triangle MLC$ es isósceles $\Rightarrow ML=LC$
- $\triangle MBL$: equilátero $\Rightarrow 4\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$
- $\triangle EBC$:

$$30^\circ + x = 45^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave **E****RESOLUCIÓN N° 185**

- Piden $\mathbf{x}$.
- En $\triangle APB$ se traza la base media $\overline{ML}$, por teorema:

$$PL = LB \quad y$$

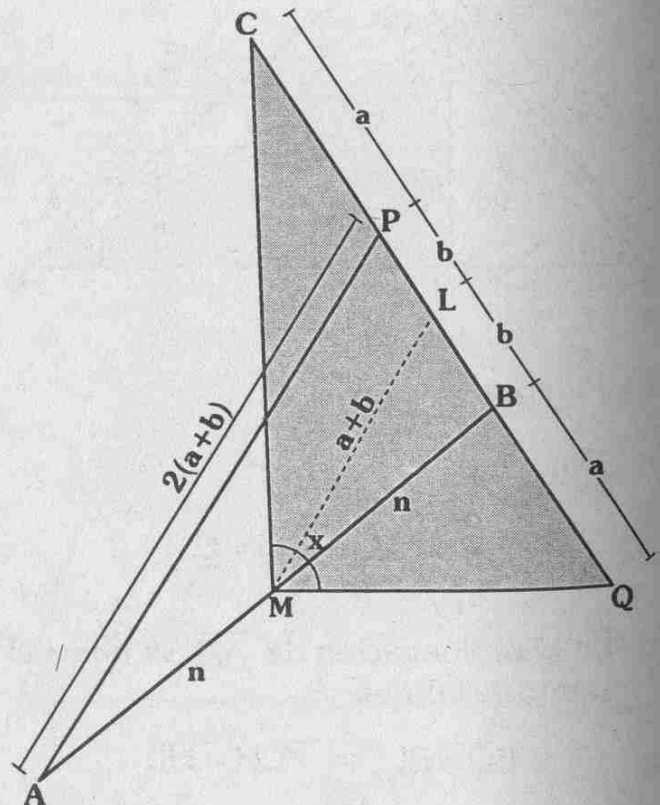
$$ML = \frac{AP}{2}$$

- Como $AP=CQ$

$$\Rightarrow ML = a + b$$
- Como $CL = LQ = ML$, por teorema:

$$m\angle CMQ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

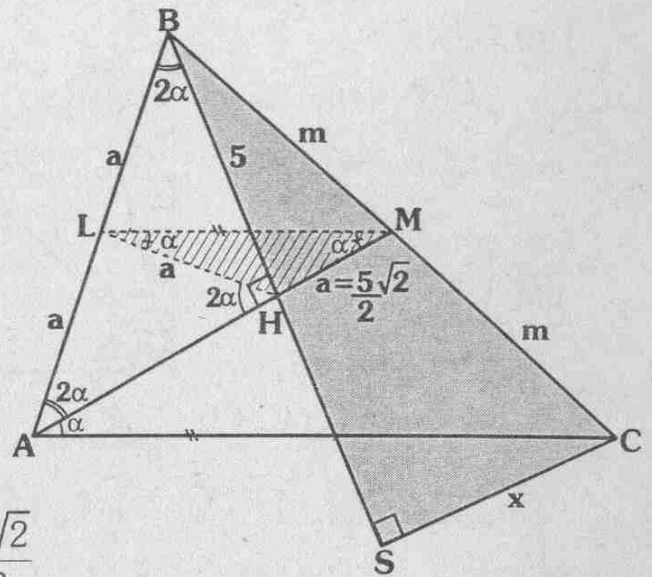


Clave D

RESOLUCIÓN N° 186

- Piden x .
- $\triangle AHB$: $\overline{HL}$ es mediana relativa a la hipotenusa.
 $\Rightarrow HL = AL = LB$
- $\triangle ABC$: $\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow \overline{LM} \parallel \overline{AC}$
 $m\angle LMA = m\angle MAC$
- $\triangle LMH$: isósceles
- $\triangle AHB$: $2\alpha = 45^\circ \Rightarrow 2a = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
- $\triangle BSC$: $\overline{HM}$ es base media

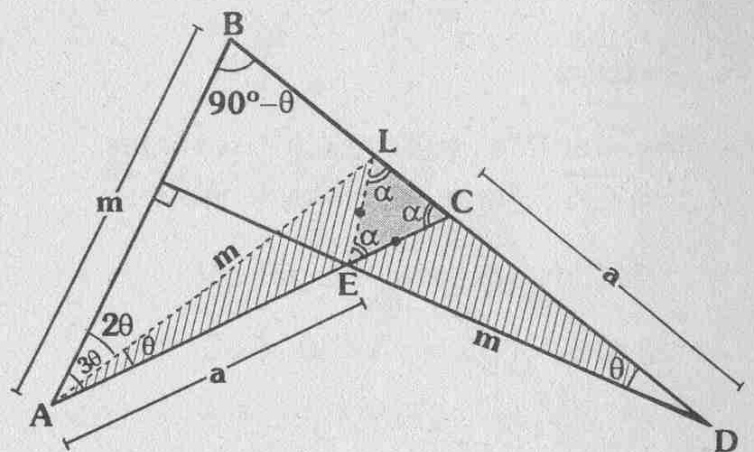
$$x = 5\sqrt{2}$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 187**

- Piden θ .
 - Trazamos $\overline{AL}$ tal que: $AB = AL$
 - $\triangle LAE \cong \triangle EDC$ (LAL)
- $\Rightarrow LE = EC$ y
- $m\angle LEC = m\angle ECL = m\angle ELC$
- $\Rightarrow \triangle LEC$: equilátero ($\alpha = 60^\circ$)
- $\triangle BAC$:

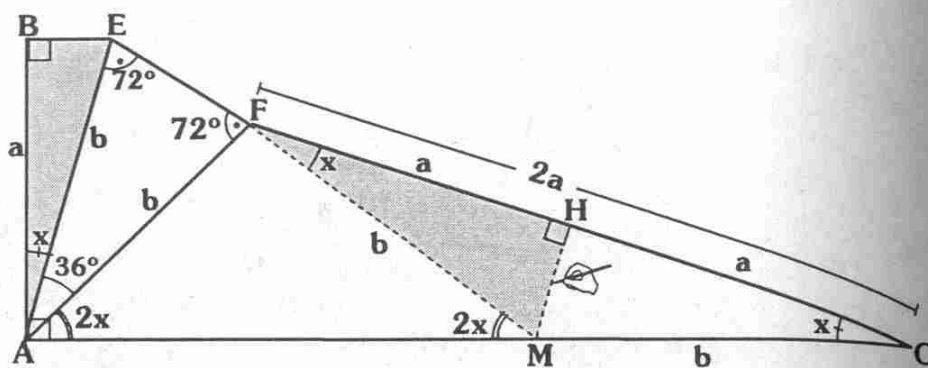
$$3\theta + 90^\circ - \theta + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 15^\circ$$

**Clave A**

RESOLUCIÓN N° 188

- Nos piden x .
- En $\triangle AEC$ notamos:
 $m\angle FAC = 2(m\angle FCA)$
- Nos conviene trazar $\overline{FM}$ tal que:
 $m\angle CFM = x$
 $\Rightarrow FA = FM = MC = b$

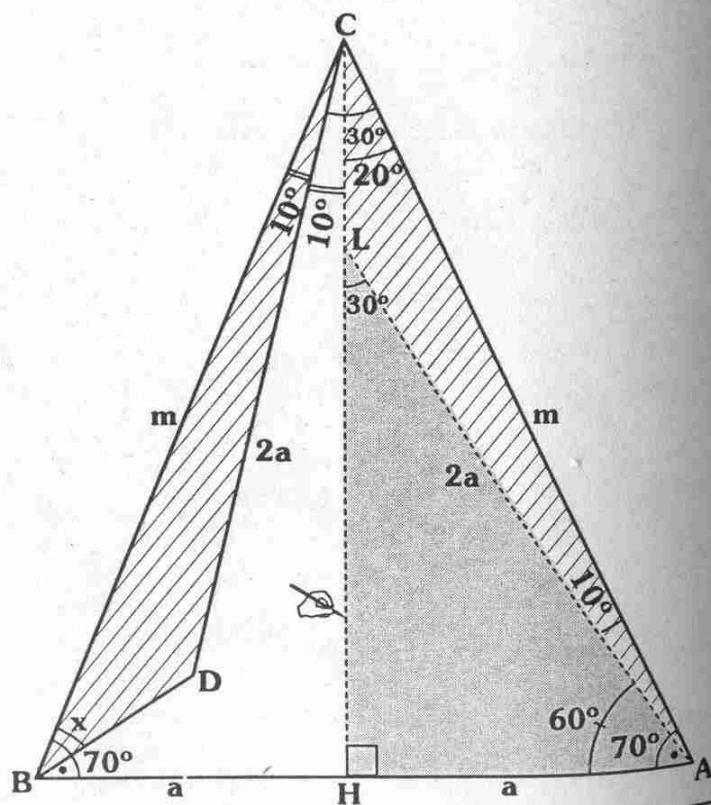


- Se traza : $\overline{MH} \perp \overline{FC} \Rightarrow FH = HC = a$
- $\triangle ABE \cong \triangle FHM$ (ALA) $\Rightarrow AE = b$
- $\triangle AEF$: isósceles $\Rightarrow m\angle EAF = 36^\circ$
- Finalmente:
 $x + 36^\circ + 2x = 90^\circ$
 $\therefore x = 18^\circ$

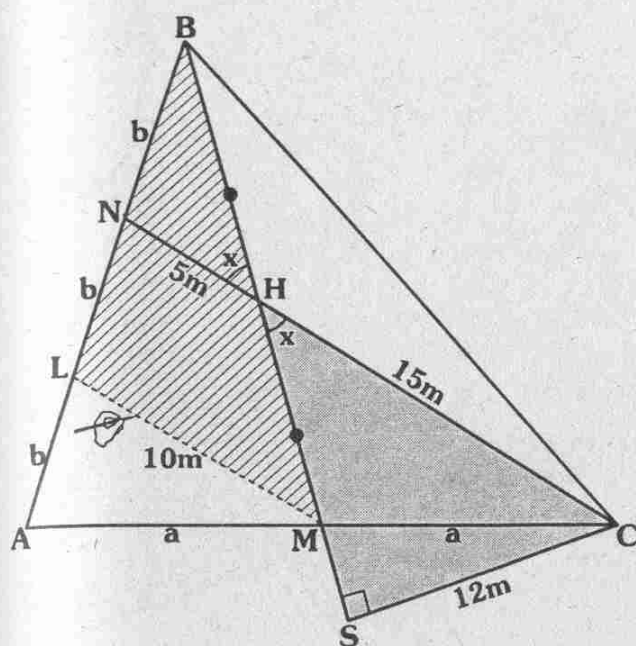
Clave D

RESOLUCIÓN N° 189

- Piden x .
- Se deduce que $\triangle BCA$ isósceles
 $\Rightarrow \overline{CH}$: altura, mediana y bisectriz.
- $\triangle ACH$: trazamos $\overline{AL}$ tal que:
- $\triangle AHL$: notable de 30° y 60°
 $\rightarrow AL = 2(AH)$
- $\triangle BCD \cong \triangle CAL$ (LAL)
 $\therefore x = 20^\circ$



Clave D

RESOLUCIÓN N° 190

- Piden x .
- Trazamos $\overline{ML} \parallel \overline{CN}$
- $\triangle LBM$:

$\overline{NH}$ es base media $\Rightarrow LM = 2(NH)$

- $\triangle NAC$:

$\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow NC = 2(LM)$

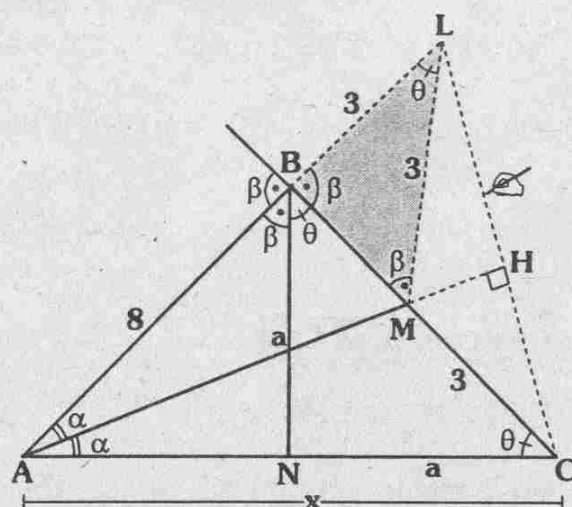
y del dato:

$$\frac{CN}{CS} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{aligned} CN &= 20 \text{ m} \\ CS &= 12 \text{ m} \end{aligned}$$

- $\triangle CSH$: notable de 37° y 53°

$$x = 53^\circ$$

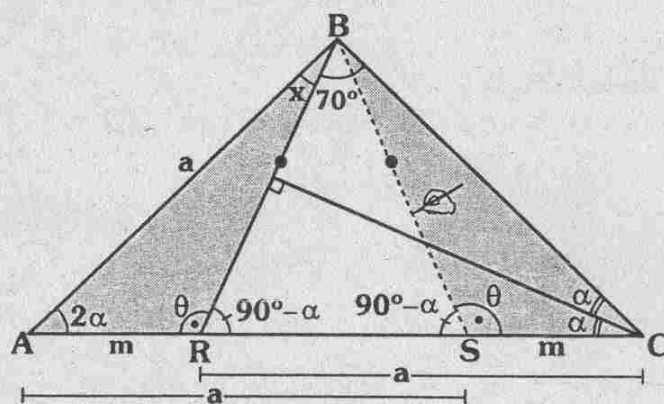
Clave D

RESOLUCIÓN N° 191

- Piden $AC = x$.
- En la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto L tal que: $LA = LC$.
 $\Rightarrow m\angle ALM = m\angle MCA$ y $LM = MC$
- $\triangle BLM$: se deduce que $m\angle LMB = \beta$
- $\triangle BLM$: isósceles ($BL = LM$)

$$\therefore x = 11$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 192

- Piden x .
- Trazamos $\overline{BS}$ tal que $AB = AS$.

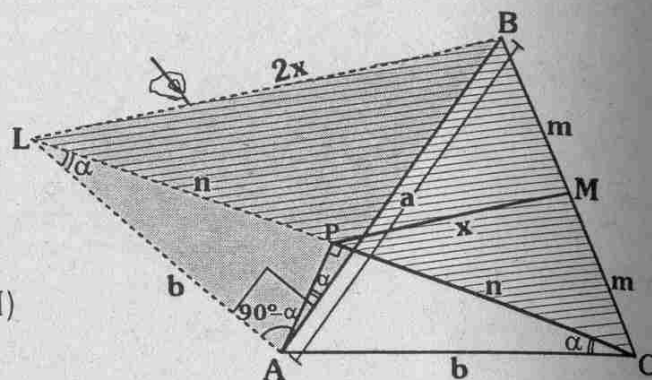
- Además $\triangle RBS$: isósceles ($RB = BS$)
- $\angle ABR \cong \angle BSC$ (LAL) $\Rightarrow m\angle BSC = m\angle BAR$ ($\alpha = 20^\circ$)
- $\triangle ABC$: $40^\circ + x + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 193

- Piden x ; dato: $a^2 + b^2 = 36$
- En la prolongación de $\overline{CP}$ se ubica el punto L tal que $CA = AL$.
- $\triangle CAL$: $\overline{AP}$ es altura y mediana
- $\triangle CLB$: $\overline{PM}$ es base media $\Rightarrow LB = 2(PM)$
- $\triangle LAB$: teorema de Pitágoras



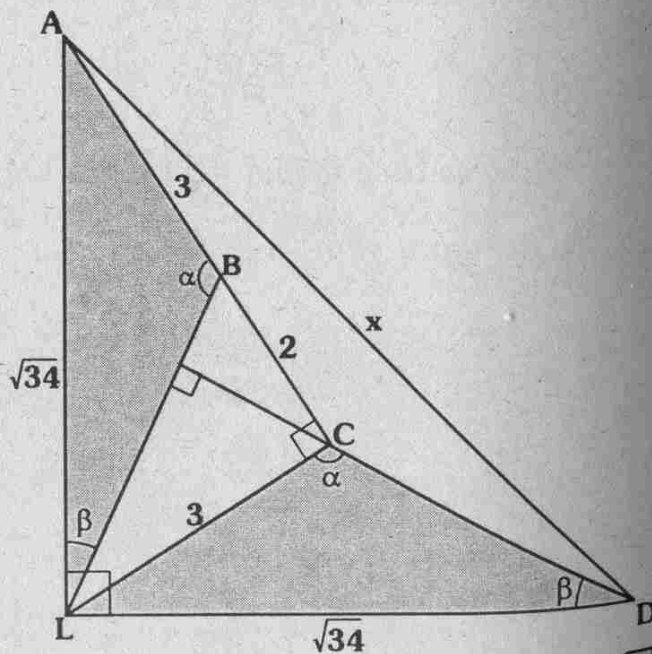
$$(2x)^2 = a^2 + b^2 = 36$$

$$\therefore x = 3$$

Clave **D**

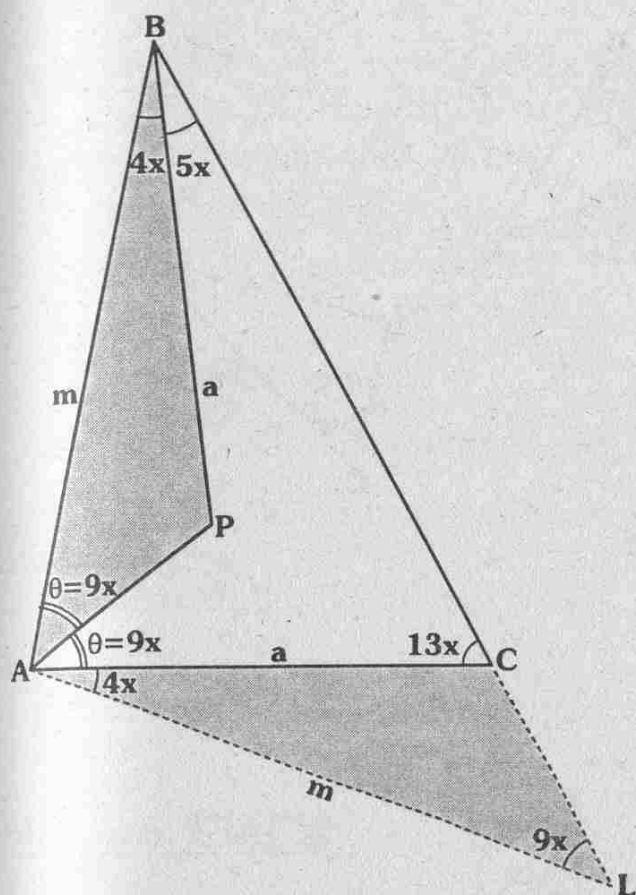
RESOLUCIÓN N° 194

- Piden x .
- Se deduce: $m\angle ABL > 90^\circ$ y $m\angle LCD > 90^\circ$
- y como $\angle ABL \cong \angle LCD$ y $AL = LD$; $LC = AB$
- Se deduce: $m\angle BCL = 90^\circ$
- $\triangle ACL$: $(AL)^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow AL = \sqrt{34}$
- $\triangle ALD$: $x = 2\sqrt{17}$



Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 195



- Piden x .
- En la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto "L" tal que $AB = AL$.

• $\triangle ABP \cong \triangle LAC$ (LAL)
 $\Rightarrow \theta = 9x$

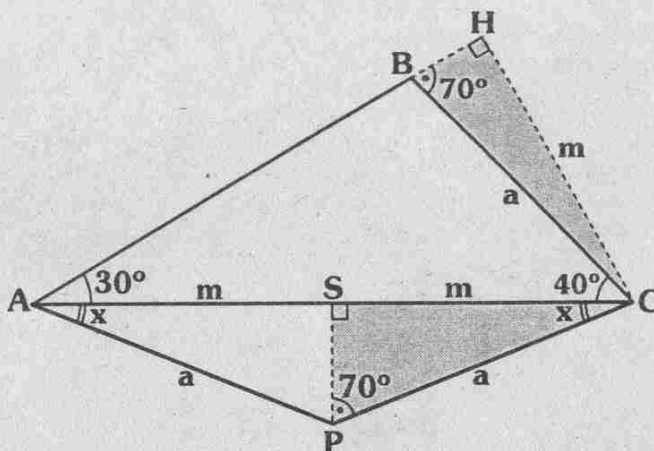
- En $\triangle ABC$:

$$18x + 9x + 13x = 180$$

$$\therefore x = 4,5^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 196

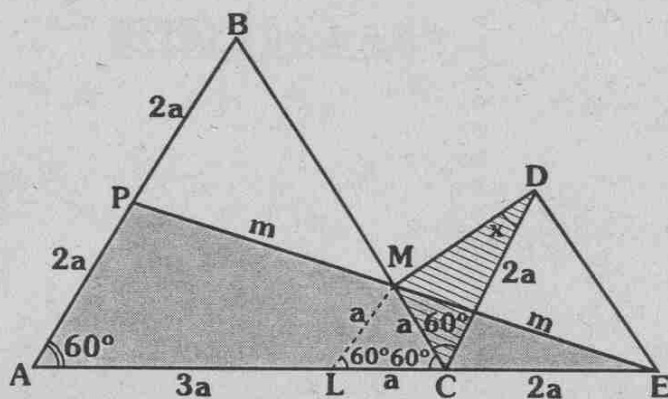


- Piden x .
- $\triangle AHC$: notable de 30° y 60°
 $\Rightarrow AC = 2(HC)$
- $\triangle APC$: isósceles, $\overline{PS}$ altura y mediana
 $\Rightarrow AS = SC$
- $\triangle PSC \cong \triangle BHC$
 $\Rightarrow m\angle SPC = m\angle HBC$
- $\triangle PSC$: $x + 70^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 197

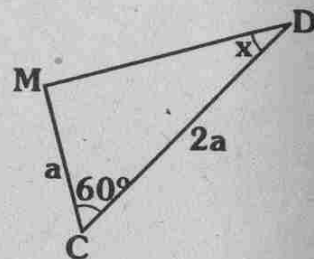
- Piden x .
- Trazamos $\overline{ML} \parallel \overline{AP}$
- $\triangle APE$: $\overline{ML}$: base media
 $\Rightarrow AP = 2(ML)$, $AL = LE$



- En el $\triangle CMD$:

$$m\angle DMC = 90^\circ$$

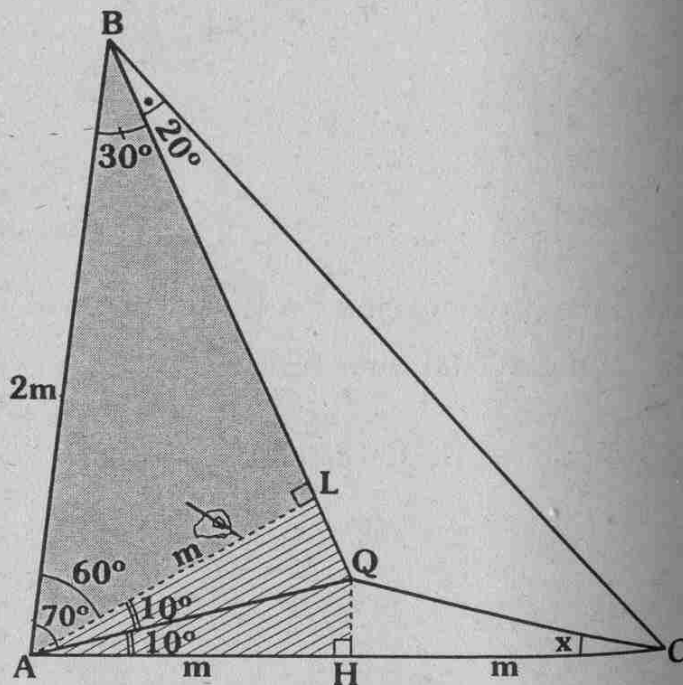
$$\therefore x = 30^\circ$$



Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 198

- Piden x .
- Trazamos $\overline{AL} \perp \overline{BQ}$
- $\triangle ALB$: notable de 30° y 60°
 $\Rightarrow AB = 2(AL)$
- Además el $\triangle BAC$ es isósceles
 $(AB = AC)$
- Por teorema de la bisectriz:
 $LA = HA$
 $\Rightarrow AH = HC$
- $\triangle AQC$: $\overline{QH}$ es altura y mediana
 $\Rightarrow \triangle AQC$: isósceles



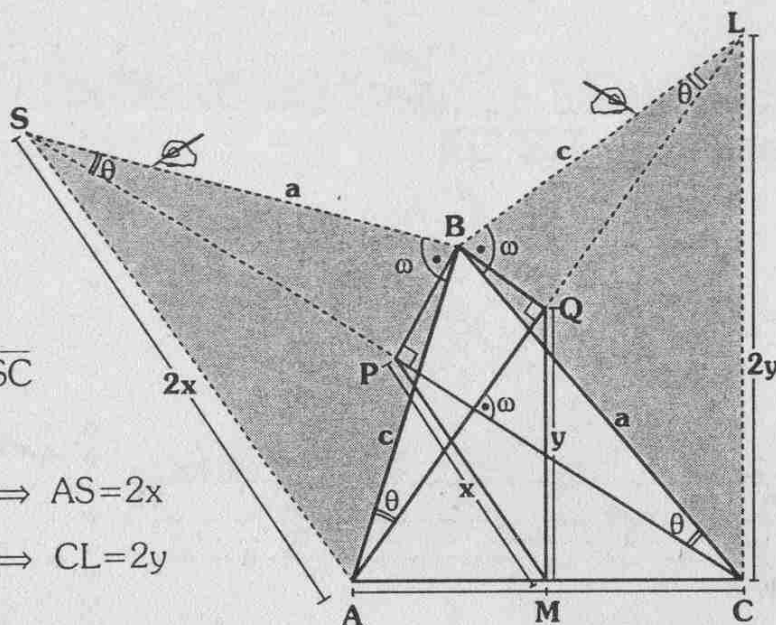
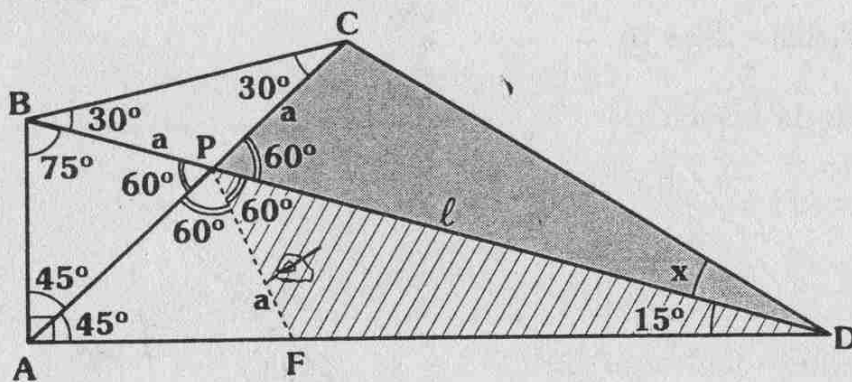
$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 199

- Piden $\frac{x}{y}$.
- Se prolongan $\overline{CP}$ y $\overline{AQ}$ y se traza $\overline{BS}$ y $\overline{BL}$, con S y L en dichas prolongaciones tal que:
 $BS = BC$ y $AB = BL$.
- $\triangle SBC$ y $\triangle ABL$ son isósceles.
- P y Q son puntos medios de $\overline{SC}$ y $\overline{AL}$ respectivamente.
- En $\triangle ACS$, $\overline{MP}$ es base media $\Rightarrow AS = 2x$
- En $\triangle ALC$, $\overline{MQ}$ es base media $\Rightarrow CL = 2y$
- $\angle ABS \cong \angle LBC$ (LAL) $\Rightarrow 2x = 2y$

$$\therefore \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = 1$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 200**

- Piden $\mathbf{x}$.
- $\triangle BPC$: isósceles $\Rightarrow PB=PC=a$
- Se traza $\overline{PF}$ tal que: $m\angle APF = 60^\circ$
- $\triangle APF \cong \triangle APB$ (ALA) $\Rightarrow PF=BP=a$
- Como: $m\angle FPC = 60^\circ \Rightarrow \triangle DPF \cong \triangle DPC$ (LAL)

$$\therefore x = 15^\circ$$

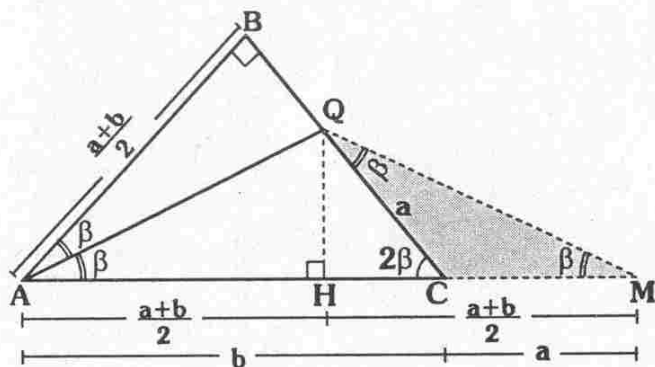
Clave **B**

Solucionario

Ciclo

Semestral
Intensivo

RESOLUCIÓN N° 201



- Piden β
- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta M, tal que:

$$CM = CQ = a$$

- Así tenemos:

$$AM = 2(AB) = 2(a + b)$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$AB = AH = \frac{a + b}{2}$$

- Como:

$$AH = HM \Rightarrow AQ = QM \Rightarrow \triangle AQM$$

es isósceles, luego $m\angle AMQ = \beta$

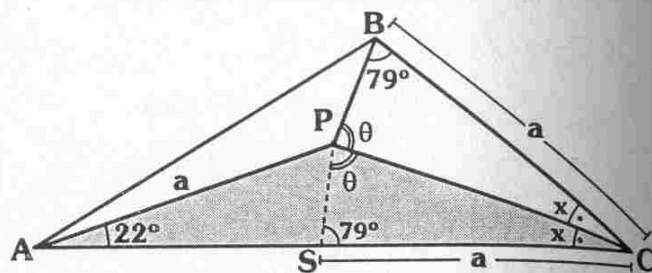
- $\triangle CQM$: isósceles $\Rightarrow m\angle MQC = \beta$

- $\angle ABC$: $2\beta + 2\beta = 90^\circ$

$$\therefore \beta = 22,5^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 202



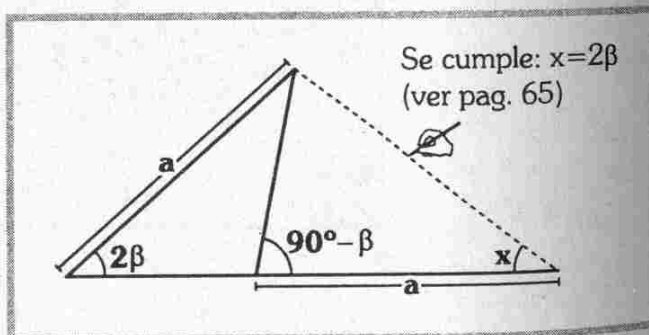
- Piden x .
- Se traza $\overline{PS}$, tal que:

$$m\angle CPS = m\angle CPB$$

$$\Rightarrow \triangle BPC \cong \triangle SPC \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow CS = CB = a$$

- Consideremos:



- En el problema:

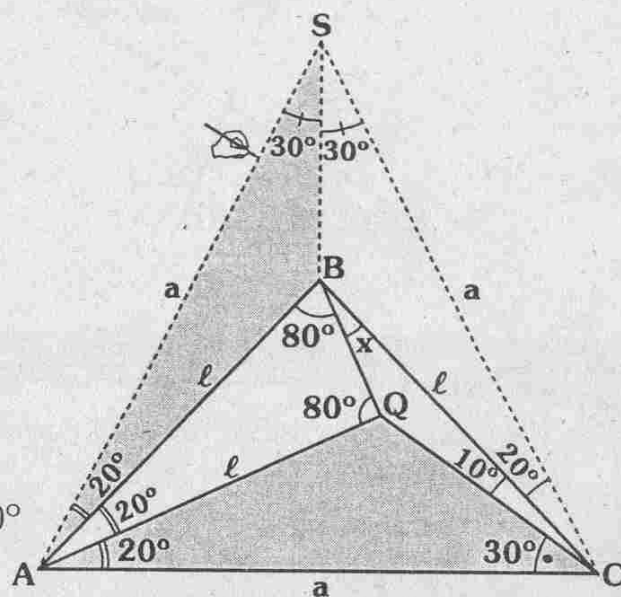
$$\beta = 11^\circ$$

$$\therefore x = 22^\circ$$

Clave C

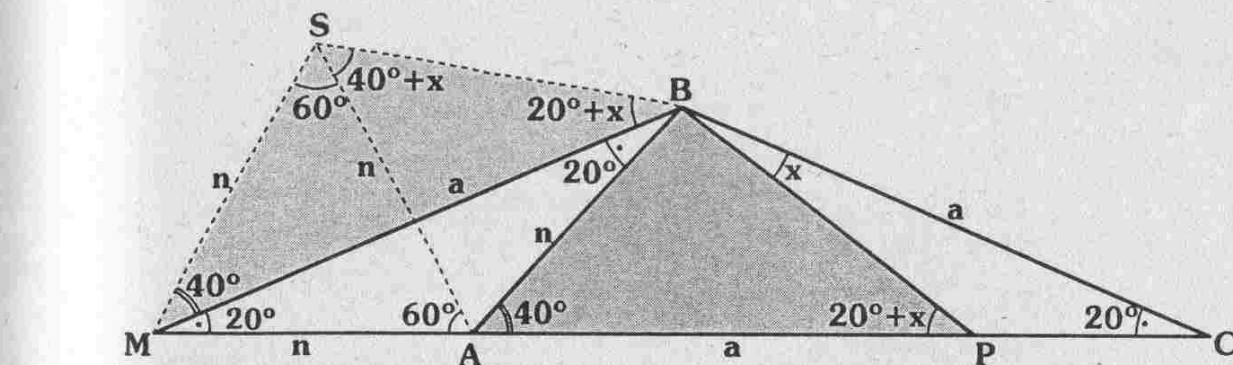
RESOLUCIÓN N° 203

- Piden x .
- Se traza $\overline{AS}$ tal que $m\angle SAB = 20^\circ$ y $AS = AC = a$
- $\triangle ASC$: equilátero $\Rightarrow CS = a$
- Como $AS = SC$ y $AB = BC$
 $\Rightarrow m\angle ASB = m\angle BSC = 30^\circ$
- $\triangle SAB \cong \triangle CAQ$ (ALA) $\Rightarrow AB = AQ$
- $\triangle ABQ$: isósceles $\Rightarrow m\angle ABQ = m\angle AQB = 80^\circ$
- $\triangle ABC$: $m\angle ABC = 100^\circ$
 $80^\circ + x = 100^\circ$



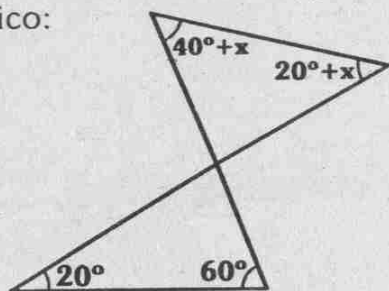
$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 204

- Piden x .
- Como $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$, se traza $\overline{BM}$ tal que:
 $m\angle MBA = 20^\circ \Rightarrow AM = AB = n$ y $MB = BC = a$
- Se traza $\overline{MS}$ tal que $MS = n$ y $m\angle SMB = 40^\circ$
- $\triangle SMB \cong \triangle BAP$ (LAL) $\Rightarrow m\angle ABS = 20^\circ + x$
- $\triangle ASM$: equilátero $\Rightarrow AS = n$
- $\triangle BAS$: isósceles $\Rightarrow m\angle ASB = 40^\circ + x$

- Del gráfico:



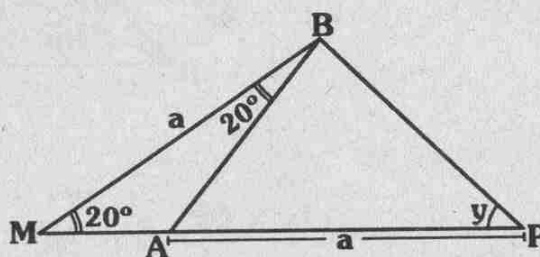
$$40^\circ + x + 20^\circ + x = 20^\circ + 60^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave **D**

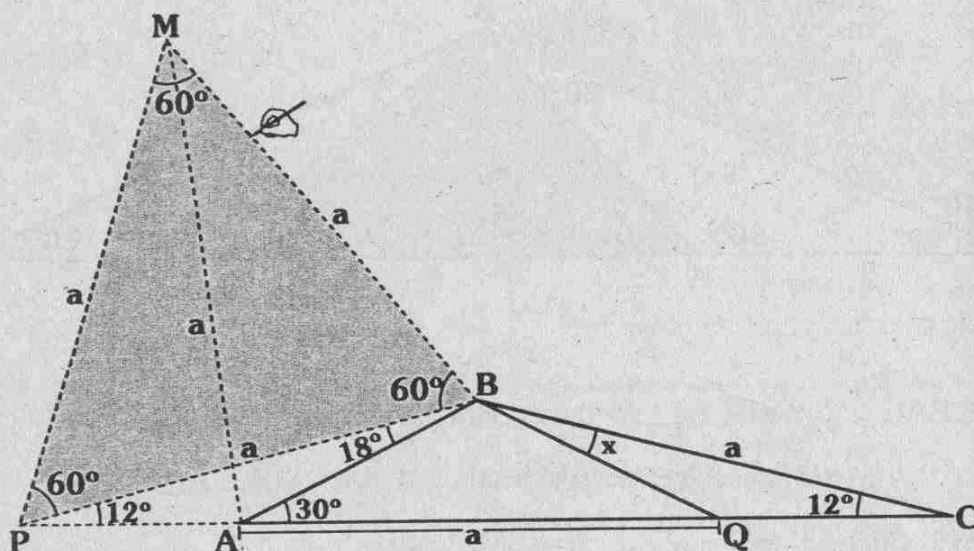
Nota

Si notamos el $\triangle MBP$, lo cual ya fue analizado en el capítulo de trazos auxiliares (ver pág 59).



RESOLUCIÓN N° 205

Paso **1**



- Piden x .

- Se traza $\overline{BP}$ (P en la prolongación de $\overline{QA}$), tal que:

$$m\angle BPA = 12^\circ \Rightarrow PB = BC = a$$

- Se traza el $\triangle PBM$ equilátero, verificamos entonces:

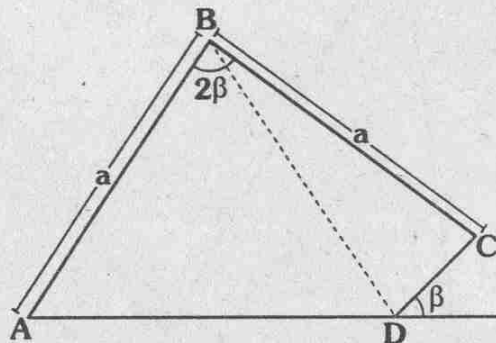
$$m\angle PMB = 2(m\angle BAP) \quad \text{y} \quad PM = MB = a \Rightarrow MA = a$$

Recordar:

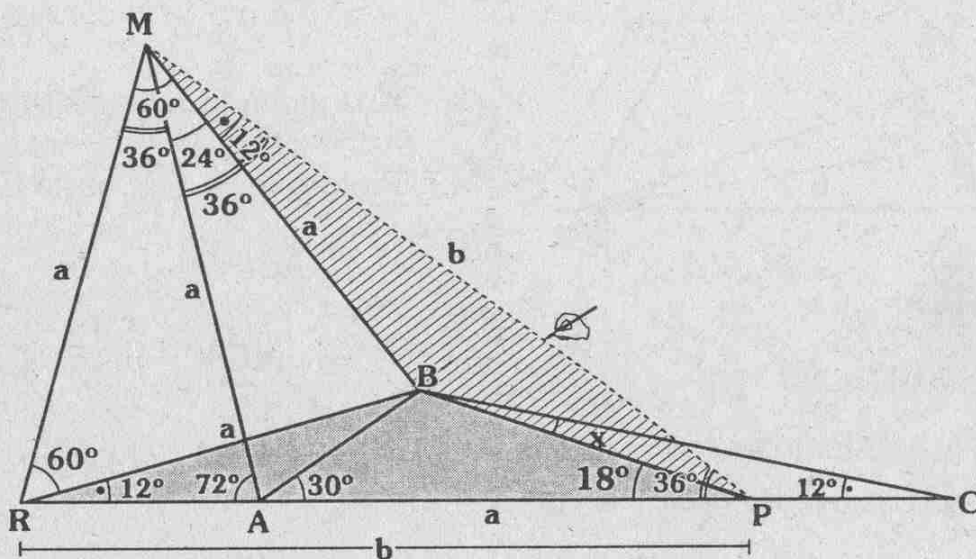
- Del gráfico, se cumple:

$$BD = a$$

- La prueba fue realizada en la publicación de "Triángulos", también se demuestra en "Puntos Notables".



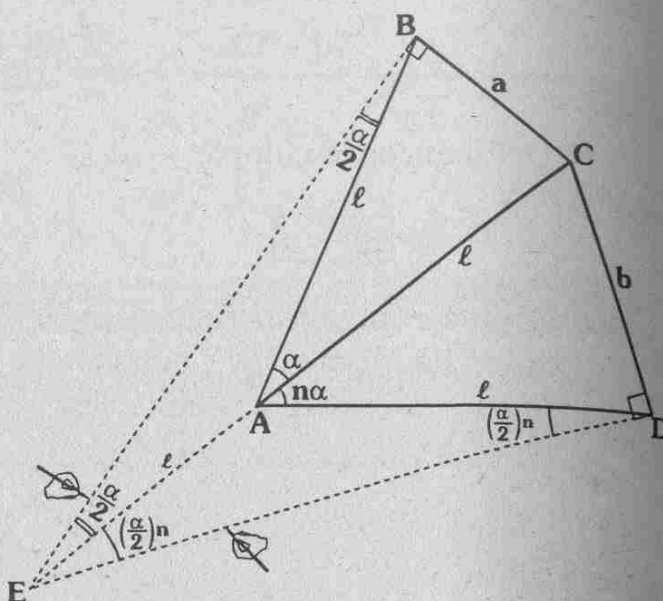
Paso 2



- Como: $AM = AP = a$ y $m\angle MAR = 72^\circ$
 $\Rightarrow m\angle APM = 36^\circ$
- $\triangle RMP$: isósceles $\Rightarrow PR = PM$
- Como: $PR = PM$ y $RB = BM \Rightarrow m\angle RPB = m\angle MPB = 18^\circ$
- $\triangle PBC$: $x + 12^\circ = 18^\circ$

$$\therefore x = 6^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 207

- Nos piden la relación entre **a**; **b** y **n**.
- Prolongamos $\overline{CA}$ hasta E tal que :

$$\Rightarrow m\angle EBC = m\angle EDC = 90^\circ$$

- $$m_{\text{BEA}} = \frac{\alpha}{2} \quad y$$

$$m_{\text{AED}} = n \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

- $$\therefore b < na$$

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 208

• Nos piden x .

• Se traza:

$$\overline{FR} \parallel \overline{CB} \Rightarrow \triangle BMC \cong \triangle FMR \text{ (LAL)} \\ \Rightarrow FR = 3$$

$$\overline{BT} \parallel \overline{EF} \Rightarrow \triangle MBT \cong \triangle MEF \text{ (ALA)} \\ \Rightarrow BT = 1$$

• $\triangle RFG$: notable de 37°

• $\triangle ABT$: notable de $53/2$

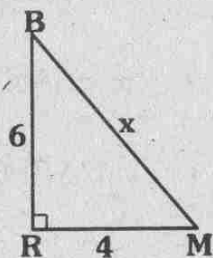
• Se traza $\overline{MR} \perp \overline{AD}$ (R en $\overline{AD}$)

• $\triangle MRC$: notable de 37°
 $\Rightarrow MR = 4a$ y $RC = 3a$

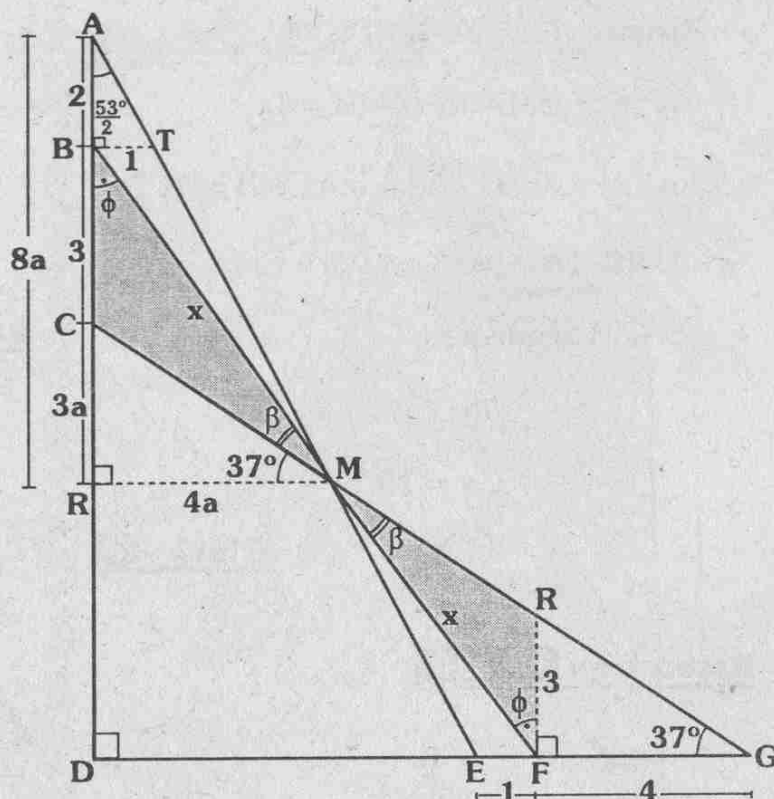
• En $\triangle ARM$: notable de $\frac{53^\circ}{2} \Rightarrow AR = 8a$

$$8a = 3a + 5 \Rightarrow a = 1$$

• En $\triangle BRM$:



$$\therefore x = 2\sqrt{13}$$

**Clave A****RESOLUCIÓN N° 209**

• Nos piden x .

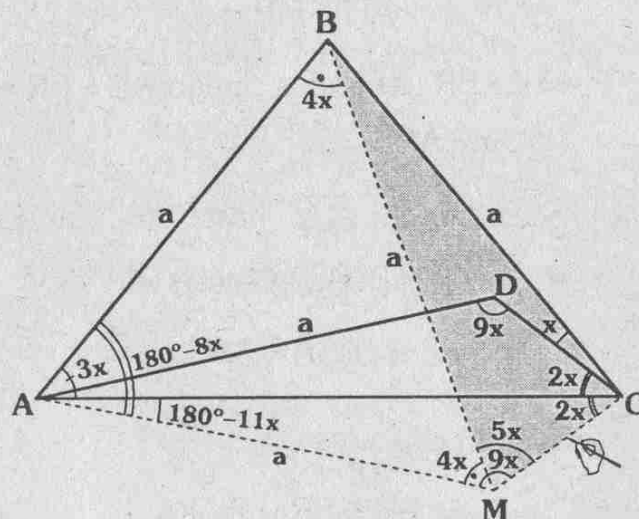
• Se traza $\overline{CM}$ tal que $CD = CM$ y

$$m\angle ACM = 2x \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle AMC$$

• Como:

$$m\angle CAM = 180^\circ - 11x$$

$$\Rightarrow m\angle BAM = 180^\circ - 8x$$



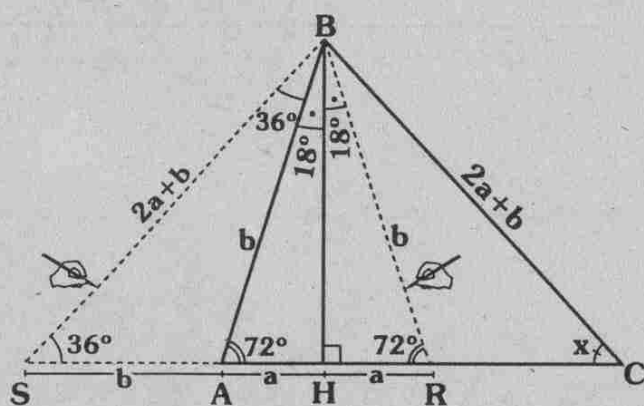
- Como: $AB = AM$
 $\Rightarrow m\angle ABM = m\angle AMB = 4x$
- $m\angle AMC = 9x \Rightarrow m\angle CMB = 5x$
- $\triangle MBC$: isósceles $\Rightarrow CB = BM = a$
- $\triangle AMB$: equilátero

$$4x = 60^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 210



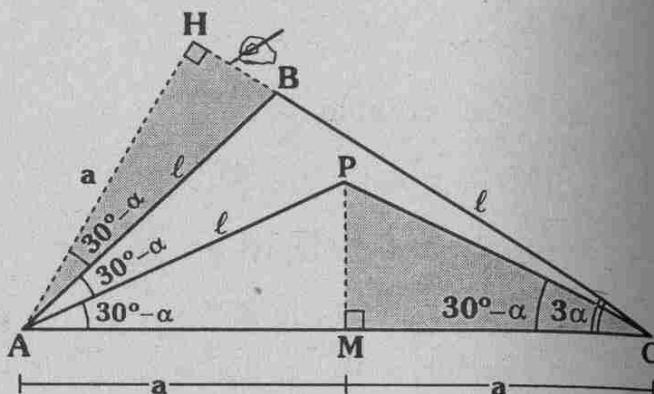
- Piden x .
- Se ubica R en $\overline{HC}$ tal que:
 $AH = HR = a$
 $\Rightarrow \triangle ABR$: isósceles, luego $AB = BR = b$
y $m\angle ARB = 72^\circ$
- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S" tal que:
 $AS = b \Rightarrow \triangle BSA$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle BSA = 36^\circ$
- $\triangle SBR$: isósceles
 $\Rightarrow SB = SR = 2a + b$

- $\triangle SBC$: isósceles

$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave B

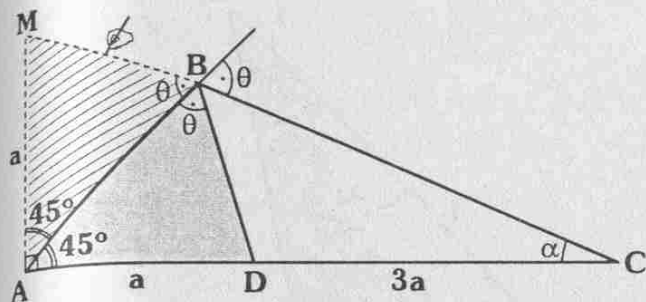
RESOLUCIÓN N° 211



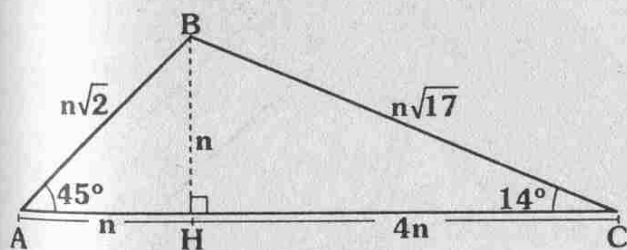
- Nos piden α .
- Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$)
- $m\angle BAH = 30^\circ - \alpha$
- En $\triangle APC$ se traza la altura $\overline{PM}$, M en $\overline{AC}$
 $\Rightarrow AM = MC$
- $\triangle AHB \cong \triangle CMP$
 $\Rightarrow AH = MC = a$
- $\triangle AHC$: notable :
 $3\alpha = 30^\circ$
 $\therefore \alpha = 10^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 212



- Nos piden: $\frac{BC}{AB}$
- Aprovechemos el hecho que $\overline{BA}$ es bisectriz exterior del $\triangle DBC$.
- Se traza $\overline{AM}$, tal que: $m\angle BAM = 45^\circ$
- $\triangle MAB \cong \triangle DAB$ (ALA)
 $\Rightarrow AM = AD = a$
- $\triangle MAC$: $AC = 4(AM) \Rightarrow \alpha = 14^\circ$
- Ahora analicemos el $\triangle ABC$.



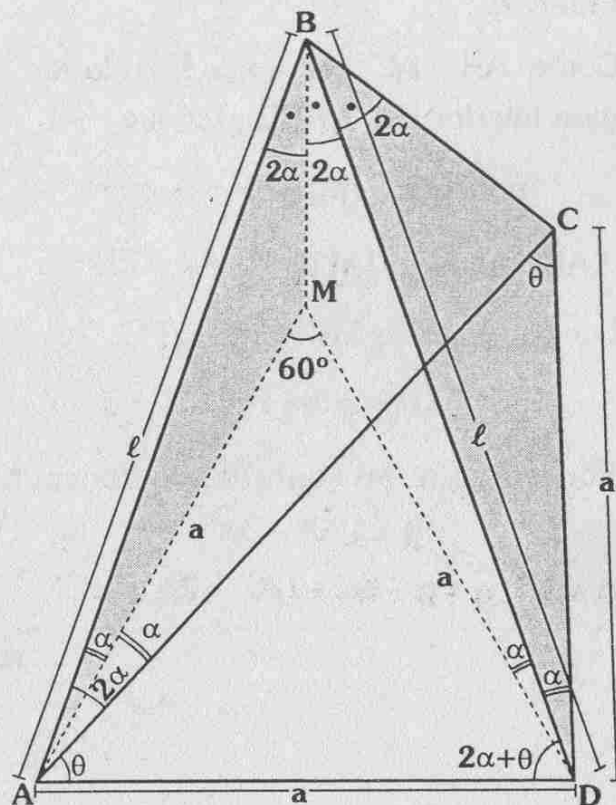
- $\triangle AHB$: notable de 45°
- $\triangle BHC$: notable de 14°

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{n\sqrt{17}}{n\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 213



- Piden α .
- En $\triangle ADC$: $3\alpha + 3\theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 60^\circ$
- Se traza $\overline{AM}$ tal que:
 $m\angle BAM = \alpha$ y $AM = a$
- $\triangle MAB \cong \triangle CDB$ (LAL) $\Rightarrow m\angle ABM = 2\alpha$
- $\triangle AMD$: equilátero
- Como $AB = BD$ y
 $AM = MD \Rightarrow m\angle DBM = m\angle ABM = 2\alpha$
- En $\triangle ABDM$:
 $\alpha + 4\alpha + \alpha = 60^\circ$
 $\therefore \alpha = 10^\circ$

Clave C

- Piden α .
- Como $AB = AC$, se ubica P en la región interior del $\triangle ABD$, tal que :

$$m \angle BAP = m \angle ABP = \alpha$$

- $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (ALA) $\Rightarrow AP = PB = a$

- Luego tenemos: $AP = AD = PC$ y

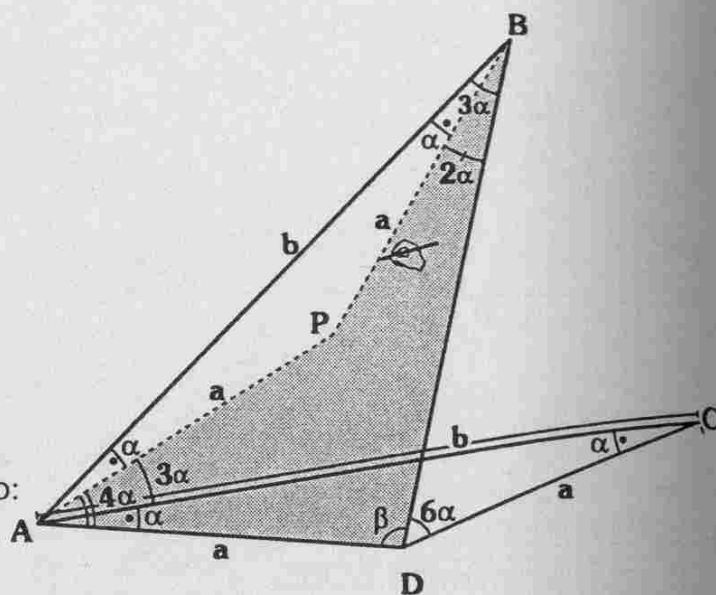
$$m \angle DAP = 2(m \angle PBD)$$

- Por teorema del cuadrilátero cóncavo:

$$\beta = 120^\circ - 2\alpha$$

- $$\bullet \quad \Delta ADC: \alpha + \alpha + 6\alpha + 120^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ$$



Clave B

- Piden $m\angle PBC$
- Se traza $\overline{AN}$ tal que:
 $m\angle CAN = 20^\circ$ y

$$AN = AB \Rightarrow \triangle ANB \text{ es equilátero}$$

- $\triangle NBC$: isósceles $\Rightarrow m\angle ACN = 30^\circ$

- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta M tal que: $AC=AM$

$\Rightarrow \triangle AMC$ es isósceles

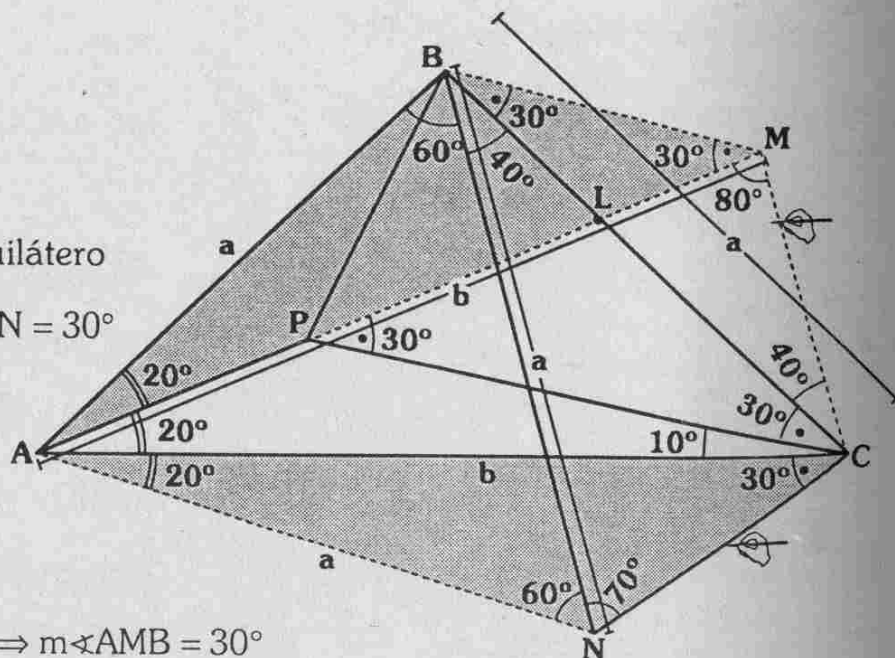
$$\Rightarrow m\angle AMC = 80^\circ$$

- $\triangle BAM \cong \triangle CAN$ (LAL) $\Rightarrow m\angle AMB = 30^\circ$

- $\triangle PLC$ y $\triangle LMB$: isósceles $\Rightarrow AL = LC$ y $LM = LB \Rightarrow PM = BC = a$

- $\Delta PCB \cong \Delta CPM$ (LAL)

$$\therefore m\angle PBC = 80^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 216

• Piden x .

• $\triangle ABE$ y $\triangle ECD$: isósceles

• Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se corten en L , tenemos:

$$m\angle ALD + \alpha + \theta = 180^\circ$$

• Como: $\omega + \alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow m\angle ALD = \omega$

• Sea:

$$\overline{CS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle SCP \Rightarrow CS = a$$

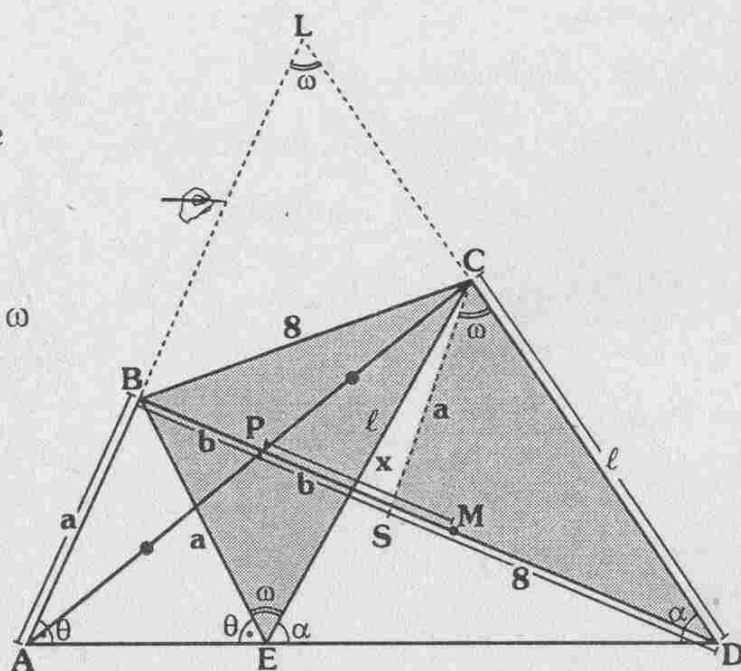
• $\triangle SCD \cong \triangle BEC$ (LAL) $\Rightarrow SD = BC = 8$

• Como M es punto medio de $\overline{BD}$

$$\Rightarrow BM = \frac{BD}{2}$$

$$b + x = 4 + x$$

$$\therefore x = 4$$

**Clave C****RESOLUCIÓN N° 217**

• Nos piden x .

• Prolonguemos $\overline{BA}$ y ubiquemos M , tal que:

$$m\angle AMD = 80^\circ \Rightarrow \triangle AMD \text{ y}$$

$\triangle MBD$; isósceles

• En el $\triangle MBD$ se traza la altura $\overline{BH}$,

$$\text{como: } MB = BD \Rightarrow MH = HD = a$$

• $\triangle AMD$: isósceles $\Rightarrow AD = 2a$

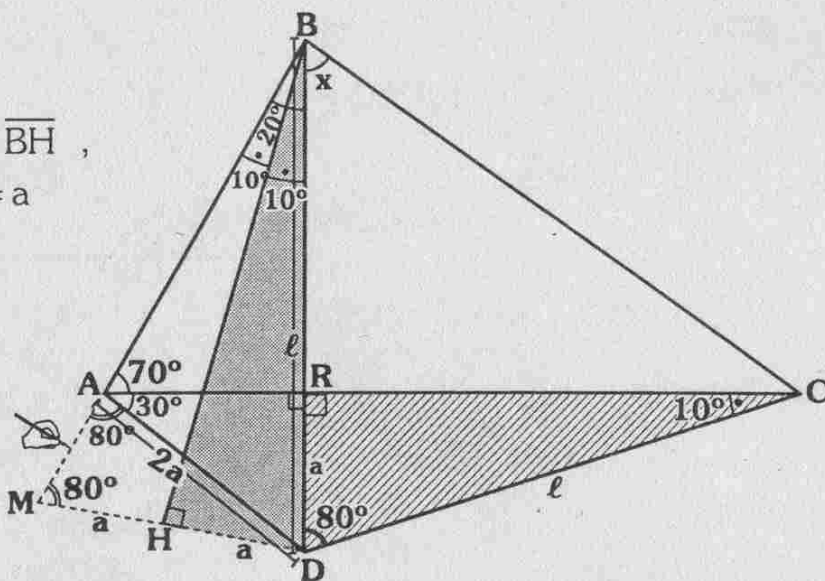
• $\triangle ARD$: notable de 30°

$$\Rightarrow DR = a$$

• $\triangle DHB \cong \triangle DRC$ (ALA)

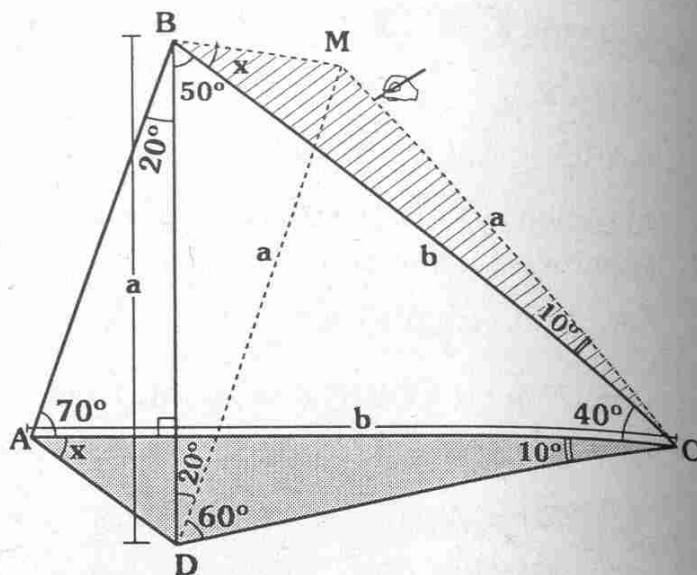
$$\Rightarrow DB = DC$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

**Clave D**

RESOLUCIÓN N° 218

- Piden x .
- $\triangle DBC$: isósceles $\Rightarrow DB = DC = a$
- Tracemos $\overline{CM}$ tal que $m\angle BCM = a$
y $CM = a \Rightarrow \triangle DCM$ equilátero
- $\triangle ACD \cong \triangle BCM$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle MBC = x$
- Como: $DB = DM$
 $\Rightarrow \triangle DBM$: isósceles
 $\Rightarrow x + 50^\circ = 80^\circ$



$$\therefore x = 30^\circ$$

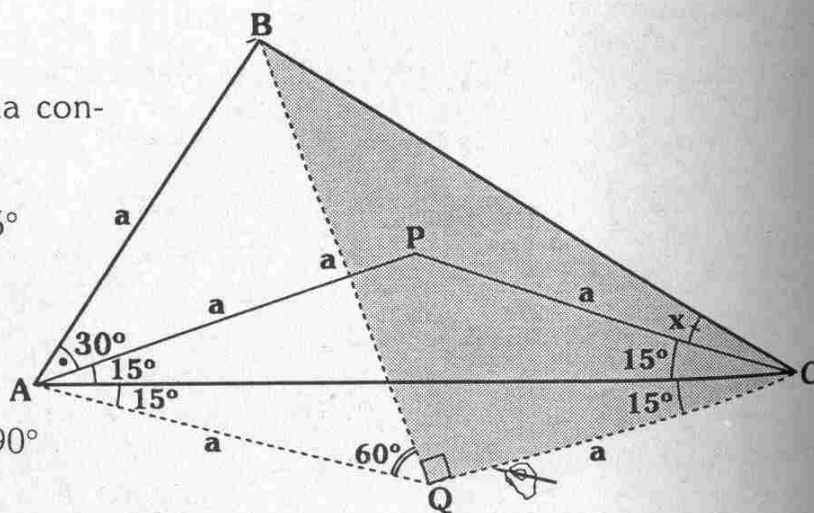
Clave B

RESOLUCIÓN N° 219

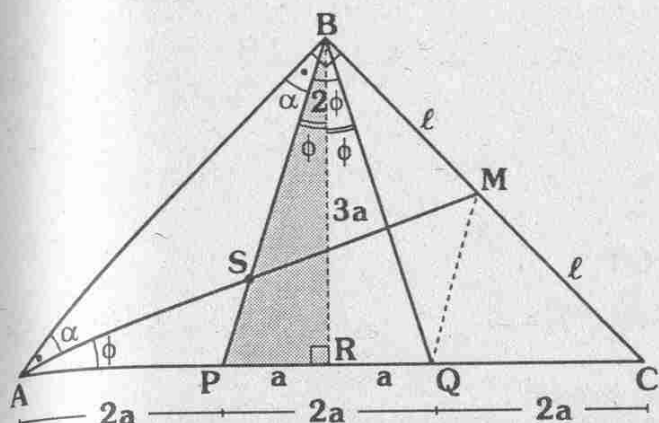
- Piden x .
- Tracemos $\triangle AQC$ tal que :
 $\triangle AQC \cong \triangle APC$, producto de la congruencia:
 $AQ = AP = a$ y $m\angle CAQ = 15^\circ$
- $\triangle AQB$: equilátero
- Como:
 $BQ = QC$ y $m\angle BQC = 90^\circ$
- Tenemos:

$$x + 30^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore x = 15^\circ$$



Clave A

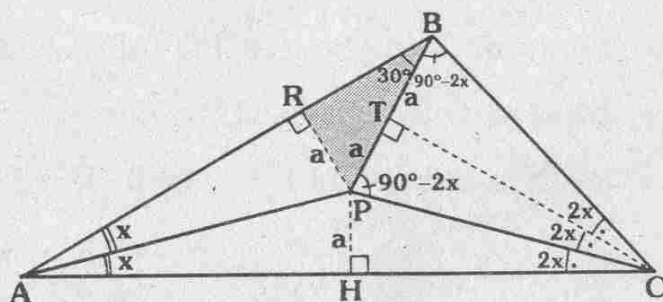
RESOLUCIÓN **Nº 220**

- Piden ϕ
- En $\triangle PBC$: $\overline{MQ}$ es base media

$$\Rightarrow \overline{QM} \parallel \overline{PB}$$
- En $\triangle AMQ$:
 $AP = PQ \quad y \quad \overline{PS} \parallel \overline{QM} \Rightarrow \overline{PS}$
es base media $\Rightarrow AS = SM$
- En $\triangle ABM$: $\overline{BS}$ es mediana

$$\Rightarrow AS = SM = SB$$
- $\triangle ABS$:
isósceles $\Rightarrow m\angle BAS = m\angle SBA$
- En $\triangle ABC$ se traza la mediana:

$$\overline{BR} \Rightarrow AR = RC = RB = 3a$$
- En $\triangle PBQ$: $\overline{BR}$ es mediana y bisectriz,
entonces $\overline{BR}$ también es altura.
- $\triangle PBR$: $\phi = \frac{37^\circ}{2}$

Clave **B****RESOLUCIÓN N° 221**

- Nos piden x .
- $\triangle PCB$: isósceles, pues $CP = CB$ entonces al trazar la altura, tenemos:

$$PT = TB \quad \text{y}$$

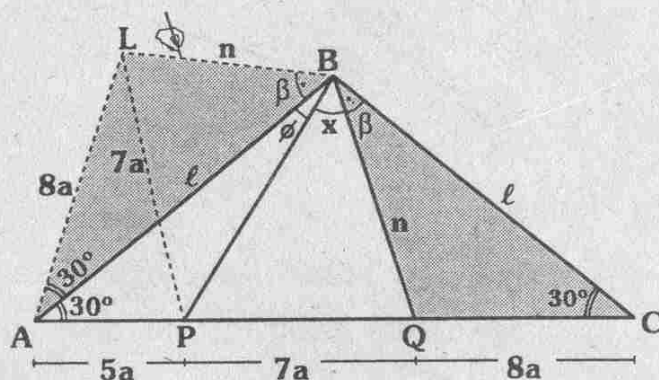
$$m\angle PCT = m\angle BCT = 2x$$
- Por teorema de la bisectriz:

$$PT = PH = PR = a$$
- $\angle PRB$: notable de 30°
- En $\triangle ABC$:

$$8x + 90^\circ - 2x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 222

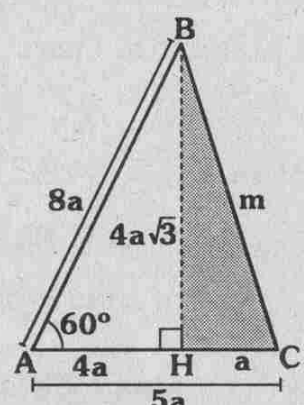
- Piden x .
- Del gráfico: $x + \beta + \phi = 120^\circ$
- Se traza: $\triangle ABL \cong \triangle CBQ$ (ALA), así tenemos: $AL = 8a$ y $LB = BQ = n$
- De la observación: $LP = 7a$
- $\triangle PBL \cong \triangle PBQ$ (LLL) $\Rightarrow x = \beta + \phi$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave 



Observación

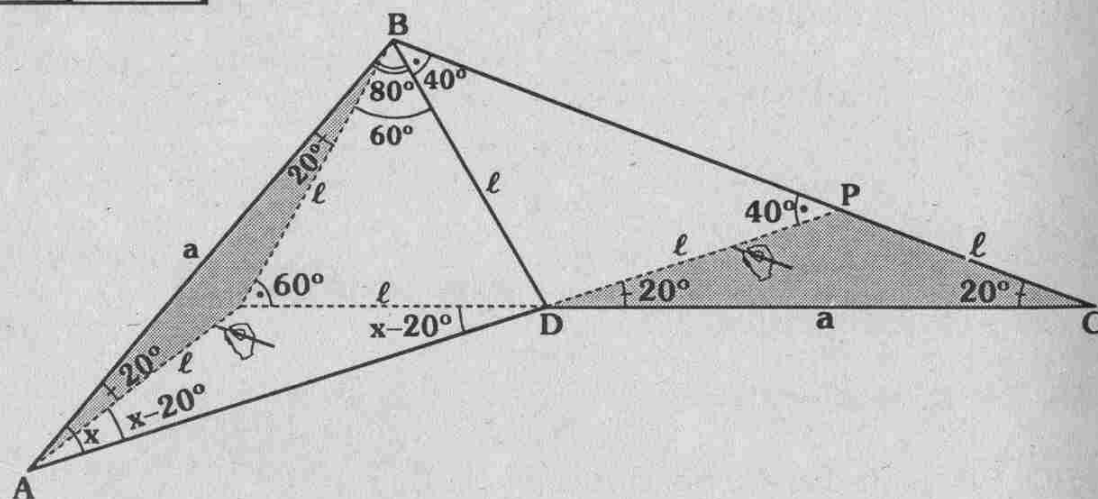


• $\triangle BHC$:

$$m^2 = a^2 + (4a\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow m = 7a$$

RESOLUCIÓN N° 223



- Piden x .
- En $\triangle DBC$ se nota: $m\angle DBC = 2(m\angle DCB)$
- Se nos sugiere trazar $\overline{DP}$ tal que: $m\angle PDC = 20^\circ \Rightarrow PC = PD = DB = l$
- Se traza el $\triangle ASB$, tal que $\triangle ASB \cong \triangle DPC$

• Como $BS = BD$ y $m\angle SBD = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle SBD$: equilátero

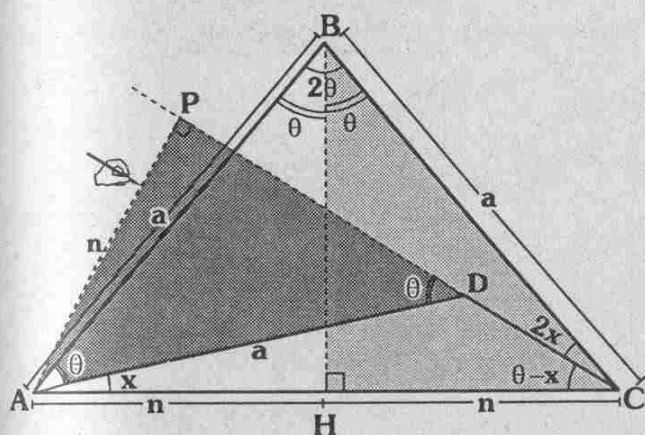
• En $\triangle ABSD$:

$$20^\circ + x + x - 20^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 224



• Piden x .

• Dato: $AB = BC = AD$

• Se traza $\overline{AP} \perp \overline{CD}$ (P en $\overline{CD}$)

• Se traza:

$$\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow AH = HC \quad y$$

$$m\angle ABH = m\angle CBH$$

• $\triangle APD \cong \triangle CHB \Rightarrow AP = AH = n$

• $\triangle APC$: notable de 30°

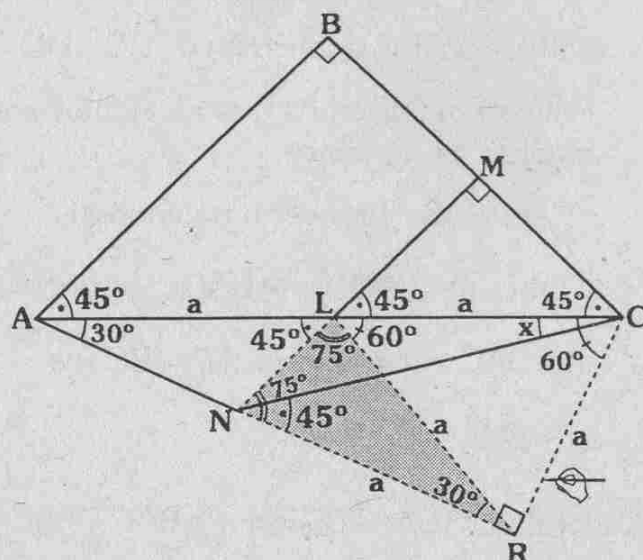
• Como: $2\theta + x = 90^\circ$ y $\theta - x = 30^\circ$

$$\Rightarrow \theta = 40^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 225



• Piden x .

• Como: $BM = MC \Rightarrow AL = LC = a$

• $\triangle ARC$: notable de $30^\circ \Rightarrow CR = a$

• $\triangle LCR$: equilátero $\Rightarrow LR = a$

• $\triangle NLR$: isósceles $\Rightarrow NR = a$

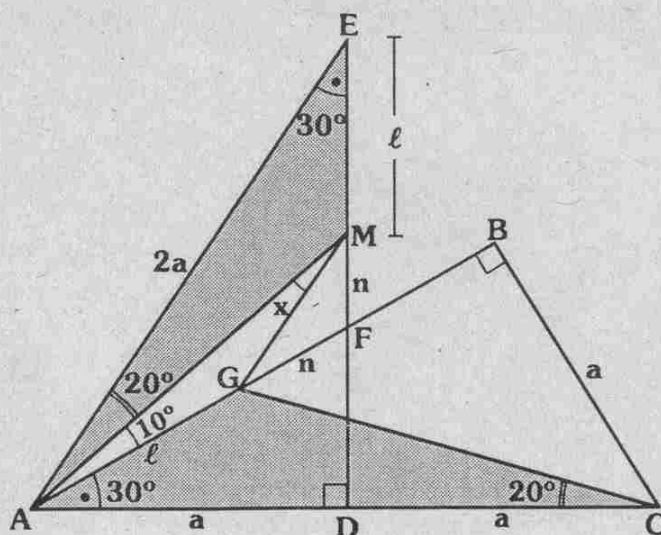
• $\triangle NRC$: isósceles $\Rightarrow m\angle RNC = 45^\circ$

• $\triangle ANC$: $x + 30^\circ = 45^\circ$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 226

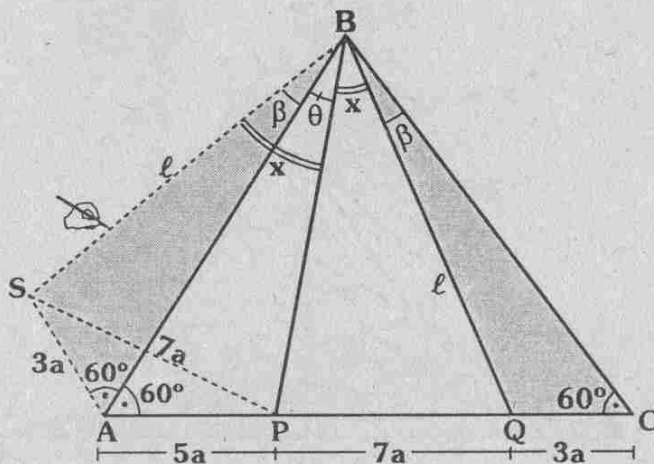


- Piden x .
- Dato: $\triangle ABC \cong \triangle EDA$ y $BC = DC$
- Primero, analicemos que elementos son iguales; así tenemos:
 $AC = AE$ (por ser hipotenusas)
- Como $m\angle EAD \neq m\angle BAC$, entonces:
 $m\angle BAC = m\angle AED \Rightarrow AD = BC = a$
 $m\angle BCA = m\angle EAD$
- Como: $AC = 2(BC) \Rightarrow m\angle BAC = 30^\circ$
- $\triangle AEF$: isósceles, con $AF = FE$
- $\triangle ACG \cong \triangle EAM$ (ALA)
 $\Rightarrow AG = EM$
- $\triangle GFM$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle GMF = m\angle FGM = 30^\circ$
- Luego: $\overline{GM} \parallel \overline{AE}$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 227



- Piden x .

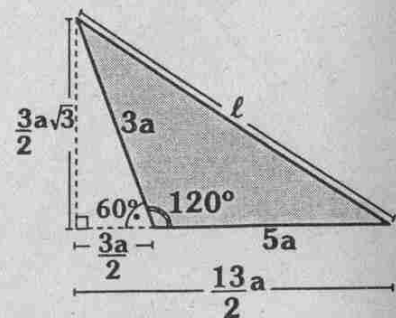
$$\beta + \theta + x = 60^\circ$$

- Construimos $\triangle ABS$ congruente con el $\triangle ACQ$:
- Como $AS = 3a$ y $AP = 5a$, de la observación: $SP = 7a$
- $\triangle PSB \cong \triangle PQB$ (LLL) $\Rightarrow x = \beta + \theta$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

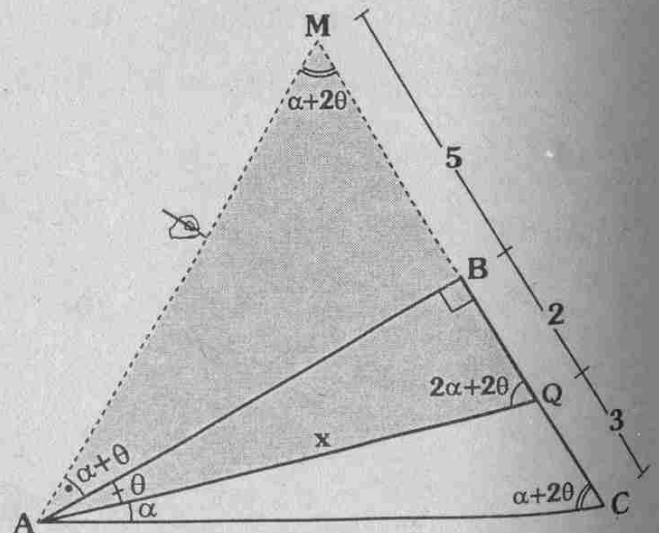
Observación



$$l^2 = \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}a\right)^2$$

$$\Rightarrow l = 7a$$

RESOLUCIÓN N° 228



- Piden x .
- En $\triangle ABC$: $2\alpha + 3\theta = 90^\circ$
- Prolongamos $\overline{CB}$ y unicamos M tal que: $CB = BM$
- $\triangle AMC$: isósceles $\Rightarrow m\angle AMC = \alpha + 12\theta$
- En $\triangle ABM$: $m\angle MAB = \alpha + \theta$
- Como: $m\angle MAQ = m\angle AMQ = \alpha + 2\theta$
- $\triangle AMQ$: isósceles

$$\therefore x = 7$$

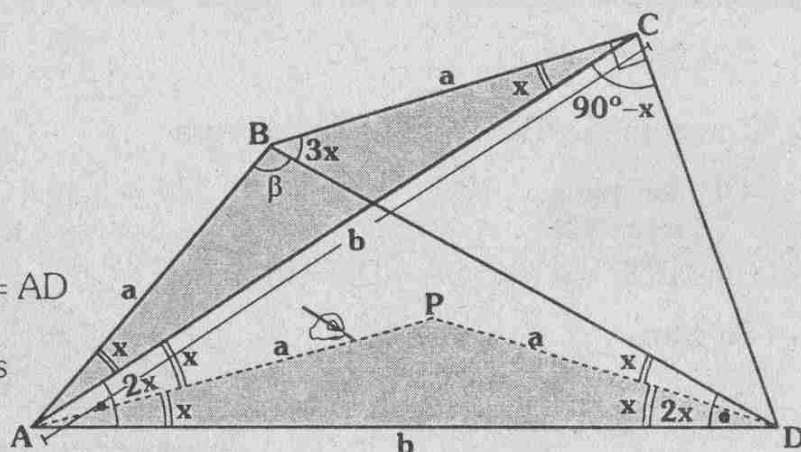
Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 229

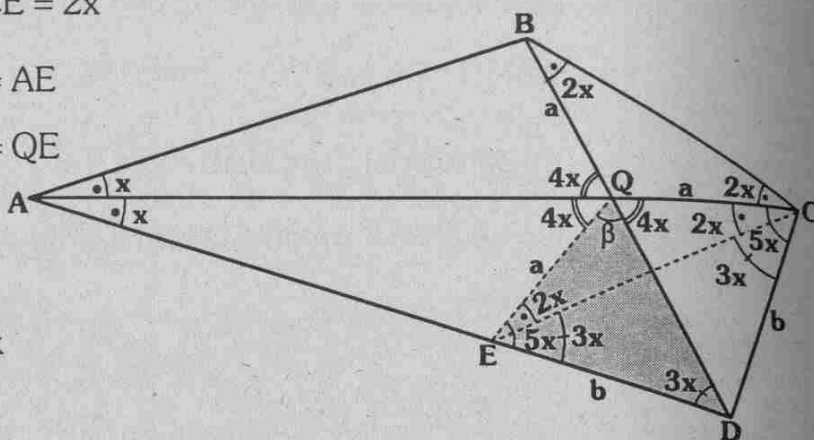
- Piden x .
- Del gráfico: $m\angle CAD = 2x$ y
 $m\angle ACD = 90^\circ - x$
 $\Rightarrow \triangle ACD$: isósceles, luego $AC = AD$
- Como $AC = AD$, aprovechemos ello para utilizar la congruencia.
- Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ tal que: $m\angle DAP = m\angle ADP = x$
- $\triangle ACB \cong \triangle ADP$ (ALA) $\Rightarrow AP = PD = AB = BC = a$
- En $\triangle ABDP$: $\beta = 120^\circ - x$
- En $\triangle BDP$: $3x + 2x + 120^\circ - x = 180^\circ$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave **C**



- Nos piden x .
- Tracemos $\overline{CE}$ tal que: $m\angle ACE = 2x$
- $\triangle ACE \cong \triangle ACB$ (ALA) $\Rightarrow AB = AE$
- $\triangle ABQ \cong \triangle AEQ$ (ALA) $\Rightarrow BQ = QE$
y $m\angle AQE = 4x$
- $\triangle BQC$ y $\triangle CQE$: isósceles
- $\triangle EQD \cong \triangle CQD$ (LLL) $\Rightarrow \beta = 4x$
- En Q: $4x + 4x + 4x = 180^\circ$



$$\therefore x = 15^\circ$$

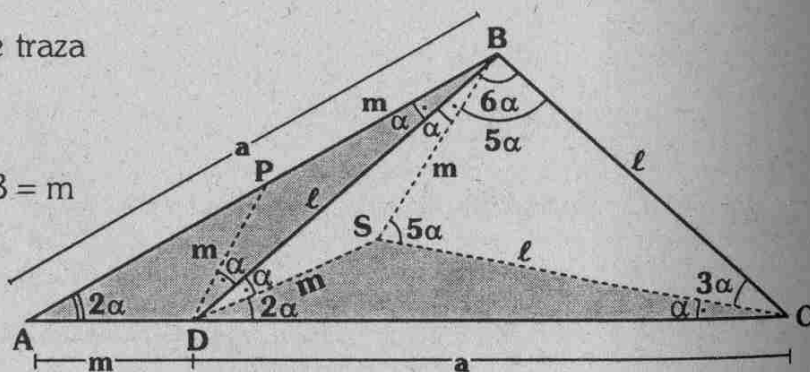
Clave E

- Nos piden: α
- Como $m\angle DAB = 2(m\angle ABD)$, se traza $\overline{DP}$ tal que:

$$m \angle BDP = \alpha \Rightarrow DA = DP = PB = m$$

- Se traza:

$$\Delta\text{DPB} \cong \Delta\text{DSB}$$



- $\triangle BAD \cong \triangle CDS$ (LAL) $\Rightarrow CS = DB$

• Como: $m\angle DBC = 6\alpha$ y $m\angle DBS = x \Rightarrow m\angle SBC = 5\alpha$

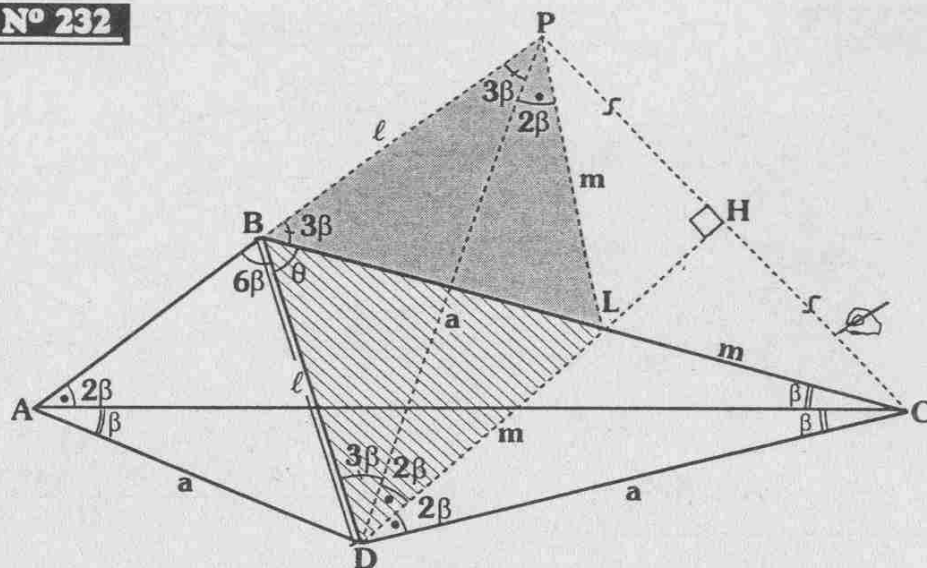
- En $\triangle$ BDCS: $m_{\triangle BSC} = 5\alpha$

- $\triangle DBC$: isósceles $\Rightarrow m\angle BCD = 3\alpha$

- En $\triangle DBC$: $3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180^\circ$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Clave E

N° 232

- $$\therefore \beta = 15^\circ$$

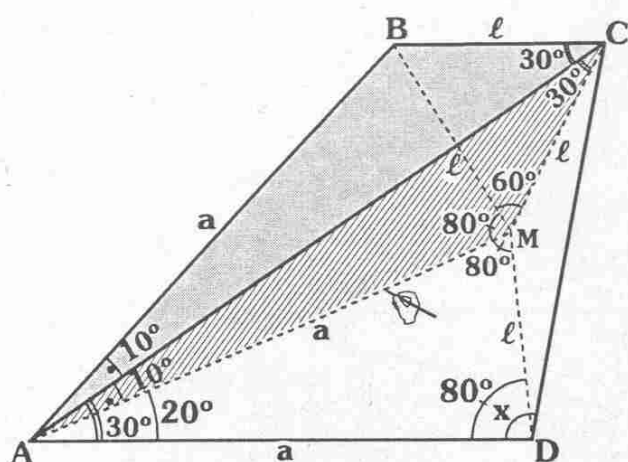
Clave $\sqrt{C}$ **RESOLUCIÓN Nº 233**

-

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 234



- Piden x .
- Ubicamos M tal que:

$$m\angle CAM = 10^\circ \text{ y } m\angle ACM = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BAC \cong \triangle MAC \text{ (ALA)}$$

- Luego: $CM = BC$ y $AM = AB = \ell$
- $\triangle BCM$: equilátero
- $\triangle BAM \cong \triangle DAM \Rightarrow DM = \ell$
- $\triangle CMD$: isósceles
- Como:

$$m\angle CMD = 140^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle MDC = m\angle MCD = 20^\circ$$

- Luego:

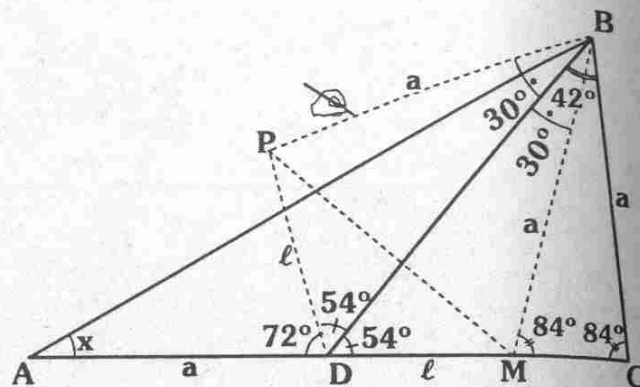
$$x = 80^\circ + 20^\circ$$

$$\therefore x = 100^\circ$$

Clave E

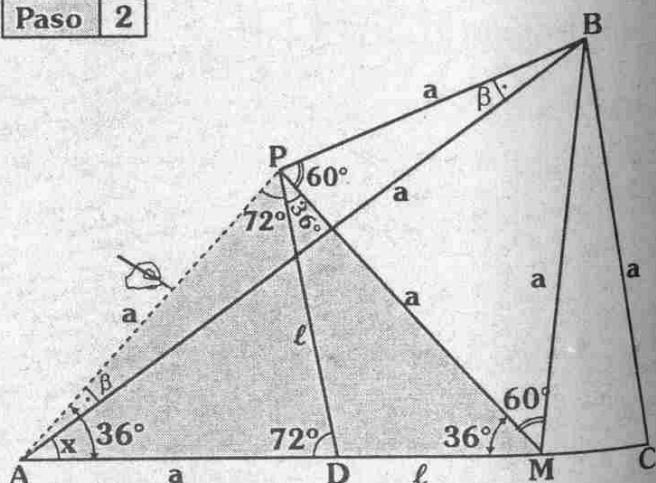
RESOLUCIÓN N° 235

Paso 1



- Nos piden x .
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\angle BCM = 84^\circ$, entonces:
 $BM = BC = a$ y $m\angle MBD = 30^\circ$
- Se traza $\triangle DMB \cong \triangle DPB$ con:
 $DM = DP = \ell$ y $PB = BM = a$
- $\triangle MBP$: equilátero

Paso 2



- $\triangle PDM$: isósceles $\Rightarrow m\angle PMA = 36^\circ$
- Como $PM = AD$, $m\angle PMD = 36^\circ$ y $m\angle PDA = 72^\circ$, de la observación:

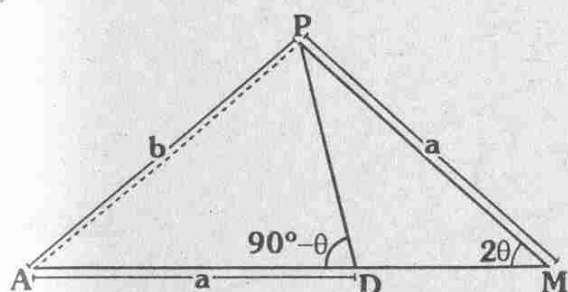
$$AP = a$$

- $\triangle APB$: isósceles

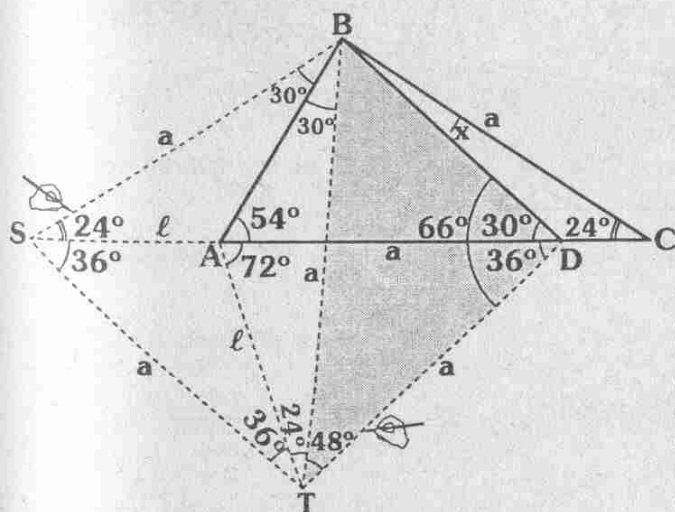
$$2\beta + 168^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 6^\circ$$

- Como: $x + \beta = 36^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **A**

En el problema $\theta = 18^\circ$. Se cumple $a=b$, (ver pág. 65 y 66)

RESOLUCIÓN N° 236

- Nos piden x .
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se ubica S tal que:

$$m\angle BSA = 24^\circ \Rightarrow SB = BC = a$$

- Se traza $\overline{BT}$ tal que $m\angle ABT = 30^\circ$ y $BT = a$.

- ΔSBT : equilátero

- Como $m\angle TSA = 36^\circ$, $m\angle TAD = 72^\circ$ y $ST = AD = a$, de la observación anterior: $TD = a$

- ΔTDA y ΔBDT : isósceles

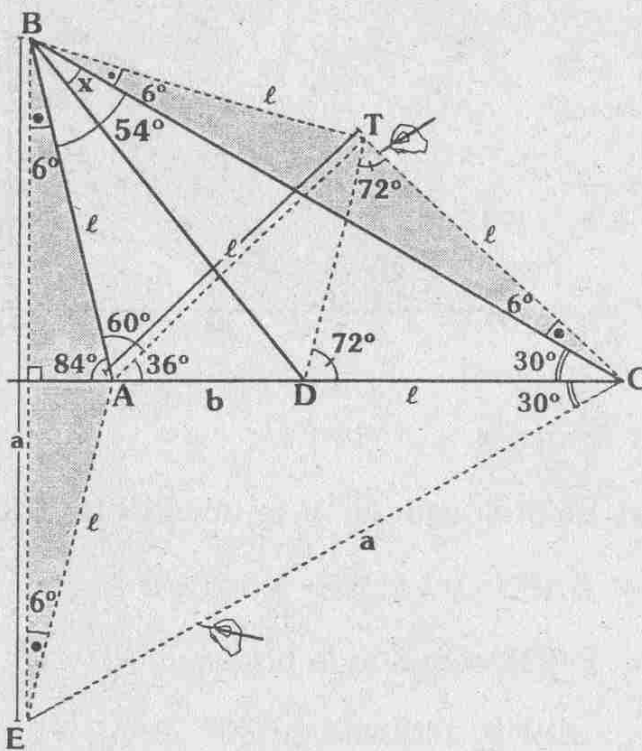
$$\Rightarrow m \angle \text{ADT} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle BTD = 48^\circ$$

- $m\angle TDB = 66^\circ \Rightarrow m\angle BDA = 30^\circ$

- $\triangle BDC$: $x + 24^\circ = 30^\circ$

$$\therefore x = 6^\circ$$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 237**

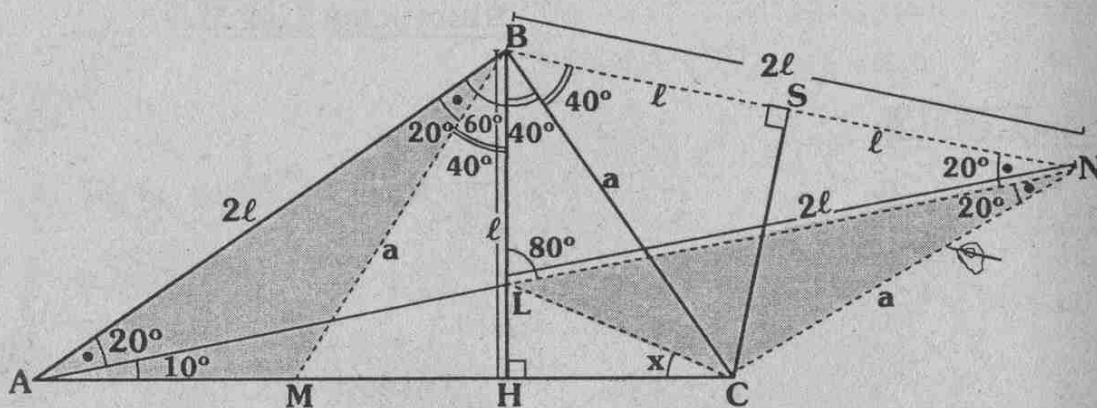
- Nos piden **x**.

- Se traza $\overline{CE}$ tal que $CE = CB = a$ talque $m\angle ACE = 30^\circ \Rightarrow \triangle EBC$: equilátero
- $\triangle EAB$: isósceles
- Se traza $\triangle CTB \cong \triangle EAB$ ($BT = TC = AB = \ell$)
- $\triangle DTC$: isósceles $\Rightarrow m\angle CDT = m\angle DTC = 72^\circ$
- $\triangle ABT$: equilátero $\Rightarrow AT = \ell$
- $\triangle ATD$: isósceles $\Rightarrow AD = DT$
- $\triangle ADB \cong \triangle TDB$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle ADB = m\angle BDT = 54^\circ$
- $\triangle DBC$: $x + 30^\circ = 54^\circ$

$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 238



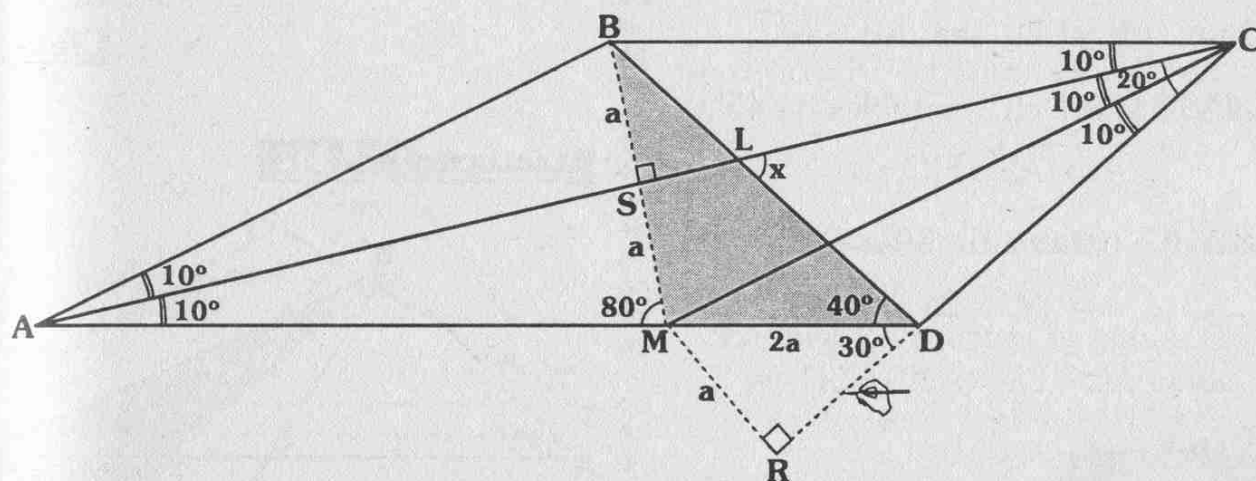
- Piden x .
- Se prolonga $\overline{AL}$ y se ubica N tal que $AB = BN$.
- $\triangle ABN$ y $\triangle LNB$: isósceles
- Por teorema de la bisectriz: $BH = BS = \ell$
- $\triangle AHB$: notable de $30^\circ \Rightarrow AB = 2\ell$
- Como $AB = BN = 2\ell \Rightarrow \triangle BNC$: isósceles

- Se traza M en $\overline{AH}$ tal que $m\angle HBM = 40^\circ \Rightarrow \triangle MBC$: isósceles $\Rightarrow MB = BC = a$
- $\triangle ABM \cong \triangle LNC$ (LAL) $\Rightarrow m\angle CLN = 30^\circ$
- $\triangle ALC$: $x + 10^\circ = 30^\circ$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 239



- Nos piden x .
- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ (M en $\overline{AD}$)
- $\triangle ABM$ y $\triangle BCM$ isósceles y congruentes ($BS = SM$).
- Por teorema de la bisectriz $MS = MR = a$
- $\triangle RMD$: notable de $30^\circ \Rightarrow MD = 2a$
- $\triangle BMD$: isósceles
- Como: $m\angle BMA = 80^\circ \Rightarrow m\angle BDM = 40^\circ$
- En $\triangle ALD$: $x = 40^\circ + 10^\circ$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave D

- Clave
-
- C

- Clave B

- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD = 2a$
- Se traza $BH \perp CD$
- $\triangle DBC$: isósceles $\Rightarrow DH = HC = a$
- $\triangle ABT$: notable de 45°
 $\Rightarrow AB = BT = 2a$
- $\triangle THC$: notable de $45^\circ \Rightarrow TH = a$
- $\triangle BHC$: notable de $37^\circ/2$

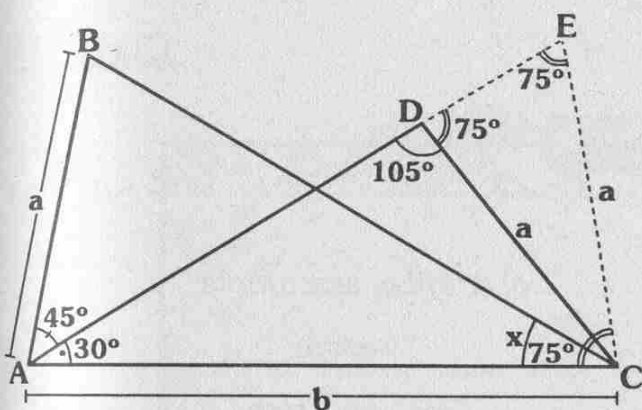
En:

$$x + \frac{37^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2} = 26,5^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 243



- Se pide x .
- Se prolonga $\overline{AD}$ y se ubica E tal que:

$$m\angle CED = 75^\circ$$

- $\triangle DEC$ y $\triangle AEC$: isósceles

$$\Rightarrow CD = CE \quad y$$

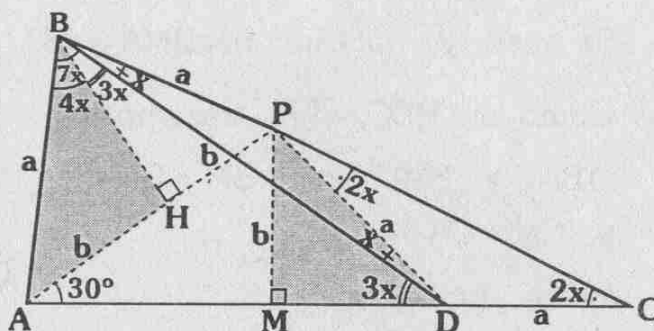
$$AC = AE$$

- $\triangle ABC \cong \triangle ECA$ (LAL)

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 244



- Nos piden x .
- En $\triangle BDC$ se traza $\overline{DP}$ tal que:
 $m\angle BDP = x \Rightarrow \triangle BPD$ y
 $\triangle PCD$: isósceles ($BP = PD = DC = a$)
- En $\triangle ABP$, se traza la altura $\overline{BH}$
 $\Rightarrow AH = HP = b$
- En $\triangle APD$, se traza la altura $\overline{PM}$
- $\angle AHB \cong \angle PMD$
 $\Rightarrow AH = PM$
- $\angle AMP$: notable de 30°
- En $\angle ADBH$:

$$3x + 3x + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

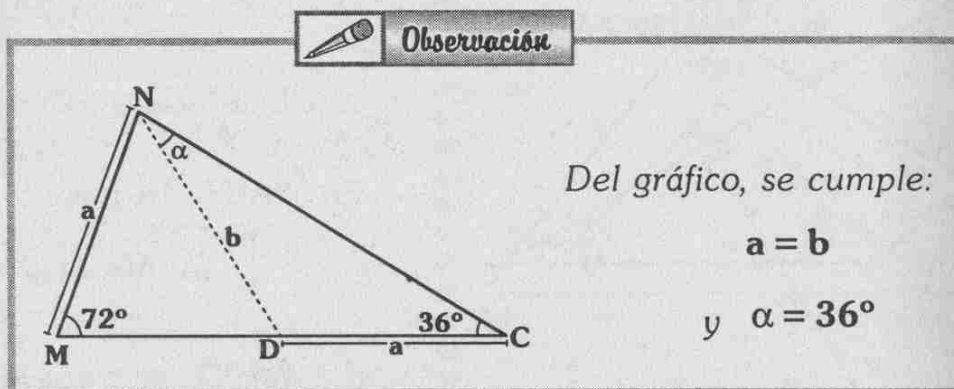
Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 245

- Nos piden x .
- Se traza $\overline{BM}$ tal que: $m\angle BMA = 48^\circ$
- Como $m\angle MBC = 30^\circ$, trazamos $\triangle BNC \cong \triangle BMC$, con $BM = BN$ y $CM = CN$.
- $\triangle MBN$: equilátero
- Como $MN = DC = a$, $m\angle NMC = 72^\circ$ y $m\angle NCM = 36^\circ$, de la observación: $\triangle BHD$: isósceles, como $m\angle AND = 96^\circ \Rightarrow m\angle DBN = 42^\circ$

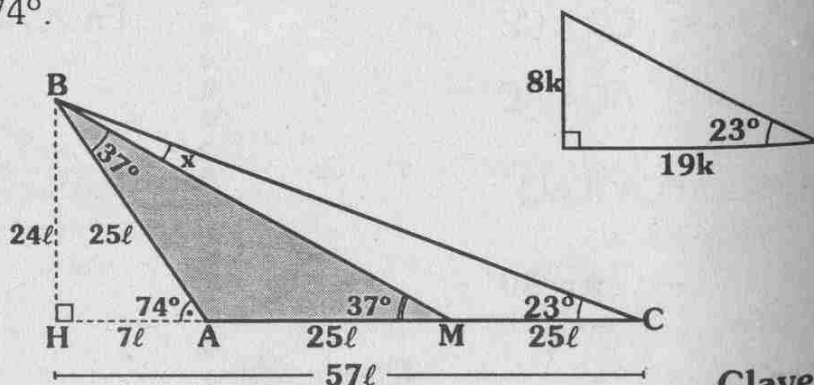
$$\therefore x = 12^\circ$$

Clave E



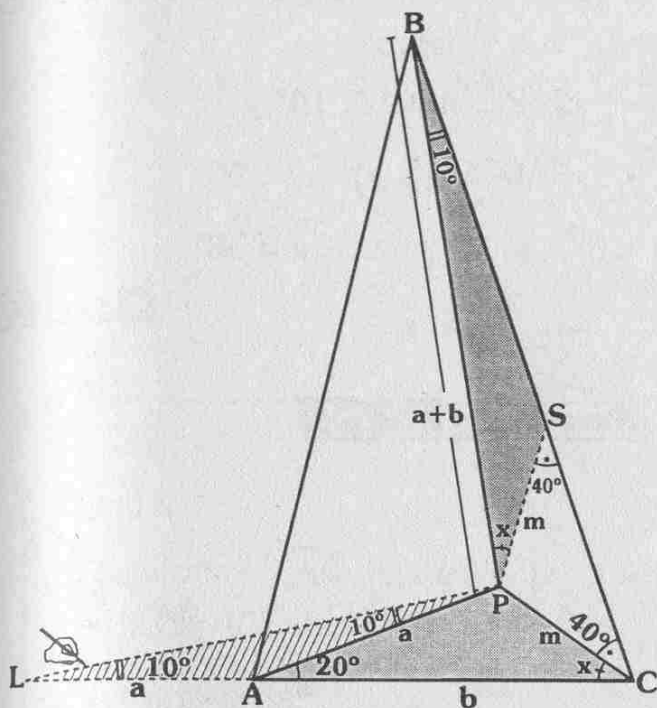
RESOLUCIÓN N° 246

- El cálculo de " x ", dados los valores, es aproximado, hay diversas formas de hallar " x ", optemos, por el uso del $\triangle$ notable de 23° .
- Piden x .
- $\triangle AHB$: notable de 16° y 74° .
- $\triangle BHC$: como $HB = 24\ell$
 $\Rightarrow HC = 57\ell$
- $\triangle ABM$: isósceles
 $x + 23^\circ = 37^\circ$
 $\therefore x = 14^\circ$



Clave D

RESOLUCIÓN N° 247



- Piden x .
- En la prolongación de $\overline{CA}$ se ubica el punto L tal que :

$$LA = AP$$

- Trazamos $\overline{PS}$, tal que: $m\angle BPS = x$

- $\triangle BSP \cong \triangle LPC$ (ALA)

$$\Rightarrow SP = PC$$

$$m\angle PSC = 40^\circ$$

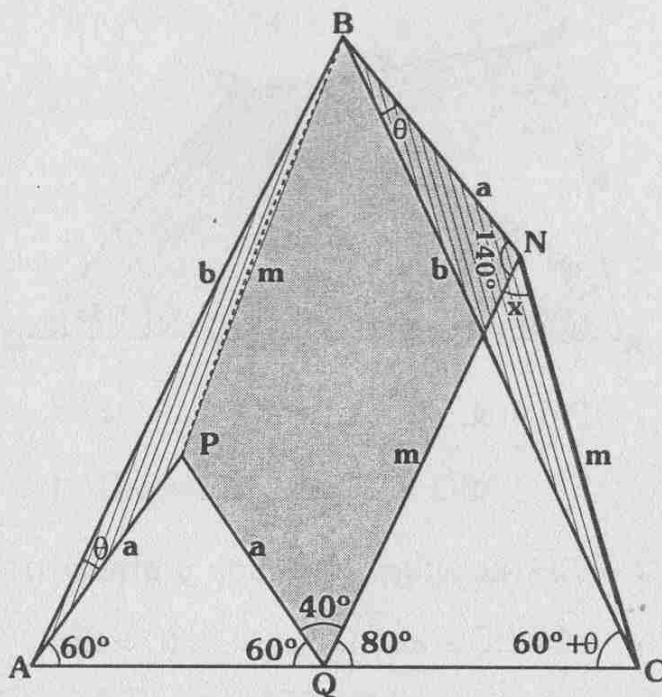
- $\triangle BSP$:

$$x + 10^\circ = 40^\circ$$

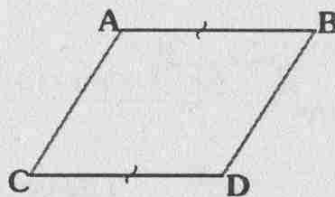
$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 248



Usemos:



$$\text{Si : } AB = CD$$

$$\text{y } \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$\Rightarrow AC = BD$$

- Piden x .

- $\triangle ABP \cong \triangle BNC$ (LAL)

$$\Rightarrow BP = NC$$

- Como $BN = PQ$ y

$$m\angle BNQ + m\angle PQN = 180^\circ$$

$$(\overline{BN} \parallel \overline{PQ})$$

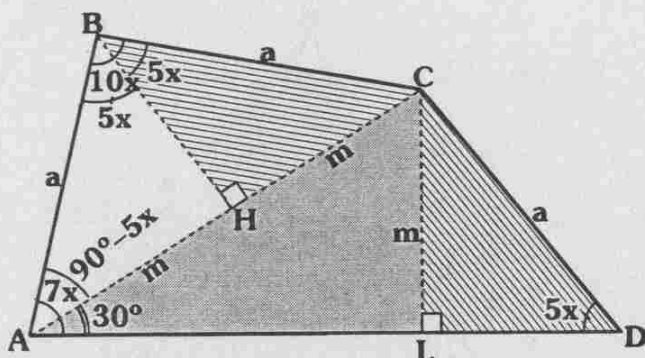
$$\Rightarrow BP = NQ$$

- $\triangle QNC$: isósceles

$$x = 20^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 249



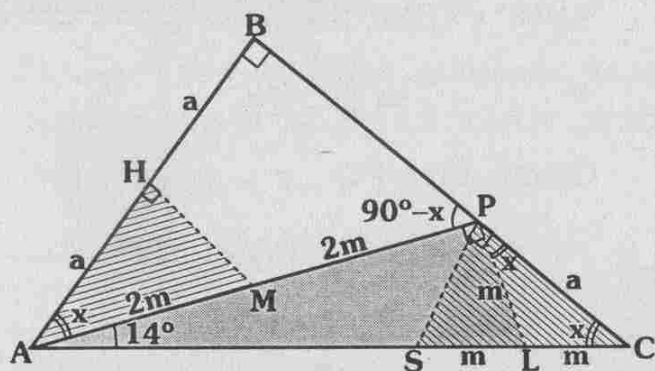
- Piden x .
- En $\triangle ABC$: isósceles ($AB = BC$)
- ($\overline{BH}$ es altura, mediana y bisectriz)
- $\triangle BHC \cong \triangle CLD \Rightarrow HC = CL$
- $\triangle ACL$: not 30° y $60^\circ \Rightarrow m\angle CAL = 30^\circ$
- Entonces en "A":

$$7x = 90^\circ - 5x + 30^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 250



- Piden x .
- Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ tal que $AH = HB$
- Luego se traza $\overline{PS}$ tal que:

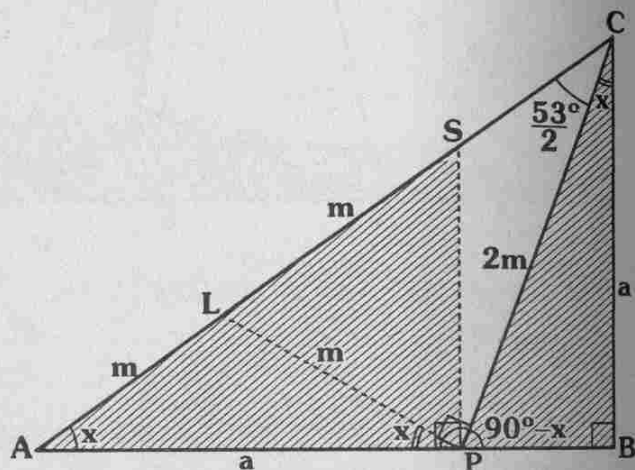
$$m\angle SPC = 90^\circ$$

- $\triangle AHM \cong \triangle SPC \Rightarrow AM = SC$
- $\triangle SPC$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $\triangle APL$: notable 14° y 76°
- $\triangle ABC$: $x + 14^\circ + x = 90^\circ$

$$\therefore x = 38^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 251

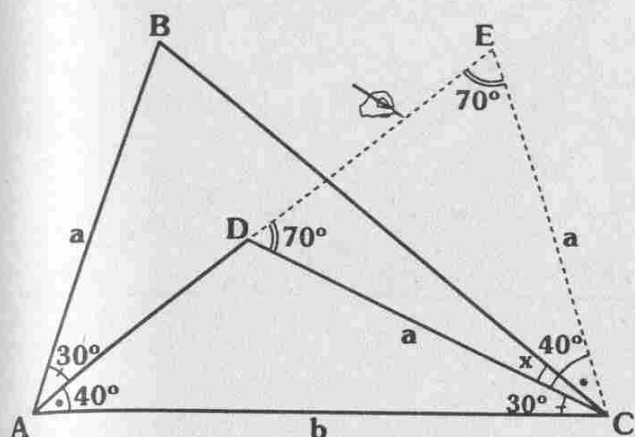


- Piden x .
- Trazamos $\overline{PS}$ tal que: $m\angle APS = 90^\circ$
- $\triangle APS \cong \triangle PBC \Rightarrow AS = PC$
- $\triangle ASP$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $\triangle LPC$: notable de $53/2$.
- $\triangle ABC$: $x + \frac{53^\circ}{2} + x = 90^\circ$

$$\therefore x = \frac{127^\circ}{4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 252



- Piden x .
- Al prolongar $\overline{AD}$ hasta E tal que $m\angle DEC = 40^\circ$, tenemos:

$\triangle DCE$ y $\triangle EDC$:

isósceles $\Rightarrow CD = CE = a$

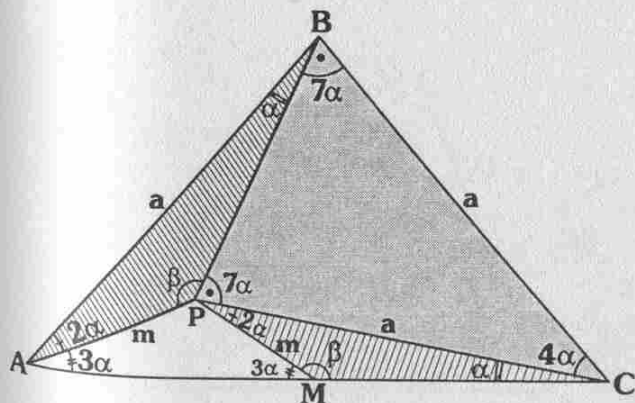
- $\triangle BAC \cong \triangle ECA$ (LAL)

$$\Rightarrow x + 30^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 253

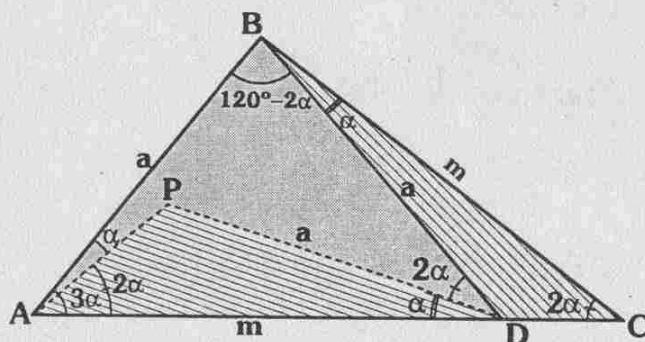


- Piden α .
- Trazamos $\overline{PM}$ tal que:
 $m\angle MPC = 2\alpha$
 $\Rightarrow m\angle APB = m\angle PMC$
 y $\triangle APM$: isósceles ($AP = PM$)
- $\triangle APB \cong \triangle PMC$ (ALA) $\Rightarrow PC = AB$
- $\triangle PCB$: isósceles
- En $\triangle ABPC$: $m\angle BPC = 7\alpha$
- $\triangle BPC$: $7\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180^\circ$

$$\therefore \alpha = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 254



- Piden α .
- Se constituye el $\triangle APD$ tal que:
 $m\angle PAD = 2\alpha$ y
 $m\angle PDA = \alpha$
- $\triangle APD \cong \triangle BDC$ (ALA) $\Rightarrow PD = BD$
- $\triangle BDPL$: se sabe $m\angle ABD = 120^\circ - 2\alpha$

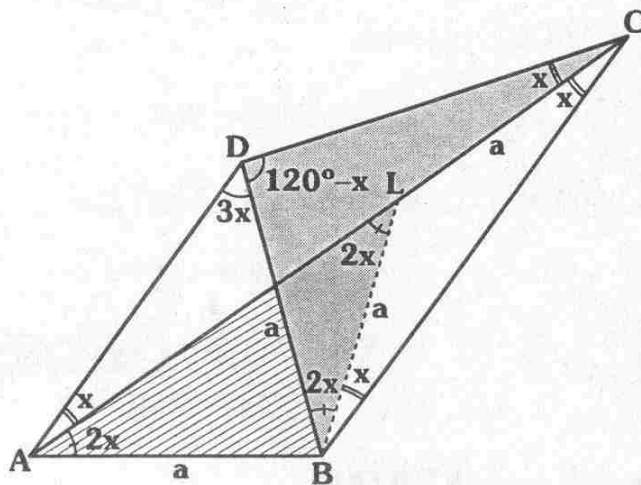
• $\triangle ABC: 3\alpha + 120^\circ - 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$

$\Rightarrow 4\alpha = 60^\circ$

$\therefore \alpha = 15^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 255



• Piden x .

• Trazamos $\overline{BL}$ tal que:

$m\angle CBL = x \Rightarrow AB = BL = LC$

• $\triangle ABD$: isósceles ($AB = BD$)

• $\triangle BDCL$: se sabe:

$m\angle BDC = 120^\circ - x$

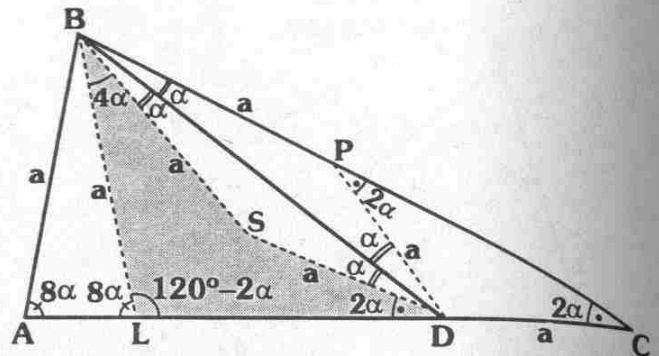
• $\triangle BDC$:

$3x + 120^\circ - x + 2x = 180^\circ$

$\therefore x = 15^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 256



• Piden α .

• $\triangle BDC$: trazamos $\overline{DP}$ tal que:

$BP = PD = DC$

• Se construye $\triangle BSD \cong \triangle BPD$

• $\triangle ABC$: trazamos $\overline{BL}$ tal que $AB = BL$

• $\triangle LBSD$: se sabe que:

$m\angle BLD = 120^\circ - 2\alpha$

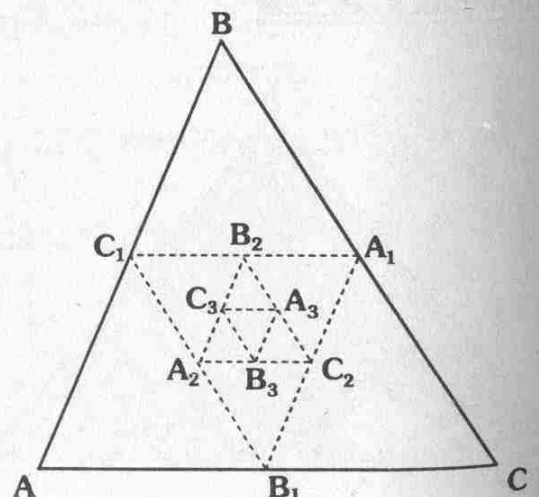
• En el punto "L":

$8\alpha + 120^\circ - 2\alpha = 180^\circ$

$\therefore \alpha = 10^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 257



- Inicialmente ubicamos A_1 , B_1 y C_1 puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
- Por base media: $AB = 2(A_1B_1)$, $BC = 2(B_1C_1)$ y $AC = 2(A_1C_1)$
- Sea: $\text{Perím}_{\triangle ABC} = M \Rightarrow \text{Perím}_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{M}{2}$ y así sucesivamente:

$$\text{Perím}_{\Delta A_2 B_2 C_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} \right) = \frac{M}{2^2}$$

$$\text{Perím}_{\Delta A_3 B_3 C_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2^2} \right) = \frac{M}{2^3}$$

•

$$\text{Perím}_{\Delta A_n B_n C_n} = \frac{M}{2^n} \Rightarrow N = \frac{M}{2^n} \therefore \frac{N}{M} = 2^{-n}$$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 258**

- Nos piden x .
- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta L tal que:

$$m\angle CBL = m\angle BLC = 72^\circ + 4x$$

$$\Rightarrow AC = AL = m$$
- Prolonguemos $\overline{CB}$ hasta "S" tal que:

$$CS = CA = m$$

$$\Rightarrow AC=AL=m$$

- $\Delta CAP \cong \Delta SCL$ (LAL)

$$\Rightarrow m \angle CSL = 5x$$

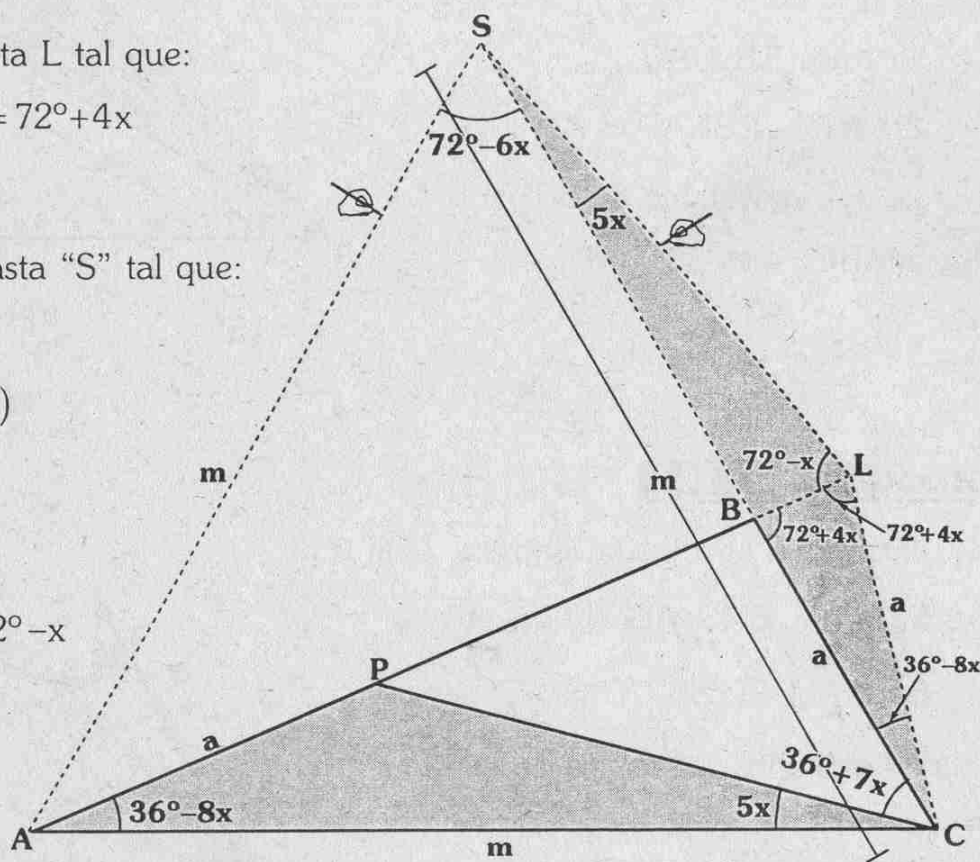
- Como:

$$m\angle ASL = m\angle ALS = 72^\circ - x$$

$$\Rightarrow AL = AS = m$$

- $\triangle ASC$: equilátero

$$72^\circ - 6x = 60^\circ$$



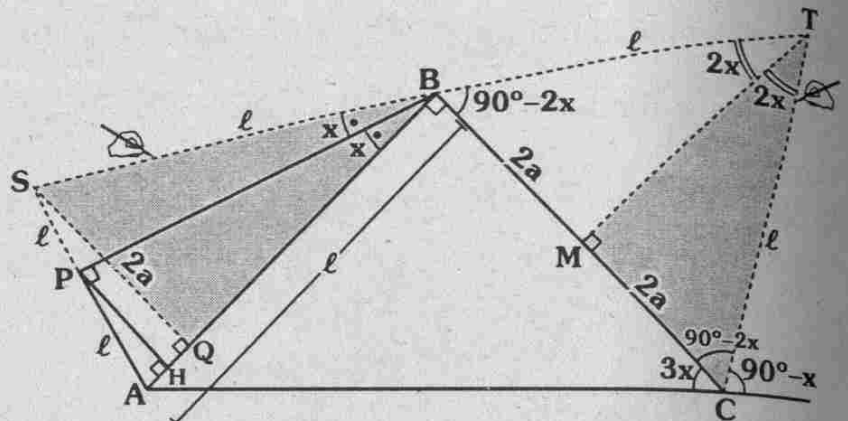
$$\therefore x = 2^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 259

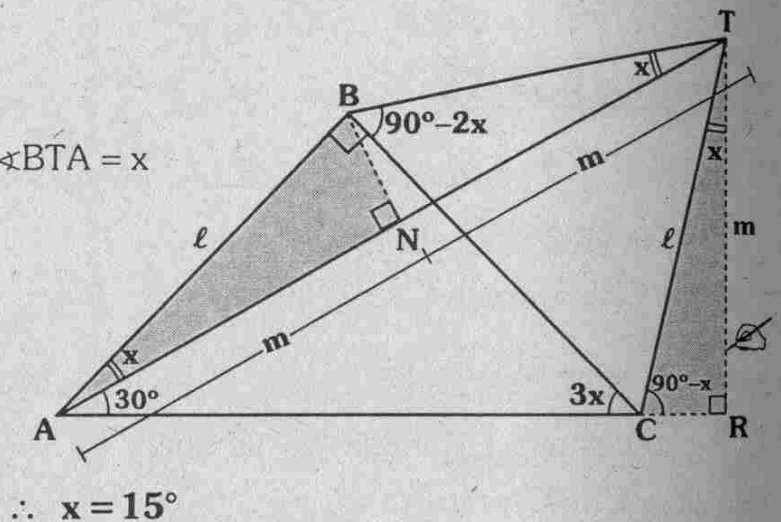
Paso 1

- Nos piden x .
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S tal que: $m\angle PBS = x$
- $\triangle ABS$: isósceles $\Rightarrow AP = PS$
- Se traza: $\overline{SQ} \perp \overline{AB} \Rightarrow SQ = 2(PH) = 2a$
- Se traza: $\overline{MT} \perp \overline{BC}$, donde $BM = MC = 2a$ y $m\angle MTC = 2x$
- $\triangle SQB \cong \triangle CMT \Rightarrow AB = CT = BT = \ell$



Paso 2

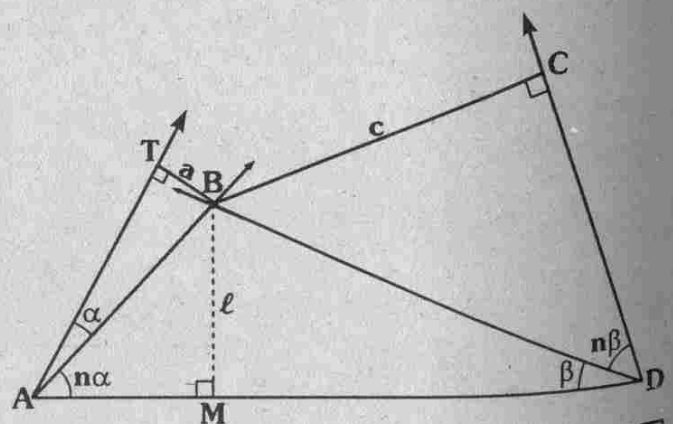
- $\triangle ABT$: isósceles, como:
 $m\angle ABT = 180^\circ - 2x \Rightarrow m\angle BAT = m\angle BTA = x$
- Se traza $\overline{TR} \perp \overline{AC}$
- $\triangle CRT \cong \triangle BNA \Rightarrow AN = TR$
- $\triangle ART$ es notable de 30°
- $\triangle ABC$: $4x + 30^\circ = 90^\circ$



Clave B

RESOLUCIÓN N° 260

- Nos piden la relación entre a , c , m y n .
- Se traza: $\overline{BM} \perp \overline{AD}$ (M en $\overline{AD}$)
- Sea: $BM = \ell$
- Por teorema: $\ell < na$
 $\ell < m\ell$
 $\Rightarrow c < mna$



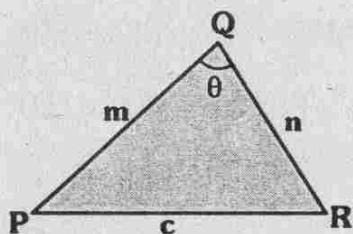
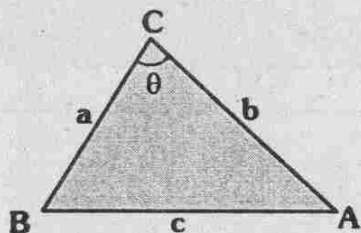
Clave B

Solucionario

Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN Nº 261

I)



- De los datos:

$$a + b = m + n \quad \dots (I)$$

- Por teorema de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad \dots (II)$$

$$c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta \quad \dots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

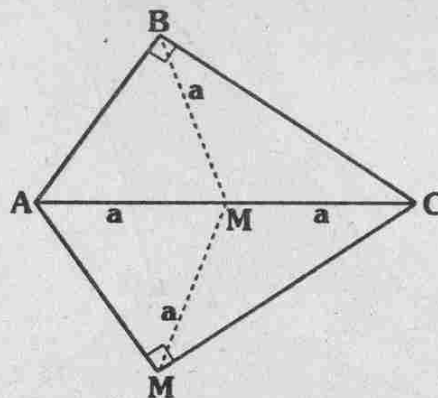
$$(a = n \text{ y } b = m) \text{ ó }$$

$$(a = m \text{ y } b = n)$$

- En cualquier de los dos casos, los triángulos son congruentes.

Verdadero

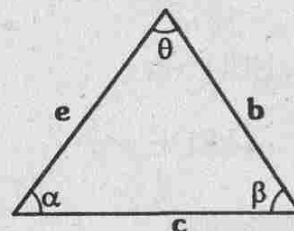
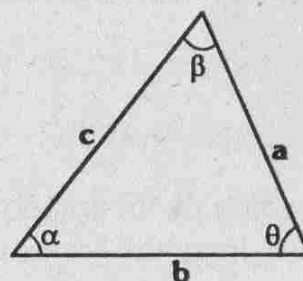
II)



- En el gráfico los triángulos ABC y AMC cumplen la condición, sin embargo $\triangle ABC \neq \triangle AMC$.

Falso

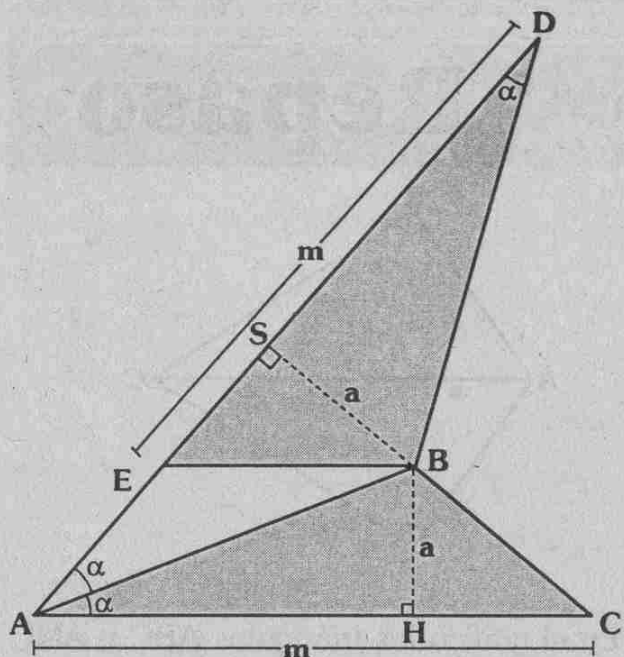
III) Sea $a \neq b$, $b \neq c$ y $c \neq a$



- Los triángulos cumplen la condición (que repiten α , β , θ , b y c), sin embargo no necesariamente son congruentes.

Clave D

RESOLUCIÓN N° 262



- Piden $\frac{AB}{BD}$
- Como: $\triangle EBD \cong \triangle CBA$ y $ED = AC$
 $BS = BH$ (alturas homólogas congruentes)
- Además se deduce:

$$m\angle EAB = m\angle BAC$$

- Como la medida de un ángulo adyacente al lado de longitud "m" es α en el $\triangle ABC$.

- $\triangle AEB$: $m\angle BED > \alpha$

$$\Rightarrow m\angle BDE = \alpha$$

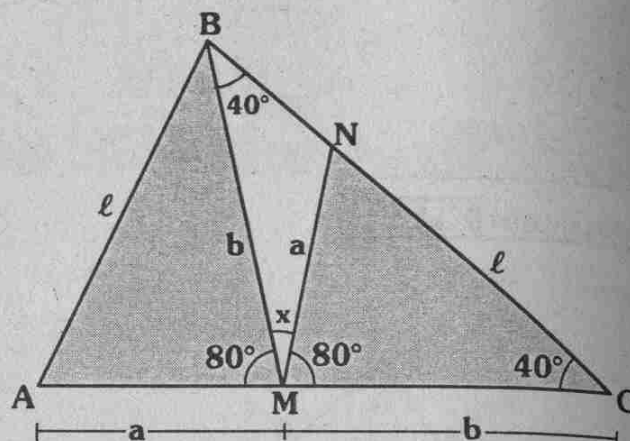
- $\triangle ABD$: isósceles

$$\Rightarrow AB = BD$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = 1$$

Clave B

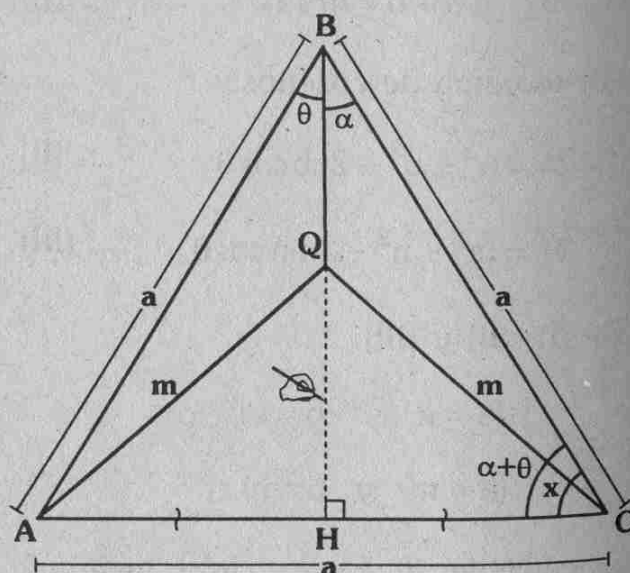
RESOLUCIÓN N° 263



- Piden x .
- $\triangle ABM \cong \triangle NCM$ (LLL)
 $\Rightarrow m\angle AMB = m\angle NMC = 80^\circ$
- En "M": $80^\circ + x + 80^\circ = 160^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 264



- Piden x .
- Dato: $\theta + 2\alpha = 90^\circ$; $AB = AC$ y
 $AQ = QC$

- Al prolongar $\overline{BQ}$, como: $\theta + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \overline{BQ} \perp \overline{AC}$
- Como: $AQ = QC \Rightarrow \overline{QH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ entonces $AB = BC$.
- Como: $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$: equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 265

- Piden x .
- Por teorema de la bisectriz:

$$BM = BH$$

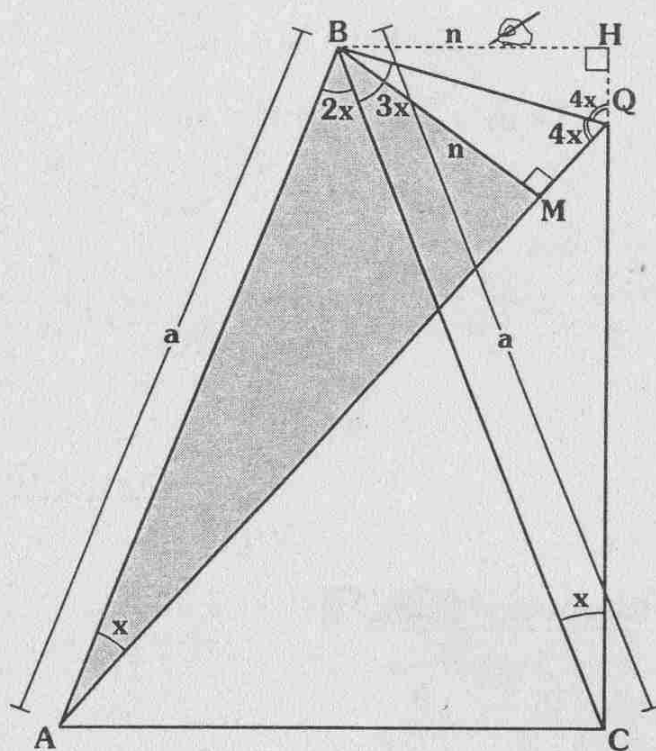
$$\angle AMB \cong \angle BHC$$

$$\Rightarrow m\angle BCQ = m\angle BAM = x$$

- $\triangle AQB$:

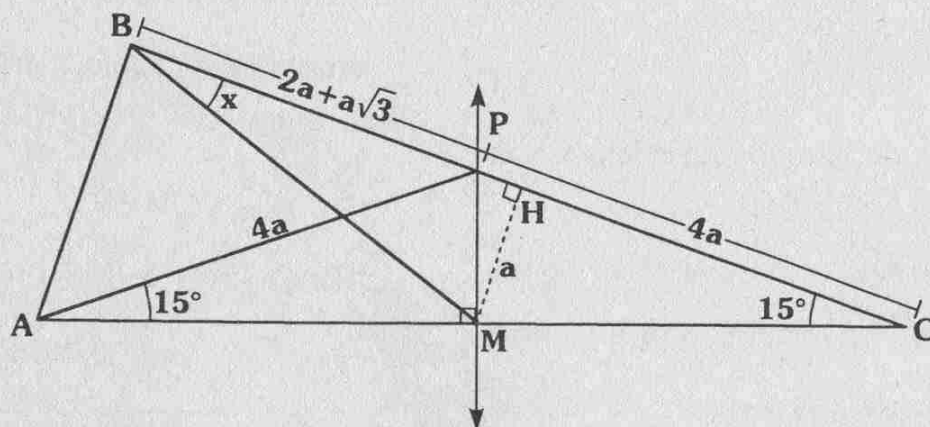
$$x + 5x + 4x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

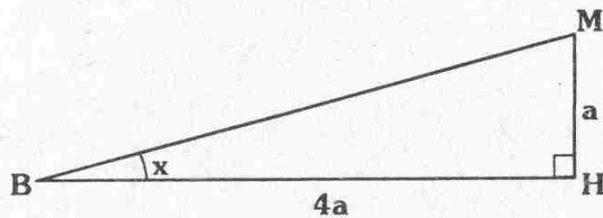


Clave C

RESOLUCIÓN N° 266



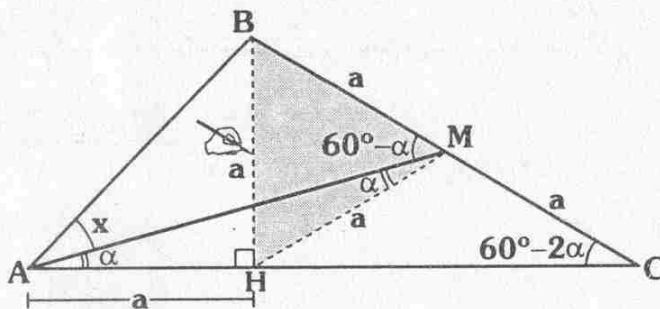
- Nos piden x .
- Por teorema de la mediatriz $PA = PC$
- En $\triangle PMC$:
notable de $15^\circ \Rightarrow PC = 4(MH)$
- En $\triangle BHC$, como:
 $HM = a \Rightarrow HC = 2a + a\sqrt{3}$
 $\Rightarrow PH = 2a - a\sqrt{3}$
- $BH = BP + PH \Rightarrow BH = 4a$



$$\therefore x = 14^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 267



- Piden x .
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $HM = a$
- $\triangle AHM$: isósceles $\Rightarrow m\angle AMH = \alpha$
- Como $MB = MH$ y $m\angle BMH = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BMH$: equilátero

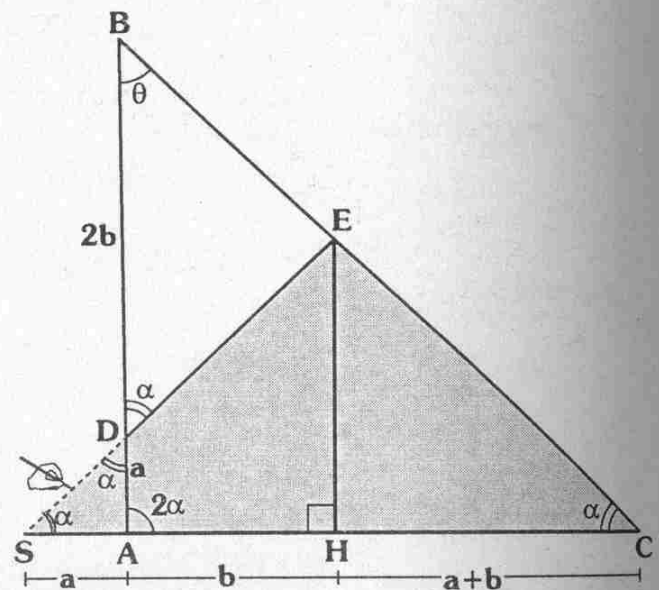
- $\triangle BHC$: notable de 30°
 $\Rightarrow 60^\circ - 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

- $\triangle AHB$: isósceles $x + \alpha = 45^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 268

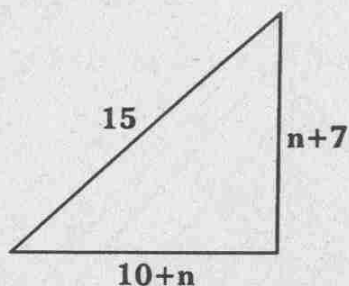


- Piden θ
- Al prolongar $\overline{ED}$ y $\overline{CA}$, se cortan en S.
- Por ángulo exterior, en el $\triangle ASD$:
 $m\angle DSA = \alpha$.
- $\triangle SEC$ = isósceles
- Como $\overline{EH}$ es altura, también es mediana, entonces: $SH = HC = a + b$.
- $AB = AC \Rightarrow \alpha = \theta$
- $\triangle BAC$: $2\alpha + \alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 269



- Analicemos el triángulo.
- Dato: "n" es menor valor entero y $n \neq \{0; 1\}$

$$10+n > 0 \Rightarrow n > -10 \quad \dots (\alpha)$$

$$7+n > 0 \Rightarrow n > -7 \quad \dots (\beta)$$

$$10+n-(n+1) < 15 < 10+n+n+7$$

$$\Rightarrow 3 < \underbrace{15}_{15} < 17+2n$$

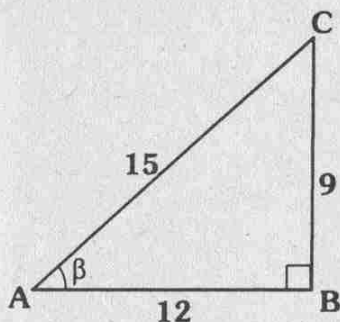
$$-1 < n \quad \dots (\theta)$$

- De (α) , (β) , (θ) :

$$n > -1$$

$$\Rightarrow n = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- Como "n" es el menor entero y $n \neq \{0; 1\} \Rightarrow n = 2$
- Luego; el triángulo quedaría así:

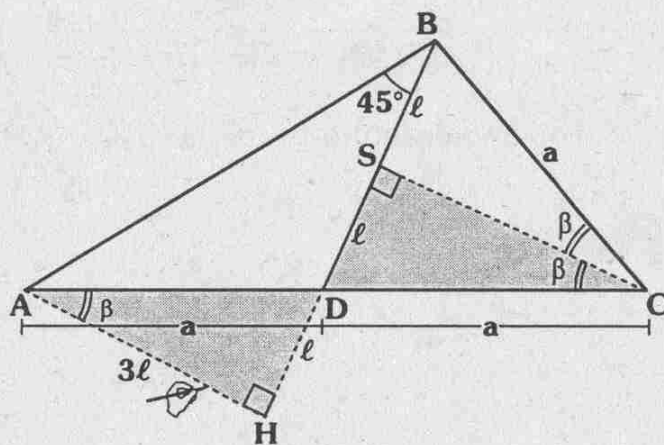


- El triángulo es notable de 37° y 53° nos piden β (menor ángulo).

$$\therefore \beta = 37^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 270



- Piden $m\angle ACB$.
- Al prolongar la mediana $\overline{BD}$ y trazar $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ y trazar la altura $\overline{CS}$ tenemos:

$$\triangle AHD \cong \triangle CSD$$

$$\Rightarrow DH = DS = l$$

- $\triangle AHB$: notable de 45°
- $$\Rightarrow HB = AH = 3l$$

- $\triangle AHD$: notable

$$\Rightarrow \beta = \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore m\angle ACB = 37^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 271

- Piden x .
- Para aprovechar la presencia de los puntos medios, ubiquemos L, punto medio de BD .
- Por teorema de la base media en:

– $\triangle ADC$: $ML = 6$ y $\overline{ML} \parallel \overline{AD}$

– $\triangle ABC$: $LN = 8$ y $\overline{LN} \parallel \overline{BD}$

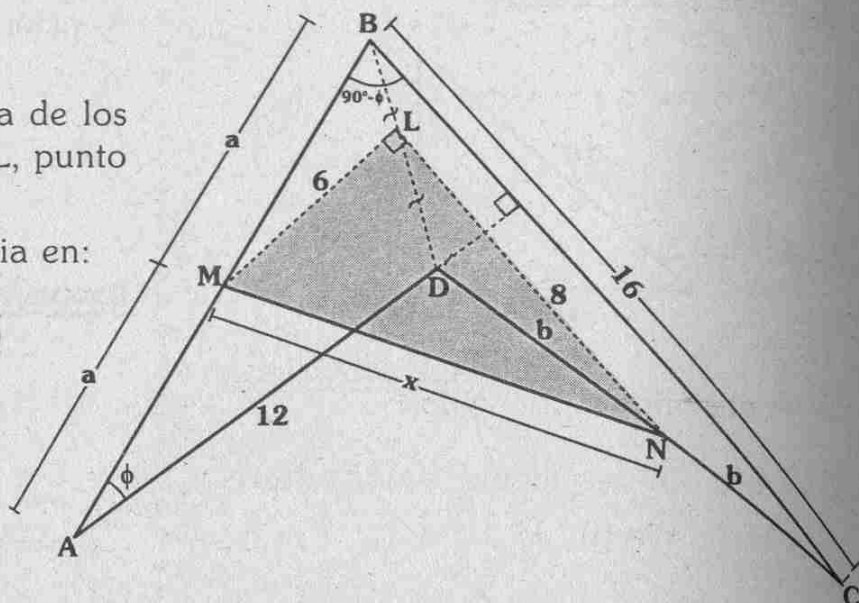
- Por ángulo entre paralelas:

$$m\angle MLN = 90^\circ$$

- En $\triangle MLN$: $x^2 = 6^2 + 8^2$

$$\therefore x = 10$$

Clave D



RESOLUCIÓN N° 272

- Piden x .
- Como $\triangle ABC$ y isósceles, por teorema:

$$CT = MB + MN$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$PR = PH = 1$$

$$\Rightarrow HS = CT = 3$$

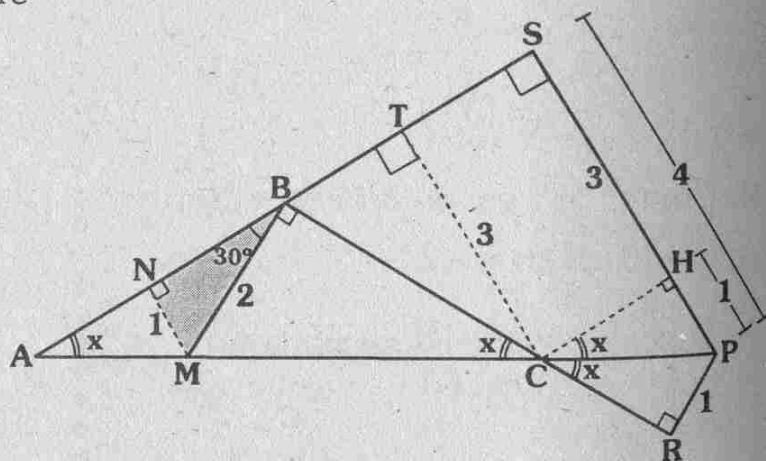
- Como: $MB = 2$

$$\Rightarrow MN = 1$$

- $\angle NBM$: notable de $30^\circ \Rightarrow x + x + 120^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C



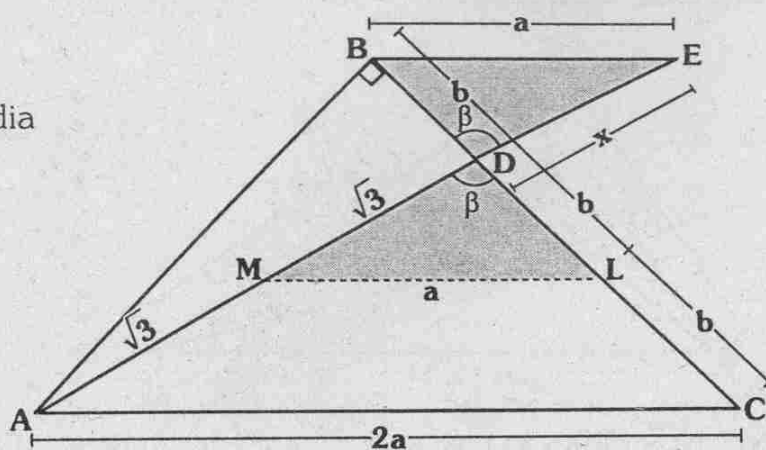
RESOLUCIÓN N° 273

- Piden x .
- En el $\triangle ADC$, se traza la base media $\overline{ML}$

$$ML = \frac{AC}{2} = a \quad \text{y} \quad \overline{ML} \parallel \overline{AC}$$

- Notemos: $ML = BE$, $BD = DL$,
 $m\angle MDL = m\angle BDE$ y $a > b$
 $\Rightarrow \triangle MLD \cong \triangle EBD$ (4^{to} caso)

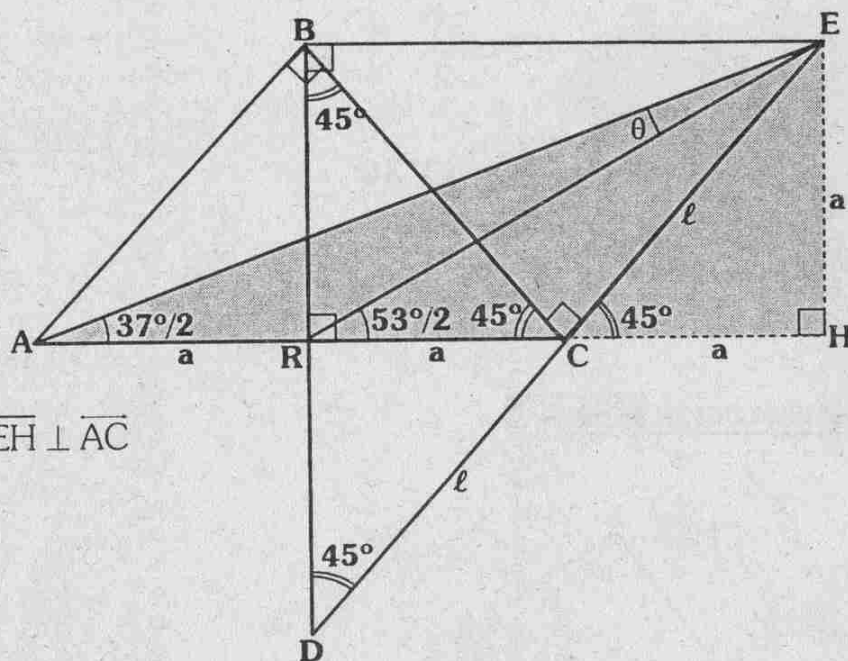
$$\therefore x = \sqrt{3}$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 274**

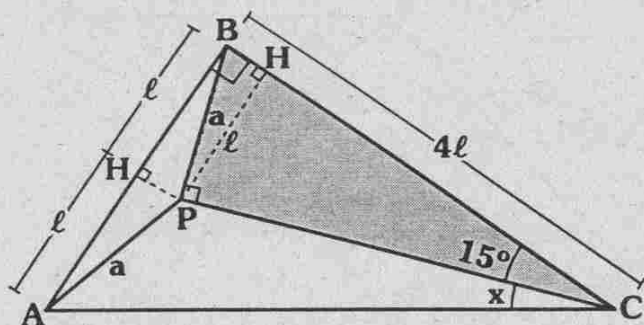
- Nos piden: θ
- Como:
 $AB = BC \Rightarrow m\angle ACB = 45^\circ$
- $DC = CE \Rightarrow DBE$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle CDB = m\angle DBC = 45^\circ$
- Luego:
 $BR \perp AC \Rightarrow DR = RC = a$

- Se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$
- $\triangle RHE$: notable de $53^\circ/2$
- $\triangle AHE$: notable de $37^\circ/2$
- $\triangle AER$: $\theta + \frac{37^\circ}{2} = \frac{53^\circ}{2}$

$$\therefore \theta = 8^\circ$$

**Clave** A

RESOLUCIÓN N° 275



- Nos piden x .
- En $\triangle BPC$, se traza $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ por teorema:
 $BC = 4(PH) = 4l$
- $\triangle ABP$, es isósceles, entonces al trazar la altura $\overline{PH}$

$$\Rightarrow HA = HB = l$$

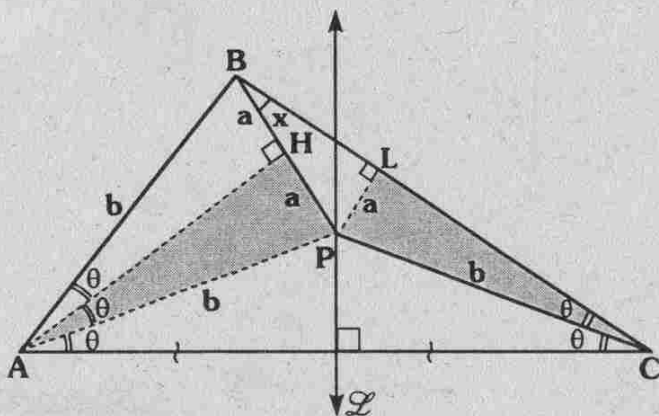
- $\triangle ABC$: notable:

$$x + 15^\circ = \frac{53^\circ}{2}$$

$$\therefore x = \frac{23^\circ}{2} = 11^\circ 30'$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 276



- Piden x .

- Por teorema de la mediatriz:

$$PA = PC \Rightarrow m\angle PAC = \theta$$

- Como $AB = PC \Rightarrow \triangle ABP$: isósceles, es este triángulo tracemos la altura:

$$\overline{AH} \Rightarrow BH = HP$$

- Se traza $\overline{PL} \perp \overline{BC}$

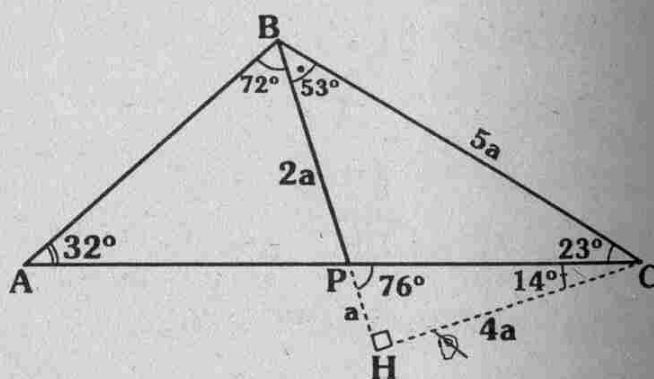
- $\triangle AHP \cong \triangle CLP$ (ALA) $\Rightarrow HP = PL$

- $\triangle BLP$: notable

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 277



- Piden $\frac{PB}{BC}$.

- Completemos "ángulos", tenemos $m\angle CBP = 53^\circ$.

- Ahora prolonguemos $\overline{BP}$ y tracemos $\overline{CH} \perp \overline{BP}$, notemos $m\angle PCH = 14^\circ$

- $\triangle PHC$: notable de 14°

$$\Rightarrow HC = 4a \text{ y } PH = a$$

- $\triangle BHC$: notable de 53°

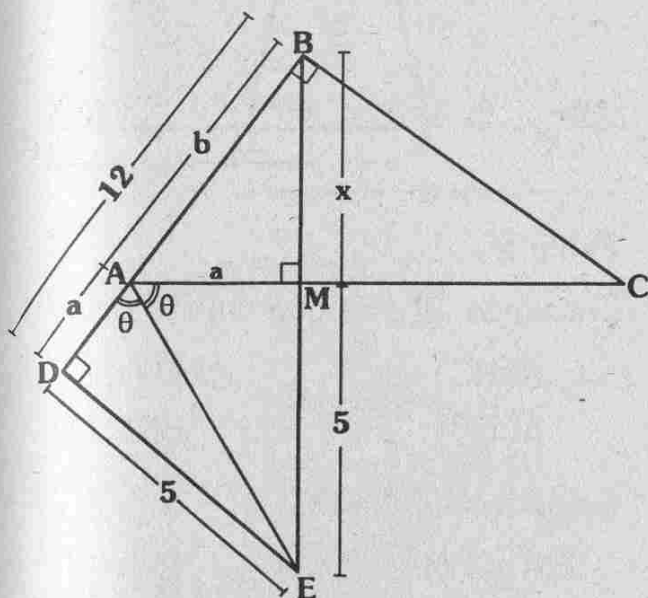
$$\Rightarrow BC = 5a \text{ y } BH = 3a \Rightarrow PB = 2a$$

Finalmente:

$$\frac{PB}{BC} = \frac{2}{5}$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 278



• Piden x .

• Por teorema de la bisectriz:

$$AD = AM = a \text{ y}$$

$$ED = EM = 5$$

• Como:

$$a + b = 12 \Rightarrow DB = 12$$

• $\angle BDE$:

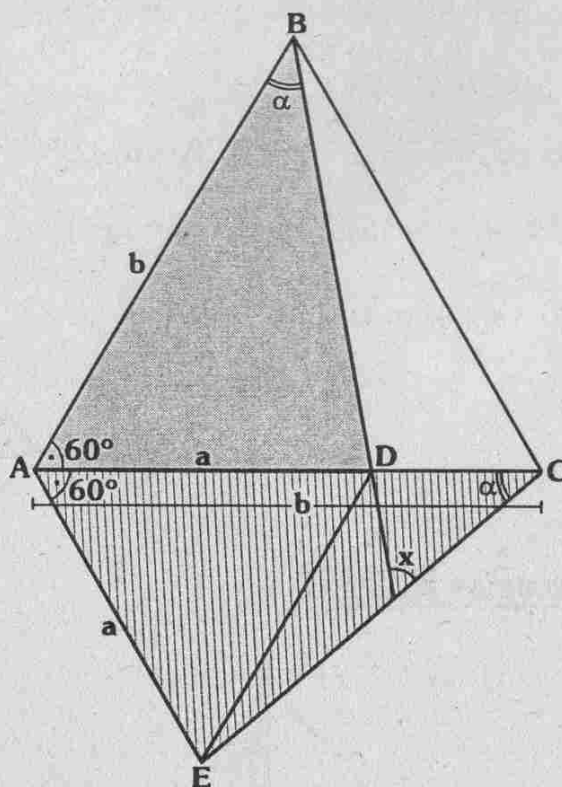
$$\text{Pitagórico} \Rightarrow EB = 13$$

$$x + 5 = 13$$

$$\therefore x = 8$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 279



• Piden x .

• $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (LAL)

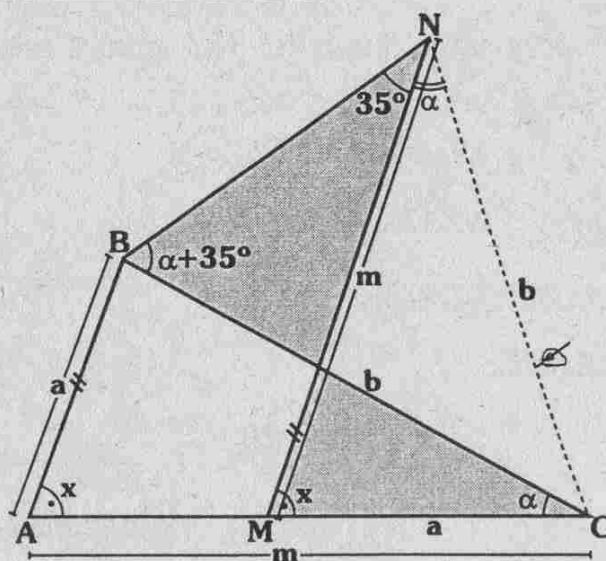
$$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle ACE$$

• En $\triangle$: $x + \alpha = 60^\circ + \alpha$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave **C**

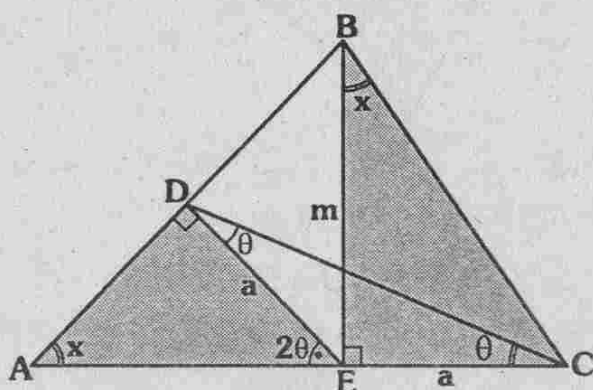
RESOLUCIÓN N° 280



- Piden x .
- Como $\overline{AB} \parallel \overline{MN} \Rightarrow m\angle NMC = x$
- $\triangle ABC \cong \triangle CMN$ (LAL)
 $\Rightarrow BC = NC$ y $m\angle BCA = m\angle BNC$
- $\triangle BCN$: isósceles $m\angle CBN = m\angle BNC$
- ∇ : $x + \cancel{x} = \cancel{x} + 35^\circ + 35^\circ$
 $\therefore x = 70^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 281

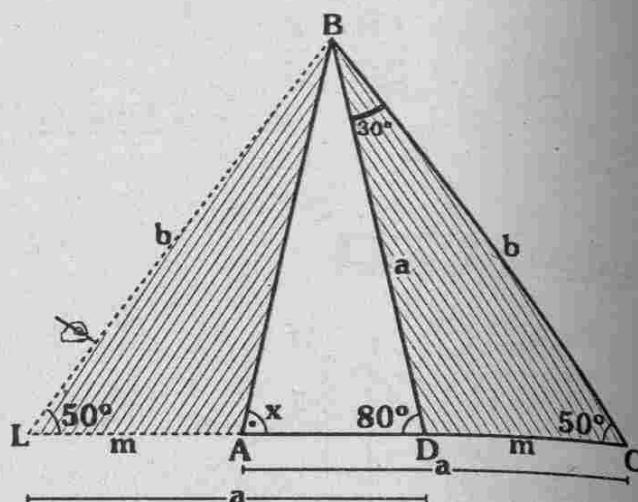


- Nos piden x en función de θ .
- Dato: $\triangle ADE \cong \triangle BEC$
- Averiguemos que lados son iguales sea $ED = a$ entonces como:
 $BE > ED \Rightarrow EC = a$
- luego : $m\angle DAE = x$
- $\triangle EDC$: isósceles
- $\triangle ADE$:

$$x = 90^\circ - 2\theta$$

Clave **E**

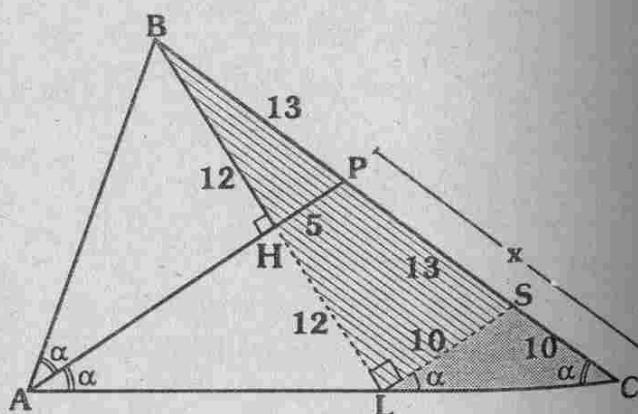
RESOLUCIÓN N° 282



- Piden x .
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que: $m\angle BLD = 50^\circ$
 $\Rightarrow \triangle LBC \left\{ \begin{array}{l} \text{isósceles} \\ \triangle LDB \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} LB = BC \\ BD = LD \end{array}$
- Se deduce: $LA = DC$
- $\triangle LBA \cong \triangle DBC$ (LAL) $\Rightarrow BA = BD$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 283

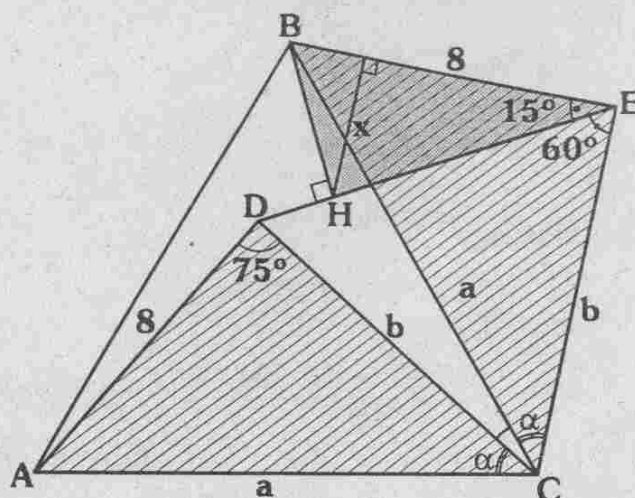


- Piden x .
- Prolongamos $\overline{BH}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en L.
 $\Rightarrow \triangle BAL$: isósceles ($BH = HL$)

- Trazamos $\overline{LS} \parallel \overline{HP}$
 $\triangle LBS$: $\overline{PH}$ base media
 $\Rightarrow LS = 10$ y $PS = 13$
- Además $\triangle LSC$: isósceles:
 $LS = SC = 10$
 $\therefore x = 23$

Clave B

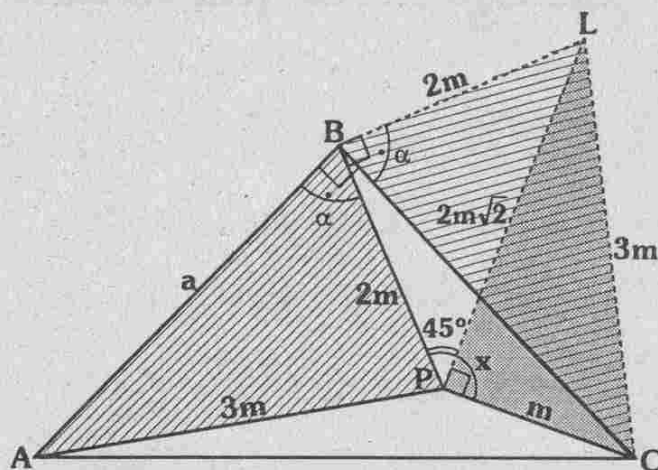
RESOLUCIÓN N° 285



- Piden x .
- $\triangle ADC \cong \triangle BEC$ (LAL)
 $BE = AD$ y $m\angle BEC = m\angle ADC = 75^\circ$
- Además se deduce:
 $\angle BHE$: not 15° y 75° , por propiedad:
 $\therefore x = 2$

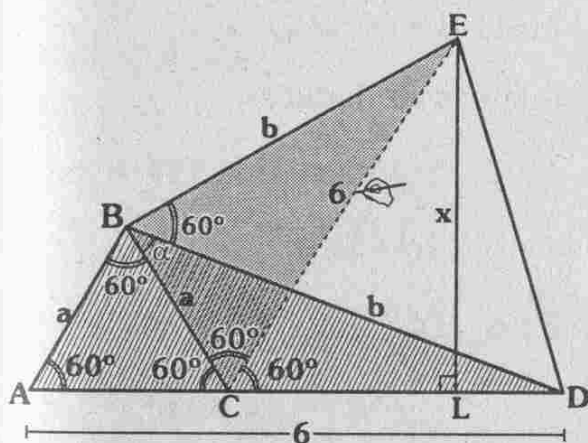
Clave D

RESOLUCIÓN N° 286



- Piden x .
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que $BL = BP$
y $m\angle LBC = m\angle ABP$
 $\Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle LBC$ (LAL) $\Rightarrow LC = AP$

RESOLUCIÓN N° 284



- Piden: $EL = x$
 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ (LAL) $\Rightarrow EC = AD$
 $m\angle BCE = m\angle BAD$
- Además:
 $\angle CEL$: notable de 30° y 60°
 $\therefore x = 3\sqrt{3}$

Clave C

- $\triangle PBL$: rectángulo isósceles

- Además:

$$\triangle LPC : (LC)^2 = (PL)^2 + (PC)^2$$

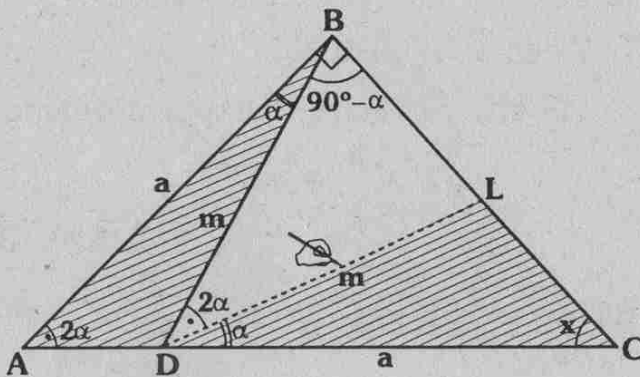
$$\Rightarrow m\angle LPC = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ + 45^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 287



- Piden x .
- Trazamos $\overline{DL}$ tal que $m\angle BDL = 2\alpha$

$$\Rightarrow \triangle BDL : \text{isósceles } (BD = DL)$$

- $\triangle ABD \cong \triangle DLC$ (LAL)

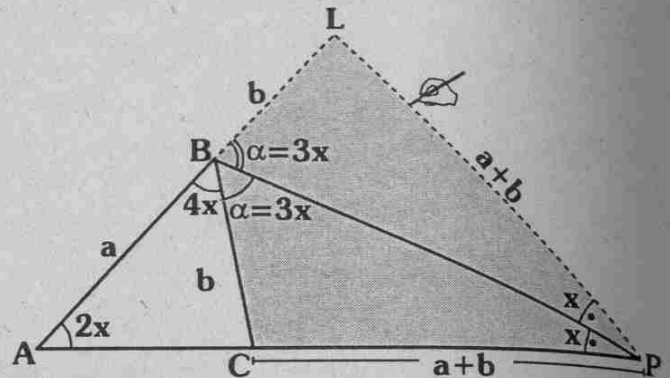
$$\Rightarrow m\angle LCD = x = 2\alpha$$

- $\triangle ABC$: isósceles

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 288

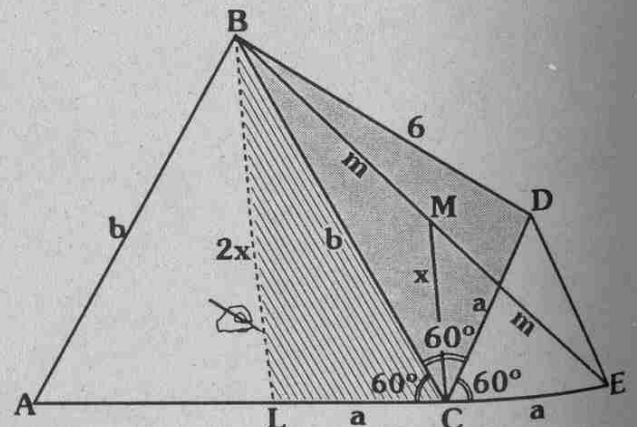


- Piden x .
- Prolongamos $\overline{AB}$ tal que $BL = BC$
 $\triangle CBP \cong \triangle LBP$ (LAL) $\Rightarrow LP = CP$;
 $m\angle LPB = m\angle BPC$
- Además se deduce:
 $\triangle ALP$: isósceles $\Rightarrow m\angle LAP = 2x$
- $\triangle ABP$: $\alpha = 3x$
- En B: $4x + 3x + 3x = 180^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$

Clave B

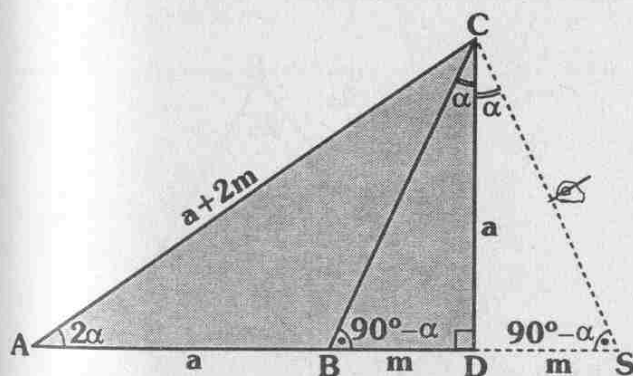
RESOLUCIÓN N° 289



- Piden: $CM = x$
- Trazamos: $\overline{BL} \parallel \overline{MC}$
- $\triangle BEL : \triangle MC$: base media
 $\Rightarrow BL = 2x$ y
 $LC = CE$
- $\triangle LBC \cong \triangle CBD$ (LAL)
 $2x = 6$
 $\therefore x = 3$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 290

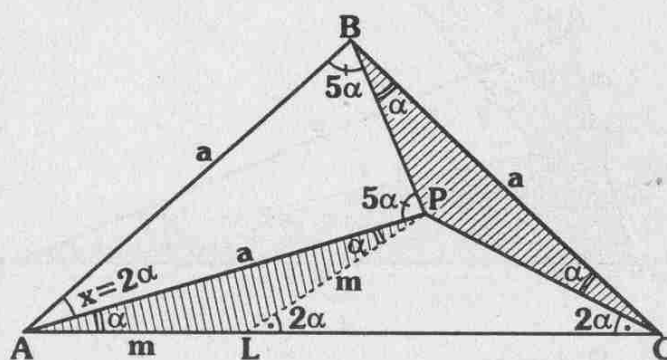


- Piden α .
- Trazamos $\overline{CS}$ tal que :
 $m\angle CSA = 90^\circ - \alpha$
 - $\triangle BCS$: isósceles $\Rightarrow BD = DS$
 - $\triangle CAS$: isósceles $\Rightarrow AC = AS$
- $\triangle ADC$: $(a+2m)^2 = (a+m)^2 + a^2$
 $\Rightarrow a = 3m$

- $\triangle ADC$: notable de 37° y 53°
 $2\alpha = 37^\circ$
 $\alpha = \frac{37^\circ}{2}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 291



- Piden x .
- Trazamos $\overline{PL}$ tal que $m\angle APL = \alpha$
- $\triangle APL \cong \triangle BPC$ (ALA)
 $\Rightarrow AL = LP = BP = PC$
- $\triangle LPC$: isósceles
- $\triangle BCP$: $m\angle BPA = 5\alpha$
- $\triangle BAP$: isósceles y
 $\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow x = 2\alpha$
- $\triangle BAP$:
 $2\alpha + 5\alpha + 5\alpha = 180^\circ$
 $\therefore 2\alpha = 30^\circ$

Clave A

- Clave
- E**

- $$\therefore x = 48^\circ$$

Clave D

- Piden $\mathbf{x}$.
- Por teorema de la mediatriz:

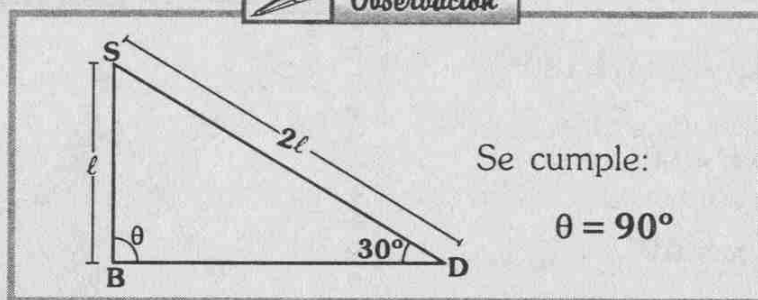
$$\overline{\mathcal{L}_1}: \text{mediatriz de } \overline{AC} \Rightarrow AL = LC$$

$$\overline{\mathcal{L}_2}: \text{mediatriz de } \overline{QP} \Rightarrow QL = LP$$
- $\triangle AQL \cong \triangle CPL$ (LLL)

$$\Rightarrow m\angle QAL = m\angle LCP$$

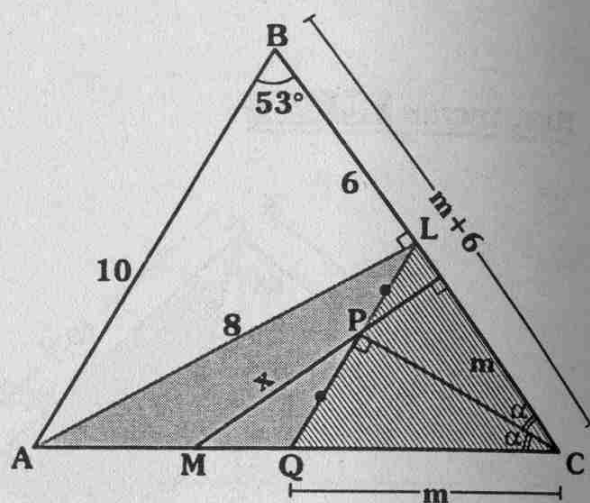


Observación



RESOLUCIÓN N° 297

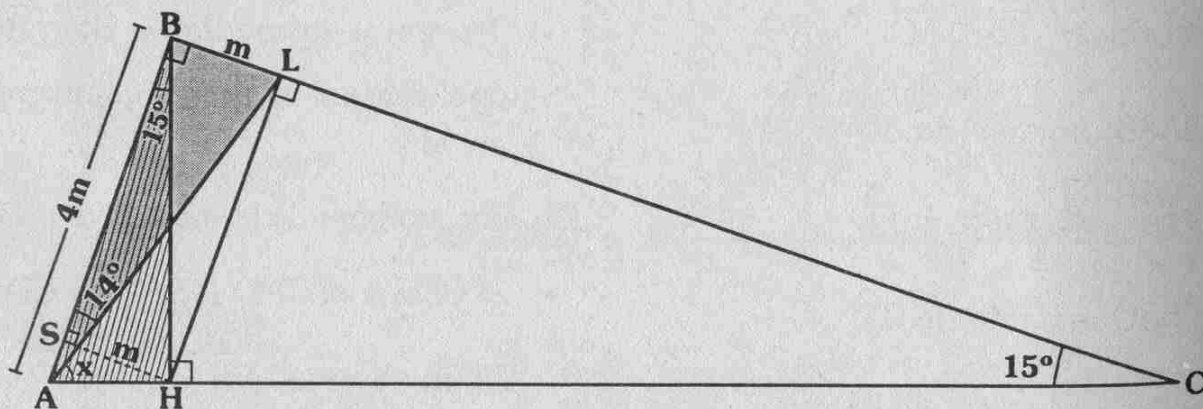
- Piden x .
- Prolongamos $\overline{QP}$ hasta "L" tal que,
- $\triangle LCQ$: isósceles $\Rightarrow LC = QC \Rightarrow BL = 6$
- $\triangle ABL$: notable 37° y 53°
 $\Rightarrow m\angle ALB = 90^\circ$ y $AL = 8$
- $\triangle ALQ$: $\overline{PM}$ es base media



$\therefore x = 4$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 298



- Piden x .
- $\triangle ABH$: notable de 15° y $75^\circ \Rightarrow AB = 4(HS)$; además $SH = BL$
- $\triangle ABL$: notable 14° y $76^\circ \Rightarrow m\angle BAL = 14^\circ$
- $\triangle ABH$: $x + 14^\circ = 75^\circ$

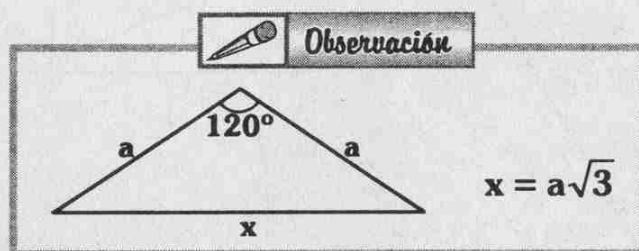
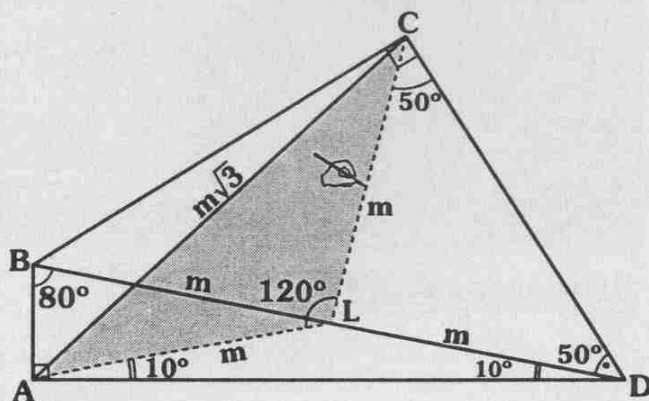
$\therefore x = 61^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 299

- Piden $\frac{AC}{BD}$
- Por teorema mediana relativa a la hipotenusa

$$\Rightarrow AL = CL = \frac{BD}{2} = m$$

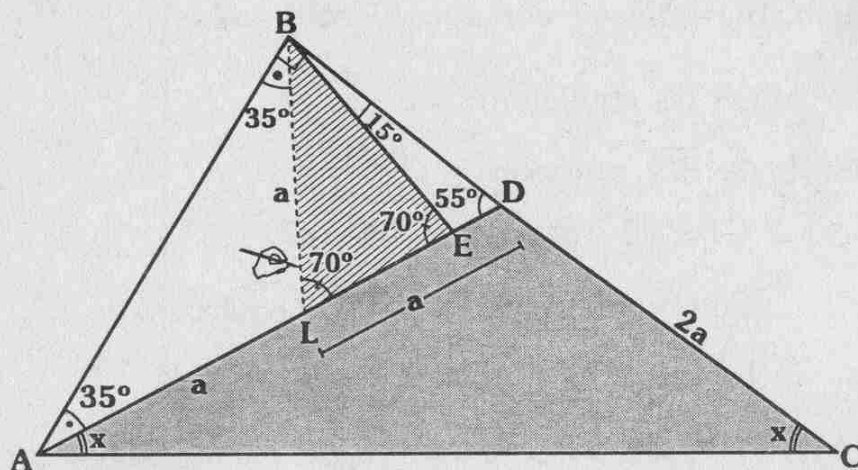


- En $\triangle ALC$: $AC = m\sqrt{3}$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 300



- Piden x .
- $\triangle ABD$: Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa entonces: $BL = AL = LD$.
- $\triangle LBE$: isósceles ($LB = BE$)
- $\triangle ADC$: isósceles ($AD = DC$): $2x = 55^\circ$

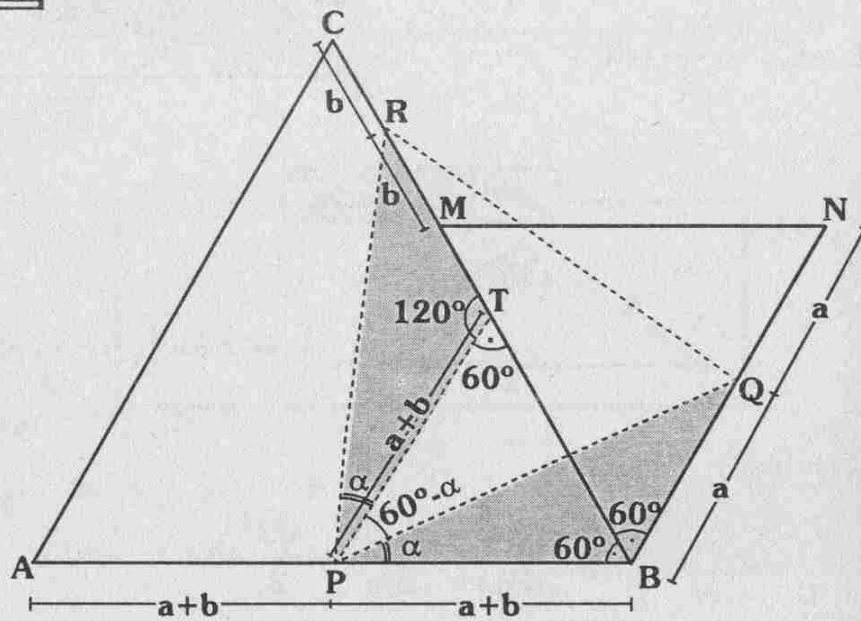
$$\therefore x = 27,5^\circ$$

Clave A

Solucionario

Problemas Olímpicos

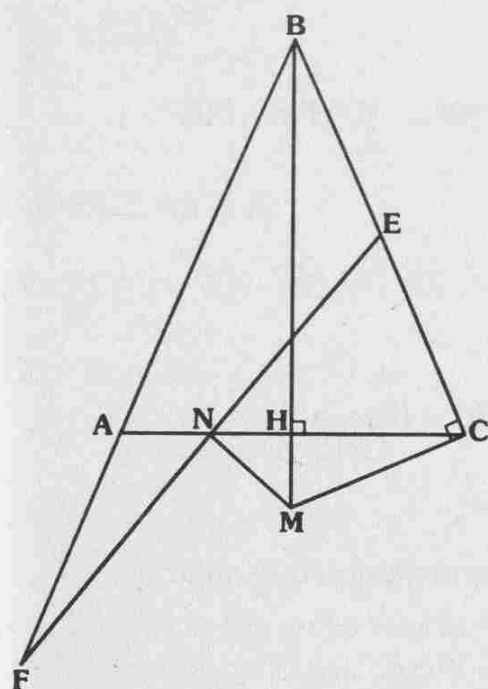
RESOLUCIÓN Nº 1



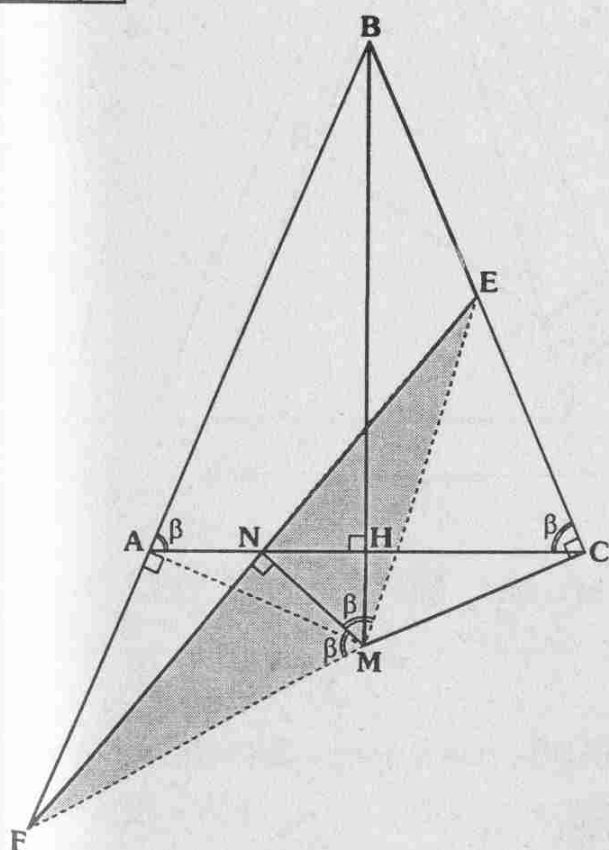
- En el gráfico, $\triangle ABC$ y $\triangle BMN$ son equiláteros, $AP=PB$, $CR=RM$ y $BQ=QN$.
(Sea $CR=RM=b$; $BQ=QN=a$; con ello $AP=PB=a+b$)
- Por demostrar: $\triangle PQR$ es equilátero.
- Sea T punto medio de $\overline{BC}$, entonces:
 - _ $CT = TB = a+b \Rightarrow RT = a$
 - _ Como: $PB = BT \Rightarrow \triangle PBT$: equilátero
 - _ Luego: $PT = a+b$ y $m\angle PTR = 120^\circ$
- $\triangle PTR \cong \triangle PBQ$ (LAL) $\Rightarrow PR = PQ$ y $m\angle RPT = m\angle QPB = \alpha$
- Como $PQ = PR$ y $m\angle RPQ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle PRQ$ es equilátero

RESOLUCIÓN Nº 2

- Consideremos el siguiente gráfico:



- Dato: $AB = BC$
- Por demostrar: $\overline{MN} \perp \overline{EF} \Rightarrow EN = NF$
- El problema consta de dos partes:

Parte I

- Demostremos: si $\overline{MN} \perp \overline{EP} \Rightarrow EN = NP$
- Como $AB = BC \Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB$ y $\overline{BH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, luego $MA = MC$, entonces:

$$\triangle MAB \cong \triangle MCB$$

$$\Rightarrow m\angle MAB = m\angle MCB = 90^\circ$$

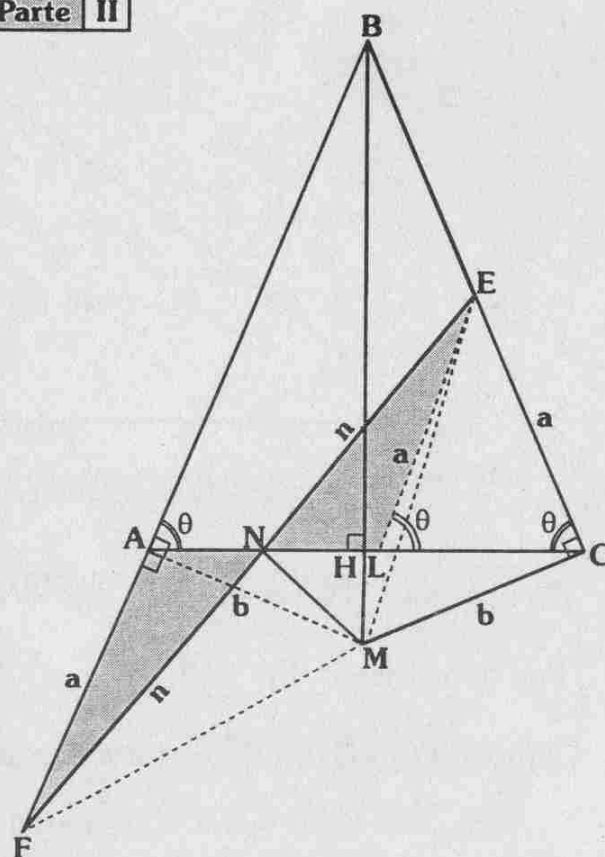
- Los cuadriláteros FANM y MNEC son inscriptibles, por teorema:

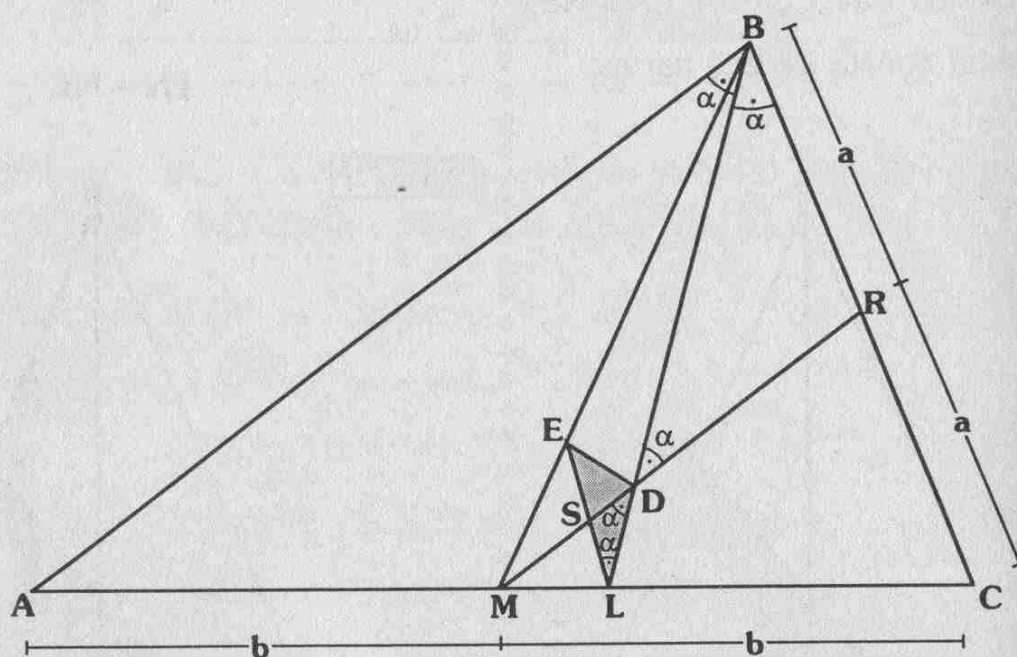
$$m\angle BAN = m\angle FMN = \beta$$

$$m\angle NCE = m\angle NME = \beta$$

- En $\triangle FME$, como $\overline{MN}$ es altura y bisectriz, entonces $\triangle FME$ es triángulo isósceles, luego: $\overline{MN}$ también es mediana.

$$\therefore FN = NE$$

Parte II

$$\therefore \overline{MN} \perp \overline{FE}$$


$$m \angle MDL = m \angle ABD = \alpha$$

- Como $\overline{LE} \parallel \overline{BC}$

$$\Rightarrow m\angle ELD = m\angle DBC = \alpha$$

- En $\triangle MBC$, tenemos:

$$BR = RC \text{ y } \overline{EL} \parallel \overline{BC} \Rightarrow ES = SL$$

- $\triangle SDL$: isósceles, pues

$$m\angle SDL = m\angle SLD$$

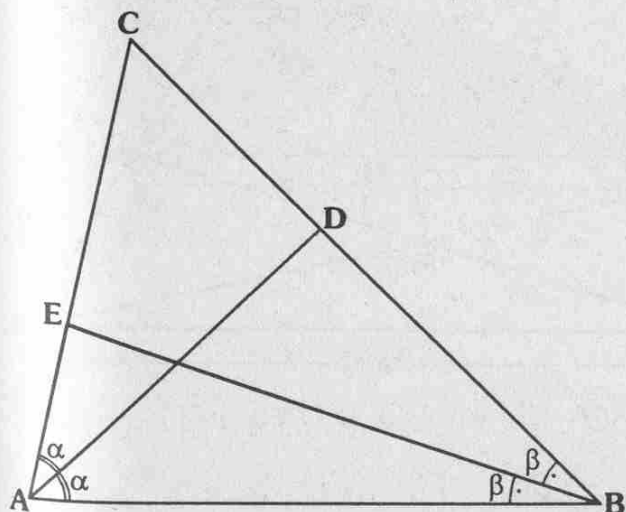
$$\Rightarrow SL = SD$$

- Como $ES = SL = SD$ entonces el triángulo EDL es triángulo rectángulo (recto en D).

$$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BL}$$

RESOLUCIÓN N° 4

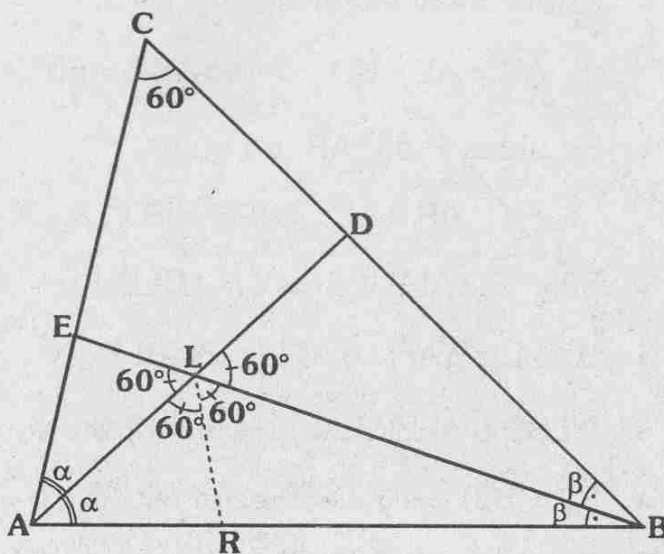
- Así como el problema 2, consta de dos partes consideremos el siguiente gráfico:



- Por demostrar:

$$m\angle ACB = 60^\circ \Leftrightarrow AE + BD = AB$$

Parte I



- Demostremos:

$$\text{si } m\angle BCA = 60^\circ \Rightarrow AB = AE + BD$$

- En $\triangle ABC$:

$$2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$$

- En $\triangle ALB$:

$$m\angle ALB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ALE = 60^\circ$$

- Se traza $\overline{LR}$ (R en $\overline{AB}$) tal que:

$$m\angle ALR = 60^\circ$$

- $\triangle ALE \cong \triangle ALR \Rightarrow AE = AR$

- $\triangle BLD \cong \triangle BLR \Rightarrow BD = BR$

- Como:

$$AB = AR + BR$$

$$\therefore AB = AE + BD$$

Parte II

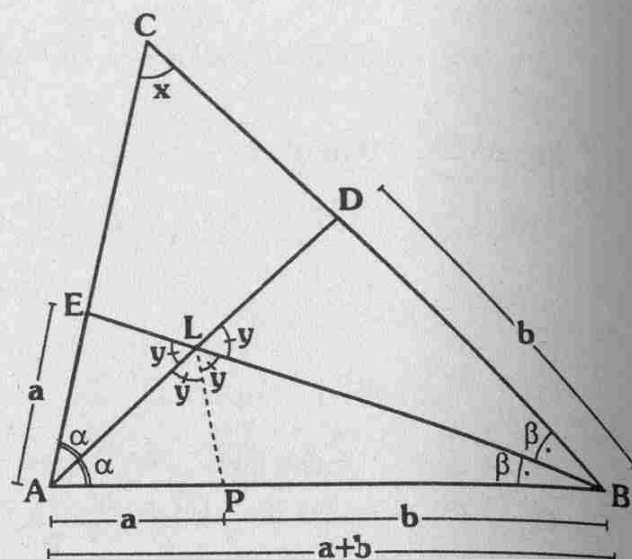
- Ahora demostremos:

$$\text{si } AB = AE + BD \Rightarrow m\angle ACB = 60^\circ$$

- Se ubica P en $\overline{AB}$ tal que:

$$AP = AE \Rightarrow PB = BD$$

- Sea: $m\angle ALE = y \Rightarrow m\angle DLB = y$
- $\triangle AEL \cong \triangle APL$ (LAL) $\Rightarrow m\angle ALP = y$
- $\triangle LBD \cong \triangle LBP$ (LAL) $\Rightarrow m\angle PLB = y$
- $3y = 180^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$, con ello $\alpha + \beta = 60^\circ$
- Como: $x + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$



$$\therefore m\angle ACB = 60^\circ$$

RESOLUCIÓN N° 5

- En el gráfico: $\triangle ABC$ equilátero, $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $AM = MQ$ y O es centro del $\triangle PBQ$.

- Por demostrar:

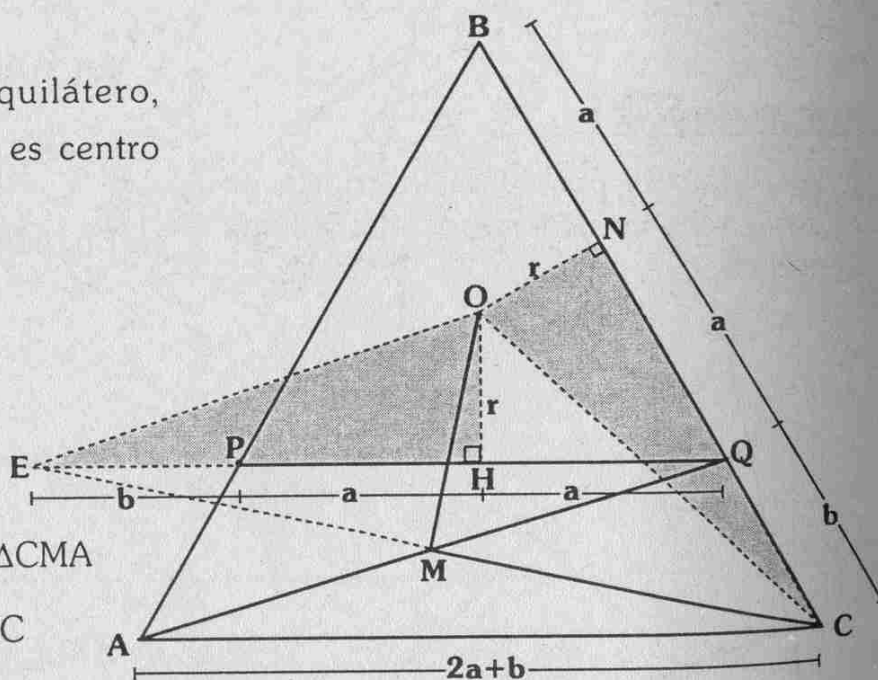
$$m\angle OMC = 90^\circ$$

- $\overline{CM} \cap \overline{QP} = \{E\}$

- Como :

$$AM = MQ \Rightarrow \triangle EMQ \cong \triangle CMA$$

$$\Rightarrow EQ = AC \text{ y } EM = MC$$



- Desde O se traza: $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{ON} \perp \overline{BQ}$ (H en $\overline{PQ}$ y N en $\overline{BQ}$)
 $\Rightarrow OH = ON$; $PH = HQ$ y $QN = NB$
- $\triangle EHO \cong \triangle CNO$ (LAL) $\Rightarrow OE = OC$
- $\triangle EOC$: isósceles, como $EM = MC \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{EC}$

$$\therefore m\angle OMC = 90^\circ$$

RESOLUCIÓN Nº 6

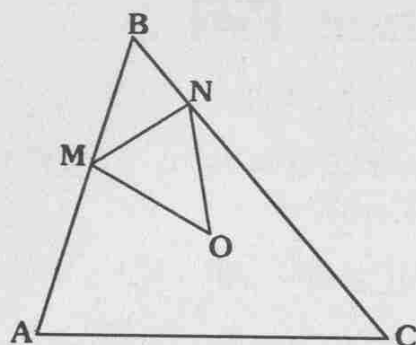
- Del gráfico:

O es circuncentro del triángulo ABC

$$y \quad m\angle ABC = m\angle MON$$

- Por demostrar:

$$AC \leq MB + BN + MN$$



- Como "O" es circuncentro entonces:
 $OA = OB = OC$ y por teorema
 $m\angle AOC = 2(m\angle ABC)$ ubicamos en
 la región interior del $\angle AOC$ los
 puntos S y T, tal que $OM = OS$,
 $ON = OT$, $m\angle AOS = m\angle MOB$ y
 $m\angle TOC = m\angle NOB$.

- Con ello tenemos:

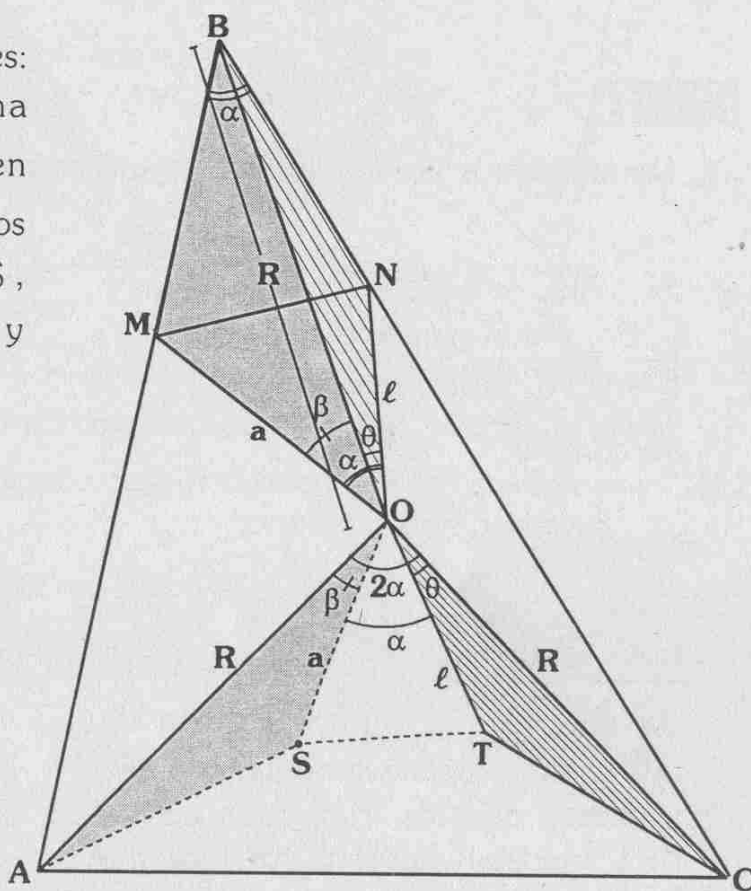
$$\triangle AOS \cong \triangle MOB \text{ (LAL)} \Rightarrow MB = AS$$

$$\triangle CTO \cong \triangle BON \text{ (LAL)} \Rightarrow TC = BN$$

- $\triangle SOT \cong \triangle MON \text{ (LAL)}$

$$\Rightarrow ST = MN$$

- Por teorema: $AC \leq \underbrace{AS}_{MB} + \underbrace{ST}_{MN} + \underbrace{TC}_{BN}$



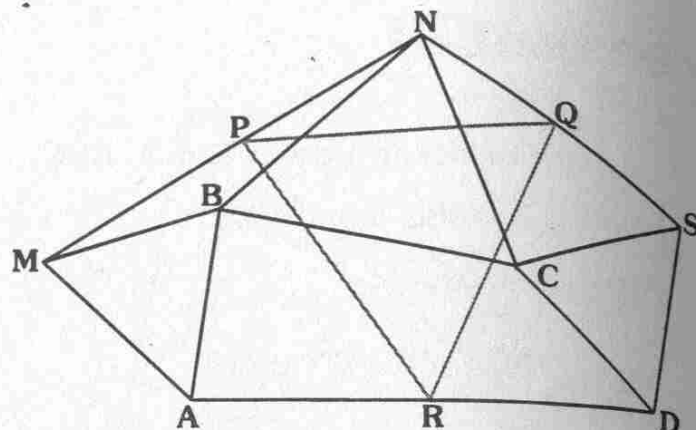
$$\therefore AC \leq MB + MN + BN$$

Nota

El estudiante puede verificar que si $AC = AS + ST + TC$ o cuando S y T están sobre $\overline{AC}$, en cada caso se demuestra que el triángulo ABC es equilátero, lo cual queda como ejercicio para el lector.

RESOLUCIÓN N° 7

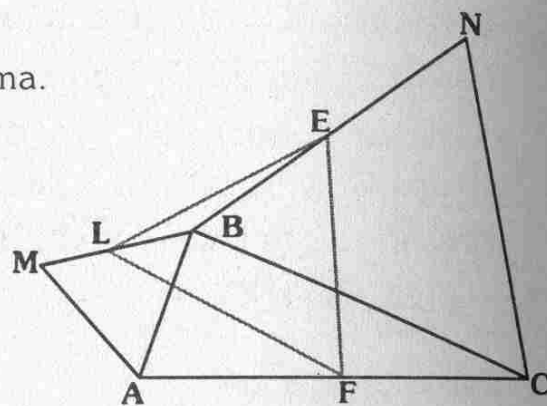
- En el gráfico.
- $\triangle AMB$, $\triangle BCN$ y $\triangle LSD$ son equiláteros.
- $MP = PN$; $AR = RD$ y $NQ = QS$
- Por demostrar $\triangle PRQ$ es equilátero.



Paso 1

- Demostremos previamente el siguiente teorema.
- Si $\triangle ABC$ y $\triangle BCN$ son equiláteros y L, E y F son puntos medios de $\overline{MB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{AC}$ respectivamente
- Se cumple:

$\triangle LFE$ es equilátero.

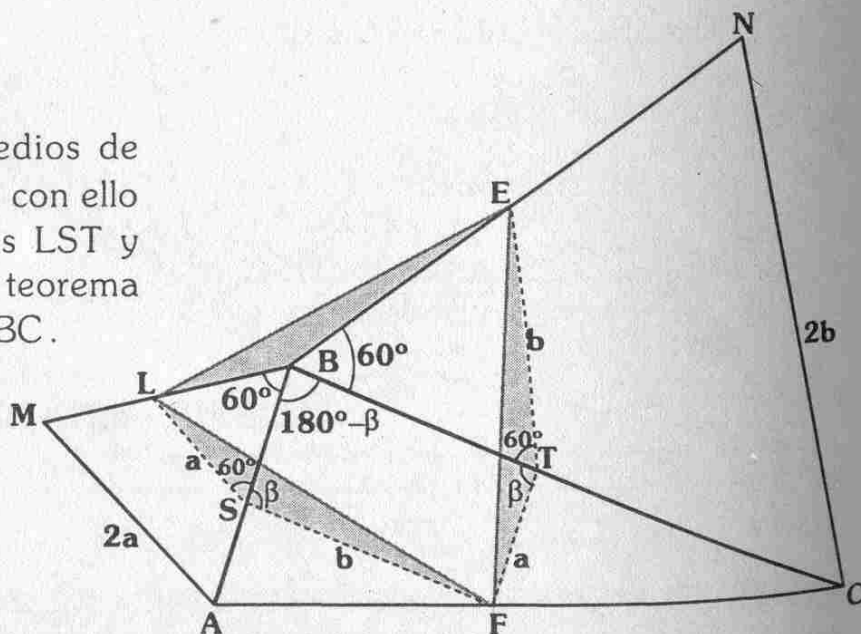


Demostración:

- Se ubica S y T puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, con ello notamos que los triángulos LST y BET son equiláteros y por teorema de la base media en el $\triangle ABC$.

$$\overline{FT} \parallel \overline{AB} \text{ y } FT = \frac{AB}{2},$$

$$\overline{FS} \parallel \overline{CB} \text{ y } FS = \frac{BC}{2}$$

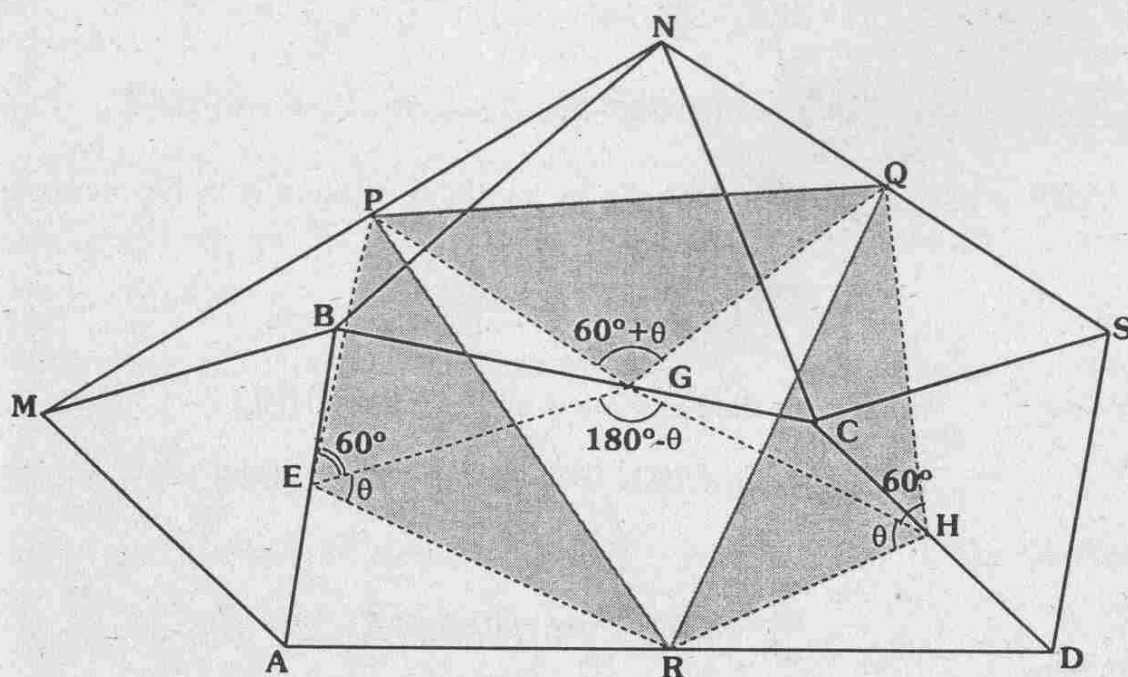


- Con ello SBTF: paralelogramo, sea $m\angle BSF = \beta \Rightarrow m\angle BTF = \beta$ y $m\angle LBE = 60^\circ + \beta$.

$$\triangle LSF \cong \triangle FTE \cong \triangle LBE \text{ (LAL)} \Rightarrow LF = FE = LE$$

$\therefore \triangle LFE$ es equilátero.

Paso 2

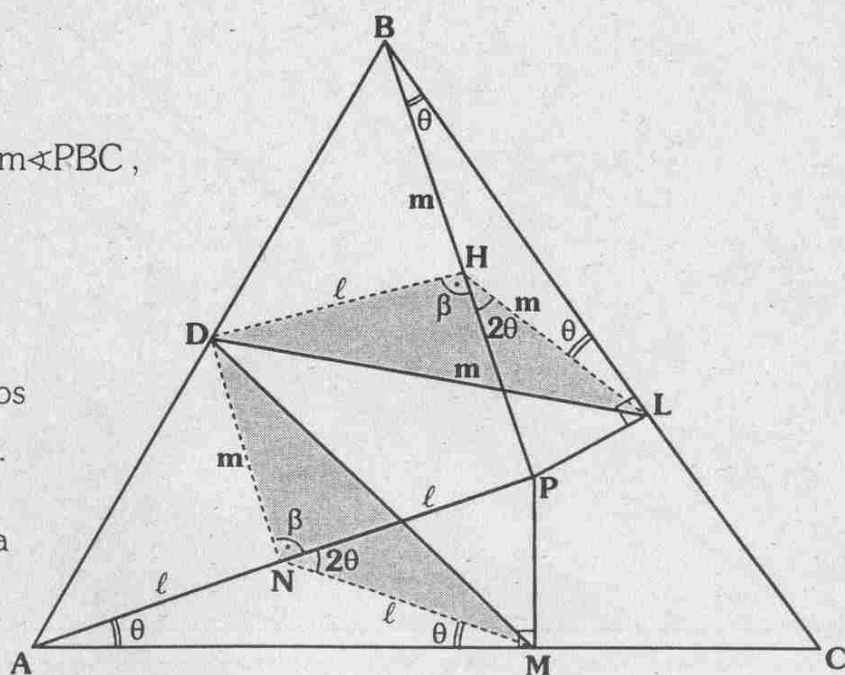


- Sean E , G y H puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente por el teorema anterior, para el $\triangle MNB$ y $\triangle NSC$, los triángulos PEG y GQH son equiláteros.
- Por teorema como E , G , H y R son puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$, entonces $EGHR$ es paralelogramo.
- Luego: $\triangle PER \cong \triangle RHQ \cong \triangle PGH$ (LAL) $\Rightarrow PR = RQ = PQ$

$\therefore \triangle PRQ$ es equilátero.

RESOLUCIÓN N° 8

- Datos: $AD = DB$, $m\angle PAM = m\angle PBC$, $\overline{PM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$.
- Por demostrar: $DL = DM$
- Ubiquemos H y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ respectivamente.
- En $\triangle APB$, por teorema de la base media:



$$\overline{DN} \parallel \overline{BP}; \quad \overline{DH} \parallel \overline{AP}; \quad DN = \frac{BP}{2} \quad \text{y} \quad DH = \frac{AP}{2}$$

$\Rightarrow$ NDHP es paralelogramo $\Rightarrow m\angle DNP = m\angle DHP$

- En $\triangle AMP$ y $\triangle BLP$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

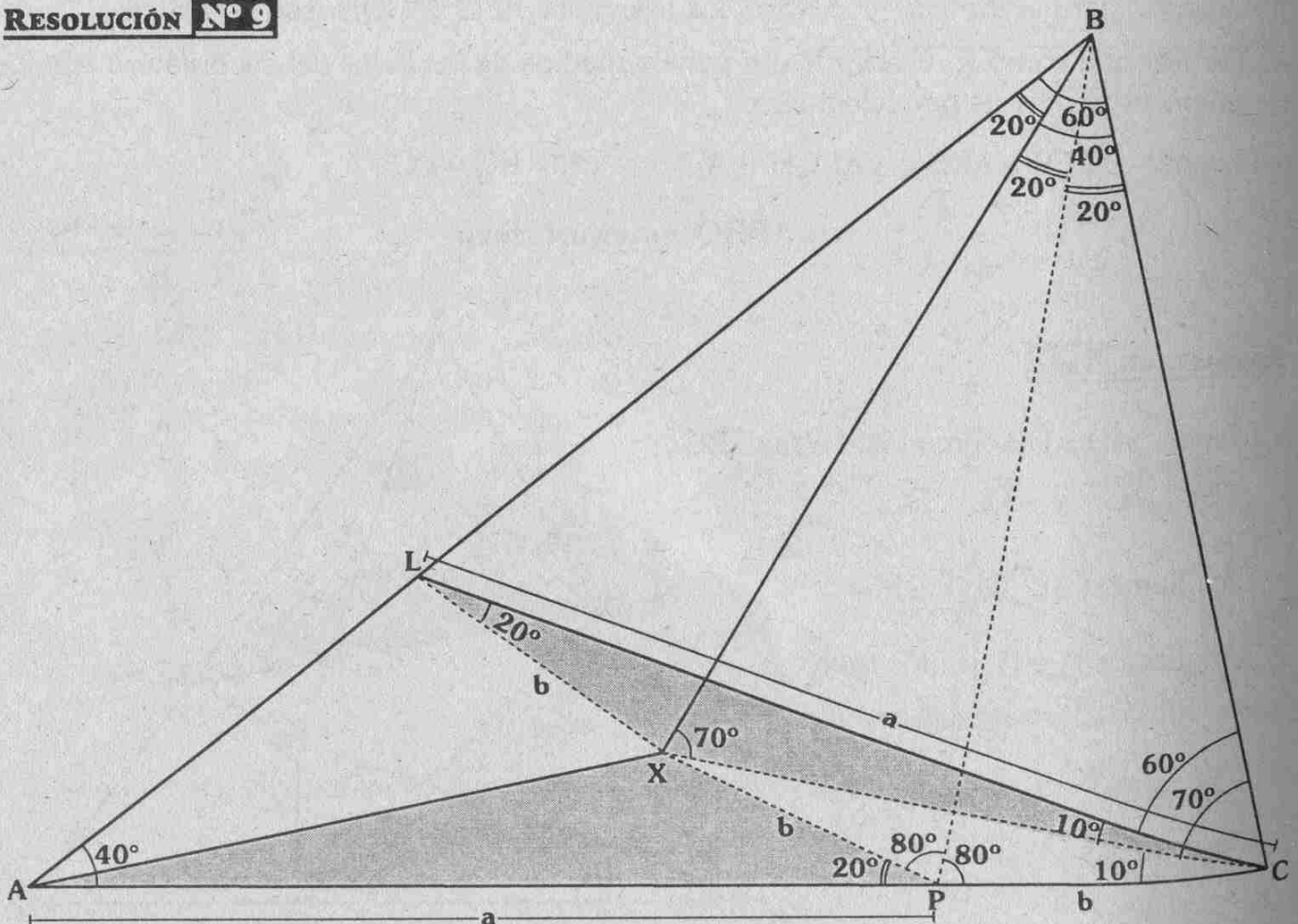
$$LH = \frac{BP}{2} \quad \text{y} \quad MN = \frac{AP}{2}$$

- También: $m\angle HLB = m\angle LBH \Rightarrow m\angle LHP = 2(m\angle HBL)$
 $m\angle MAN = m\angle AMN \Rightarrow m\angle MNP = 2(m\angle MAN)$
- Luego:

$$\triangle DNM \cong \triangle LHD \text{ (LAL)}$$

$$\therefore DM = DL$$

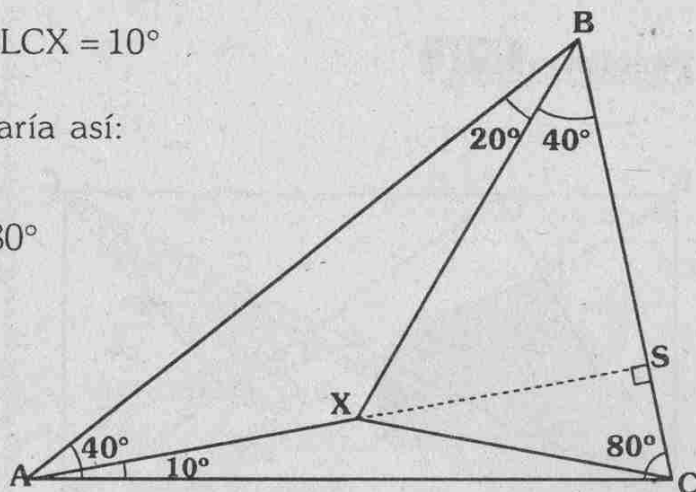
RESOLUCIÓN N° 9



- Datos: $m\angle BAC = 40^\circ$, $m\angle ABC = 60^\circ$, $m\angle XBA = 20^\circ$ y $m\angle XCA = 10^\circ$
- Por demostrar: $\overline{AX} \perp \overline{BC}$
- De los datos deducimos: $m\angle BCX = 70^\circ$ y $m\angle XBC = 40^\circ$ entonces el triángulo XBC es isósceles, con ello $XB = BC$, sea $BC = a$;
- Se traza $\overline{BP}$ (P en $\overline{AC}$) tal que: $m\angle ABP = 40^\circ \Rightarrow m\angle BPC = 80^\circ$ luego: $CB = PB = PA = a$
- Ubicamos L en $\overline{AB}$ tal que $BL = a$, como $BL = BC$, $m\angle CBL = 60^\circ$ entonces: $\triangle CBL$ es equilátero:
- $\triangle ABX \cong \triangle XBP \cong \triangle PBC$ (LAL) $\Rightarrow LX = XP = PC$
- Notamos también: $m\angle LCX = 10^\circ$, $m\angle XCP = m\angle PXC = 10^\circ$ y $m\angle XPA = 20^\circ$;
- $\triangle CLX \cong \triangle XPA$ (LAL) $\Rightarrow m\angle XAP = m\angle LCX = 10^\circ$
- Como $m\angle XAP = 10^\circ$, el gráfico quedaría así:
- Como $m\angle CAX = 10^\circ$ y $m\angle ACB = 80^\circ$

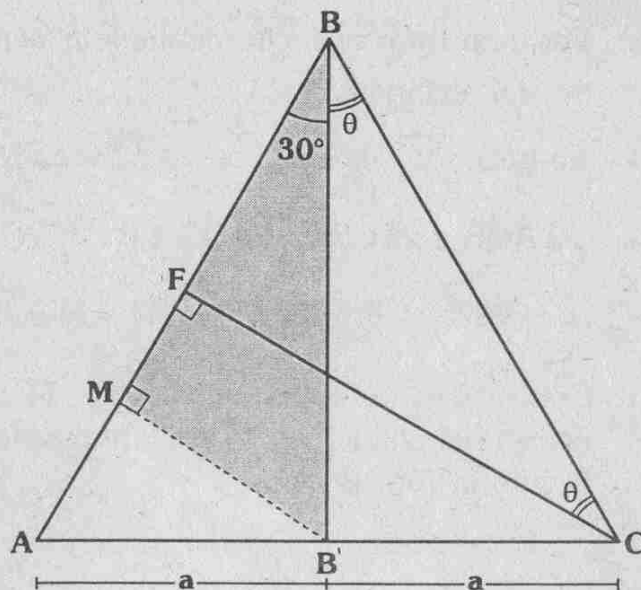
$$\Rightarrow m\angle ASC = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{AX} \perp \overline{BC}$$



RESOLUCIÓN N° 10

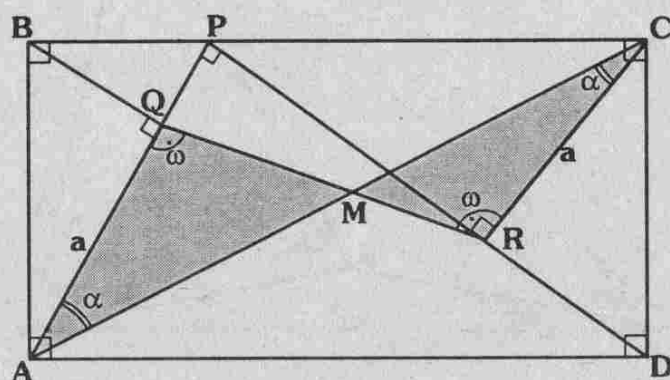
- Datos:
 $\overline{BB'}$ mediana y $\overline{CF}$ altura del $\triangle ABC$,
 $\overline{BB'} \cong \overline{CP}$; $m\angle CBB' = m\angle FCB$
- Por demostrar $\triangle ABC$ es equilátero.
- Se traza $\overline{B'M} \perp \overline{AB}$ (M en $\overline{AB}$), en el $\triangle AFC$ tenemos que $\overline{B'M}$ es base media, por teorema $B'M = \frac{FC}{2}$, pero $BB' = FC$.



- $\angle BMB'$: notable $\Rightarrow m\angle FBB' = 30^\circ$
- Sea $m\angle FCB = \theta$ en el $\triangle FBC$: $\theta = 30^\circ$
- Como $AB' = B'C$ y
 $m\angle ABB' = m\angle B'BC = 30^\circ$,
es decir BB' es mediana y bisectriz entonces por teorema $AB = BC$;
- Finalmente tenemos $m\angle ABC = 60^\circ$ y
 $AB = BC$, por lo tanto:

$\triangle ABC$ es equilátero.

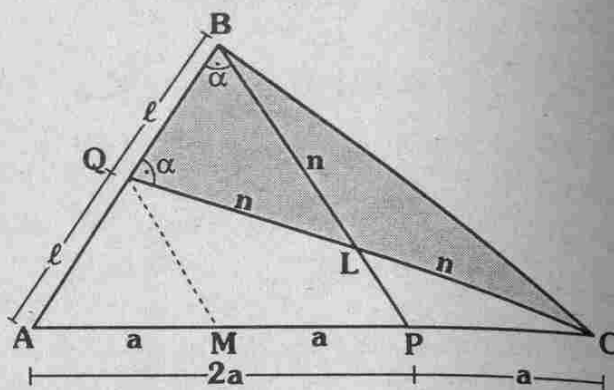
PROBLEMA N°11



- Por demostrar que $\overline{QR}$ contiene al centro del rectángulo.
- Se traza $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{QR}$ en M.
- $\angle AQB \cong \angle CRD \Rightarrow AQ = CR$;
- $\triangle AQM \cong \triangle CRM$ (ALA) $\Rightarrow AM = MC$
- Como M es punto medio de $\overline{AC}$, M es centro del rectángulo, lo cual demuestra la afirmación, pues:

$$M \in \overline{QR}$$

PROBLEMA N°12



- Datos: $\overline{CQ}$ es mediana; $AP = 2(PC)$ y
 $m\angle BQC = m\angle PBQ$
- Por demostrar:

$$m\angle ABC = 90^\circ$$

- Se ubica M punto medio de $\overline{AP}$;
- En $\triangle ABP$, $\overline{QM}$ es base media, por teorema $\overline{QM} \parallel \overline{BP}$.
- En el $\triangle MQC$, como $MP = PC$ y $\overline{PL} \parallel \overline{MQ}$, entonces $\overline{PL}$ es base media, por teorema: $QL = LC$.
- $\triangle QBL$ isósceles $\Rightarrow QL = LB$
- Finalmente, tenemos:

$$QL = LB = LC$$

$$\Rightarrow m\angle QBC = 90^\circ$$

$$\therefore m\angle ABC = 90^\circ$$

RESOLUCIÓN N°13

- Sean a, b y c las longitudes de tres segmentos, ellos serán las longitudes

de los lados de un triángulo, si:

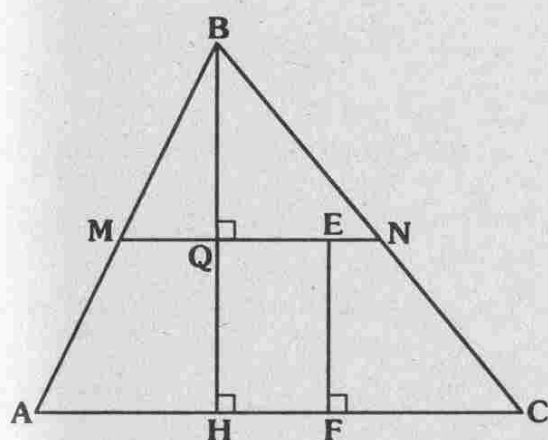
$$a < b + c; b < a + c; \text{ y } c < a + b$$

(teorema de la desigualdad triangular)

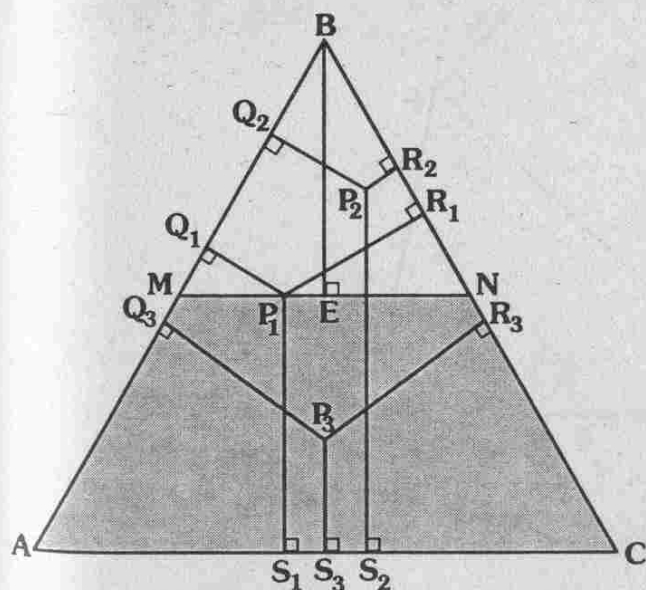
- Basta que no se cumpla cualquiera de las expresiones anteriores para que el triángulo no exista, por ejemplo:

$$a \geq b + c$$

- Usemos el siguiente teorema:



- Si M y N sean puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
- Se cumple: $BQ = QH = EF$
- En el problema:



- Sea el triángulo ABC equilátero, M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, del teorema anterior.

$$\text{Si } P_1 \in \overline{MN} \Rightarrow BE = P_1S_1$$

- Como $\triangle MBN$ es equilátero

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = BE$$

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = P_1S_1$$

- Es decir, con $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_1R_1}$ y $\overline{P_1S_1}$ no se forma el triángulo.

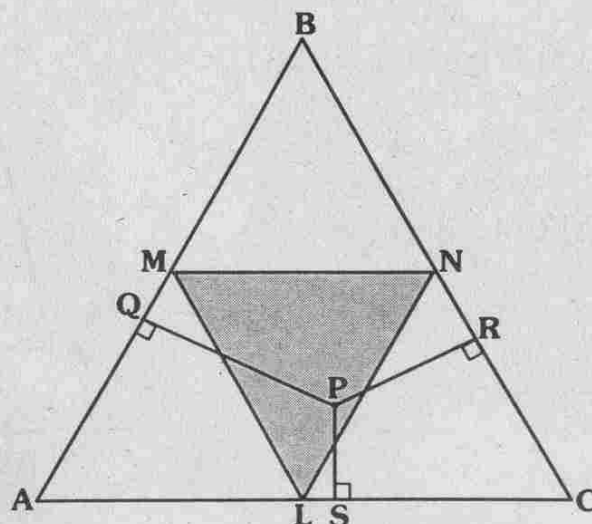
- Si el punto está en la región interior del $\triangle MBN$, por ejemplo P_2 , entonces:

$$P_2S_2 > P_2Q_2 + P_2R_2$$

- Si el punto está en la región interior de $\triangle AMNC$, entonces:

$$P_3S_3 < P_3Q_3 + P_3R_3$$

- Vemos que para P_3 se cumple parte de la condición de existencias, analicemos para las tres bases medias entonces, la región donde se formará el triángulo es la intersección de las regiones, es decir:



- Sea M, N y L puntos medios de los lados, entonces de acuerdo a lo anterior, tendríamos.
- Si P está en la región interior del triángulo $\triangle MNL$ entonces:

$$PS < PQ + PR \quad ; \quad PQ < PR + PS$$

$$\text{y} \quad PR < PQ + PS$$

- Es decir existe el triángulo de lados:

$$\overline{PS}, \overline{PQ} \text{ y } \overline{PR}$$

RESOLUCIÓN N° 14

Parte I

- Por demostrar que:

$$x = a + b$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ hasta que se corten en M.
- En el $\triangle ABM$, $\overline{BE}$ es mediana y altura
 $\Rightarrow AB = BM = x$ y $AE = EM$
- Se traza $\overline{MF} \parallel \overline{AD}$, F en la prolongación de $\overline{DC}$.

- $\triangle AED \cong \triangle MEF$ (ALA)

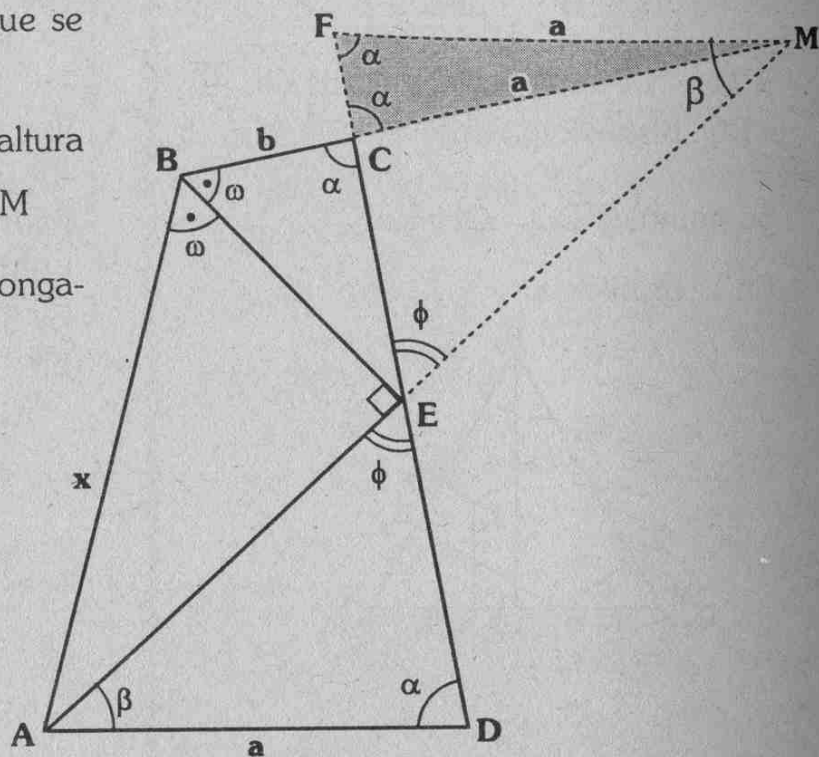
$$\Rightarrow FM = AD = a$$

- $\triangle FCM$: isósceles

$$\Rightarrow FM = MC = a$$

- Finalmente:

$$\underbrace{AB}_{x} = \underbrace{BM}_{a+b}$$



Parte II

- Ahora $AB=a+b$, demostremos:

$$m\angle AEB = 90^\circ$$

- Se traza $\overline{EL}$ tal que $CB=BL=b$

$$\Rightarrow \triangle AEB \cong \triangle ELB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle CEB = m\angle BEL \text{ y}$$

$$m\angle BLE = m\angle BCE = \alpha$$

- $\triangle ALED$ inscriptible (o cíclico)

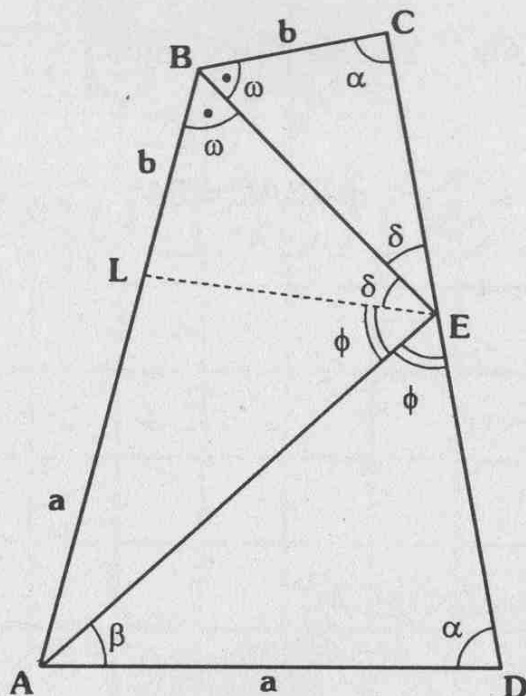
$$\Rightarrow \text{como } AL=AD$$

$$\Rightarrow m\angle AEL = m\angle AED = \phi$$

- Del gráfico: $2\alpha + 2\phi = 180^\circ$

$$\alpha + \phi = 90^\circ$$

$$\therefore m\angle AEB = 90^\circ$$

**RESOLUCIÓN N° 15**

- Nos piden:

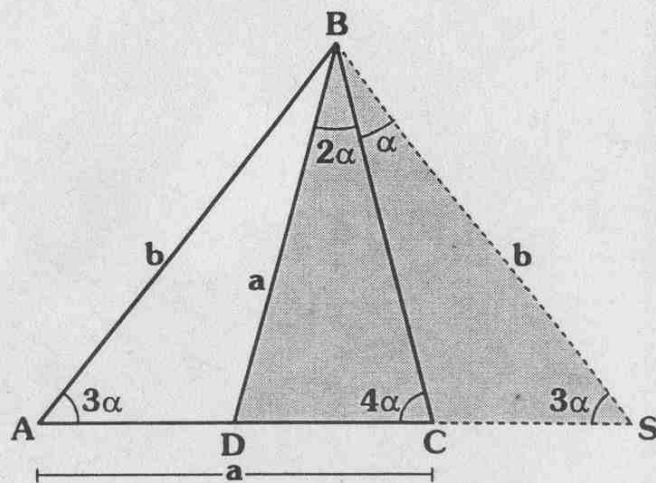
$$m\angle BAC$$

$$m\angle BAC = 3\alpha$$

- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta S tal que:

$$m\angle ASB = 3\alpha$$

$$\Rightarrow m\angle CBS = \alpha$$



- $\triangle ABS$: isósceles $\Rightarrow AB=BS=b$
- $\triangle BAC \cong \triangle SBD$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BSD = m\angle ABC = 3\alpha$
- $\triangle ABC : 3\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha = 18^\circ$
 $\therefore m\angle BAC = 54^\circ$



Enunciado de los Problemas Propuestos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS



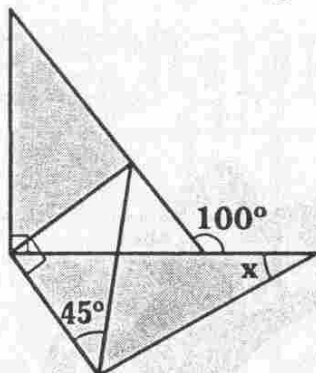
Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

Las regiones sombreadas son congruentes, calcule x .

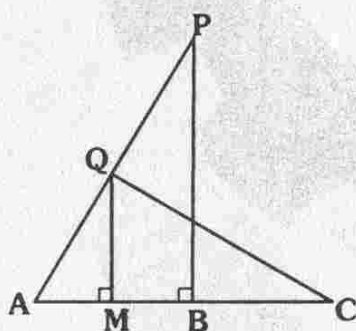
- A) 10°
- B) 12°
- C) 15°
- D) 20°
- E) 25°



PROBLEMA N° 2

En el gráfico, las regiones QMC y ABP son congruentes. $AM = MB = 4$, calcule BC.

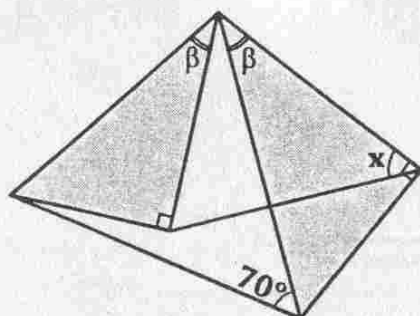
- A) 20
- B) 8
- C) 16
- D) 12
- E) 8



PROBLEMA N° 3

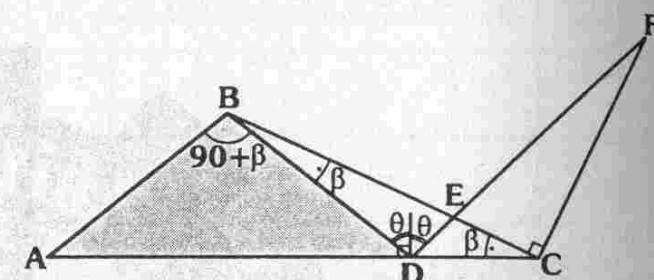
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Calcule x .

- A) 70°
- B) 40°
- C) 35°
- D) 80°
- E) 50°



PROBLEMA N° 4

En el gráfico, $AC = 10$ y $FC = 6$, calcule el perímetro de la región sombreada.

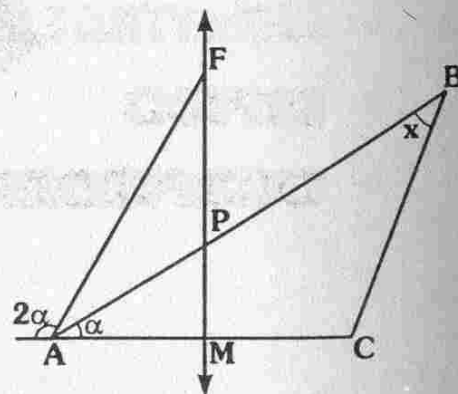


- A) 8
- B) 10
- C) 12
- D) 14
- E) 16

PROBLEMA N° 5

En el gráfico, $\overline{FM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$ y $BP = 2(PM)$. Calcule x .

- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 25°
- E) 15°



PROBLEMA N° 6

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, si $AB = 2$ y $BC = 8$. Calcule el valor entero de BM.

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

PROBLEMA N° 7

En el triángulo ABC, se ubica M punto medio de $\overline{AB}$ y P en $\overline{BC}$ es tal que:

$$PC = 3(BP) = 3(PM)$$

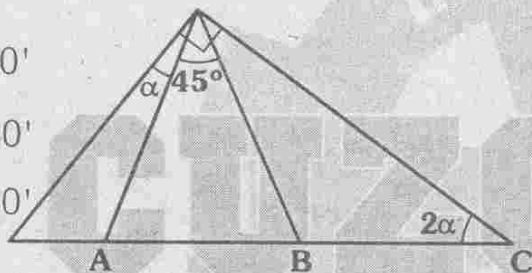
Calcule $m\angle BAC$.

- A) 30° B) 60° C) 90°
D) 75° E) 120°

PROBLEMA N° 8

En el gráfico, $AB = BC$, calcule α .

- A) 15°
B) $18^\circ 30'$
C) $26^\circ 30'$
D) $22^\circ 30'$
E) 16°

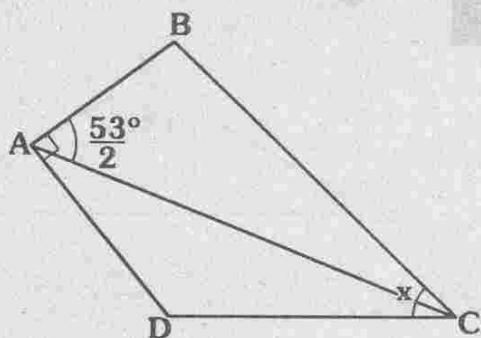


PROBLEMA N° 9

En el gráfico, $AC = \sqrt{5}(AB) = \sqrt{5}(AD)$.

Calcule x.

- A) 30°
B) 45°
C) 53°
D) 37°
E) 60°

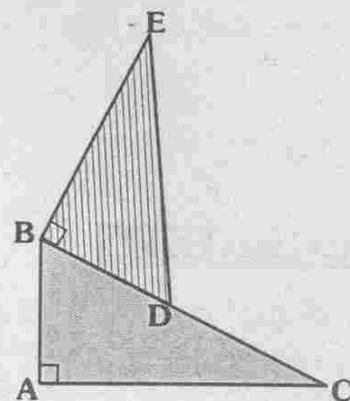


PROBLEMA N° 10

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, si $AB = 8$ y $CD = 9$.

Calcule EB.

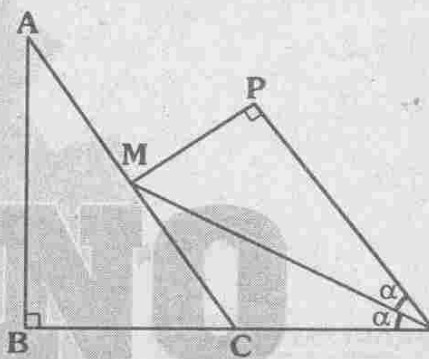
- A) 15
B) 17
C) 16
D) 14
E) 13



PROBLEMA N° 11

En el gráfico, $AM = MC$ y $AB = 8$, calcule PM.

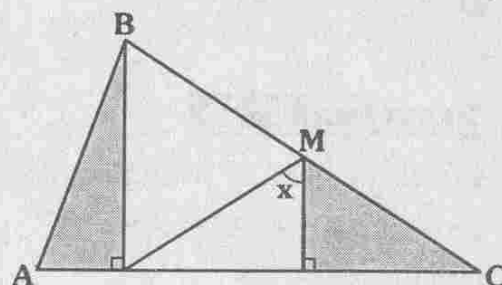
- A) 8
B) 4
C) 2
D) 5
E) 6



PROBLEMA N° 12

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $BM = MC$, calcule x.

- A) 76°
B) 74°
C) 53°
D) $\frac{143^\circ}{2}$
E) $\frac{127^\circ}{2}$



PROBLEMA N° 13

En el triángulo LMN se traza la perpendicular MP a la bisectriz interior MP a la bisectriz interior LQ. Si $2(LM) = LN$ y

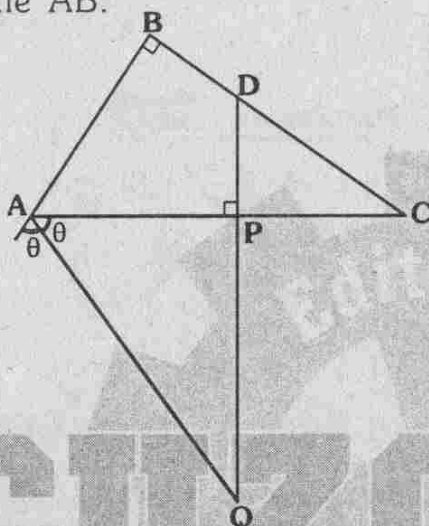
$LP = 9$, calcule PQ .

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4,5 E) 5

PROBLEMA N° 14

En el gráfico, $AQ = 12$, $BD + PQ = 15$ y $AB = AP$, calcule AB .

- A) 10
B) 8
C) 7,5
D) 7,2
E) 6



PROBLEMA N° 15

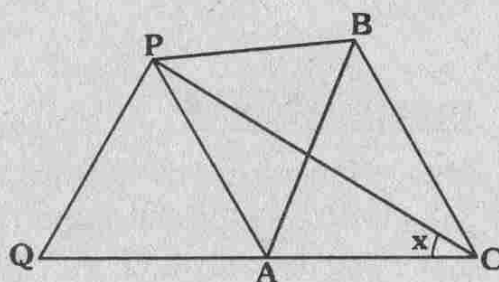
En el triángulo ABC , se traza la altura BH y la mediana CM , $MC = BC$ y $AH = HB$. Calcule $m\angle MCB$.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) $\frac{53^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 16

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, si $AQ = PC$, $AP = BC$ y $QP = PB$, calcule x .

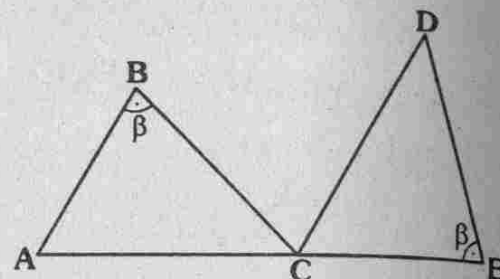
- A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 40°



PROBLEMA N° 17

En el gráfico, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = CE$ y $BC = 6$, calcule ED .

- A) 3
B) 4,5
C) 6
D) 9
E) 8

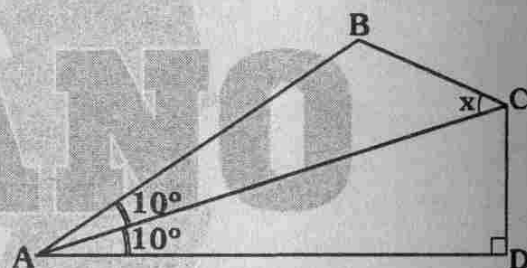


PROBLEMA N° 18

En el gráfico, $BC = 5$ y $CD = 4$.

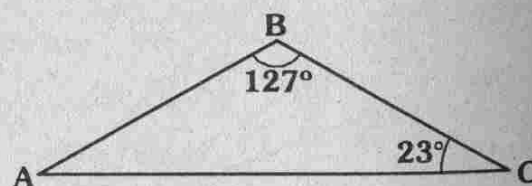
Calcule x .

- A) 37°
B) 27°
C) 33°
D) 43°
E) 47°



PROBLEMA N° 19

En el gráfico $AC = 16$, calcule $AB + BC$



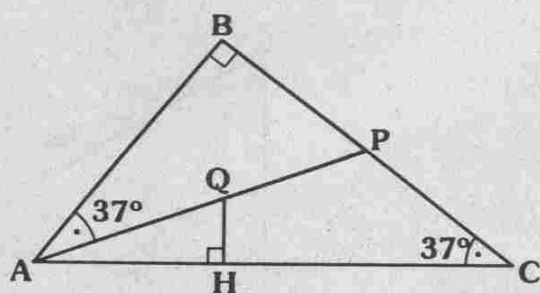
- A) $4(2\sqrt{3} + 1)$ B) $3(\sqrt{3} + 1)$
C) $2\sqrt{3} + 1$ D) $2(4\sqrt{3} + 5)$
E) $6 + \sqrt{3}$

PROBLEMA N° 20

En el gráfico, $AQ = QP$ y $QH = 2,1$.

Calcule AC.

- A) 25
- B) 20
- C) 35
- D) 15
- E) 7,5

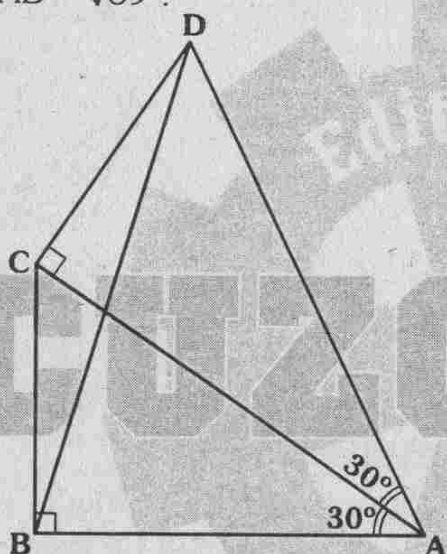


PROBLEMA N° 21

Del gráfico, $AB = \sqrt{39}$.

Calcule BD.

- A) $13\sqrt{3}$
- B) $6\sqrt{3}$
- C) 13
- D) $\frac{13}{3}\sqrt{3}$
- E) $4\sqrt{13}$



PROBLEMA N° 22

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD, tal que $CD = 4(BD)$,

$m\angle ABC = 127^\circ$, $m\angle DAC = 45^\circ - m\angle BCA$.

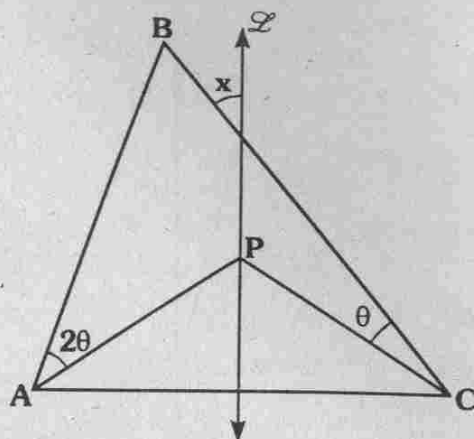
Calcule $m\angle BCA$.

- A) 16°
- B) 30°
- C) 15°
- D) $37^\circ/2$
- E) $53^\circ/2$

PROBLEMA N° 23

En el gráfico, $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB = PC$, calcule x.

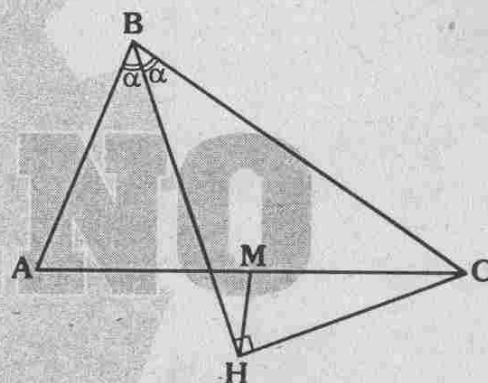
- A) 30°
- B) $\frac{45^\circ}{2}$
- C) 60°
- D) $\frac{53^\circ}{2}$
- E) $\frac{37^\circ}{2}$



PROBLEMA N° 24

En el gráfico, $AM = MC$, $AB = 4$ y $BC = 6$. Calcule HM

- A) 1
- B) 1,5
- C) 2
- D) 4
- E) 3



PROBLEMA N° 25

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ intersecta a $\overline{AC}$ en Q, tal que $AB = 2(QC)$ y $m\angle ACB = 45^\circ$. Calcule $m\angle BAC$.

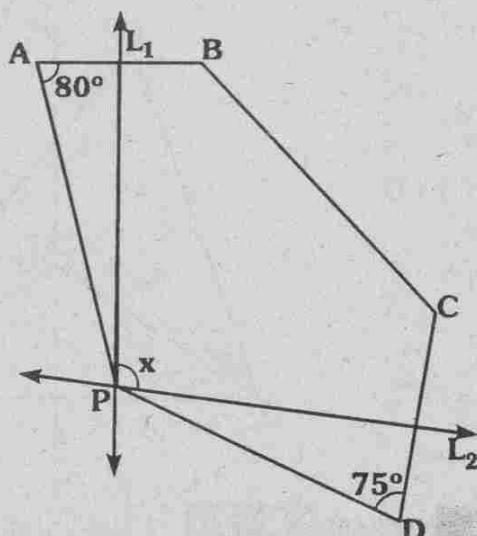
- A) 37°
- B) $\frac{53^\circ}{2}$
- C) 16°
- D) $\frac{37^\circ}{2}$
- E) 30°

PROBLEMA N° 26

En el gráfico $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

Si $AP = BC = PD$, calcule x.

- A) 90°
- B) 85°
- C) 95°
- D) 105°
- E) 115°

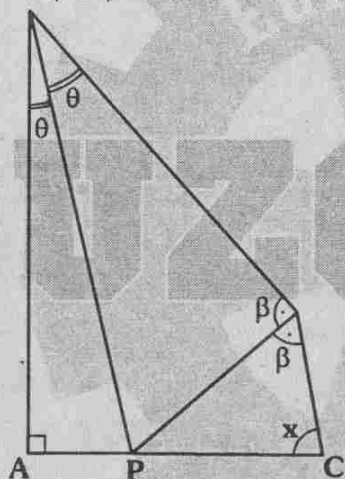


PROBLEMA N° 27

En el gráfico, $PC = 2(AP)$.

Calcule x .

- A) 53°
- B) 60°
- C) 54°
- D) 73°
- E) 30°



PROBLEMA N° 28

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y la altura BH, $\overline{AM} \cap \overline{BH} = \{P\}$. Si $AP = PM$ y $m\angle ABH = 37^\circ$.

Calcule $m\angle MAH$.

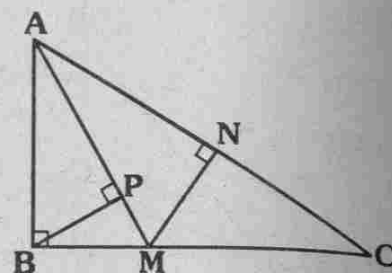
- A) $\frac{37^\circ}{2}$
- B) $\frac{53^\circ}{2}$
- C) 16°
- D) 18°
- E) $\frac{45^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 29

En el gráfico: $BP = 3$ y

$m\angle MAC = 2(m\angle BAM)$, Halle MN.

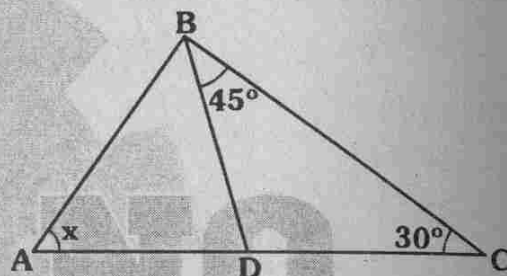
- A) 1,5
- B) 3
- C) 6
- D) 4,5
- E) $3\sqrt{3}$



PROBLEMA N° 30

En el gráfico, $AD = BC$. Calcule θ .

- A) 30°
- B) 45°
- C) 50°
- D) 60°
- E) 40°



PROBLEMA N° 31

Dos lados de un triángulo miden 2 y 10, calcule la longitud de la mediana relativa al tercer lado, si es entero.

- A) 5
- B) 4
- C) 8
- D) 10
- E) 3

PROBLEMA N° 32

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD.

Si $AB = CD$ y

$$m\angle BAC = 2(m\angle BCA) = 40^\circ$$

Calcule $m\angle DBC$.

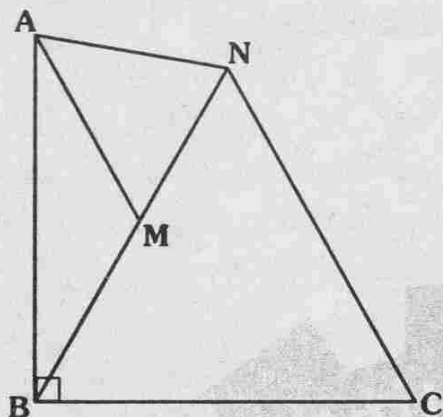
- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 40°
- E) 25°

PROBLEMA N° 33

En el gráfico: $AB = BC = CN$; $BM = MN$;
 $AM = 5$ y $BM = 4$.

Calcule AN .

- A) $\sqrt{19}$
- B) $\sqrt{13}$
- C) $\sqrt{14}$
- D) $\sqrt{21}$
- E) $\sqrt{17}$

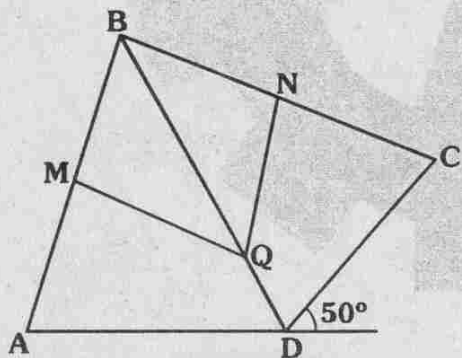


PROBLEMA N° 34

En el gráfico, $AD = DC$; $BQ = CD + QD$;
 M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$
respectivamente.

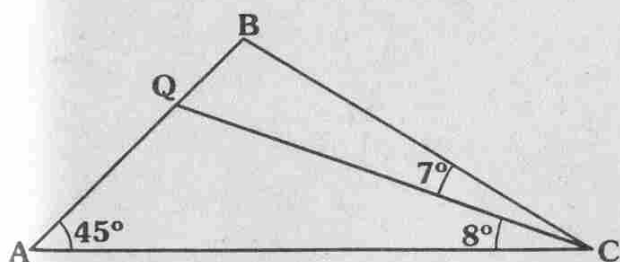
Calcule $m\angle MQB$.

- A) 50°
- B) 25°
- C) 60°
- D) 65°
- E) 55°



PROBLEMA N° 35

En el gráfico, $AC = 12\sqrt{2}$, calcule QB .

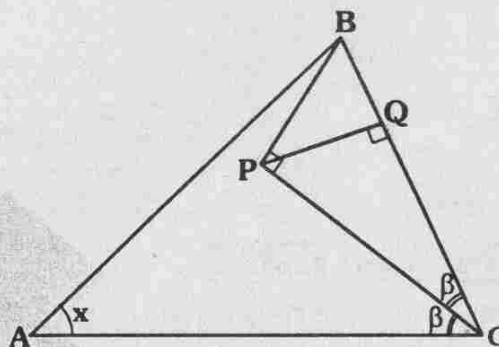


- A) $2 - \sqrt{3}$
- B) $8 - 3\sqrt{3}$
- C) $9 - 4\sqrt{3}$
- D) $3\sqrt{3} - 4$
- E) $4\sqrt{3} - 5$

PROBLEMA N° 36

En el gráfico, $AB = 4(PQ)$, calcule x .

- A) 30°
- B) 37°
- C) 14°
- D) 53°
- E) 28°

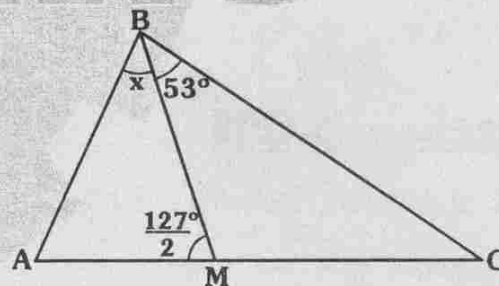


PROBLEMA N° 37

En el gráfico, $AB = 1$ y $BC = 5$.

Calcule x .

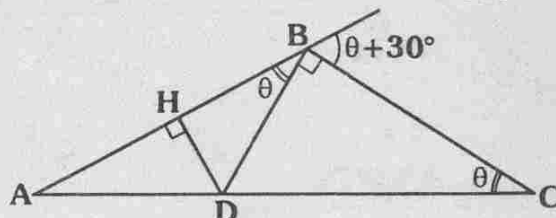
- A) 37°
- B) 53°
- C) 30°
- D) $39^\circ/2$
- E) $127^\circ/3$



PROBLEMA N° 38

En el gráfico, $BD = 4$, calcule $\frac{BA}{HC}$.

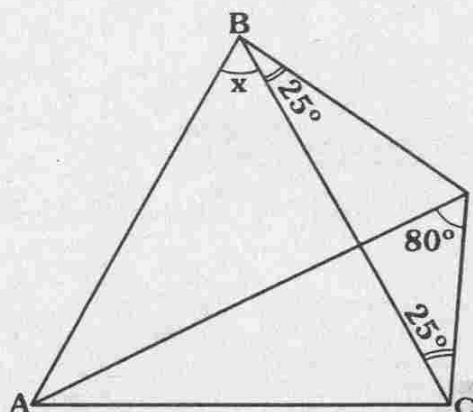
- A) 1
- B) 2
- C) $2\sqrt{3}$
- D) $3\sqrt{3}$
- E) $2\frac{\sqrt{7}}{7}$



PROBLEMA N° 39

En el gráfico, $AB = BC$, calcule x .

- A) 70°
- B) 50°
- C) 100°
- D) 80°
- E) 65°



PROBLEMA N° 40

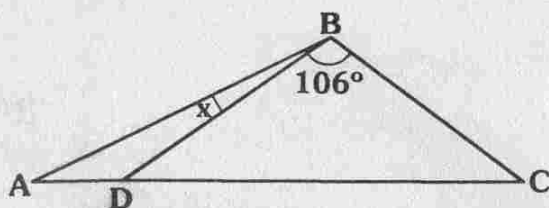
Se tiene el triángulo ABC, $AB = 10$ y $BC = 20$, se traza la bisectriz interior BD, si $m\angle ABD = 53^\circ$, calcule la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{BD}$.

- A) 3 B) 2 C) 5
- D) 4 E) 1

PROBLEMA N° 41

Del gráfico, $BD = BC$, $DC = 8$ y $AB = 6$. Calcule x .

- A) 4°
- B) 5°
- C) 8°
- D) 7°
- E) 15°



PROBLEMA N° 42

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{CN}$, tal que $AN = 3(NB)$ y $m\angle CAB = 2(m\angle NCB)$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 30° B) $26,5^\circ$ C) 53°
- D) 45° E) 37°

PROBLEMA N° 43

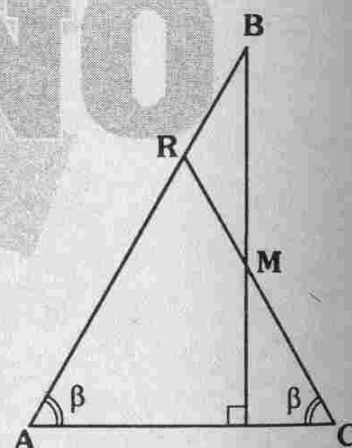
En el triángulo ABC, se cumple que $AB + BC = 14$, M es punto medio de $\overline{AC}$ y H es el pie de la perpendicular trazada desde C a la bisectriz exterior por B. Calcule MH.

- A) 7 B) 14 C) 3,5
- D) 10 E) 5

PROBLEMA N° 44

En el gráfico, $BM = MH$ y $RM = 3$. Calcule AB.

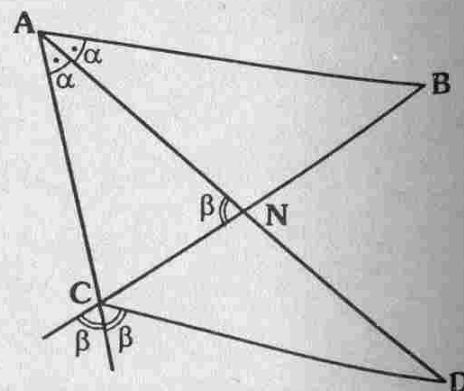
- A) 9
- B) 12
- C) 10
- D) 8
- E) 6



PROBLEMA N° 45

En el gráfico, $BN = 6$, calcule CD.

- A) 3
- B) 4,5
- C) 6
- D) 9
- E) 12

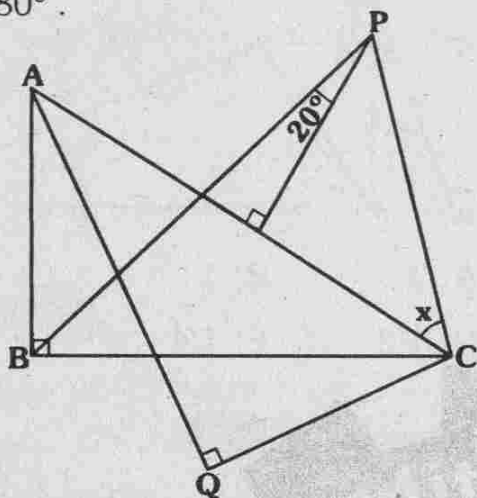


PROBLEMA N° 46

Según el gráfico, $BQ = AM = MC$ y $m\angle PBQ = 80^\circ$.

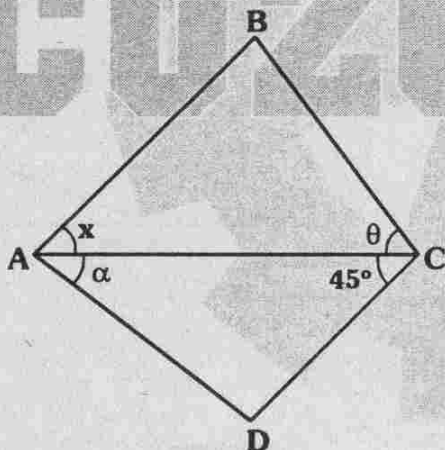
Calcule x .

- A) 45°
- B) 60°
- C) 40°
- D) 25°
- E) 35°

**PROBLEMA N° 47**

En el gráfico, $BC = AD$ y $\alpha + \theta = 90^\circ$. Calcule x .

- A) 60°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 37°
- E) 53°

**PROBLEMA N° 48**

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle ABC = 70^\circ$, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente, de modo que $AB = NC$, luego se traza la altura AH.

Calcule $m\angle HMN$.

- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 35°
- E) 50°

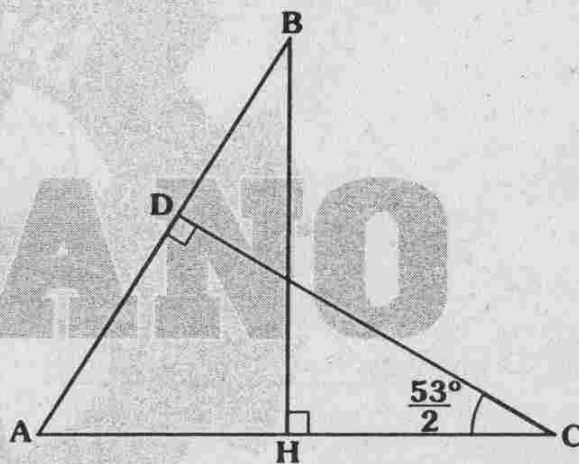
PROBLEMA N° 49

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle ABC = 100^\circ$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican M y N respectivamente, tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$. Calcule $m\angle ANM$.

- A) 40°
- B) 50°
- C) 80°
- D) 100°
- E) 45°

PROBLEMA N° 50

En el gráfico, $HC = 2(AH)$, calcule $\frac{BD}{AD}$.



- A) $3/2$
- B) $2/3$
- C) $4/3$
- D) $3/4$
- E) 1

PROBLEMA N° 51

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica P, tal que $m\angle PAC = 90^\circ$, $PA = AC$ y $5(AB) = 3(PB)$. Calcule $m\angle APB$.

- A) 37°
- B) $\frac{69^\circ}{2}$
- C) 30°
- D) $\frac{53^\circ}{2}$
- E) $\frac{75^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 52

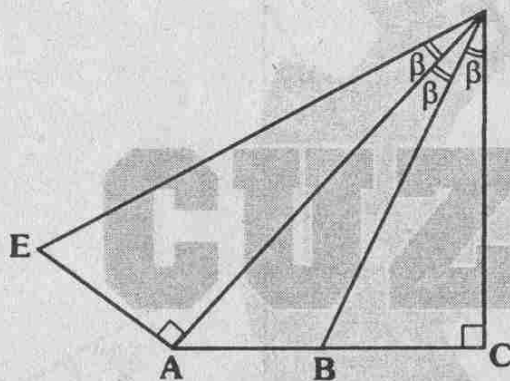
En el triángulo ABC, se traza la mediana AM tal que $m\angle MAB = 2(m\angle CAM)$ y $m\angle ABC = 90^\circ + m\angle MAC$.

Calcule $m\angle MAC$.

- A) 15° B) 30° C) 37°
D) $18^\circ 30'$ E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 53

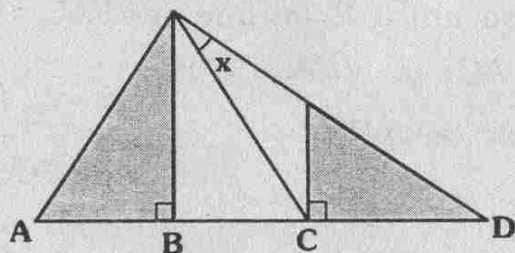
Según el gráfico, $AE = 8$, calcule AB.



- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 54

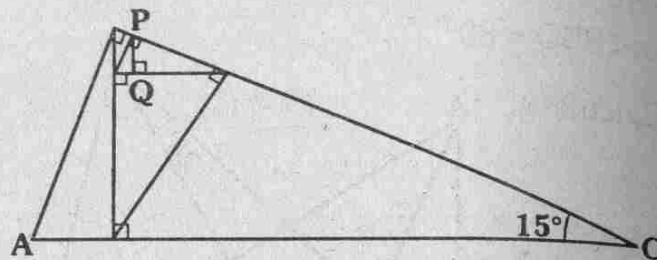
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $CD = 2(AB)$. Calcule x .



- A) 8° B) 10° C) 15°
D) $18^\circ 30'$ E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N° 55

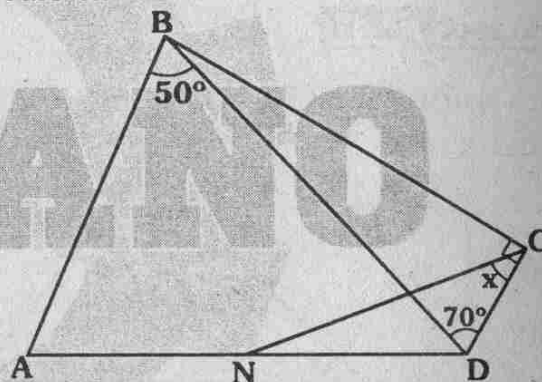
En el gráfico, $AC = 32$, calcule PQ.



- A) 2 B) 1 C) 4
D) $1/2$ E) $1/4$

PROBLEMA N° 56

En el gráfico, $AN = ND$ y $4(AB) = 3(BD)$. Calcule x .

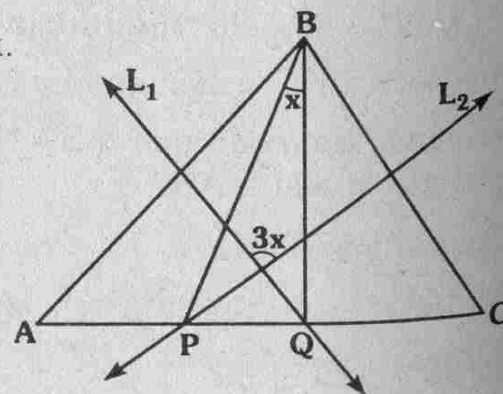


- A) 30° B) 32° C) 33°
D) 34° E) 35°

PROBLEMA N° 57

En el gráfico $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule x .



- A) 45°
B) 30°
C) 36°
D) 18°
E) 40°

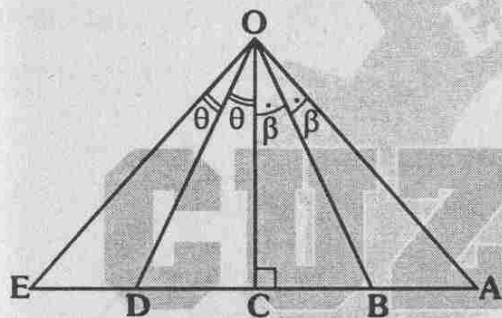
PROBLEMA N° 58

Se tiene el triángulo ABC , se ubica E punto medio de $\overline{AB}$ y D en la prolongación de $\overline{CB}$, tal que $m\angle BDE = m\angle ACB$. Si $AC = 10$. Calcule ED .

- A) 2,5 B) 5 C) 7,5
D) 10 E) 20

PROBLEMA N° 59

En el gráfico: $4(AB) = 5(BC)$ y $ED = \sqrt{2}(CD)$. Calcule $m\angle BOD$



- A) 30° B) 37° C) 40°
D) 41° E) 74°

PROBLEMA N° 60

Se tiene el triángulo ABC ; se ubican P en $\overline{AB}$, Q en $\overline{AC}$ y R en $\overline{BC}$, tal que $AP = QC$, $RC = AQ$ y $PQ = QR$. Si $m\angle PQR = 2(m\angle ABC)$. Calcule $m\angle ABC$

- A) 30° B) 36° C) 18°
D) 20° E) 45°





Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA N° 61 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se traza la bisectriz interior AS , desde M se traza $\overline{SM}$ perpendicular a la bisectriz exterior trazada desde B , M en dicha bisectriz. Si $AB = a$ y $BM = b$.

Calcule BS .

- A) $a + b$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $a - b$
D) $a - 2b$ E) $a + 2b$

PROBLEMA N° 62 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se cumple $m\angle ABC = 20^\circ$, sobre $\overline{BC}$ se ubica F , de modo que $BF = AC$.

Calcule $m\angle BAF$.

- A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA N° 63 [1er. Seminario 2008-II]

Dado el triángulo ABC , se cumple $m\angle A = 2(m\angle C)$, se traza la altura BP (P en $\overline{AC}$). Si $AB = m$ y $AC = n$.

Calcule AP .

- A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{m+2n}{2}$ C) $\frac{n-m}{2}$
D) $\frac{2m+n}{2}$ E) $\frac{3m-n}{2}$

PROBLEMA N° 64 [1er. Seminario 2008-II]

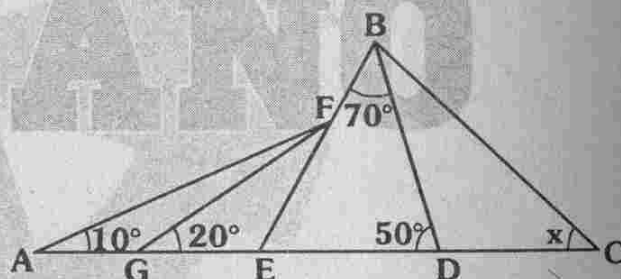
En un triángulo acutángulo ABC , $m\angle B = 2(m\angle A)$ y la ceviana CF es tal que $BC = AF$. Demostrar que:

$$m\angle ACF = m\angle BAC$$

PROBLEMA N° 65 [1er. Seminario 2008-II]

En el gráfico, $AE = EC$ y $GE = ED$.

Calcule x .



- A) 60° B) 45° C) 30°
D) $22,5^\circ$ E) 20°

PROBLEMA N° 66 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC , la $m\angle BAC = 25^\circ$, $m\angle ACB = 5^\circ$, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que $AD = BD$, si $m\angle ABD = 85^\circ$.

Calcule $m\angle BDC$.

- A) 50° B) 60° C) 85°
D) 65° E) 80°

PROBLEMA N° 67

[Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se ubica M tal que $\overline{AM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AB}$ luego se traza la mediana AQ del triángulo ABC y la mediana QS del triángulo AQM, si $m\angle BAS = 56^\circ$.

Calcule $m\angle SQM$.

- A) 14° B) 18° C) 28°
D) 45° E) 56°

PROBLEMA N° 68

[Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC ($AB = BC$) se traza la bisectriz interior AF; luego en el triángulo AFC, se trazan las bisectrices interior y exterior del ángulo AFC, cortando en J y L a $\overline{AC}$, si $AF = b$.

Calcule JL.

- A) b B) $b\sqrt{2}$ C) $b\sqrt{3}$
D) $\frac{3b}{2}$ E) 2b

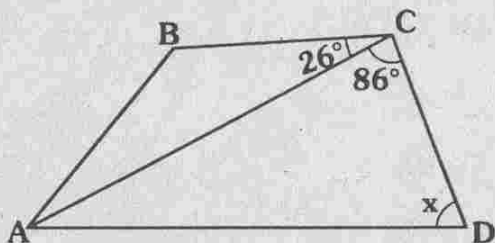
PROBLEMA N° 69

[Seminario 2008-I]

En el gráfico, $AB = BC = CD$

Calcule x.

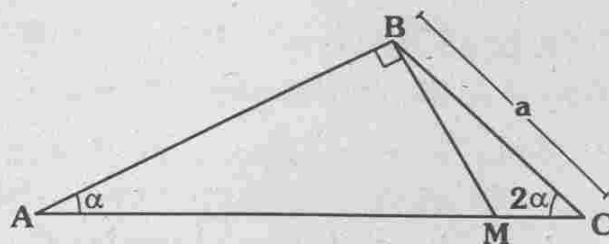
- A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 58°
E) 65°



PROBLEMA N° 70

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, C está en la prolongación de $\overline{AM}$, ¿entre que valores está AC?



- A) $\left\langle 2a; \frac{5a}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{5a}{2}; 3a \right\rangle$
C) $\left\langle \frac{14a}{5}; \frac{7a}{2} \right\rangle$ D) $\langle 2a; 3a \rangle$
E) $\left\langle 2a; \frac{13a}{4} \right\rangle$

PROBLEMA N° 71

[1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, luego se traza $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{AC}$ (N en $\overline{AB}$) y la bisectriz ND del ángulo MNA (D en $\overline{AC}$).

Si: $m\angle ABC - m\angle ACB = 80^\circ$ y
 $m\angle MDN = m\angle BMD$.

Calcule $m\angle NDM$.

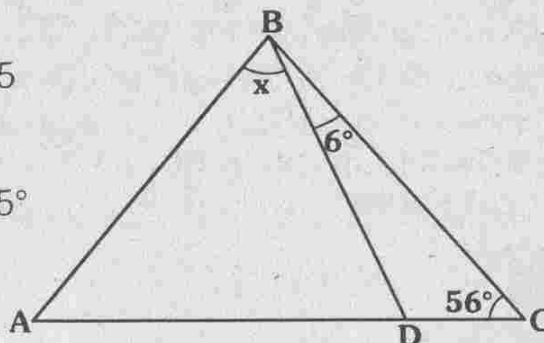
- A) 60° B) 56° C) 66°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 72

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico $AD = BC$, calcule x.

- A) 60°
B) $61,5$
C) 62°
D) $62,5^\circ$
E) 56°



PROBLEMA N° 73

[1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo isósceles $ABC (AB=BC)$,

- a) Sobre la base se ubica M , demostrar que la suma de distancias de M sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es igual a una de las alturas congruentes del triángulo isósceles.
- b) Si el punto M se encuentra en la prolongación de la base, demuestre que la longitud de una de las alturas congruentes es igual a la diferencia de distancias a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

PROBLEMA N° 74

[1er. Seminario 98-II]

Dos rectas paralelas L_1 y L_2 son cortadas por otras rectas paralelas L_3 y L_4 en los puntos A, B, C y D ; siendo $\{A\} = \overline{L_2} \cap \overline{L_3}$. Si las distancias de A a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_4}$ son " a " y " b " ($a < b$); $\{D\} = \overline{L_2} \cap \overline{L_4}$, siendo F la intersección de las bisectrices de los ángulos en A y D .

Calcule la distancia de F a $\overline{L_1}$.

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $a-b$ C) $\frac{2a+b}{2}$
- D) $\frac{2a-b}{2}$ E) $\frac{2a-b}{3}$

PROBLEMA N° 75

[1er. Seminario 98-II]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B , la bisectriz interior AM corta a la altura BH en O . Sobre $\overline{OM}$ se ubica un punto de tal forma que las distancias de dicho punto al cateto BC y a la altura BH suman 7. Si $AB=14$. Calcule AC .

- A) 25 B) $14\sqrt{2}$ C) 38
- D) 28 E) 30

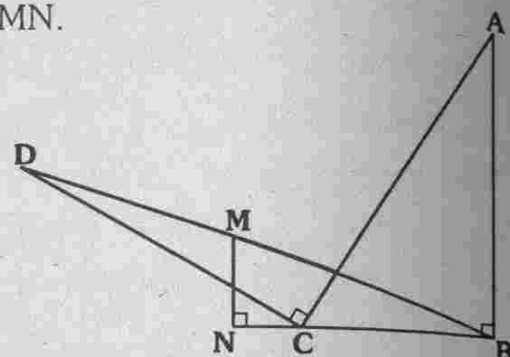
PROBLEMA N° 76

[1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AC=CD$, $BM=MD$ y $BC=8$.

Calcule MN .

- A) 2
- B) $2\sqrt{2}$
- C) 4
- D) $4\sqrt{2}$
- E) 5



PROBLEMA N° 77

Por el vértice B del triángulo ABC se traza BP perpendicular a la bisectriz de A , luego por P . Se traza la paralela a $\overline{AC}$ que corta a BC en Q . Calcule la medida del segmento PQ . Sabiendo que:

$$AB=6\mu \text{ y } AC=8\mu$$

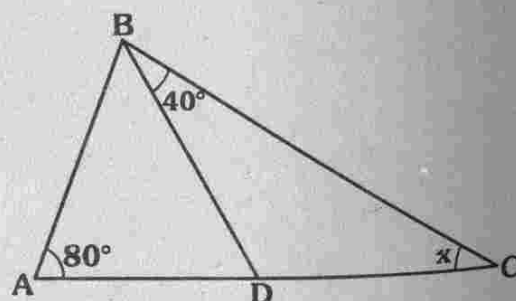
- A) 1μ B) 2μ C) 3μ
- D) 4μ E) 5μ

PROBLEMA N° 78

[1er. Seminario 97-II]

En el gráfico, $AB=DC$. Calcule x

- A) $22,5^\circ$
- B) 30°
- C) 40°
- D) 45°
- E) 50°



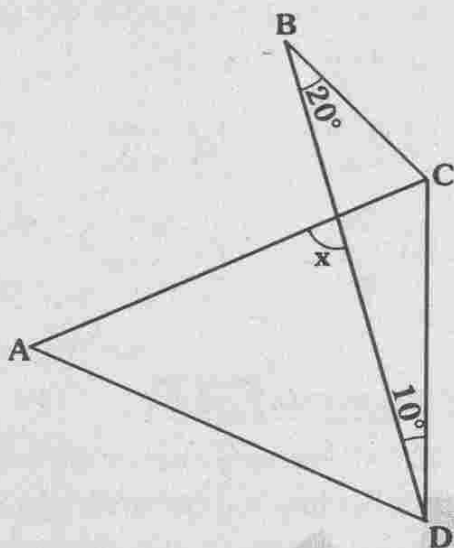
PROBLEMA N° 79

[1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $AC=AD=BD$

Calcule x .

- A) 60°
 B) 65°
 C) 70°
 D) 75°
 E) 80°



PROBLEMA N° 80 [1er. Seminario 2008-I]

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que:

$$m\angle BAC = 20^\circ, \quad m\angle CAD = 10^\circ, \\ m\angle ACB = 50^\circ \text{ y } m\angle ACD = 30^\circ$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

- A) 90° B) 75° C) 45°
 D) 60° E) 53°

PROBLEMA N° 81 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $AB = CD$; si $m\angle BAD = 100^\circ$ y $m\angle BCA = 20^\circ$.

Calcule $m\angle CBD$

- A) 10° B) 15° C) 20°
 D) 18° E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 82 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se cumple que $AB = 6$, $BC = 7$ y $AC = 8$. Por el vértice B, se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ a la

bisectriz interior del ángulo A y $\overline{BQ}$ a la bisectriz exterior del ángulo C. ¿Cuánto mide PQ ?

- A) 3,5 B) 4 C) 4,5
 D) 5 E) 5,5

PROBLEMA N° 83 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ, tal que:

$$AB = QC; \quad m\angle A = 40^\circ \text{ y } m\angle C = 30^\circ$$

Calcule $m\angle QBC$.

- A) 55° B) 60° C) 45°
 D) 30° E) 50°

PROBLEMA N° 84 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana, N es punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si $PM = 3\mu$ y $m\angle MBC = 90^\circ$. Halle AC

- A) 18μ B) 12μ C) 10μ
 D) 15μ E) 6μ

PROBLEMA N° 85 [1er. Seminario 2005-II]

ABC es un triángulo en el que $m\angle C = 75^\circ$ y la altura $\overline{BH}$, mide la mitad de $\overline{AC}$. Calcule $m\angle ABC$.

- A) 75° B) 37° C) 30°
 D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 86 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC (recto en B), se cumple $m\angle C = 15^\circ$ se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$

que al prolongarse, interseca en P a $\overline{BC}$. Si $AC = b$. Calcule FP.

- A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$
C) $\frac{b(\sqrt{3}+1)}{2}$ D) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$
E) $\frac{b}{2}$

PROBLEMA N° 87 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC acutángulo se trazan las bisectrices interiores desde A y C, luego desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente.

Si $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{4}$

Halle la razón entre el perímetro del triángulo ABC y PQ.

- A) 10 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 88 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre AC se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N, si $AM = 17$. Calcule MN.

- A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{17}{7}$

PROBLEMA N° 89 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B y $AB < BC$. Se ubica D en $\overline{BC}$ de modo que $DC = AB$ y $AB = a$. Halle la longitud

del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

- A) a B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C) 2a
D) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{a}{2}$

PROBLEMA N° 90 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y BE de modo que: $m\angle BAC = 2(m\angle EBC)$, $AB = DC$ y $BD = BE$. Calcule $m\angle ABD$.

- A) 45° B) $\frac{45^\circ}{2}$ C) 37°
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 91 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) sea P en la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que $BP = AC$ y $m\angle BPC = 30^\circ$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 60° B) 75° C) 30°
D) 72° E) 45°

PROBLEMA N° 92 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC ($AB = BC$) sea P en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $BP = AC$ y $2(m\angle A) - m\angle BPC = 60^\circ$.

Calcule $m\angle B$.

- A) 5° B) 7° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 93

[1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC se cumple $m\angle A = 30^\circ$, se traza la ceviana interior CD de modo que $CB = BD$ y $CD = AB$.

Calcule $m\angle DCA$.

- A) 5° B) $7,5^\circ$ C) 9°
D) 10° E) 12°

PROBLEMA N° 94

[1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) se ubica D en la región interior de modo que $m\angle BAD = 50^\circ$, $m\angle DAC = 30^\circ$ y $m\angle DCB = 25^\circ$.

Calcule $m\angle DBC$.

- A) 5° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

PROBLEMA N° 95

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$), se ubican M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, tal que:

$$m\angle ABM = m\angle BCN = 30^\circ \quad \text{y}$$

$$m\angle MBC = 70^\circ$$

Calcule $m\angle BMN$.

- A) 60° B) 65° C) 75°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 96

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), se construye exteriormente el triángulo isósceles APB, tal que:

$$AP = PB = BC \quad \text{y}$$

$$m\angle APB = 2(m\angle ABC)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 60° B) 80° C) 70°
D) 75° E) 65°

PROBLEMA N° 97

[1er. Seminario 2007-II]

Se ubica M en el triángulo ABC ($M \in \overline{AC}$), tal que:

$$\frac{m\angle ABM}{5} = \frac{m\angle MBC}{3} = \frac{m\angle BAC}{2}$$

y $AM = BC$. Calcule $m\angle BCA$

- A) 15° B) 30° C) 35°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 98

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las cevianas interiores $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ de modo que $AB = DC$ y $BD = BE$. Si $m\angle BAC = 2(m\angle EBC)$.

Calcule $m\angle ABD$.

- A) 20° B) $22,5^\circ$ C) 24°
D) 25° E) 26°

PROBLEMA N° 99

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo escaleno ABC, se cumple:

$$AB = 3u \quad \text{y} \quad BC = 10u$$

Halle el menor valor entero de la longitud de la mediana relativa a $\overline{AC}$.

- A) 3μ B) 4μ C) 5μ
D) 6μ E) 7μ

PROBLEMA N° 100

[1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que:

$$AM = BC = 9\mu \quad y$$

$$m\angle ABM = m\angle BAC + m\angle CBM$$

Calcule AB.

- A) 4,9 B) 8 C) 9
D) 13,5 E) 18

PROBLEMA N° 101 [1er. Seminario 2007-II]

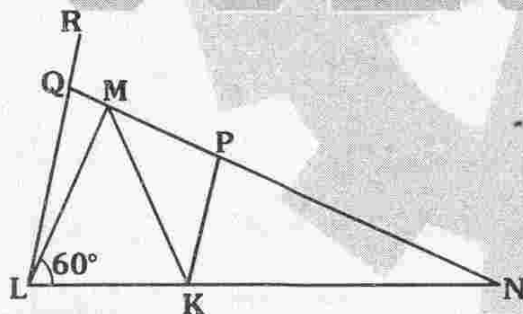
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Si $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$, entonces demuestre que: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

PROBLEMA N° 102 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $LM = LK$, $QM = KP$ y $m\angle MKP = m\angle KNP$, entonces $m\angle RQN$ es:

- A) 100°
B) 110°
C) 115°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA N° 103 [1er. Seminario 2007-II]

Sobre los dos lados AB y BC del triángulo ABC se construye exteriormente los triángulos rectángulos isósceles ABP y CBQ $AB = BP$ y $CB = BQ$. Por B se traza una recta perpendicular a $\overline{PQ}$, la cual corta a $\overline{AC}$ en M. Si $PQ = 8\mu$, calcule BM.

- A) 8μ B) 6μ C) 4μ
D) 9μ E) 12μ

PROBLEMA N° 104 [1er. Seminario 2007-II]

En el exterior y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo acutángulo ABC se ubica el punto F y en las prolongaciones de $\overline{FA}$ y $\overline{FC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $PB = BC$, $QB = AB$ y los ángulos PBC y QBA son rectos entonces la medida del ángulo AFC.

- A) 45° B) 60° C) 75°
D) 53° E) 90°

PROBLEMA N° 105

En el triángulo ABC, obtuso en B, se traza la altura BH y la ceviana BP ($P \in \overline{CH}$), tal que $AP = BC$, $m\angle BCA = 2(m\angle PBH)$ y $m\angle ABH = 3(m\angle PBH)$.

Calcule $m\angle PBH$.

- A) 16° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 22°

PROBLEMA N° 106 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AF}$. Si $\overline{AF} \cong \overline{BC}$,

$$m\angle ABC = 4(m\angle BAF) \quad y$$

$$2(m\angle FBC) = 3(m\angle BAF)$$

entonces $m\angle BCA$ es:

- A) 35° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 107 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo rectángulo ABC se ubica P. Si $\overline{AP} \cong \overline{BC}$, $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ y $m\angle PAB = m\angle ACP$, entonces $m\angle PCA$ es:

- A) 20° B) $22,5^\circ$ C) 30°
 D) 36° E) 40°

PROBLEMA N° 108 [1ra. Prueba C. 2007-I]

Sea R un punto interior al triángulo equilátero ABC de manera que:

$$m\angle BAR = \frac{m\angle CBR}{3} = \frac{m\angle ACR}{5}$$

Calcule $m\angle BAR$.

- A) 5° B) 10° C) 15°
 D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 109 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza la mediana BD, la prolongación de la mediana AE del triángulo ABD interseca a $\overline{BC}$ en F, entonces se cumple:

- A) $FC = \frac{1}{2}(BF)$ B) $FC = BF$
 C) $FC = 2(BF)$ D) $FC = 3(BF)$
 E) $FC = 4(BF)$

PROBLEMA N° 110 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en E, en dicha mediatriz se ubica P (P en la región interior del triángulo) de manera que $AB = AP = PC$, si:

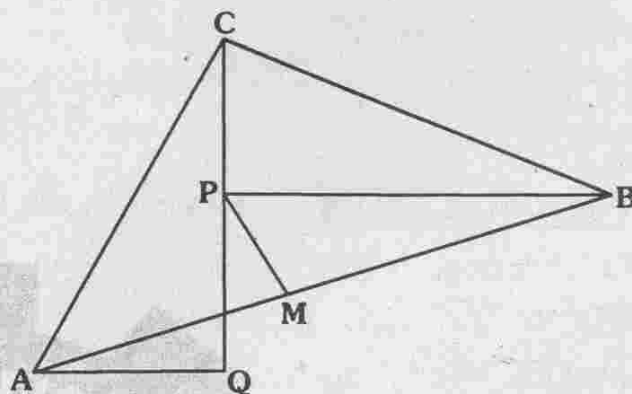
$$\frac{m\angle B}{4} = \frac{m\angle BAP}{2} = m\angle BCP$$

Calcule $m\angle BCP$.

- A) 22° B) 23° C) 24°
 D) 25° E) 26°

PROBLEMA N° 111 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el gráfico, M es punto medio de $\overline{AB}$. Los segmentos BP y AQ son perpendiculares al segmento CQ. Si $MP = L$, entonces la longitud de $\overline{MQ}$ es:



- A) $\frac{L}{3}$ B) $\frac{L}{2}$ C) L
 D) $\frac{2L}{3}$ E) $\frac{3L}{4}$

PROBLEMA N° 112 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $\overline{AB} \cong \overline{PC}$. Si:

$$\frac{m\angle ABP}{7} = \frac{m\angle PBC}{1} = \frac{m\angle BCP}{2},$$

entonces, $m\angle ABC$ es:

- A) 60° B) 70° C) 75°
 D) 80° E) 90°

PROBLEMA N° 113 [1er. Seminario 2001-II]

Dado el triángulo ABC, donde $AB = 2, 5$; $BC = 8,5$; se traza la mediana BR de modo que BR pertenece los naturales. Calcule BR.

- A) 7 B) 4 C) 2
 D) 8 E) 7

PROBLEMA N° 114 [1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM. Si $m\angle ABM = 105^\circ$ y $m\angle MBC = 30^\circ$.

Calcule $m\angle C$.

- A) 15° B) 18° C) 25°
D) 30° E) 45°

PROBLEMA N° 115 [1er. Seminario 2007-II]

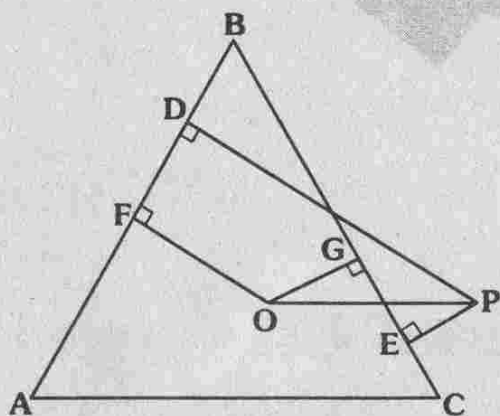
En el triángulo ABC, se traza la ceviana BQ. Si $\overline{AB} \cong \overline{QC}$ y $m\angle BAC = 90^\circ + x$; $m\angle QBC = x$ y $m\angle BCA = 2x$.

Calcule x.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 116 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $\overline{PO} \parallel \overline{AC}$, $OF = a$, $OG = b$ y $PE = c$, entonces la longitud de $\overline{PD}$ es:



- A) $a + b - c$ B) $a + b + c$
C) $a + 2b + c$ D) $2a + b - c$
E) $2a + 2b - 3c$

PROBLEMA N° 117 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Si $F \in \overline{EC}$, $\overline{BF} \cap \overline{AD} = \{G\}$, $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ ($M \in \overline{AD}$), $m\angle EBF = m\angle FBC$ y $BE - BD = k$.

Calcule FM.

- A) $\frac{k}{2}$ B) $\frac{k}{3}$ C) $\frac{4k}{5}$
D) k E) $\frac{3k}{2}$

PROBLEMA N° 118 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, P y Q están en $\overline{BC}$ y M es punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{BP} \cong \overline{QC}$, calcule $m\angle PMQ$.

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 119 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto D exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que $AB = BC = CD$.

Si $m\angle ABC = 2(m\angle ADC)$.

Calcule $m\angle DAC$.

- A) 15° B) 18° C) $22,5^\circ$
D) 30° E) 32°

PROBLEMA N° 120 [1er. Seminario 2008-I]

En el interior del triángulo ABC se ubica O, tal que $OB = AC$ y las medidas de los ángulos ABO, CBO y ACB son proporcionales a 4; 5 y 13, además $\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo BAC.

Calcule $m\angle ABO$.

- A) 16° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 12°

PROBLEMA N° 121 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, si $AD = BC$ y

$$\frac{m\angle BAC}{2} = \frac{m\angle ABD}{5} = \frac{m\angle DBC}{3}$$

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 6° B) 8° C) 30°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 122 [1er. Seminario 2007-I]

Un punto en la región interior de un triángulo equilátero, dista 1μ , 2μ y 3μ de los lados. Entonces el lado del triángulo mide (en u).

- A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA N° 123 [1er. Seminario 2007-I]

ABC es un triángulo acutángulo, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ de manera que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Si $m\angle ACB = m\angle DBC + 2r$ y $m\angle DBC = m\angle BAC - r$. Calcule $m\angle ABD$.

- A) r B) $\frac{r}{2}$ C) $2r$
D) $\frac{2r}{3}$ E) $\frac{3r}{4}$

PROBLEMA N° 124 [1er. Seminario 2006-I]

El ángulo exterior en B del triángulo ABC

mide 50° , si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en P y Q. Halle $m\angle PBQ$.

- A) 70° B) 75° C) 80°
D) 85° E) 90°

PROBLEMA N° 125 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubica el punto exterior Q, tal que $\overline{BQ}$ interseca a $\overline{AC}$.

Si: $m\angle ABQ = 6\alpha$; $m\angle BAC = 2\alpha$;

$m\angle BCA = \alpha$; $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ y

$m\angle BCA = m\angle ACQ$, entonces " α " es:

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA N° 126 [1er. Seminario 2006-II]

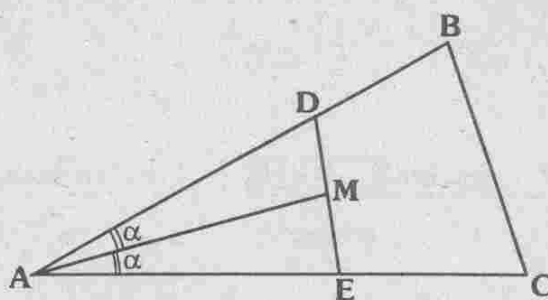
En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz del ángulo exterior trazado de A interseca a la prolongación de la altura BH en F. Si $AB + AH = 4$ y $HF = 3$. Halle BH.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 3,5 E) 4

PROBLEMA N° 127 [1er. Seminario 2006-II]

En el gráfico, $DA = BD$, $m\angle AMD = 50^\circ$ y $AE = BC + EC$. Halle $m\angle ABC$.

- A) 70°
B) 80°
C) 85°
D) 90°
E) 95°



PROBLEMA N° 128

[1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubican M en $\overline{BC}$, P y Q en $\overline{AC}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $m\angle BAC = 2(m\angle PMQ) = 2(m\angle MCQ)$, entonces $m\angle PMQ$ es:

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA N° 129

[1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $m\angle B = 90^\circ$ se traza la ceviana interior $\overline{AF}$ de manera que $m\angle BAF = 12^\circ$, $G \in \overline{AC}$ y $m\angle AFG = m\angle C = 54^\circ$. Si $BF = a$. Calcule FG.

- A) $2a$ B) $\frac{4a}{3}$ C) $3a$
D) $\frac{3a}{2}$ E) $\frac{5a}{3}$

PROBLEMA N° 130

[1er. Seminario 2005-II]

En el lado AC del triángulo ABC se construye exteriormente el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que $m\angle ECB = 2(m\angle CAD)$, E está en la prolongación de $\overline{DC}$. Si $AD + DC = CB$. Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 45° C) 35°
D) 60° E) 40°

PROBLEMA N° 131

[1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle A = 22^\circ$ y $m\angle C = 8^\circ$. Se construye

exteriormente el triángulo ADC, tal que:

$$m\angle A = 22^\circ, m\angle ACD = 23^\circ \text{ y } BC = 2$$

Calcule DC.

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

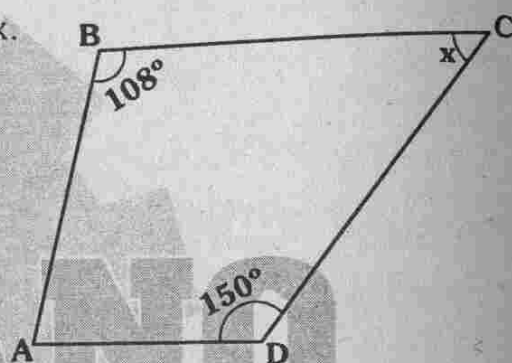
PROBLEMA N° 132

[1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $AB = BC = CD$

Calcule x.

- A) 36°
B) 54°
C) 48°
D) 42°
E) 60°



PROBLEMA N° 133

[1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC ($AB = BC$) se traza la mediana AM y se prolonga hasta H de modo que:

$$m\angle AHC = 90^\circ, m\angle MAC = m\angle BCH \text{ y } MH = a$$

Calcule AM.

- A) $2a$ B) $\frac{4a}{3}$ C) $4a$
D) $\frac{3a}{2}$ E) $6a$

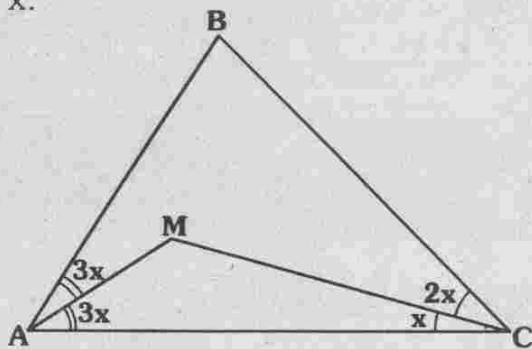
PROBLEMA N° 134

[1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $MC = BC$.

Calcule x .

- A) $2,5^\circ$
- B) 4°
- C) 3°
- D) $4,5^\circ$
- E) $7,5^\circ$



PROBLEMA N° 135

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ubica D punto exterior tal que $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$. Si:

$$m\angle ABD = m\angle BDC = 2(m\angle ADB) \quad y$$

$$m\angle DBC = 3(m\angle ABD)$$

entonces $m\angle ADB$ es:

- A) 5°
- B) 8°
- C) 10°
- D) 12°
- E) $\frac{15^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 136

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior CD , en el triángulo ADC se traza la ceviana interior DE . Si: $m\angle BCD = 10^\circ$, $m\angle DCA = 20^\circ$ y $DE = 2(DB)$. Calcule $m\angle CDE$.

- A) 50°
- B) 60°
- C) 62°
- D) 65°
- E) 75°

PROBLEMA N° 137

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC los ángulos interiores en A y B miden 18° y 99° respecti-

vamente, si D es un punto de la bisectriz interior trazada desde A . Si $BC = CD$, calcule $m\angle BCD$.

- A) 36°
- B) 38°
- C) 40°
- D) 42°
- E) 44°

PROBLEMA N° 138

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B , se traza la ceviana interior AP y se traza $\overline{PE}$ ($E \in \overline{AC}$).

Si: $m\angle PAE = 2(m\angle BAP)$;

$$m\angle APE = m\angle PCE \quad y \quad BP = 1.$$

Halle EP .

- A) 2
- B) 1,8
- C) 1,5
- D) 1,25
- E) 1

PROBLEMA N° 139

[1er. Seminario 2008-I]

Demostrar que en un triángulo, los extremos de un lado equidistan de la recta que contiene a la mediana relativa a dicho lado.

PROBLEMA N° 140

[1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BM}$ tal que $AB = MC$, si $m\angle A = \alpha$ y

$$m\angle ABM = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}.$$

Calcule $m\angle C$.

- A) $\frac{\alpha}{2}$
- B) α
- C) $\frac{2\alpha}{2}$
- D) 2α
- E) 3α



Problemas Propuestos

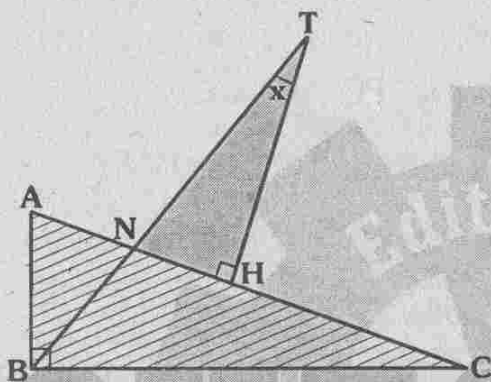
Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 141

En el gráfico, los triángulos NTH y ACB son congruentes y $AH = HC$.

Calcule x .

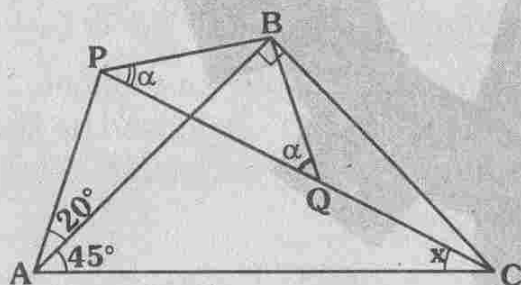
- A) 30°
- B) 20°
- C) 18°
- D) 36°
- E) 23°



PROBLEMA N° 142

Del gráfico $AP = QC$, calcule x .

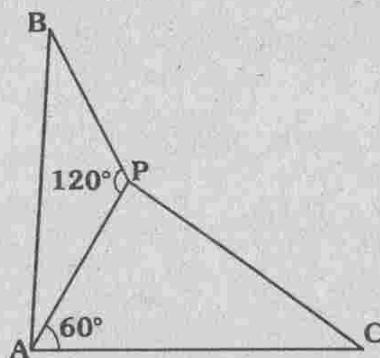
- A) 35°
- B) 20°
- C) 15°
- D) 25°
- E) 30°



PROBLEMA N° 143

Del gráfico, $AC = AP + BP$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{PC}$.

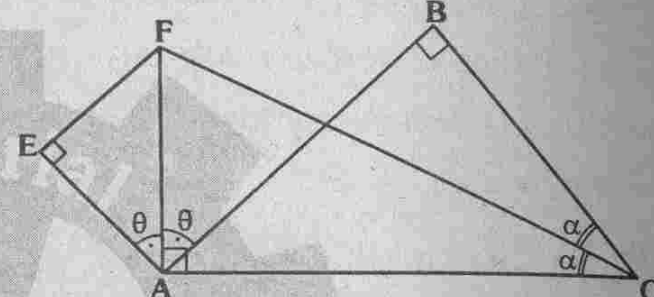
- A) 120°
- B) 100°
- C) 90°
- D) 25°
- E) 70°



PROBLEMA N° 144

Del gráfico, $AC = 13$ y $AB = 12$

Calcule EF



- A) 10
- B) 8
- C) 7
- D) 6
- E) 9

PROBLEMA N° 145

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $m\angle ACB = 80^\circ$; $m\angle BAD = 40^\circ$, $AD = BC$ y $AB = DC$. Calcule $m\angle DBC$.

- A) 20°
- B) 30°
- C) 24°
- D) 36°
- E) 18°

PROBLEMA N° 146

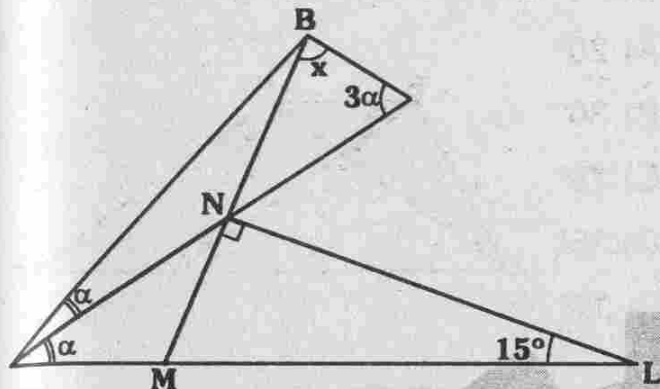
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AD}$, se ubica E en $\overline{AD}$ tal que $m\angle BAD = m\angle ECD$, $AB = EC$ y $CD = AE$. Calcule $m\angle BDA$.

- A) 80°
- B) 40°
- C) 60°
- D) 50°
- E) 30°

PROBLEMA N° 147

Del gráfico, $ML = 2(BN)$.

Calcule x .



- A) 50° B) 40° C) 30°
D) 60° E) 53°

PROBLEMA N° 148

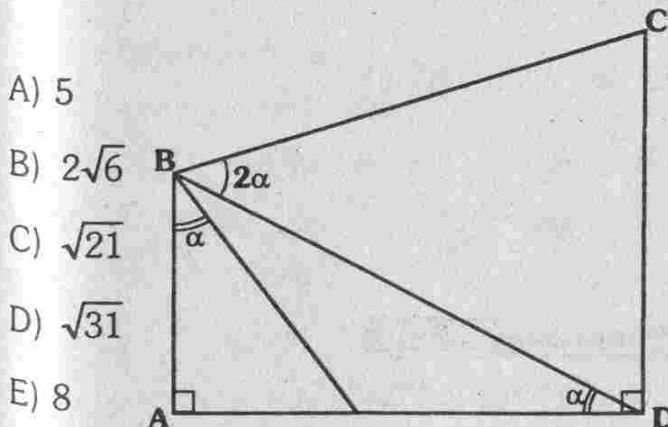
En el triángulo ABC se cumple que $m\angle ABC = 100^\circ$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente. Tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$.

Calcule $m\angle ANM$.

- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA N° 149

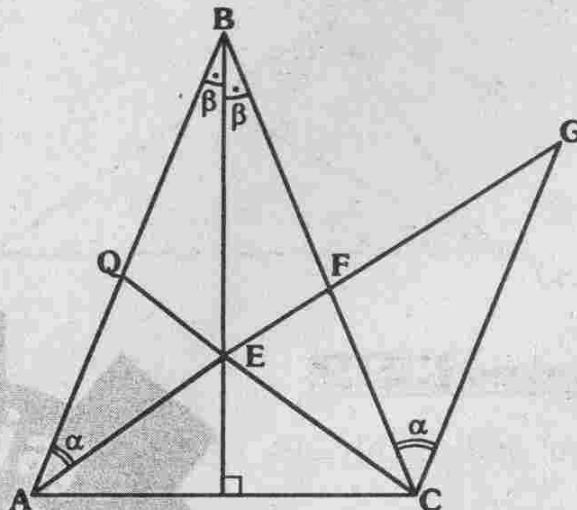
Del gráfico, $AE = ED = 2$. Calcule BC



- A) 5
B) $2\sqrt{6}$
C) $\sqrt{21}$
D) $\sqrt{31}$
E) 8

PROBLEMA N° 150

En el gráfico, $AE = a$, $CG = b$ y $\alpha + 3\beta = 90^\circ$. Calcule EQ



- A) $2a - b$ B) $b - a$ C) $2b - a$
D) $3a - b$ E) $2(b - a)$

PROBLEMA N° 151

En el triángulo ABE, se ubican M y C en $\overline{BE}$, tal que $\overline{CD} \perp \overline{AE}$ ($D \in \overline{AE}$), $AB = 2(BM) = 2(MC)$, $m\angle BAE = 75^\circ$, $m\angle DCE = 45^\circ$ y $MD = 3\sqrt{2}$.

Calcule AB.

- A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA N° 152

Se tiene el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y BN de modo que $AB = BN$, $AM = MC$ y $BM = NC$.

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA N° 153

En el gráfico, $BC = 2(AP)$.

Calcule x .

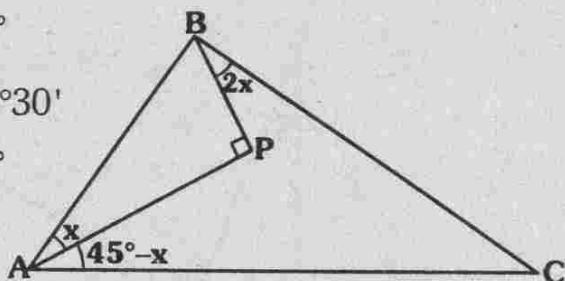
A) 15°

B) $22^\circ 30'$

C) 16°

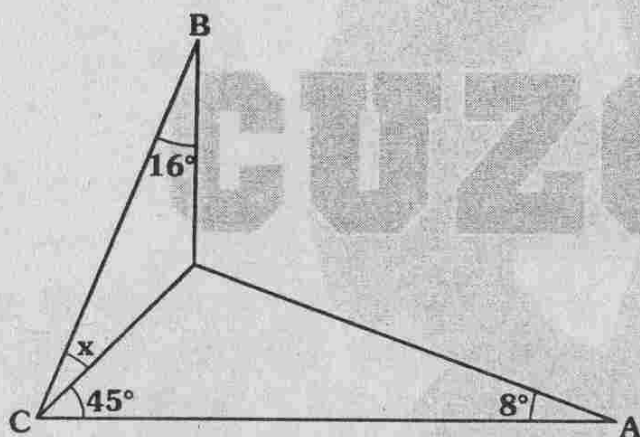
D) 8°

E) 30°



PROBLEMA N° 154

En el gráfico, $AL = BL + BC$, calcule x .



A) 37°

B) 53°

C) 45°

D) 30°

E) 60°

PROBLEMA N° 155

En el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca en P a la recta perpendicular a $\overline{AC}$ trazada por C.

Calcule $m\angle BPC$.

A) $37^\circ/2$

B) $53^\circ/2$

C) 30°

D) 45°

E) 15°

PROBLEMA N° 156

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ mide 96° . Calcule x .

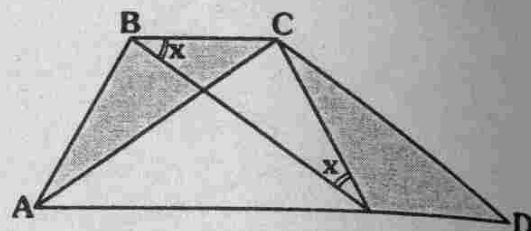
A) 20°

B) 30°

C) 28°

D) 35°

E) 32°



PROBLEMA N° 157

En el triángulo ABC, se traza la altura BH en cuya prolongación se ubica D. Si: $m\angle BAC = 50^\circ$, $m\angle ACB = 20^\circ$ y $m\angle DAC = 30^\circ$. Calcule $m\angle ACD$.

A) 5°

B) 10°

C) $7,5^\circ$

D) 15°

E) 20°

PROBLEMA N° 158

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC, tal que $AP = a$, $BP = b$ y $PC = c$. Si $b > c$ indique la relación que siempre se cumple:

A) $a < b - c$

B) $a^2 < b^2 + c^2$

C) $b - c < a < b + c$

D) $a^2 < b^2 - c^2$

E) $a^2 > b^2 + c^2$

PROBLEMA N° 159

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\angle BAC = 23^\circ \text{ y } 2(AB) = 5(BC)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
 D) 60° E) 76°

PROBLEMA N° 160

En el triángulo equilátero ABC, de centro O, se ubica M y N en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $MB=NC$ y $ON=a$.

Calcule MN.

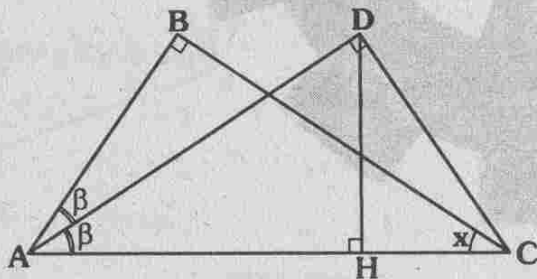
- A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$
 D) 2a E) $\frac{3}{2}a$

PROBLEMA N° 161

En el gráfico, $AB=3$ y $HC=1$.

Calcule x.

- A) 37°
 B) $\frac{37^\circ}{2}$
 C) 53°
 D) $\frac{53^\circ}{2}$
 E) 8°



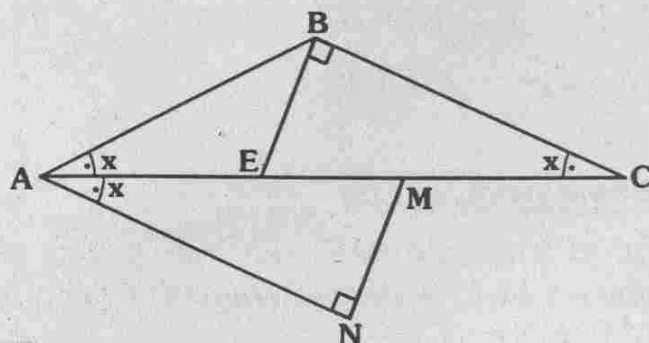
PROBLEMA N° 162

En el gráfico ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$). Si $BH=9$, $AC=15$ y $m\angle HAC=37^\circ$. Calcule AH.

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 163

En el gráfico, $BE=4$, $MN=3$ y $AM=MC$. Calcule x.



- A) 30° B) 45° C) 8°
 D) 37° E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 164

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se trazan las cevianas interiores BM y CN, tal que:

$$m\angle MBC = 50^\circ \text{ y}$$

$$m\angle BCN = m\angle ABM = 30^\circ$$

Calcule $m\angle MNC$.

- A) 10° B) 20° C) 30°
 D) 35° E) 40°

PROBLEMA N° 165

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la bisectriz interior AM, tal que $m\angle AMB=45^\circ$, $m\angle ABC=127^\circ$ y $AB+AC=25$. Calcule BC.

- A) 5 B) 6 C) 4
 D) 8 E) 10

PROBLEMA N° 166

En el triángulo ABC, $m\angle BAC=45^\circ$ y

$m\angle ACB = 30^\circ$. Se traza la mediana AM , tal que $AM = 6$. Calcule la distancia de M hacia $\overline{AB}$.

- A) 2 B) 2,5 C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 167

En el triángulo ABC , en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican M y N respectivamente tal que $AM = MN = NC$.

Si: $\frac{m\angle BAC}{7} = \frac{m\angle AMN}{10} = \frac{m\angle ACN}{5}$,

calcule $m\angle ABC$.

- A) 72° B) 45° C) 60°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA N° 168

En el triángulo ABC , se cumple:

$$m\angle BAC = 16^\circ \text{ y } 7(AB) = 20(BC)$$

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 30° B) 53° C) 45°
D) 37° E) 60°

PROBLEMA N° 169

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ del triángulo equilátero ABC , se ubica P , tal que $m\angle PBC = 90^\circ$, si $PB = \sqrt{3}$ y $AC = 6$. Calcule la distancia de P hacia $\overline{AC}$.

- A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 170

En el triángulo ABC , se traza la ceviana interior BM , tal que $BM = AC = 10$.

Si: $m\angle BCA = 2(m\angle ABM) + m\angle MBC$,

Calcule BC .

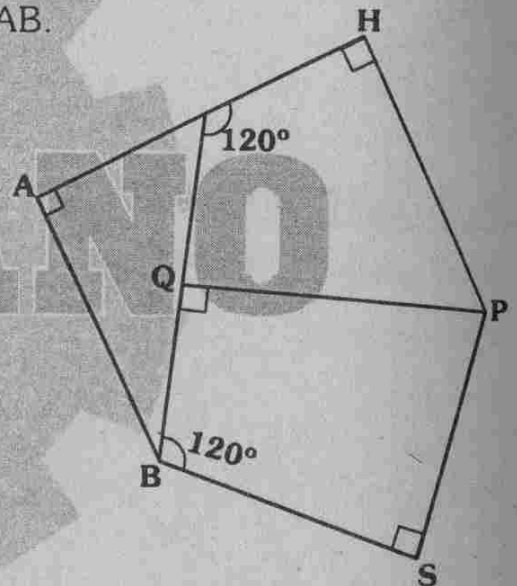
- A) 2,5 B) 4 C) 5
D) 7,5 E) 10

PROBLEMA N° 171

En el gráfico, $HP = 5$, $SP = 6$ y $PQ = 7$.

Calcule AB .

- A) 4,5
B) 6
C) 4
D) 5
E) 5,5



PROBLEMA N° 172

En el triángulo ABC , se cumple:

$$m\angle BCA = 3(m\angle BAC) \text{ y }$$

$$AB = BC(\sqrt{2} + 1)$$

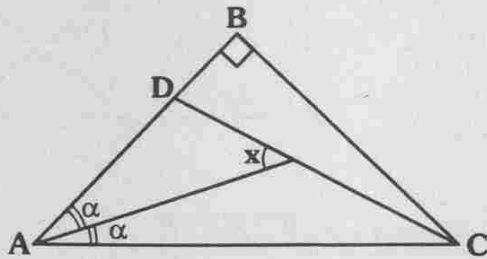
Calcule $m\angle BAC$.

- A) 30° B) $22^\circ 30'$
C) 15° D) 45°
E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N° 173

En el gráfico, $AD = BC = 3(DB)$, calcule x .

- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 174

En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo ABC, se ubica P de modo que $m\angle PCA = 90^\circ$, $m\angle PCB = m\angle PAC = 53^\circ$, $BC = AC = 5$.

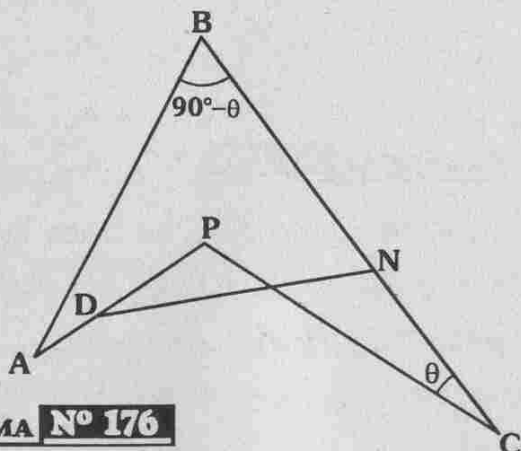
Calcule $m\angle PAB$.

- A) 15°
- B) $\frac{53^\circ}{2}$
- C) 30°
- D) $\frac{37^\circ}{2}$
- E) 37°

PROBLEMA N° 175

En el gráfico, D y N son puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$, si $8(ND) = 5(PC)$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{ND}$ y $\overline{AB}$.

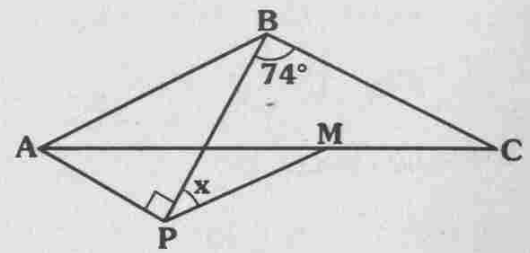
- A) 30°
- B) 60°
- C) 53°
- D) 45°
- E) 37°



PROBLEMA N° 176

En el gráfico, $AB = 6$, $BC = 10$, $PM = 4$ y $AM = MC$. Calcule x .

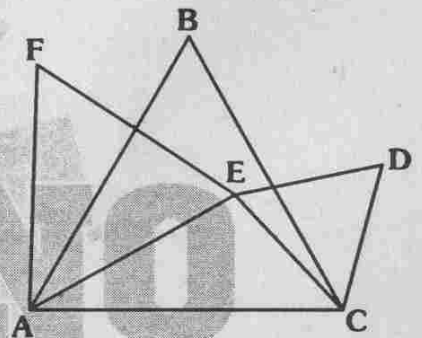
- A) 69°
- B) 37°
- C) 74°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 177

Según el gráfico, los triángulos ABC, AFE y CDE son equiláteros. Si $AC = 12$, calcule el menor valor entero de $BF + BD$.

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 15
- E) 18

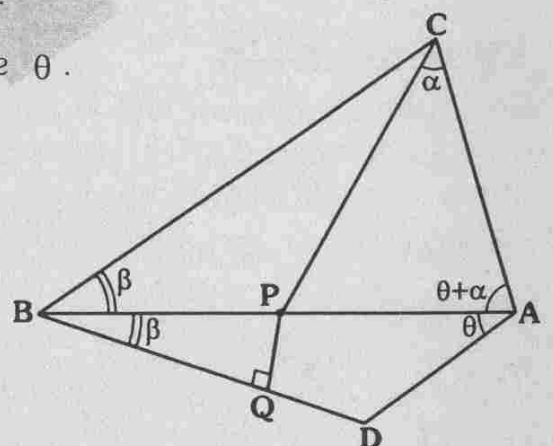


PROBLEMA N° 178

En el gráfico, $AB = BC$, $PQ = 3$ y $DA = 5$.

Calcule θ .

- A) 30°
- B) 37°
- C) 53°
- D) 74°
- E) 60°



PROBLEMA N° 179

Se tiene el triángulo ABC recto en B, se ubica N en $\overline{AC}$, M en $\overline{NC}$ y Q en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.

Si: $BN = CQ$, $MN = MQ$, $AM = MC$,

$m\angle ABN = 10^\circ$ y $m\angle MQC = 80^\circ$.

Calcule $m\angle ACB$.

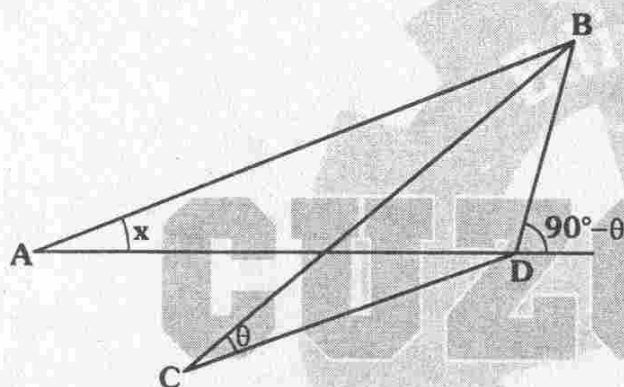
A) 25° B) 30° C) 15°

D) 10° E) 20°

PROBLEMA N° 180

En el gráfico, $AB = BC$ y $BD = CD$.

Calcule x .



A) 18° B) $18^\circ 30'$ C) 30°

D) $26^\circ 30'$ E) 45°

PROBLEMA N° 181

En la región interior del triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, se ubica P en la región interior, tal que $m\angle BPA = 90^\circ$, $AP = 5$ y $BP = 2$.

Calcule PC.

A) 7 B) $\sqrt{13}$ C) 5

D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{10}$

PROBLEMA N° 182

En el gráfico, $BC + 2(AB) = 10$.

Calcule LB.

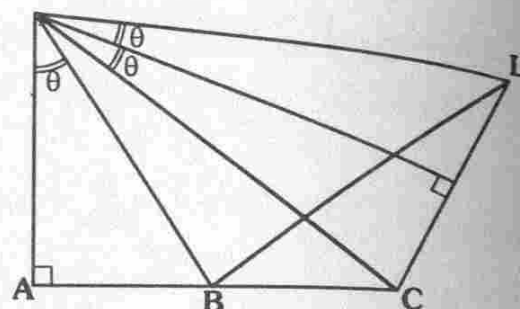
A) 5

B) 7,5

C) 10

D) 6

E) 8



PROBLEMA N° 183

En el gráfico, $AB = 6$, $AD = 6\sqrt{2}$ y $CD = 10$. Calcule CB.

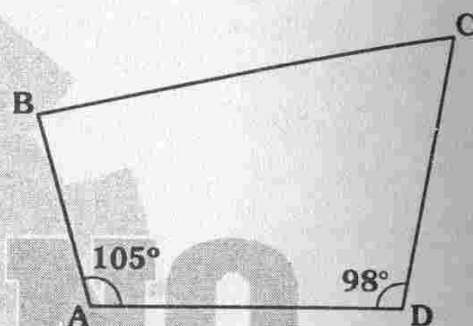
A) $2\sqrt{37}$

B) $2\sqrt{39}$

C) $\sqrt{37}$

D) $\sqrt{39}$

E) $\sqrt{29}$



PROBLEMA N° 184

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y $BH \perp AM$ (H en AM). Calcule cuantos valores enteros puede tomar AB, si $AC = 6$ y $AB = 2(MH)$.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 1

PROBLEMA N° 185

En el triángulo ABC se traza la mediana BM y luego $MH \perp AB$ (H en AB), si $AH = 7$, $HB = 1$ y $BC = 10$.

Calcule $m\angle ABM$.

A) 74°

B) 76°

C) 53°

D) 75°

E) 51°

PROBLEMA N° 186

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, en la prolongación de la ceviana interior AD se ubica Q, si $BD = 1$; $DC = 2$; $QB = 3$ y $m\angle BCA = 60^\circ$. Calcule $m\angle CBQ$.

- A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA N° 187

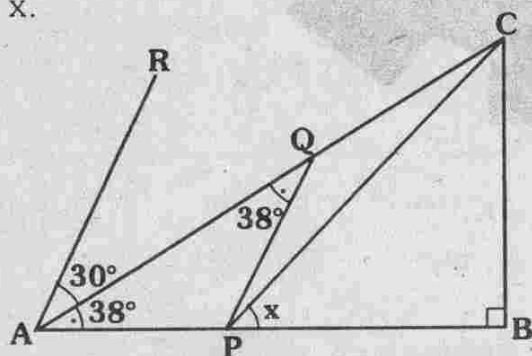
En el triángulo ABC se cumple $m\angle BAC = 20^\circ$, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $BC = CD$ y $m\angle CAD = 40^\circ$, $m\angle ACD = 30^\circ$ y $m\angle ABC > 90^\circ$. Calcule $m\angle ACB$.

- A) 16° B) 18° C) 15°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA N° 188

En el gráfico, Q equidista de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$. Calcule x.

- A) 51°
B) 53°
C) 55°
D) 57°
E) 59°

**PROBLEMA N° 189**

En el triángulo equilátero ABC; en $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{CA}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $AQ = BP$, $\overline{PQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en M. Calcule $m\angle BMP$, si $MB = 2(AM)$.

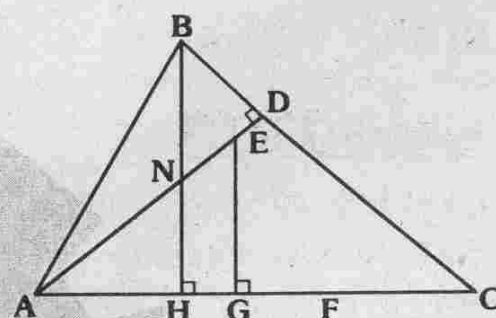
- A) 22,5 B) $26,5^\circ$ C) 30°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA N° 190

En el gráfico, $BH = 20$; $AH = 8$; $AN = NB$ y $AE = AF$.

Calcule EG.

- A) 8
B) 9
C) 10
D) 12
E) 15

**PROBLEMA N° 191**

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, si $BD = AC$ y

$$6(m\angle ABD) = 3(m\angle BAC) = 4(m\angle BCA)$$

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 72° B) 54° C) 36°
D) 28° E) 68°

PROBLEMA N° 192

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AM}$ ($D \in \overline{AM}$);

$$m\angle ABD = 3(m\angle MAC) \quad ; \quad \text{además:} \quad AB = 2(DM).$$

Calcule $m\angle MAC$

- A) 18° B) 15° C) 20°
D) 12° E) 10°

PROBLEMA N° 193

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, tal que $BM = AC$;

$$\frac{m\angle MBC}{2} = \frac{m\angle ABM}{3} = \frac{m\angle BCA}{8}$$

Calcule $m\angle MBC$.

- A) 10° B) 18° C) 20°
D) 35° E) 24°

PROBLEMA N° 194

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la mediana $\overline{CM}$ y la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$), $m\angle BMC = m\angle BCA$ además $BH = 12$. Calcule CM.

- A) 12 B) 18 C) 20
D) 24 E) 16

PROBLEMA N° 195

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{AE}$ tal que:

$$m\angle EAC = 2(m\angle EAB) \text{ y } AC = AE + 2(EB)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 36° B) 15° C) 18°
D) 24° E) 25°

PROBLEMA N° 196

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{AS}$ y la bisectriz interior $\overline{CP}$; $m\angle BAS = 40^\circ$ $m\angle SAC = 30^\circ$. Calcule $m\angle BSP$.

- A) 50° B) 30° C) 40°
D) 20° E) 70°

PROBLEMA N° 197

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ si:

$$m\angle BAD = 20^\circ, \quad m\angle DAC = 10^\circ, \\ m\angle ABE = 40^\circ \text{ y } m\angle BCA = 30^\circ$$

Calcule $m\angle DEC$.

- A) 15° B) 18° C) 50°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA N° 198

En el triángulo ABC donde $AB = BC$ se ubica el punto M en su región interior,

$$m\angle MCA = 10^\circ, \quad m\angle MAC = 20^\circ, \\ m\angle MCB = 40^\circ$$

Calcule $m\angle MBC$.

- A) 60° B) 50° C) 40°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 199

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se trazan las cevianas interiores $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$, tal que: $m\angle MBC = 50^\circ$ y $m\angle BCN = m\angle ABM = 30^\circ$.

Calcule $m\angle MNC$.

- A) 30° B) 60° C) 50°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA N° 200

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, $m\angle BAC = 30^\circ$, $m\angle BMA = 40^\circ$, $AM = BC$.

Calcule $m\angle BCA$.

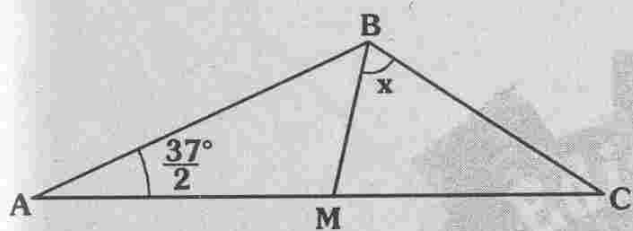
- A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 25°

Problemas Propuestos

Ciclo

Semestral
Intensivo**PROBLEMA N° 201**

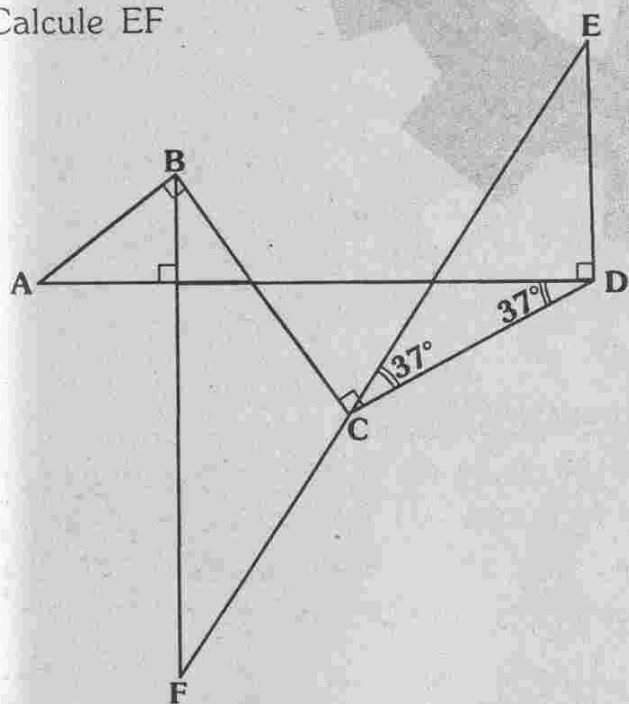
En el gráfico, $AM = MC$ y $BC = 2(BM)$.
Calcule x .



- A) 143° B) 127° C) 120°
D) 90° E) 150°

PROBLEMA N° 202

En el gráfico, $BC = 2(BH) = 2$.
Calcule EF

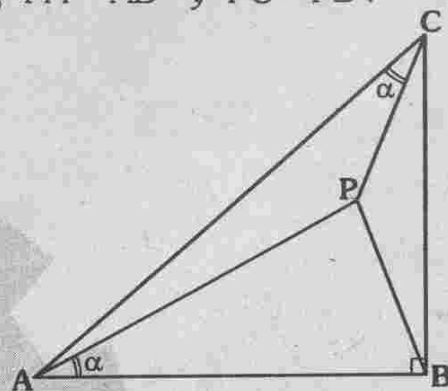


- A) 12,5 B) 5 C) 50/7
D) 13 E) 15/4

PROBLEMA N° 203

En el gráfico, $PA = AB$ y $PC = PB$.
Calcule α .

- A) 10°
B) 15°
C) $22,5^\circ$
D) 12°
E) 30°

**PROBLEMA N° 204**

En el triángulo ABC, $AB = BC = 2\sqrt{10}$,
se ubican los puntos D, E y F en $\overline{AB}$,
 $\overline{BC}$ y $\overline{EC}$ respectivamente tal que
 $DE = EF$; $\overline{AE} \perp \overline{DF}$; $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, por B se
traza una recta que interseca perpendicularmente a la
prolongación de $\overline{AE}$ en H y a la prolongación de $\overline{AC}$ en G.
Si $AG = 8$ y $EH = \sqrt{2}$, calcule EB.

- A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{5}$
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

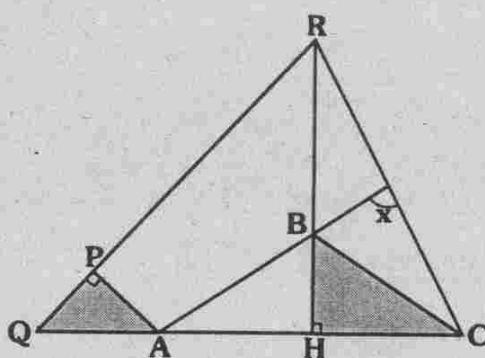
PROBLEMA N° 205

En el gráfico, las regiones sombreadas son
congruentes y $\overline{QR}$ y $\overline{BA}$ se cortan.

Si: $AB = BC$ y $PR = 3(AP)$.

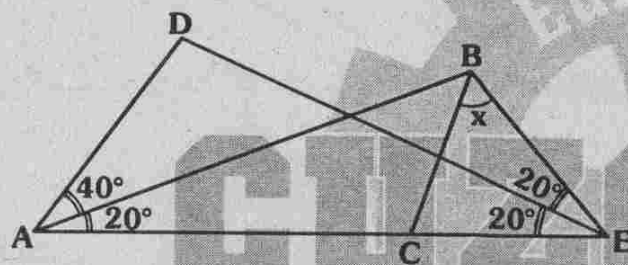
Calcule x .

- A) $80^{\circ}30'$
 B) 82°
 C) $71^{\circ}30'$
 D) $73^{\circ}30'$
 E) $72^{\circ}30'$



PROBLEMA N° 206

En el gráfico, $AD = EC$.
 Calcule x .

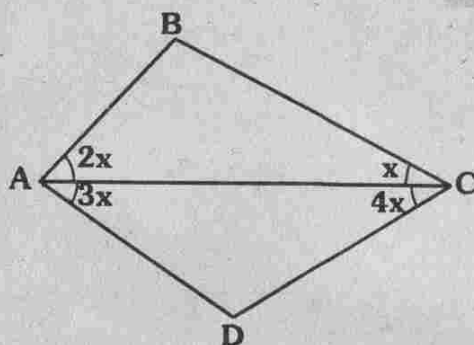


- A) 30° B) 50° C) 70°
 D) 40° E) 60°

PROBLEMA N° 207

En el gráfico, $BC = AD$. Calcule x

- A) 5°
 B) 6°
 C) 7°
 D) 8°
 E) 10°



PROBLEMA N° 208

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $m\angle ABP = 70^{\circ}$ y $m\angle BAC = 80^{\circ}$. Si $AB = PC$.

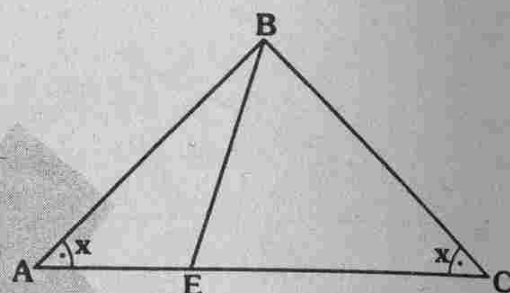
Calcule $m\angle PBC$.

- A) 20° B) 12° C) 18°
 D) 10° E) 15°

PROBLEMA N° 209

Del gráfico, $AB = CE = AE + 2$ y $BE = \sqrt{10}$. Calcule x .

- A) 53°
 B) 30°
 C) 40°
 D) 37°
 E) 52°



PROBLEMA N° 210

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$, tal que $\overline{BQ} = \overline{CP}$, sean M y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ respectivamente.

Si $m\angle BAC = 2(m\angle MNQ)$.

Calcule $m\angle BQC$.

- A) 60° B) 120° C) 90°
 D) 75° E) 45°

PROBLEMA N° 211

En el triángulo ABC, la prolongación de la altura $\overline{AH}$ interseca a la mediatriz de $\overline{AC}$ en P. Si: $m\angle BPC = 90^{\circ}$ y $m\angle ABC = 2(m\angle BCA)$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 70° B) 80° C) 90°
 D) 100° E) 110°

PROBLEMA N° 212

En el triángulo equilátero ABC, en $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y L respectivamente, luego se ubican el punto medio M de $\overline{ED}$. Si $AL = AD + LC$ y la suma de distancias de E y D hacia $\overline{AC}$ es K. calcule LM.

- A) K B) $\frac{K}{2}$ C) $\frac{K}{3}$
 D) $K\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3}{2}K$

PROBLEMA N° 213

Se tiene el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica E de modo que $BC = EB$ y $AE = 10$. Calcule la distancia de A a $\overline{EC}$.

- A) 6 B) 8 C) 5
 D) $5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 214

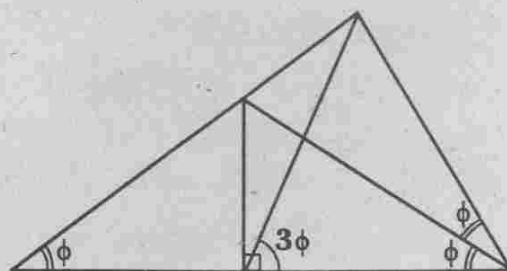
En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, tal que $AP = CQ = 10$ y $m\angle PAB = m\angle BCQ = 15^\circ$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$.

- A) 10 B) 5 C) $5\sqrt{2}$
 D) $5\sqrt{3}$ E) $\frac{5}{2}$

PROBLEMA N° 215

Del gráfico, calcule ϕ .

- A) 10°
 B) 12°
 C) 15°
 D) 20°
 E) 18°

**PROBLEMA N° 216**

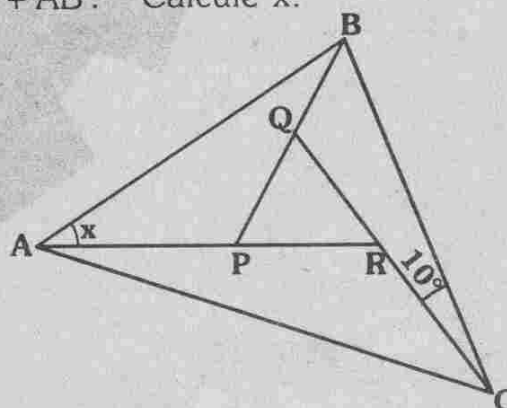
En un triángulo dos de sus lados miden $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$, el ángulo entre ellos mide $18^\circ 30'$. Calcule la medida del ángulo opuestos al lado que mide $\sqrt{2}$.

- A) $26^\circ 30'$ B) 30° C) 45°
 D) $18^\circ 30'$ E) 37°

PROBLEMA N° 217

En el gráfico, el triángulo PQR es equilátero. Si $PQ = QB = PA$ y $RC = PQ + AB$. Calcule x.

- A) 20°
 B) 30°
 C) 40°
 D) 50°
 E) 60°

**PROBLEMA N° 218**

Se tiene el ángulo AOB, se traza la bisectriz OP, tal que $AP = AB$ y $m\angle APB = 60^\circ$. ¿Qué tipo de triángulo es APB?

- A) Isósceles B) Equilátero
 C) Rectángulo D) Escaleno
 E) Obtusángulo

PROBLEMA N° 219

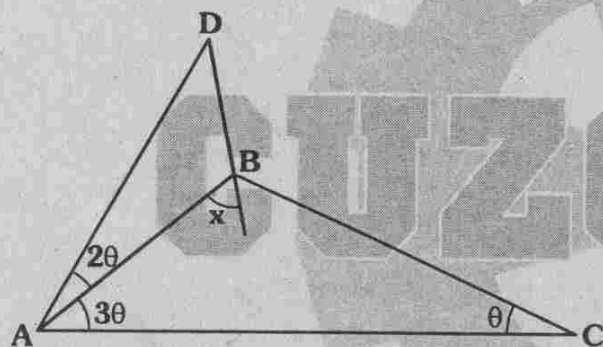
En el triángulo ABC, se ubica S en la región interior y M es punto medio de $\overline{BC}$, si, $m\angle BAS = 40^\circ$; $m\angle SAC = 30^\circ$, $m\angle ASB = 90^\circ$ y $m\angle SBC = 20^\circ$.

Calcule $m\angle SMB$.

- A) 60° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA N° 220

En el gráfico, $BC = AB + AD$.
Calcule x en función de θ .



- A) 40 B) $\frac{5}{2}\theta$ C) 30
D) $\frac{9}{2}\theta$ E) $\frac{7}{2}\theta$

PROBLEMA N° 221

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, luego en $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que: $AB = PC$, $AP = QC$ y $m\angle BAP = m\angle BPQ$.

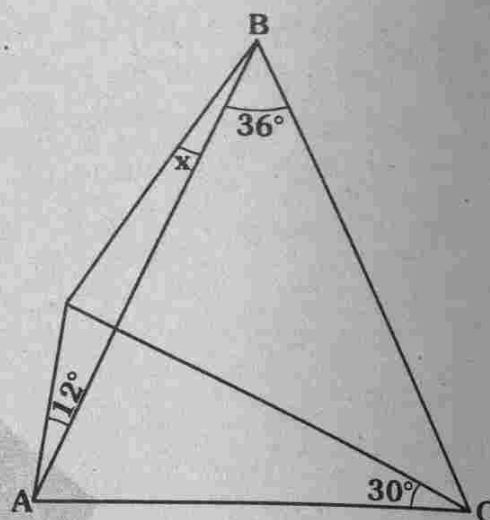
Calcule $\frac{m\angle ABP}{m\angle PBQ}$.

- A) $1/2$ B) 1 C) $2/3$
D) $2/5$ E) $3/4$

PROBLEMA N° 222

En el gráfico, $AB = BC$.

Calcule x.



- A) 6°
B) 10°
C) 12°
D) 8°
E) 18°

PROBLEMA N° 223

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\angle BAC = 90^\circ - 6\theta \quad \text{y}$$

$$m\angle ABC = 90^\circ + 2\theta$$

se ubica P en la región interior tal que $AB = AP$, $m\angle APC = 60^\circ + x$,

$m\angle BCP = m\angle PCA$. Calcule x.

- A) 70° B) 80° C) 90°
D) 50° E) 100°

PROBLEMA N° 224

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica P tal que $AB = AC = PC$; $m\angle BPC = 40^\circ$ y $m\angle BCP = 30^\circ$.

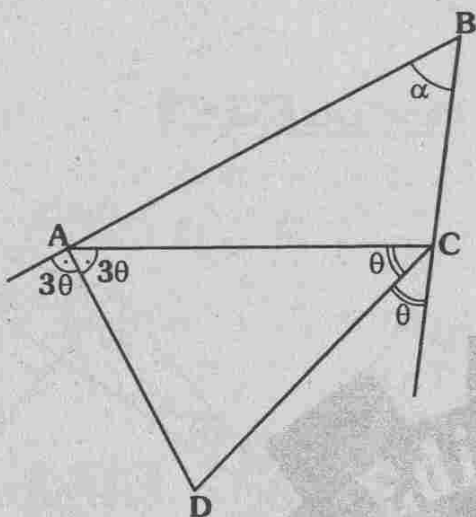
Calcule $m\angle PCA$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA N° 225

En el gráfico, $\alpha < 60^\circ$ y $CD = 38$. Calcule la mayor distancia entera del punto D a $\overline{AC}$.

- A) 13
B) 20
C) 19
D) 24
E) 18

**PROBLEMA N° 226**

Se tiene el triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en donde $m\angle ABC = 30^\circ$, se traza la ceviana interior $\overline{CQ}$ tal que $AC = \sqrt{2}(BQ)$. Calcule $m\angle BCQ$.

- A) 15° B) 16° C) 30°
D) $\frac{37^\circ}{2}$ E) $\frac{53^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 227

En la región interior del triángulo ABC se ubica P, tal que $m\angle PAC = 48^\circ$; $m\angle PCA = 18^\circ$; $m\angle APB = 120^\circ$ y $AC = BP$.

Calcule $m\angle PBC$.

- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 24° E) 36°

PROBLEMA N° 228

En el triángulo ABC se traza la bisectriz

interior AM y la ceviana BN. Si: $MN = 4$; $m\angle AMN = 22^\circ$; $m\angle AMB = 37^\circ$ y $m\angle BAC = 16^\circ$.

Calcule MB.

- A) 2 B) $3\sqrt{3}$ C) 3
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 229

En la región interior del triángulo acutángulo ABC se ubica P, tal que $PA + PB + PC$ es mínimo.

Calcule $m\angle CPB$.

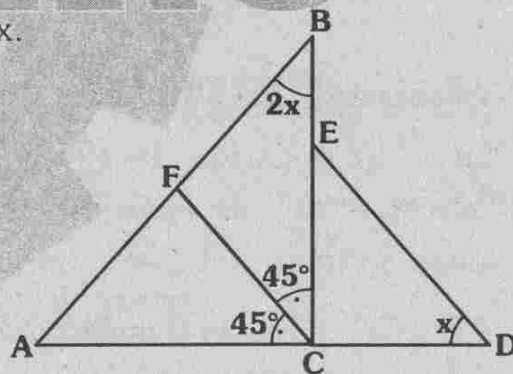
- A) 90° B) 75° C) 120°
D) 135° E) 127°

PROBLEMA N° 230

En el gráfico, $FB = ED$ y $BE = CD$.

Calcule x.

- A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 60°
E) 53°

**PROBLEMA N° 231**

En la región exterior del triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) y relativo a $\overline{BC}$ se ubica D de modo que $AD = AC$, $m\angle ADB = 90^\circ$ y $m\angle ABC = 2(m\angle BAD)$.

Calcule $m\angle DCB$.

- A) 8° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 20°

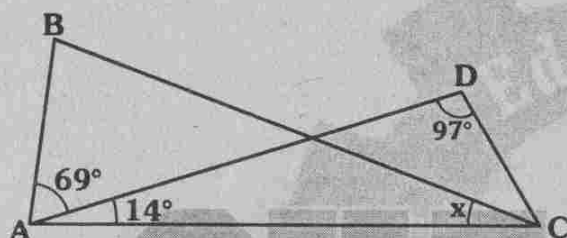
PROBLEMA N° 232

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, luego se traza MH perpendicular a $\overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$). Si $BC = 2(BM)$ y $2(MC) = 5(MH)$. Calcule $m\angle AMB$

- A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 233

En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x



- A) 30° B) 14° C) 28°
D) 36° E) 20°

PROBLEMA N° 234

En la prolongación de $\overline{CB}$ del triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$). Si $AE = QC$ (Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$). Calcule $m\angle ABE$.

- A) 80° B) 90° C) 120°
D) 45° E) 75°

PROBLEMA N° 235

En el triángulo ABC se cumple $AC = 2(BC)$, se traza la bisectriz interior CF y la ceviana interior $\overline{BL}$ del triángulo FBC. Si $m\angle BAC = m\angle LBC$.

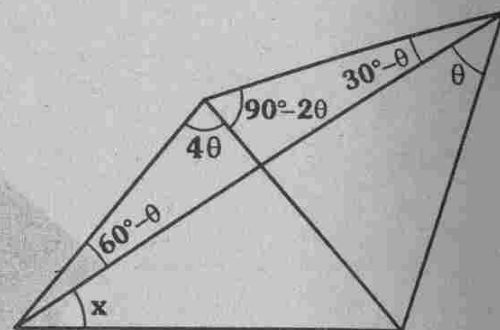
Calcule $\frac{LC}{FL}$

- A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) 2
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

PROBLEMA N° 236

Del gráfico, calcule x.

- A) 60°
B) 53°
C) 37°
D) 45°
E) 30°



PROBLEMA N° 237

En el triángulo ABC se cumple $m\angle ACB = 29^\circ$ y $\frac{AB}{BC} = 0,68$.

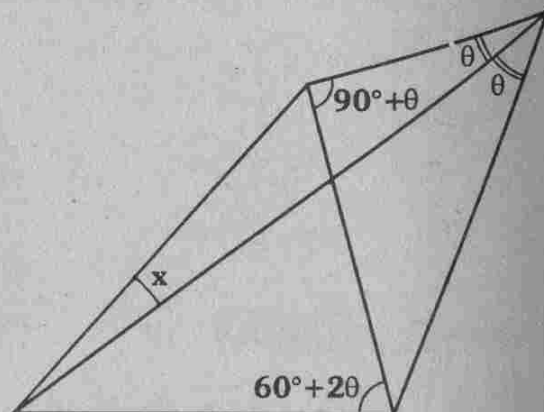
Calcule $m\angle BAC$.

- A) 30° B) 31° C) 45°
D) 46° E) 52°

PROBLEMA N° 238

Del gráfico, calcule el mayor valor entero de x.

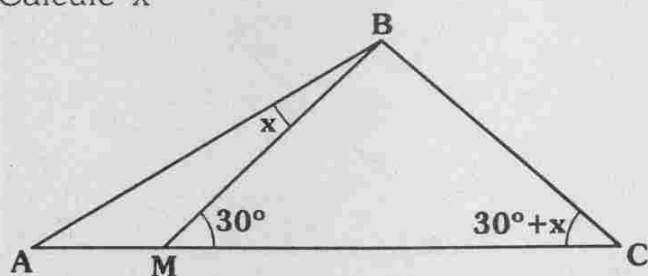
- A) 24°
B) 27°
C) 29°
D) 44°
E) 36°



PROBLEMA N° 239

En el gráfico, $AB=MC$.

Calcule x



- A) 5° B) 10° C) 20°
 D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 240

Se tiene el triángulo rectángulo ABC ($AB=BC$), se ubica P en el región interior del triángulo. Si $m\angle PBA = 5x$, $m\angle PAC = 2x$ y $m\angle PCB = 3x$.

Calcule x .

- A) 10° B) 9° C) 5°
 D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 241

En la región interior del triángulo ABC se ubica P tal que $AB=AP$, $m\angle PBC = 18^\circ 30'$; $m\angle BAP = 37^\circ$ y $m\angle PAC = 8^\circ$. Calcule $m\angle PCB$

- A) 8° B) 15° C) 30°
 D) $22^\circ 30'$ E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N° 242

En el triángulo ABC, se ubica P en la región interior tal que:

$$m\angle BAP = m\angle PAC = 14^\circ \quad y$$

$$m\angle PCB = 2(m\angle PCA) = 32^\circ$$

Calcule $m\angle ABP$.

- A) 18° B) 30° C) 37°
 D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 243

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM. Si $m\angle ACB = 30^\circ$ y $m\angle BAM = 2(m\angle MAC)$.

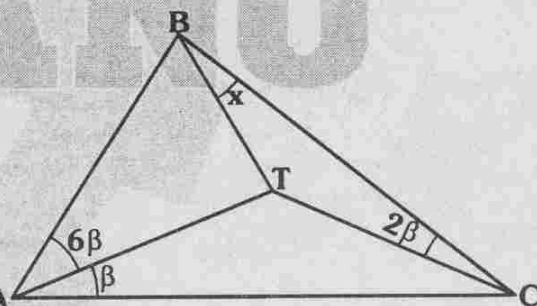
Calcule $m\angle CAM$.

- A) 15° B) $22,5^\circ$ C) 18°
 D) 16° E) 14°

PROBLEMA N° 244

En el gráfico, $AB=AT=TC$. Calcule x .

- A) 10°
 B) 15°
 C) 12°
 D) 8°
 E) 20°

**PROBLEMA N° 245**

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AQ}$ y $\overline{PQ}$ tal que:

$$m\angle BAQ = 3(m\angle QAC) = 3(m\angle PCA) \\ = 3(m\angle PCB) = 60^\circ$$

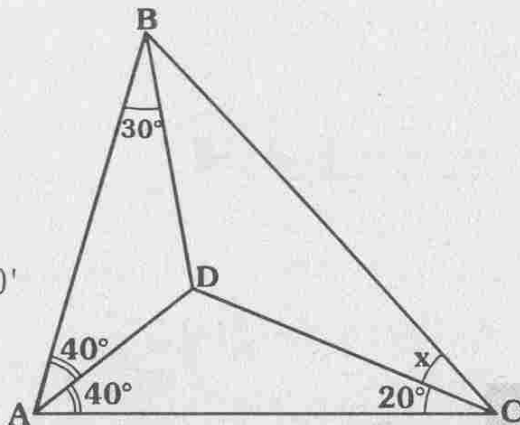
entonces:

- A) $AQ = CP$ B) $PB = CQ$
 C) $AQ > CP$ D) $AB = CP$
 E) $AQ = BC$

PROBLEMA N° 246

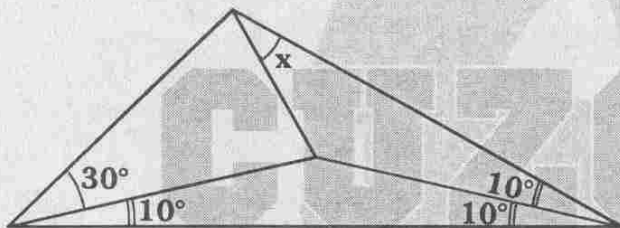
En el gráfico, calcule x .

- A) 10°
- B) 15°
- C) 30°
- D) 20°
- E) $22^\circ 30'$



PROBLEMA N° 247

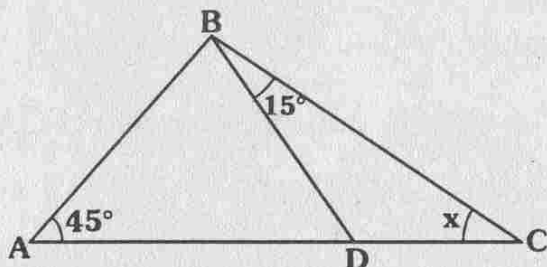
Del gráfico, calcule x .



- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 40°
- E) 50°

PROBLEMA N° 248

En el gráfico, $AD=BC$, calcule x .

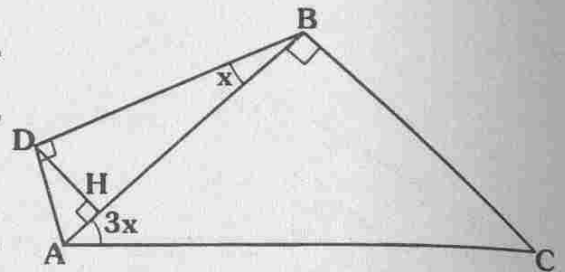


- A) 10°
- B) 15°
- C) 30°
- D) $\frac{53^\circ}{2}$
- E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 249

En el gráfico, $BC = 4(HD)$, calcule x .

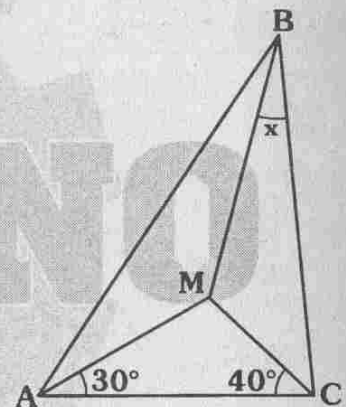
- A) 10°
- B) 15°
- C) 12°
- D) 6°
- E) 18°



PROBLEMA N° 250

En el gráfico, $BM = AC$ y $AB = MC + MB$

- A) 10°
- B) 20°
- C) 30°
- D) 40°
- E) 60°



PROBLEMA N° 251

En el triángulo ABC se traza la mediana BM.

Si: $m\angle BAC = 45^\circ$ y

$$m\angle MBC = 90^\circ - 2(m\angle ACB)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 18°
- B) 20°
- C) $26,5^\circ$
- D) 30°
- E) $18,5^\circ$

PROBLEMA N° 252

En el triángulo ABC, se ubica E y D en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $m\angle BAC = 2(m\angle ACB)$, $ED = DC$ y

$$AB = AD = EC.$$

Calcule $m\angle ACB$.

A) 10° B) 20° C) 15°

D) 30° E) 36°

PROBLEMA N° 253

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BP, tal que $m\angle BPC = 60^\circ$ y $AB = BP + PC$.

Calcule $m\angle BAC$.

A) 15° B) 30° C) $45^\circ/2$

D) 20° E) 40°

PROBLEMA N° 254

Demostrar que en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 44 y 117 sus ángulos agudos miden 21° y 69° .

PROBLEMA N° 255

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ tal que $m\angle BAC = 2(m\angle CAD)$, $m\angle ADC = 90^\circ$ y la altura $\overline{DH}$ del triángulo ADC mide 4. Calcule BC.

A) 4 B) 2 C) 6

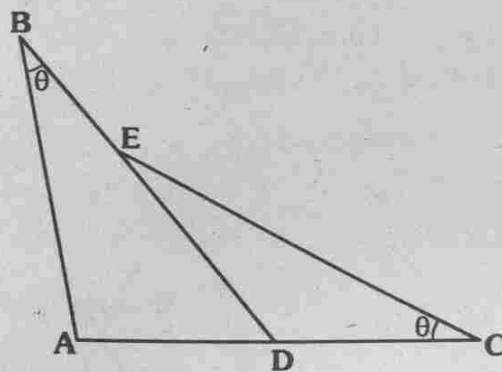
D) 8 E) 12

PROBLEMA N° 256

En el gráfico, $AB = EC$ y $AD = 5$.

Calcule ED.

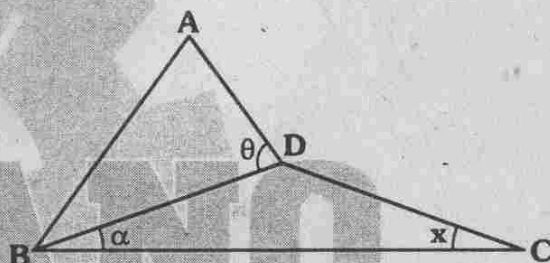
- A) 6
B) 2,5
C) 5
D) 10
E) 7,5



PROBLEMA N° 257

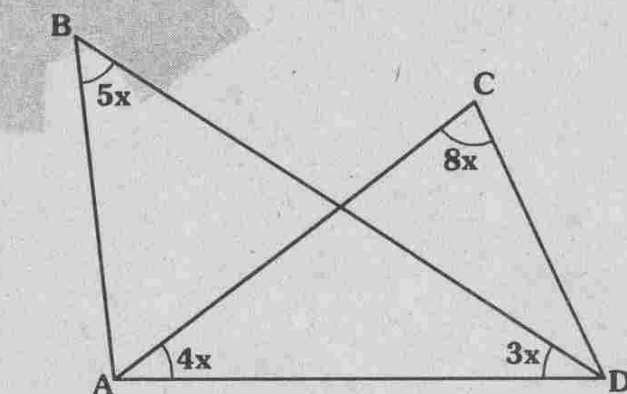
En el gráfico, $AB = BD$, $AD = DC$ y $\theta + \alpha = 3x$. Calcule x

- A) 37°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 30°



PROBLEMA N° 258

En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x

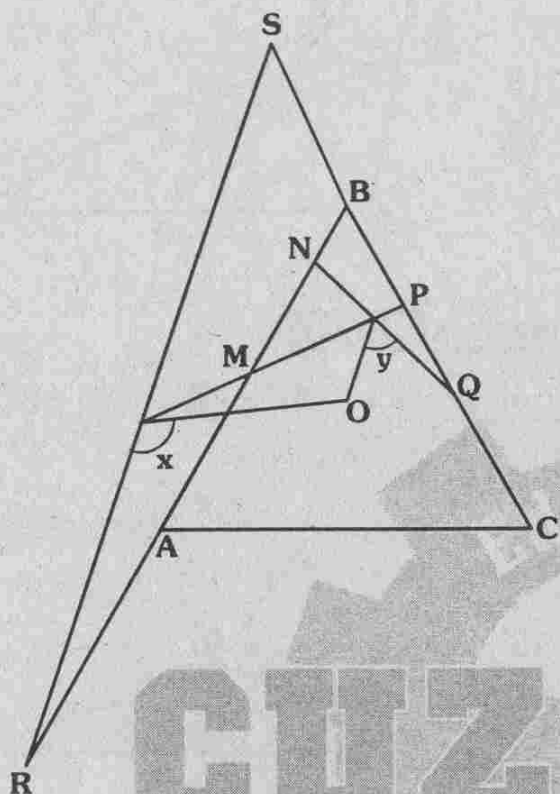


- A) 5° B) 8° C) 10°
D) $7,5^\circ$ E) 15°

PROBLEMA N° 259

En el gráfico el triángulo ABC es equilátero

de centro O . Si $AR=SB$, $AM=BP$ y $MN=PQ$. Calcule $x+y$.



- A) 90° B) 180° C) 120°
D) 135° E) 136°

PROBLEMA N° 260

Se tienen 64 triángulos congruentes (regiones triangulares) de cartulina los cuales tienen perímetro " P ", se desea formar con todos ellos un nuevo triángulo de las mismas medidas angulares.

Indique el perímetro del nuevo triángulo.

- A) $12P$ B) $24P$ C) $32P$
D) $8P$ E) $64P$



Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente de igual medida, entonces son congruentes.
- II. Si dos triángulos que tienen sus lados de igual longitud respectivamente son congruentes.
- III. Se tienen los triángulos ABC y MNL, si $AB = MN$, $m\angle BAC = m\angle NML$ y $m\angle ACB = m\angle NLM$, entonces son congruentes.

- A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) FVF

PROBLEMA N° 262

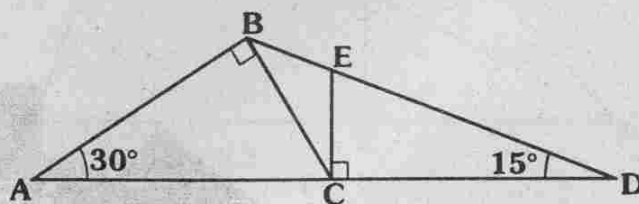
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos triángulos equiláteros tienen igual perímetro, son congruentes.
- II. Dos triángulos isósceles tienen igual base y un ángulo de igual medida, son congruentes.
- III. Dos triángulos rectángulos tienen un lado en común y un ángulo agudo son congruentes.

- A) VFV B) VFF C) FFV
D) VVV E) FVF

PROBLEMA N° 263

En el gráfico, calcule $\frac{ED}{AB}$



- A) 1 B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA N° 264

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E en $\overline{BC}$, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$), Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$, si $AE = QC$.

Calcule $m\angle ABE$.

- A) 80° B) 90° C) 110°
D) 100° E) 79°

PROBLEMA N° 265

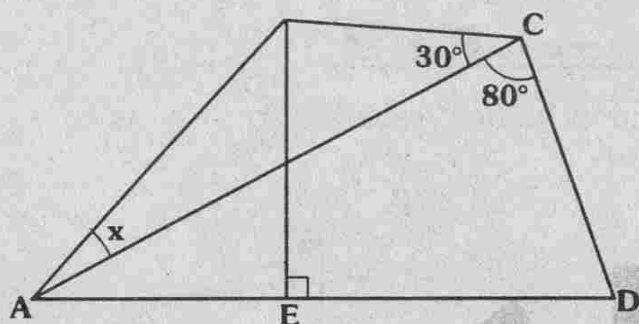
En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que $m\angle BAC = 2\alpha$; $m\angle ACB = \alpha$; $m\angle ABM = 90^\circ + \alpha$ y $AM = BC$. Calcule α .

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 25°

PROBLEMA N° 266

En el gráfico, $AC = AD$ y $AE = ED$.

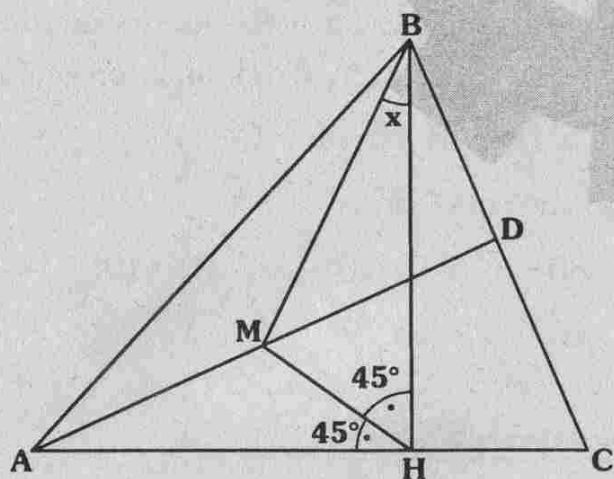
Calcule x .



- A) 50° B) 30° C) 40°
D) 20° E) 55°

PROBLEMA N° 267

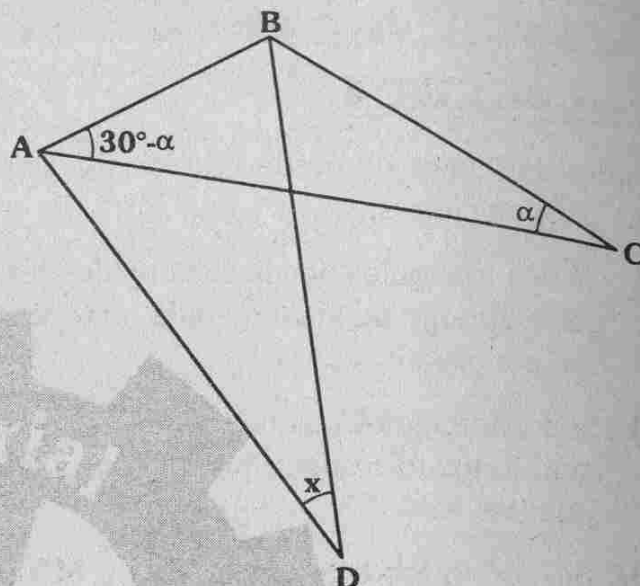
Según el gráfico, $BD = DC$ y $AM = MD$, calcule x .



- A) 30° B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) 16°
D) 8° E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 268

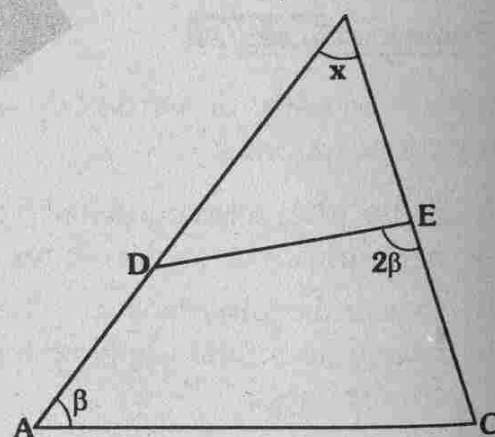
En el gráfico, calcule x en función de α si $AD = DB = AC$.



- A) α B) 2α C) 3α
D) $45^\circ - \alpha$ E) $60^\circ - \alpha$

PROBLEMA N° 269

Del gráfico, $AD = DE = EC$, calcule x .



PROBLEMA N° 270

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se ubican los puntos R y M en $\overline{AC}$, si $AR = RM = MC$ y $m\angle RBM = 2(m\angle ACB)$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 18° B) 36° C) 30°
D) 45° E) 54°

PROBLEMA N° 271

En el triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que $BC = CD$;

$$m\angle BCD = 90^\circ - 7(m\angle DCA) \quad \text{y}$$

$$m\angle BAD = m\angle DAC = 2(m\angle DCA)$$

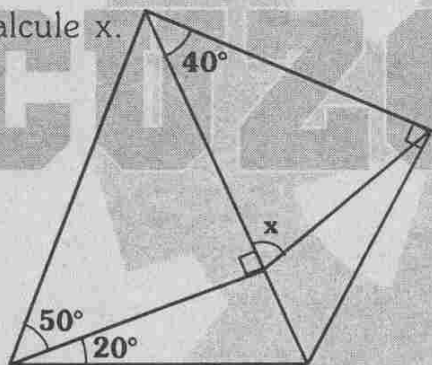
Calcule $m\angle ABC$.

- A) 70° B) 90° C) 80°
D) 100° E) 110°

PROBLEMA N° 272

Del gráfico, calcule x.

- A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 75°
E) 85°

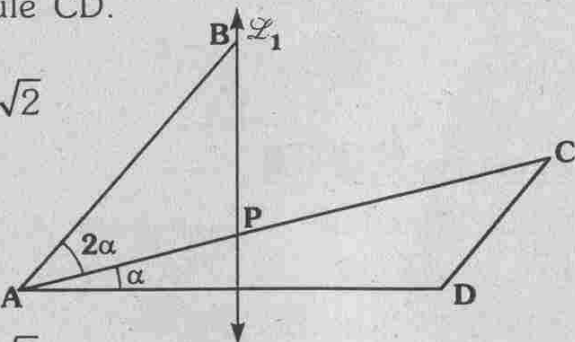


PROBLEMA N° 273

Del gráfico, $\overline{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$; $AB = PC$ y $BP = 6$.

Calcule CD.

- A) $3\sqrt{2}$
B) 6
C) 3
D) $2\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{2}$

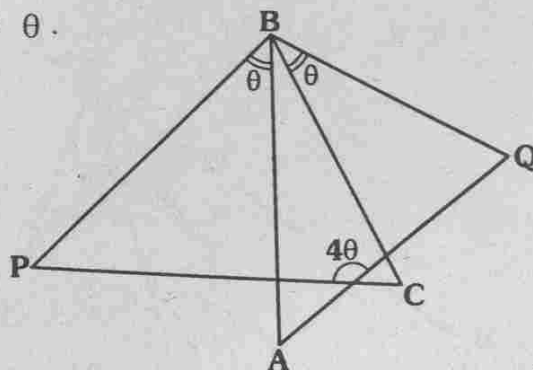


PROBLEMA N° 274

Del gráfico $PB = AB$ y $BQ = BC$.

Calcule θ .

- A) 30°
B) 10°
C) 36°
D) 45°
E) 20°



PROBLEMA N° 275

En el triángulo ABC recto en B, exterior y relativo al lado BC se ubica el punto D, tal que $m\angle BDC = 90^\circ - m\angle BAC$; además $AC = CD$, $AB = 3$.

Calcule la distancia de C hasta $\overline{BD}$.

- A) 4 B) 6 C) 9
D) 3 E) 2

PROBLEMA N° 276

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la altura $\overline{AH}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica el punto Q, tal que:

$$m\angle ABC = m\angle CBQ \quad ; \quad m\angle BQC = 90^\circ$$

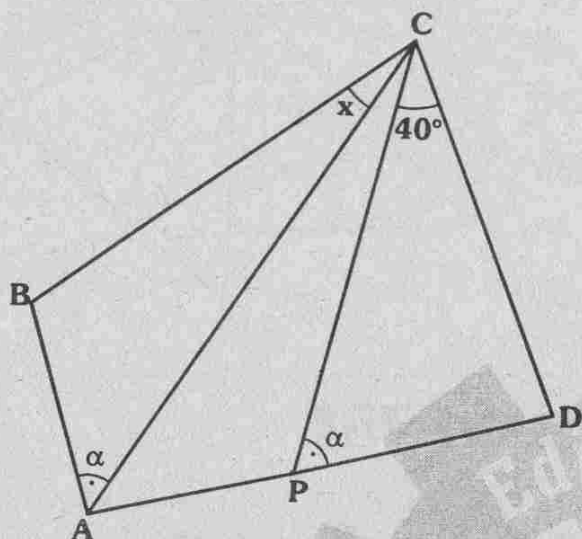
Calcule $\frac{m\angle HAC}{m\angle HQC}$

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA N° 277

Del gráfico, $AB = PD$ y $AC = PC + CD$.

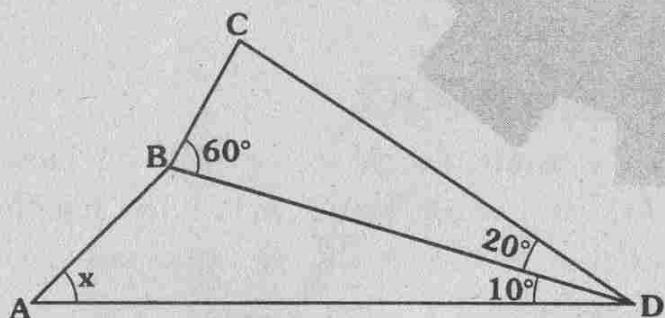
Calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA N° 278

En el gráfico, $AB = BC$. Calcule x .

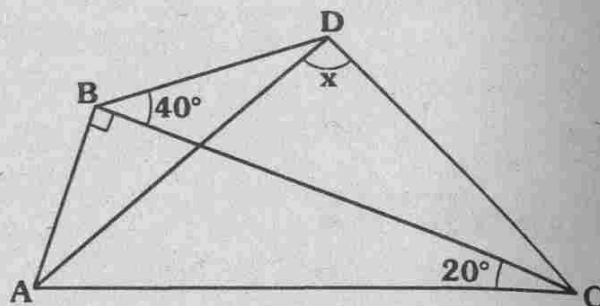


- A) 30° B) 15° C) $\frac{53^\circ}{2}$
D) 37° E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 279

En el gráfico, $AC = 2(BD)$.

Calcule x .



- A) 40° B) 80° C) 60°
D) 90° E) 120°

PROBLEMA N° 280

En el triángulo ABC se traza la altura BH tal que $HC = 3(AH)$,

Si: $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 15° B) 20° C) 10°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA N° 281

En un triángulo isósceles ABC de base AC se traza la bisectriz interior BD en la cual se ubica el punto E de tal modo que $BE = 4(AC) = 8$, si M y N son puntos medios de AB y CE respectivamente.

Calcule MN.

- A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{17}$ C) 4
D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMA N° 282

En un triángulo ABC se traza la altura BH ($H \in AC$), si $HC = 4(AH)$ y $m\angle ABH = 2(m\angle BCA)$.

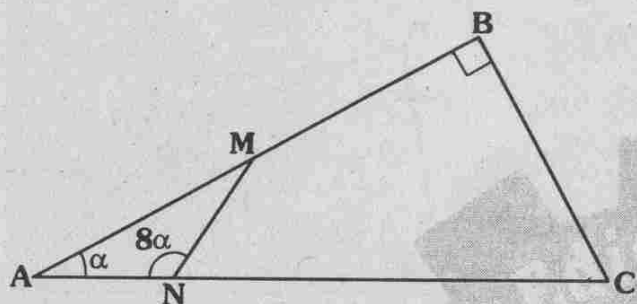
Calcule $m\angle BAC$.

- A) 53° B) 30° C) 14°
 D) 37° E) 75°

PROBLEMA N° 283

Del gráfico, $AM = MB$ y $NC = 3(AN)$.

Calcule, α .



- A) 10° B) 12° C) 15°
 D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 284

Del gráfico $AB = PC$, $BM = MP$ y $AN = NC$. Calcule x

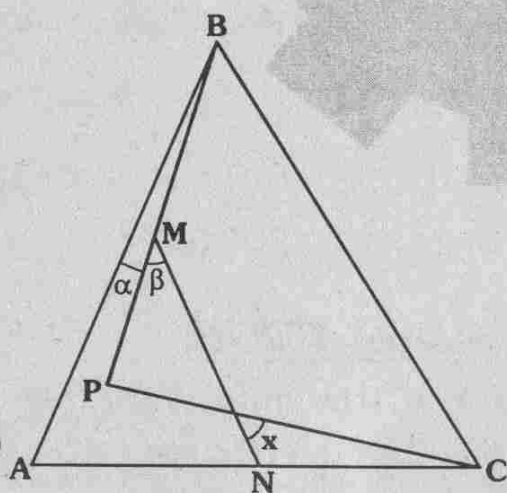
A) $\frac{\beta + \alpha}{2}$

B) $\beta - \alpha$

C) $\frac{\beta - \alpha}{2}$

D) $\alpha + \beta$

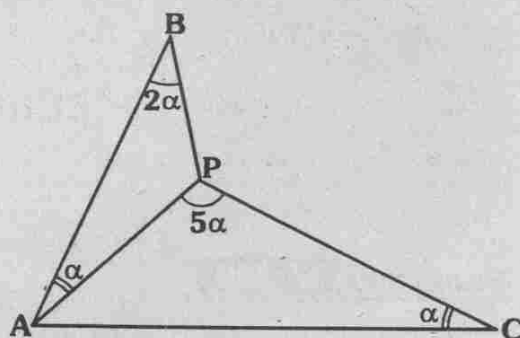
E) $2\alpha + \beta$

**PROBLEMA N° 285**

Del gráfico, $AB = PC$, $AC = 16$.

Calcule AP.

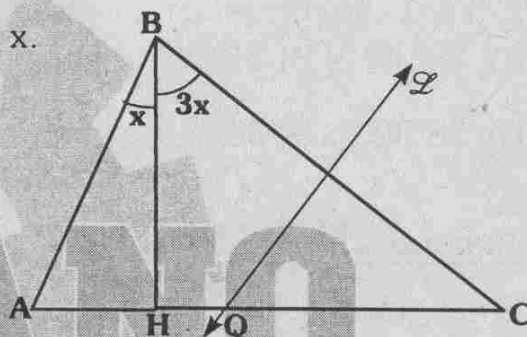
- ❖ A) 4
 ❖ B) 8
 ❖ C) 12
 ❖ D) 10
 ❖ E) 16

**PROBLEMA N° 286**

En el gráfico, $AH = HQ$; $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$.

Calcule x .

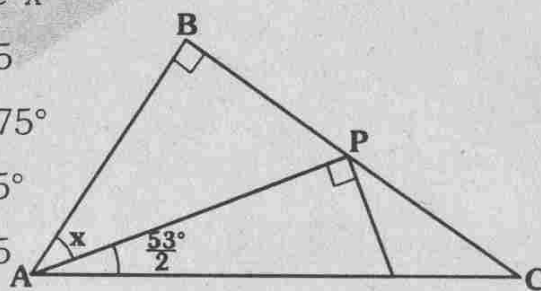
- A) 15°
 B) 20°
 C) 18°
 D) 16°
 E) $18,5^\circ$

**PROBLEMA N° 287**

En el gráfico, $AB = PC$.

Calcule x

- A) 63,5
 B) 31,75°
 C) $18,5^\circ$
 D) 71,5
 E) $26,5^\circ$

**PROBLEMA N° 288**

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $AD = BC$ y

$$\frac{m\angle BAC}{6} = \frac{m\angle ABD}{7} = m\angle DBC$$

Calcule $m\angle DBC$.

- A) 8° B) 9° C) 10°
D) 11° E) 12°

PROBLEMA N° 289

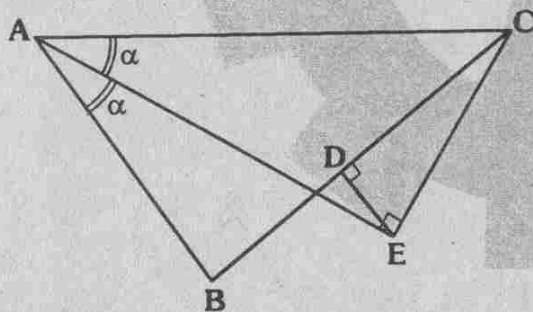
En el triángulo rectángulo ABC recto en B, $m\angle BAC = 53^\circ$ en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos R, P y M tal que $\overline{PM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ y $AR = AM = MC$. Calcule $m\angle MRP$.

- A) $28^\circ 30'$ B) 53° C) $40^\circ 30'$
D) $38^\circ 30'$ E) 30°

PROBLEMA N° 290

En el gráfico, $AC = 12$, $ED = 2$. Calcule AB.

- A) 7
B) 8
C) 6
D) 5
E) 4



PROBLEMA N° 291

Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{AC}$ y P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ tal que los triángulos ABC y QPC sean congruentes si:

$$m\angle ABC = 4(m\angle BCA) = 4(m\angle QPC) = 80^\circ$$

Calcule $m\angle BQP$.

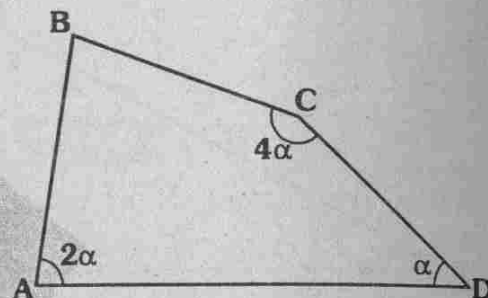
- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 292

En el gráfico, $AB = BC = CD$.

Calcule α .

- A) 20°
B) 60°
C) 30°
D) 50°
E) 40°



PROBLEMA N° 293

En el triángulo ABC donde $AB = 4$, $BC = 7$ y $AC = 9$, se ubica P en la bisectriz del ángulo exterior en B; P y Q están en la región exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ y

$$m\angle APC = m\angle BQC = 90^\circ$$

Calcule PQ.

- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

PROBLEMA N° 294

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, $AC = AB + MC$ y $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$.

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 25° B) 68° C) $\frac{720^\circ}{7}$
D) 35° E) 48°

PROBLEMA N° 295

Del gráfico, calcule x .

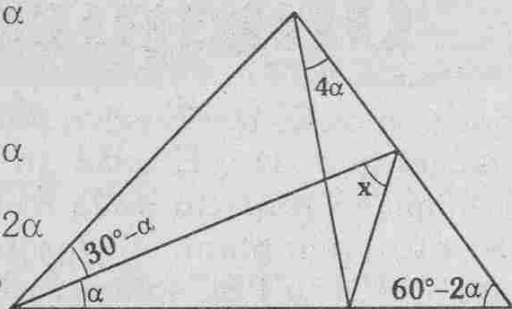
A) $30^\circ - \alpha$

B) 30°

C) $45^\circ - \alpha$

D) $60^\circ - 2\alpha$

E) $22,5^\circ$

**PROBLEMA N° 296**

En el triángulo ABC se traza la mediana BF, si se cumple que:

$$AF = AB \quad \text{y} \quad m\angle FBC = 14^\circ$$

Calcule $m\angle BAC$.

A) 105°

B) 106°

C) 120°

D) 90°

E) 108°

PROBLEMA N° 297

En el triángulo ABC se cumple:

$$m\angle BAC = 23^\circ \quad \text{y} \quad 5(AC) = 8(AB)$$

Calcule $m\angle ACB$.

A) 22°

B) 30°

C) 37°

D) 45°

E) 67°

PROBLEMA N° 298

Se tiene el triángulo ABC, en los lados BC y AC se ubican los puntos M y N respectivamente.

Si: $BM = MC$, $NC = AB + AN$ y

$$m\angle ABC + m\angle BCA = 120^\circ$$

Calcule $m\angle MNC$.

A) 20°

B) 30°

C) 40°

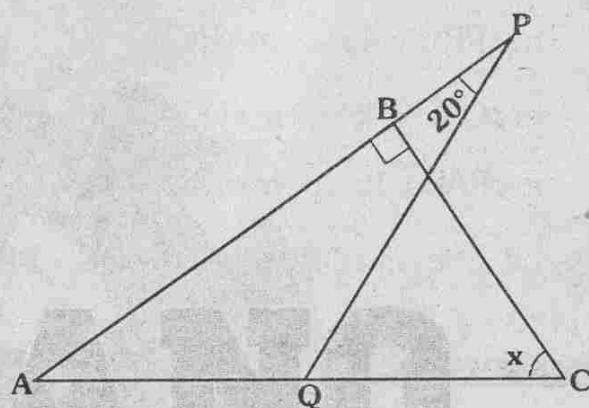
D) 15°

E) 50°

PROBLEMA N° 299

En el gráfico, $AQ = QC = BP$.

Calcule x .



A) 20°

B) 40°

C) 50°

D) 60°

E) 70°

PROBLEMA N° 300

Dado el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y en la región exteriorrelativa a $\overline{AC}$ se ubican los puntos D y E respectivamente de modo que el triángulo DCE es equilátero.

Si $AD = BC$, $m\angle BCA = 60^\circ$ y $EB = a$.

Calcule AB.

A) a

B) $\frac{a}{2}$

C) $\frac{3a}{2}$

D) $\frac{5a}{4}$

E) $2a$



Problemas Propuestos

Oímpicos

PROBLEMA N°1

[17° - IMO]

Dado cualquier triángulo ABC, se construye los triángulos exteriores ABR, BCP y CAQ sobre los lados de modo que:

$$m\angle PBC = 45^\circ, \quad m\angle PCB = 30^\circ,$$

$$m\angle QAC = 45^\circ, \quad m\angle QCA = 30^\circ,$$

$$m\angle RAB = 15^\circ \text{ y } m\angle RBA = 15^\circ,$$

pruebe que $m\angle QRP = 90^\circ$ y $QR = RP$.

PROBLEMA N°2

En una recta se ubican los puntos A y B, tal que $AB = 2a$. Tomando como base este segmento se construye los triángulos isósceles ACB, AC'B y AC''B siendo las longitudes de sus respectivas alturas a , $2a$ y $3a$ respectivamente y relativas a $\overline{AB}$. Demuestre que las medidas de los ángulos de vértices C, C' y C'' suman 180° .

PROBLEMA N°3

En triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Demostrar que existe el triángulo cuyas longitudes de los lados son AQ, CP y PQ.

PROBLEMA N°4

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, P y B, luego se ubican

los puntos C, D y E exteriores a la recta, tal que D y E están en el mismo semiplano respecto de la recta y C en el otro semiplano. Si los triángulos ACB, ADP y PBE son isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ respectivamente. Si: $m\angle ACB = m\angle ADP = m\angle PEB = 120^\circ$. Demuestre que el triángulo CDE es equilátero.

PROBLEMA N°5

En el triángulo ABC se consideran los puntos A', B' y C' en el interior de los lados BC, CA y AB, respectivamente tales que:

$$m\angle AC'B' = m\angle B'A'C$$

$$m\angle CB'A' = m\angle A'C'B$$

$$\text{y } m\angle BA'C' = m\angle C'B'A$$

Demuestre que A', B' y C' son puntos medios de los lados correspondientes.

PROBLEMA N°6

[42° - IMO 2001]

ABC es un triángulo, X está situado en $\overline{BC}$ y $\overline{AX}$ biseca al ángulo A. Y está situado en $\overline{CA}$ y $\overline{BY}$ biseca al ángulo B. El ángulo en A mide 60° . $AB + BX = AY + YB$.

Halle todos los valores posibles para el ángulo en B.

PROBLEMA N°7

ABC es un triángulo acutángulo, O es su circuncentro, P es el pie de la perpendicular de A a $\overline{BC}$.

Si: $m\angle BCA \geq m\angle ABC + 30^\circ$.

Pruebe que: $m\angle CAB + m\angle COP < 30^\circ$.

PROBLEMA N°8

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica D en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$\overline{DQ} \perp \overline{AC}, \quad m\angle ADQ = 2(m\angle BAD)$$

$$\text{y } 2(AB) = AD + 2(DQ)$$

Calcule $m\angle BAD$.

PROBLEMA N°9

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC, tal que $PA = 5$; $PB = 7$ y $PC = 8$. Halle la longitud del lado del triángulo.

PROBLEMA N°10

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle ABC = 90^\circ$ y $AB = BC$. Se ubica D en el interior de dicho triángulo tal que:

$$AB = DC \quad \text{y} \quad m\angle DAC = m\angle DCB$$

Calcule $m\angle DAC$.

PROBLEMA N°11

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos

equiláteros ABM y CDP luego trazamos interiormente los triángulos equiláteros BCN y DAQ. Demostrar que el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

PROBLEMA N°12

Sea ABC un triángulo, con $m\angle ABC = 45^\circ$, desde A se traza el segmento AD (con D en $\overline{BC}$) de forma que $DC = 2(BD)$ y $m\angle BAD = 15^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

PROBLEMA N°13

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se traza la bisectriz interior AM (M en $\overline{BC}$), si $AC = BM + AM$. Calcule $m\angle BAM$.

PROBLEMA N°14 (2008- Olimpiada Rioplatense)

Sea ABC un triángulo obtusángulo en C tal que $2\hat{BAC} = \hat{ABC}$. Sea P un punto sobre el lado AB tal que $BP = 2BC$. Sea M punto medio de AB (M está entre P y B). Probar que la perpendicular al lado AC, trazada por M, corta a PC en su punto medio.

PROBLEMA N°15

Se tiene el hexágono convexo ABCDEF tal que:

$$AB = DE, \quad BC = FE \quad \text{y} \quad CD = AF$$

Si $m\angle BAF + m\angle BCD + m\angle FED = 360^\circ$.

Demostrar que los ángulos opuestos en el hexágono son congruentes.



ANEXOS

CONGRUENCIA DE FIGURAS

Tratemos de acercarnos a la definición, analicemos primero el caso de los polígonos.

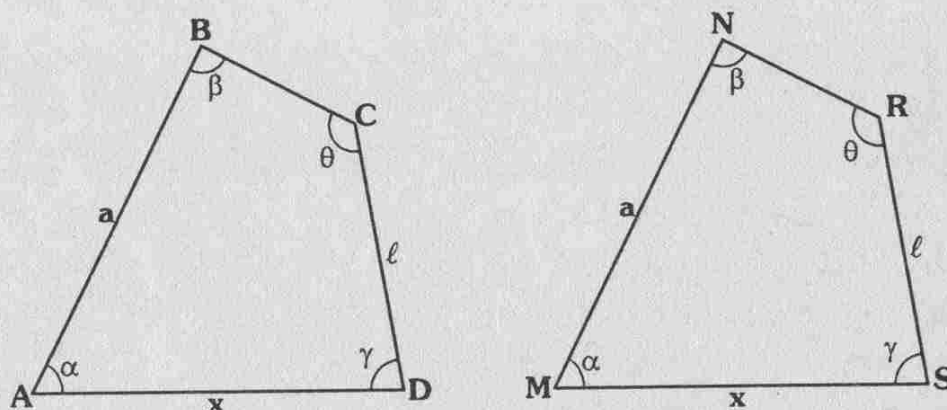
Dos polígonos $P_1P_2P_3\dots P_n$ y $Q_1Q_2Q_3\dots Q_n$ son congruentes si:

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 ; P_2P_3 = Q_2Q_3 ; \dots\dots\dots ; P_nP_1 = Q_nQ_1$$

y

$$m\hat{P}_1 = m\hat{Q}_2 ; \dots\dots\dots ; m\hat{P}_n = m\hat{Q}_n$$

Ejemplo:



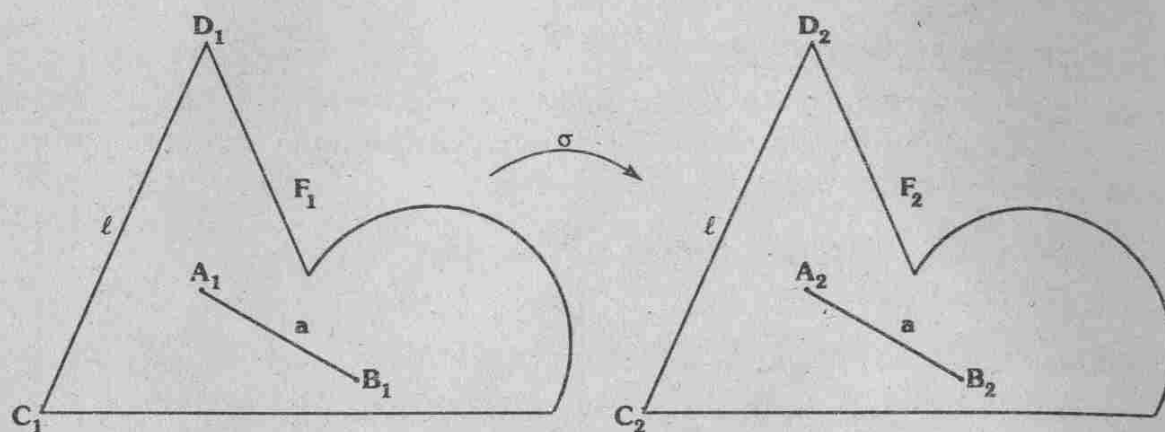
En el gráfico : $\triangle ABCD \cong \triangle MNRS$

No es difícil referirse a la congruencia de polígonos con elementos geométricos, en cambio para referirnos a la congruencia de figuras en general es necesario algunos conceptos del cálculo superior.

DEFINICIÓN DE FIGURAS CONGRUENTES

Sean F_1 y F_2 dos figuras, del plano o del espacio. Se dice que F_1 y F_2 son congruentes, cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma : F_1 \rightarrow F_2$, entre los puntos de F_1 y los puntos de F_2 , con la siguiente propiedad:

Si A_1 y B_1 son puntos arbitrarios de F_1 y $\sigma(A_1) = A_2$, $\sigma(B_1) = B_2$ son sus correspondientes en F_2 , entonces $A_1B_1 = A_2B_2$



La correspondencia biyectiva de $\sigma: F_1 \rightarrow F_2$ con la propiedad señalada, se llama congruencia entre F_1 , pues $\sigma: F_1 \rightarrow F_2$, la función inversa $\sigma^{-1}: F_2 \rightarrow F_1$ también es una congruencia.

ACERCA DE LA DISTANCIA

Axioma de distancia :

A cada par de puntos le corresponde un único número real no negativo.

Definición :

La distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el axioma de la distancia. Si los puntos son P y Q, entonces indicaremos la distancia por PQ.

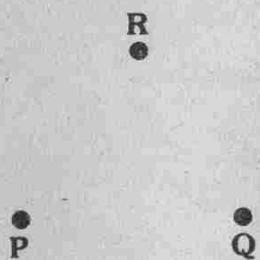
Admitimos la posibilidad de que $P=Q$, es decir de que P y Q sean el mismo punto, en este caso, $PQ=0$.

La distancia se define en relación a un par de puntos y no depende del orden, en consecuencia: $PQ=QP$.

En diversos problemas, se utilizan distintas unidades como centímetros, pies, pulgada, etc. todos los teoremas serán aplicables a cualquiera de estas unidades, siempre que se utilice sólo una unidad cada vez que se apliquen un teorema (no podemos cambiar las unidades en medio de un teorema).

Propiedades:

Sean P, Q y R tres puntos cualesquiera:

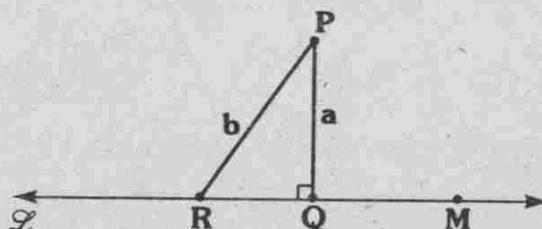


Se cumple:

- a) $PQ > 0$, si $P \neq Q$
- b) $P=0$, si $P=Q$
- c) $PQ = QP$
- d) $PQ \leq PR + RQ$

Distancia entre una recta y un punto :

La distancia entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma recta se define como cero.



Denotemos: $d_{(P, \mathcal{L})}$, distancia entre P y $\mathcal{L}$ en el gráfico:

$$P \notin \mathcal{L} \Rightarrow d_{(P; \mathcal{L})} = a > 0$$

$$M \in \mathcal{L} \Rightarrow d_{(M; \mathcal{L})} = 0$$

Teorema :

El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular.

O de otro modo: se dan una recta $\mathcal{L}$ y un punto P fuera de ella, si $PQ \perp \mathcal{L}$, ($Q \in \mathcal{L}$) y R es otro punto de $\mathcal{L}$, entonces $PQ < PR$

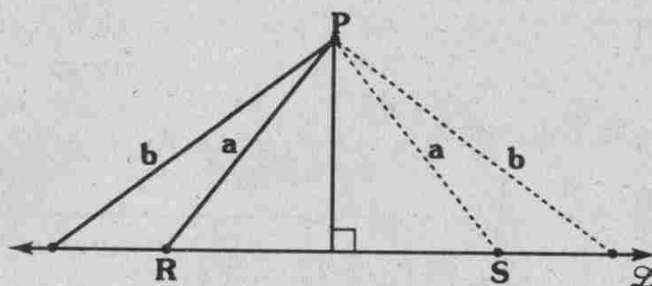
Prueba :

La prueba es directa, pues en $\triangle RQP$, por teorema de la correspondencia: $a < b$



Observación

Sean una recta $\mathcal{L}$ y los puntos P y R tal que $P \notin \mathcal{L} \wedge R \in \mathcal{L}$, si $\overline{RP}$ no es perpendicular a $\mathcal{L}$, entonces existe otro punto "S" en $\mathcal{L}$ tal que $PR = PS$



La Geometría como ciencia del espacio

El estudio del espacio desde un punto de vista matemático está íntimamente relacionado con la descripción y el análisis de la "forma". Intentar buscar una definición de forma abstracta sería entrar en una visión filosófica fuera de nuestro alcance. Cuando aquí hablamos de forma nos referimos al "aspecto" que pueden tener los objetos que estructuran el espacio.

La noción de "aspecto" a que nos hemos referido anteriormente es una aproximación intuitiva e ingenua con el único objetivo de tener una representación mental de lo que sería una entidad abstracta de los objetos, donde no se consideran ni la "materia" de que están constituidos, ni el tamaño o dimensión, ni la textura, ni el color, etc.

En el análisis de la forma hoy se distingue lo que es la configuración figural de lo que es la representación gráfica. La configuración figural expresa la imagen de la forma que tenemos en la mente, mientras que la representación gráfica es el modelo arbitrario o comercial de expresar esta imagen en un soporte físico ya sea una hoja de papel, la pantalla del ordenador o la reproducción física de un modelo tridimensional.

Lo que es la forma en sí, haciendo abstracción de los constituyentes de la materia y de las dimensiones de su tamaño, viene determinado por su configuración figural: es decir, la disposición de los elementos geométricos en lo que podemos llamar la estructura de la forma. Por otra parte, la representación es un modo convencional de "ver" o describir la forma.

El estudio de las formas poniendo énfasis en lo que hemos llamado configuración figural es uno de los puntos de entrada en el conocimiento geométrico.

Este enfoque permite relacionar los valores culturales, sociales y antropológicos del uso y la concepción de la forma en la sociedad, con las

perspectivas de la educación geométrica. Explícitamente, al situarnos en la descripción de una forma, en sus aspectos figurales, estamos inicializando las habilidades propias de la educación geométrica. Este punto de vista permite aproximaciones a la educación geométrica integrando distintas disciplinas y contextos culturales: la forma en el arte, en la ciencia, en la literatura, etc.

La organización sistemática que nos proporciona el estudio de las configuraciones figuradas, marca las líneas organizadoras de lo que conocemos como ciencia del espacio. Así, podemos decir que la visión de la Geometría como ciencia del espacio, supone focalizar los aspectos geométricos en el análisis figural podemos distinguir distintas categorías. Por ejemplo, la categoría estructural analiza la forma viendo cómo está construida. Cómo se disponen los elementos que la constituyen. Sería, por ejemplo, en el caso de una forma poliédrica, cómo están dispuestas las caras que forman todo el poliedro.

En la descripción del grado de simetría de una forma (o de la definición de la forma como lugar geométrico) empleamos la noción de distancia y éste sería un caso de lo que podemos considerar como una categoría dinámica.

El tipo de relaciones, tanto cualitativas como cuantitativas entre los elementos de las figuras, por ejemplo, la relación entre caras, vértices y aristas de un poliedro, la caracterización de su convexidad o concavidad, las relaciones angulares, etc., constituyen las categorías que podemos llamar discretas. Finalmente, todo lo relativo a la extensión y dimensión (longitudes, áreas y volumen) serían casos de la categoría de medidas.

Estas categorías -estructural, dinámica, discreta y de medida -nos marcan los grandes ejes donde podemos vertebrar y organizar la enseñanza -aprendizaje de la Geometría entendida como la ciencia del espacio.

*(Unas reflexiones sobre geometría y educación pag. 24-25/
¿Porqué Geometría? Claudi Alsina Catalá : - Josep Fortuny Aynemí
- Rafael Pérez Gómez)*

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. A	19. A	28. A	37. B	46. A	55. D
2. D	11. B	20. B	29. C	38. E	47. C	56. C
3. A	12. E	21. D	30. A	39. D	48. B	57. C
4. E	13. C	22. E	31. A	40. D	49. B	58. B
5. C	14. D	23. C	32. B	41. D	50. B	59. D
6. C	15. B	24. A	33. E	42. E	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. D	43. A	52. A	
8. B	17. C	26. B	35. C	44. B	53. E	
9. B	18. D	27. E	36. A	45. C	54. D	

CEPRE-UNI

61. D	71. D	81. A	91. A	101. *	111. C	121. C	131. A
62. B	72. C	82. C	92. E	102. D	112. D	122. C	132. C
63. C	73. *	83. E	93. D	103. C	113. B	123. A	133. E
64. *	74. D	84. A	94. A	104. E	114. A	124. C	134. E
65. E	75. D	85. A	95. D	105. D	115. A	125. C	135. C
66. A	76. C	86. D	96. D	106. D	116. B	126. B	136. B
67. C	77. A	87. A	97. B	107. C	117. D	127. B	137. D
68. E	78. C	88. E	98. B	108. B	118. C	128. C	138. A
69. C	79. E	89. B	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. D	80. A	90. B	100. C	110. C	120. D	130. B	140. B

SEMESTRAL

141. C	150. B	159. E	168. B	177. C	185. B	193. C
142. D	151. A	160. C	169. D	178. B	186. C	194. B
143. A	152. D	161. A	170. E	179. E	187. E	195. A
144. B	153. B	162. C	171. C	180. C	188. D	196. B
145. A	154. A	163. A	172. B	181. B	189. C	197. D
146. C	155. B	164. C	173. D	182. C	190. D	198. A
147. D	156. C	165. A	174. D	183. A	191. B	199. D
148. D	157. B	166. C	175. C	184. E	192. A	200. B
149. B	158. C	167. C	176. A			

SEMESTRAL INTENSIVO

201. D	210. C	219. A	228. E	237. C	246. D	255. D
202. C	211. C	220. A	229. C	238. C	247. B	256. C
203. E	212. D	221. B	230. A	239. B	248. C	257. E
204. B	213. E	222. A	231. A	240. B	249. B	258. C
205. C	214. B	223. C	232. D	241. E	250. B	259. B
206. E	215. C	224. B	233. B	242. B	251. C	260. D
207. E	216. A	225. E	234. B	243. A	252. E	
208. D	217. C	226. A	235. A	244. E	253. A	
209. D	218. B	227. D	236. E	245. B	254. A	

REPASO

261. B	267. E	273. B	279. D	285. B	291. D	297. B
262. B	268. B	274. C	280. D	286. C	292. E	298. B
263. D	269. D	275. D	281. B	287. B	293. B	299. C
264. B	270. C	276. D	282. A	288. B	294. C	300. A
265. B	271. E	277. B	283. D	289. C	295. B	
266. D	272. B	278. A	284. D	290. D	296. B	

- **Olivera Diaz, Carlos**
Geometría Plana
2da. edición
- **Pogorelov, A.U. (1974)**
Geometría Elemental.
Editorial MIR Moscú
- **Martín Isaacs**
Geometría Universitaria
Internacional Thomson Editores S.A. de C.V.
México - 2002
- **9. Shariguin**
Problemas de Planimetría
Editorial MIR - 1989
- **Pedro Puig Adam**
Curso de Geometría Métrica
Editorial Nuevas Gráficas - Madrid - 1961
- **Edwin Moise - Floyd Downs**
Geometría - Serie Matemática Moderna IV
Editorial Norma - Fondo Educativo
Interamericano S.A. 1972
- **Hans Rademacher - Erna Toeplitz**
Números y Figuras.
Alianza Editorial S.A. Madrid 1970
- **Radmila Bujajick - José Gómez Ortega**
Geometría / Cuaderno de Olimpiadas
Matemáticas
Instituto de Matemáticas UNAM - 2004

Páginas web consultadas:

- <http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>
- <http://www.mscs.mu.edu/~paul/puzzle/>
- <http://www.fmat.cl/>
- <http://www.forumgeometricorum.com/>