

# 11

GEOMETRÍA

# ÁREAS

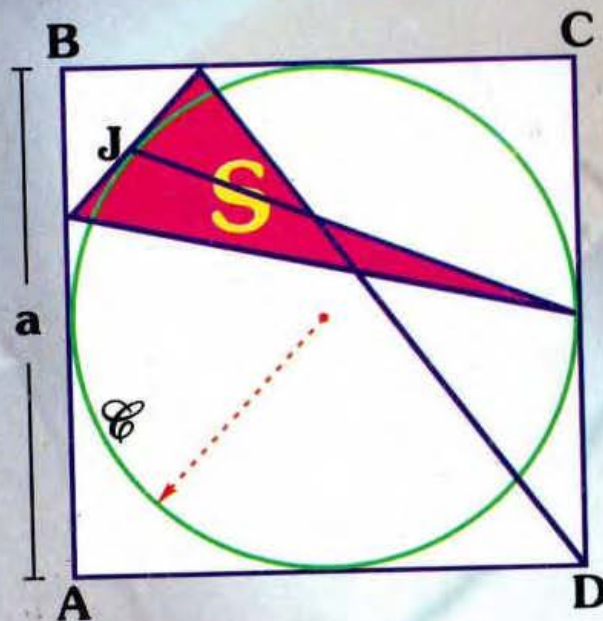
DE REGIONES PLANAS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Si  $C$  es la circunferencia inscrita en el cuadrado  $ABCD$ ,  
 $J$  es punto de tangencia, entonces:  $S = \frac{a^2}{8}$

**GEOMETRÍA**

**ÁREAS**

**DE REGIONES PLANAS**

**TEORÍA - DEMOSTRACIONES**

**300 Problemas Resueltos**

**300 Problemas Propuestos**

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**



*Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura*



# **GEOMETRÍA**

## **ÁREAS**

### **DE REGIONES PLANAS**

**Autor :** Julio Orihuela Bastidas

**Editor :** Editorial Cuzcano

**Composición, Diagramación y Montaje :**

Área de cómputo y publicaciones de la Editorial Cuzcano

**© EDITORIAL CUZCANO**  
**Derechos Reservados**

Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú

**Primera Edición :** Diciembre 2010

**Tiraje :** 1 000 ejemplares

**Obra editada, impresa y distribuida por:**

Editorial Cuzcano

Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Telefax 423-8154

Prohibida la reproducción de esta obra por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de la Editorial.



**LIMA - PERÚ**



Las matemáticas en nuestro país vienen atravesando por un gran cambio, producto del esfuerzo de muchos profesores y estudiantes que se preparan y afrontan el reto de superación, es agradable ver los recientes éxitos internacionales logrados por nuestros estudiantes, lo cual no contrasta con los resultados de la UNESCO donde nuestros escolares ocupan los últimos lugares. Por supuesto el éxito no es producto de la casualidad, pues en realidad nada surge de nada, es producto de la inversión de pocas instituciones privadas y del talento de muchos estudiantes y profesores que no hace mucho fueron estudiantes. La idea es hacer nuestra educación más competitiva, llegar a más zonas de nuestro país.

Con el deseo de aportar, de alguna manera sumar positivamente y unirme al grupo de profesores que viene impulsando el estudio de las matemáticas, desde mi campo que es la geometría, presento esta nueva publicación: "Áreas de regiones planas".

El tema es muy amplio y nos conduce a referirnos desde el origen de la geometría hasta nuestros días, realizar muchas notas históricas, aplicaciones en juegos educativos y pedagógicos, por supuesto mi objetivo es llegar a un público amplio en especial al nivel preuniversitario para ello he dosificado el tipo de problemas para un público básico hasta uno avanzado. He sacrificado algunas veces la belleza de la geometría y he enfocado el tema netamente académico.

Se trata de un libro teórico y práctico, inicio la obra indicando la idea de área, así como enunciando el grupo de axiomas para poder demostrar la mayoría de expresiones dadas para el cálculo de áreas: En la primera parte de la teoría me he referido a la parte básica de áreas, para todo público escolar y preuniversitario; en la segunda parte es para un nivel UNI donde se requiere combinar el curso con otras ramas como trigonometría y álgebra; en la parte final de la teoría es para un público de mayor experiencia y como entrenamiento para estudiantes preolímpicos y para quien desea profundizar un poco más en la geometría. En cuanto a la parte práctica esta compuesto por 600 problemas, divididos en niveles, según ello el estudiante se ubicará y avanzará las soluciones planteadas como guías.

La obra es producto de la experiencia e investigación del autor realizadas en aulas académicas, centros superiores, y en el interactuar con los estudiantes, amigos y profesores, a quienes estoy muy agradecido, por sus sugerencias y críticas objetivas, las cuales me permiten mejorar en cada nueva publicación.

**Julio Orihuela Bastidas**



## Agradecimiento

---

- A mis padres Margarita y Moises por su apoyo incondicional.
  - A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
  - A todos mis alumnos y ex alumnos que sin su apoyo estas publicaciones no serian posible.
-



## ÁREAS DE REGIONES PLANAS

Pág.

### ♦ NOCIONES PREVIAS ..... 7

- Definición de área, axioma de área, regiones equivalentes.

### ♦ ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES ..... 13

- Fórmula básica, fórmula trigonométrica, fórmula de Herón.
- Diversas expresiones para el área de una región triangular.
  - En función del inradio, circunradio y exradio.
- Expresiones para áreas de regiones limitadas por un triángulo rectángulo.
- Relaciones de áreas de regiones triangulares.

### ♦ ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES ..... 24

- Fórmula General
- Región limitada por un cuadrilátero circunscrito.
- Área de una región limitada por un cuadrilátero exinscrita.
- Diversas propiedades sobre áreas en cuadriláteros.

### ♦ ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES REGULARES ..... 34

- Triángulo equilátero, cuadrado, hexágono regular, octógono regular, dodecágono regular, pentágono regular, decágono regular.

### ♦ ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES ..... 36

- Área del círculo, sector circular, segmento circular, corona circular, trapezio circular, teorema de las lúnulas de Hipócrates.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ♦ <b>TEOREMAS ADICIONALES</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 43  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Otra manera de demostrar el teorema de Pitágoras.</li> <li>- Área en función de las medianas y en función de las alturas.</li> <li>- Teorema de Bhamagrupta.</li> <li>- Teorema de Viviani.</li> <li>- Un resultado interesante.</li> </ul>                                                         |     |
| ♦ <b>TEMAS SELECTOS</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 61  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema de Napoleón.</li> <li>- Teorema de Euler.</li> <li>- Teoremas diversos</li> <li>- Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras.</li> <li>- Un resultado extraordinario.</li> <li>- Pruebas visuales.</li> <li>- Sobre el Tamgran.</li> <li>- Equidescomposición de polígonos.</li> </ul> |     |
| ♦ <b>ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 90  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipo Anual</li> <li>- Tipo Cepre-UNI</li> <li>- Tipo Semestral</li> <li>- Tipo Semestral Intensivo</li> <li>- Tipo Repaso</li> </ul>                                                                                                                                                                |     |
| ♦ <b>SOLUCIONARIO</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 152 |
| ♦ <b>ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 292 |
| ♦ <b>CLAVES DE RESPUESTAS</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 350 |
| <b>ANEXOS</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 352 |



# ÁREAS DE REGIONES PLANAS

GEOMETRÍA  
GEOMETRÍA

---

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell

---

## NOCIONES PREVIAS

La palabra Geometría, etimológicamente quiere decir medida de la Tierra, según el historiador Heródoto (siglo V a.C) atribuyó a los egipcios el origen de esta ciencia, la cual consistía en una colección desorganizada de reglas para calcular "áreas", "volúmenes", realizar construcciones sencillas, etc. La idea del área no dista mucho de lo moderno, se pagaba impuestos en función del lote que ocupaban. Los rebalses del Río Nilo muchas veces hacía desaparecer parte de la tierra de los agricultores, entonces los cobradores del faraón tenían que recalcular el "área" de cada terreno.

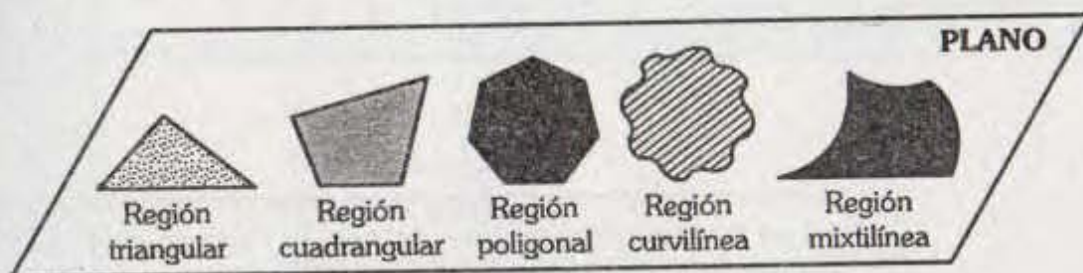
Durante los primeros dos mil años, la geometría fue un conjunto de conocimientos empíricos, obtenidos por inducción sin el fundamento de una demostración lógica. Los griegos inclinados por el temperamento a la filosofía y a la abstracción tomaron la geometría de los griegos y lo rehicieron dándole el carácter deductivo, comenzando por Tales (Siglo VI a.C) y consolidándose con la obra de Euclides (siglo III a.C), en cuya obra "Los Elementos" donde se presenta a la geometría organizada deductivamente. Este modelo se toma hasta nuestro días y es así que se dice que la matemática es estructurada.

Según Puig Adams, la edificación racional de la geometría se funda en las siguientes normas: enunciar los conceptos; admitir sin demostración ciertas propiedades que relacionan estos conceptos (axiomas); y deducir lógicamente las restantes propiedades.

Para todas las publicaciones he tratado de seguir dicho modelo de construcción de la geometría.

## REGIÓN PLANA LIMITADA

Dada una línea cerrada en el plano (poligonal, curva o combinación de ellas), se denomina región plana limitada a la reunión de todos los puntos interiores a dicha línea con su frontera, así tenemos:

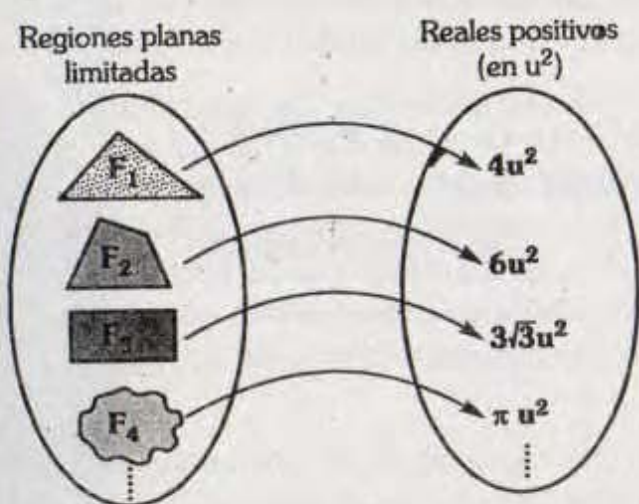


## ÁREA

Elijamos una unidad de medida para las longitudes (centímetros, metros, pulgadas, yarda, etc), todos los cálculos se realizarán en función a esa longitud, aunque en la mayoría de ejercicios no se mencionen.

Asignaremos a cada región plana cerrada un número real positivo denominada área expresado en unidades cuadradas, la cual representará la extensión comprendida de la región plana limitada.

Por ejemplo:



Denotemos :

$S_{(F)}$  : Área de la figura F

$$S_{(F_1)} = 4u^2$$

$$S_{(F_2)} = 6u^2$$

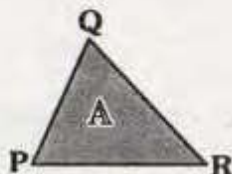
$$S_{(F_3)} = 3\sqrt{3}u^2$$

$$S_{(F_4)} = \pi u^2$$

### Notación:

Aunque no hay una notación general, se suele usar las siguientes:





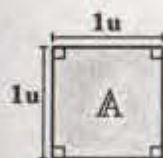
Área de la región triangular PQR:

$$S_{\Delta PQR} ; (PQR) ; S_{(PQR)} ; [PQR] ; S_{PQR} ; A$$

Si no hay lugar a ambigüedad: colocar una letra mayúscula sobre la región sombreada (algunas veces con subíndices)

### AXIOMAS SOBRE ÁREAS

Un cuadrado cuyo lado es "1u", cumple que el área de su región es  $1u^2$ .



$$A = 1u^2$$

Regiones congruentes limitadas tienen áreas iguales.



$$A = B$$

Una región plana limitada puede ser descompuesta en subregiones, entonces la suma de áreas de dichas subregiones es el área inicial.



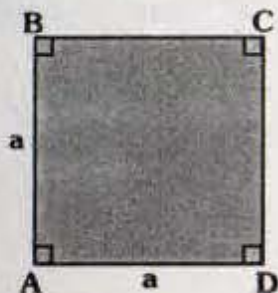
$$S_T = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

### Nota

- \* El último axioma es a su vez un buen criterio para la resolución de problemas cuando el área de la región no es sencilla.
- \* En cálculo superior se calcula áreas de superficies curvas (no planas) con la ayuda de métodos de geometría diferencial; así como también hallar áreas bajo la curva cuando la región no es limitada (como por ejemplo, en estadística, cuando se estudia la normal)

### TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRADA)

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.



En el gráfico, ABCD es un cuadrado.

Se cumple:

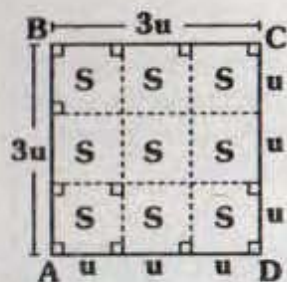
$$S_{(ABCD)} = a^2$$

**Prueba**

En realidad la prueba no es tan sencilla para todos los casos, veamos todas las posibilidades:

- Si  $a \in \mathbb{N}$

(Elijamos un número sencillo: " $a=3u$ ", pero se prueba análogamente para todo  $a$ )



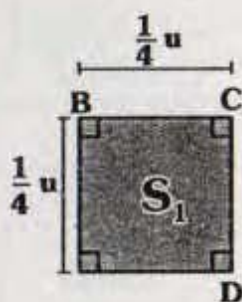
- Se divide en "3" partes iguales (en general en " $a$ " partes iguales) cada lado, luego trazamos paralelas a los lados, tendremos " $3^2$ " nuevos cuadrados (en general: " $a^2$ " nuevos cuadrados). Usando los axiomas:
- Cada cuadrado pequeño tiene área " $S=1u^2$ " y como el total es:

En general:  $S_{(ABCD)} = a^2$

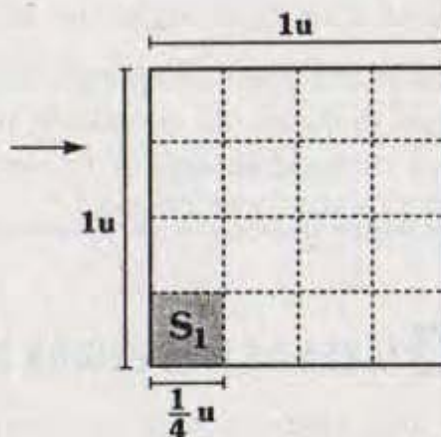
$$S_{(ABCD)} = 9S = 3^2(1u^2) = 9u^2$$

- Si " $a$ " es de la forma:  $\frac{1}{n}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$

Elijamos para fines didácticos " $a = \frac{1}{4}$ " pero también se puede hacer en general



considerando el cuadrado de lado " $1u$ "



Se descompone en cuatro partes cada lado, tendremos " $4^2$ " nuevos cuadrados, cuya área será: " $S_1$ "

Luego

$$4^2 S_1 = 1u^2 \Rightarrow S_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 u^2$$

En general:

$$S_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 u^2 = a^2$$



- Si  $a$  es de la forma:

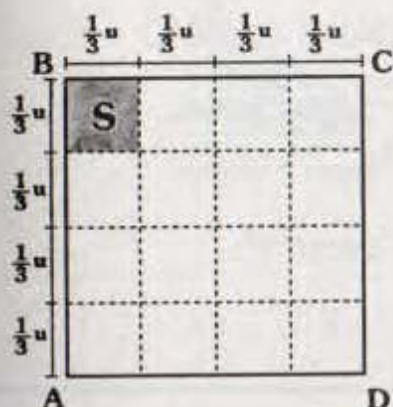
$$\frac{m}{n}; m \wedge n \text{ son naturales.}$$

se puede decomponer así:

$$\frac{m}{n} = m \left( \frac{1}{n} \right)$$

Tomemos por ejemplo:

$$a = \frac{4}{3}u = 4 \left( \frac{1}{3}u \right)$$



$$S_{(ABCD)} = S$$

Como ya fue probado que si el lado del cuadrado es  $\frac{1}{n}$ , entonces su área es:  $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 u^2 \Rightarrow S_{(ABCD)} = \frac{16}{9} u^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 u^2$$

$$\text{En general: } S_{(ABCD)} = a^2$$

- Si " $a$ " es irracional, la prueba se realiza con límites (ver anexos), de todas maneras se prueba que:

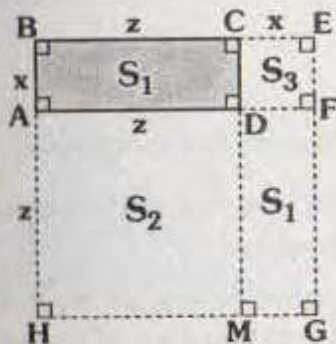
$$S_{(ABCD)} = a^2; \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+$$

### TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN RECTANGULAR)

El área de una región rectangular es el producto de sus dimensiones.

#### Prueba

Sea el rectángulo ABCD, cuyos lados son  $AB=x$  y  $BC=z$ , como ya conocemos el área de una región cuadrada, formemos el cuadrado cuyo lado mide " $x+z$ "



- Como ABCD es congruente con MDGF

$$\Rightarrow S_{(ABCD)} = S_{(MDGF)} = S_1$$

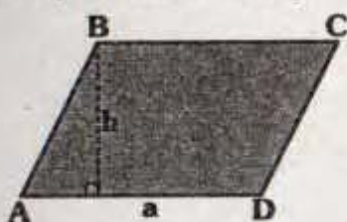
- $S_2 = z^2 \wedge S_3 = x^2$ , luego:

$$S_{(HBEG)} = (x+z)^2$$

$$\underbrace{S_2}_{z^2} + \underbrace{S_3}_{x^2} + 2S_1 = x^2 + z^2 + 2xz \quad \therefore S_1 = xz$$

# TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA)

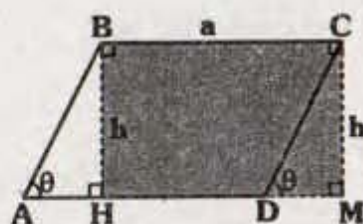
En el gráfico; ABCD es un paralelogramo



se cumple:

$$S_{(ABCD)} = ah$$

Prueba



Como  $\angle AHB \equiv \angle DMC$

$$\Rightarrow S_{\triangle AHB} = S_{\triangle DMC}$$

$$\Rightarrow S_{(ABCD)} = S_{(HBCD)}$$

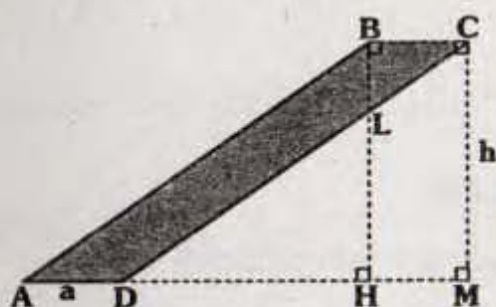
$$\therefore S_{(ABCD)} = ah$$

Observación

• También se cumple en este caso:

$$\Rightarrow S_{(ABCD)} = S_{(HBCM)} = ah$$

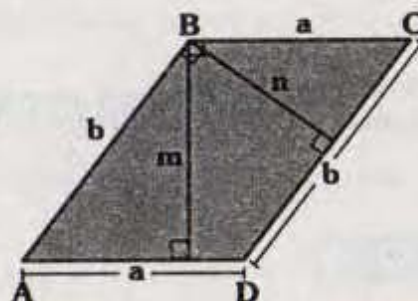
• Se deduce:



$$\angle AHB \equiv \angle DMC$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AHB} = S_{\triangle DMC}$$

$$\Rightarrow S_{(ABLD)} = S_{(HLCM)}$$



$$am = bn$$

## REGIONES EQUIVALENTES

Se llaman regiones equivalentes, a aquellas regiones que tienen áreas iguales:



Si  $A = B = C \Rightarrow$  Dichas regiones son equivalentes.

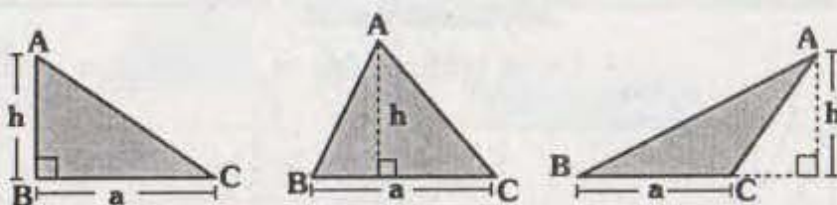
Una aplicación sobre regiones equivalentes las veremos más adelante en el juego chino TANGRAM.



# ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

## TEOREMA (Fórmula básica)

El área de toda región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado con la altura relativa a dicho lado.



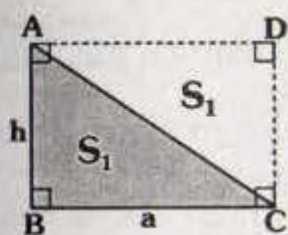
(ABC): Área de la región triangular ABC

Se cumple:

$$S_{(ABC)} = \frac{ah}{2}$$

### Prueba

Veamos para cada caso:

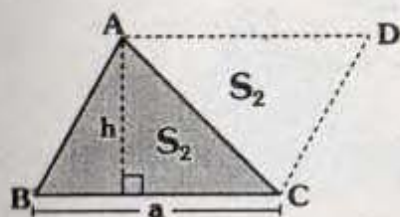


- Completamos el rectángulo ABCD, luego tendremos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_1$$

- Por teorema:  $2S_1 = ah$

$$\therefore S_1 = \frac{ah}{2}$$

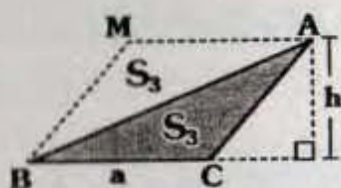


- Completamos el paralelogramo ABCD, luego tendremos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_2$$

- Por teorema:  $2S_2 = ah$

$$\therefore S_2 = \frac{ah}{2}$$



- Análogamente completamos el paralelogramo ACBM, tendremos  $2S_3 = ah$

$$\therefore S_3 = \frac{ah}{2}$$

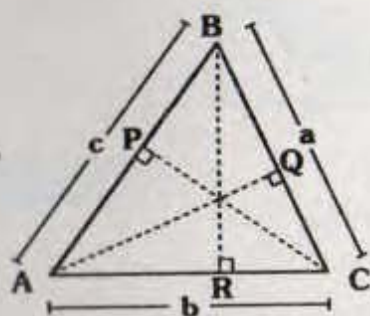
### Observaciones

En el gráfico,  $AQ = h_a$ ,  $CP = h_c$  y  $BR = h_b$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

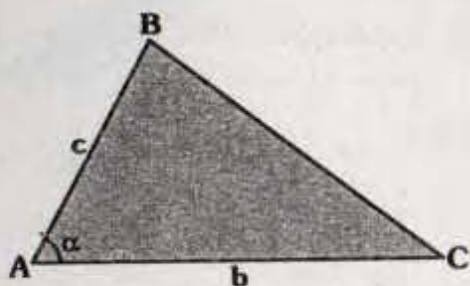
$$\Rightarrow ah_a = bh_b = ch_c$$

Un resultado similar se obtiene con semejanza y con "Relaciones Métricas" concluyendo que la mayor altura es relativa al menor lado y viceversa.



### TEOREMA (Fórmula trigonométrica)

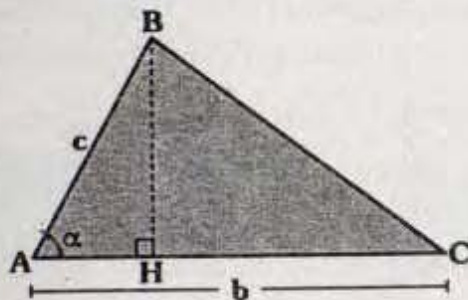
El área de toda la región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados multiplicado con el seno de la medida del ángulo entre dichos lados.



En el gráfico se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{cb}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

### Prueba



- Se traza la altura BH
- En  $\angle AHB$ :  $BH = c \cdot \operatorname{sen} \alpha$

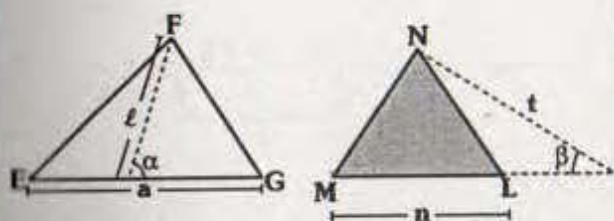
$$S_{\triangle ABC} = \frac{b(BH)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \operatorname{sen} \alpha$$



**Observaciones**

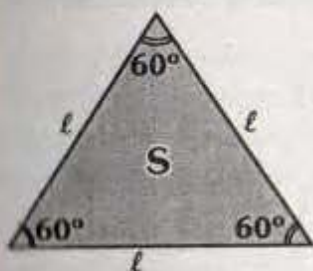
En forma similar al anterior, se prueba los siguientes resultados:



$$S_{\triangle EFG} = \frac{al}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{\triangle MNL} = \frac{nt}{2} \operatorname{sen} \beta$$

Para el triángulo equilátero, se cumple:

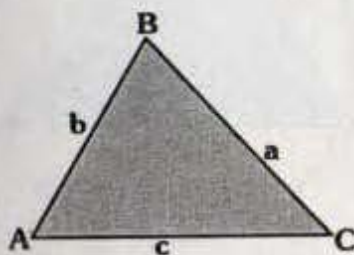


$$S = \frac{l^2}{2} \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$S = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

**TEOREMA (Fórmula de Herón)**

El área de toda región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro, con las diferencias del semiperímetro con las longitudes de cada lado.

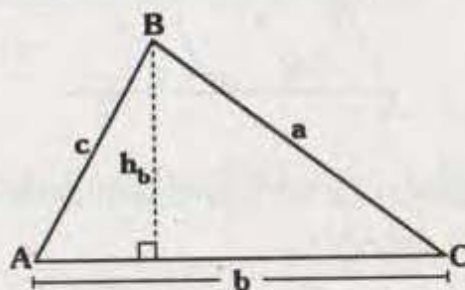


En el gráfico, sea  $p$  el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Prueba**

• Por la fórmula básica:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{bh_b}{2} \quad \dots(1)$$

• Por el teorema de Herón, (relaciones métricas):

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \dots(2)$$

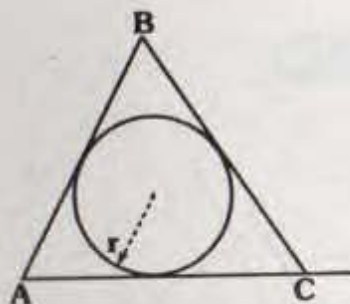
• De (1) y (2):

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

# DIVERSAS EXPRESIONES PARA EL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

## EN FUNCIÓN DEL INRADIO

El área de toda región triangular es igual al producto del semiperímetro con su inradio.

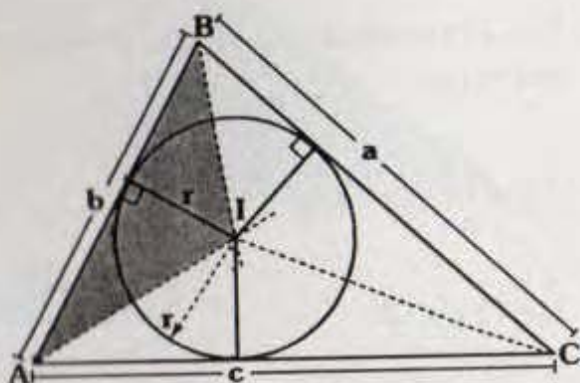


En el gráfico,  $p$  y  $r$  son el semiperímetro e inradio del  $\triangle ABC$

Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = pr$$

**Prueba**



• Usemos el criterio de hallar un área como la suma de sus regiones parciales, así:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AIC} + S_{\triangle BIC} + S_{\triangle CIA}$$

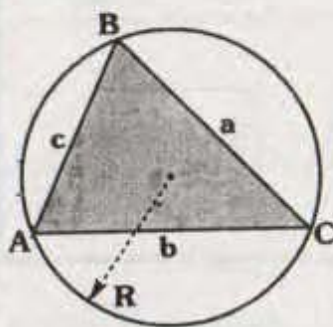
$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \underbrace{\left( \frac{a+b+c}{2} \right)}_p r$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = pr$$

## EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO

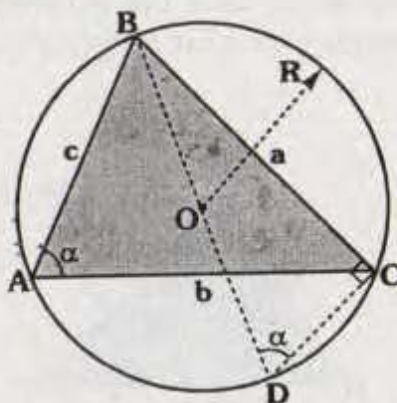
El área de toda región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados entre cuatro veces el circunradio



En el gráfico se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$$

**Prueba**





- Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad \dots (1)$$

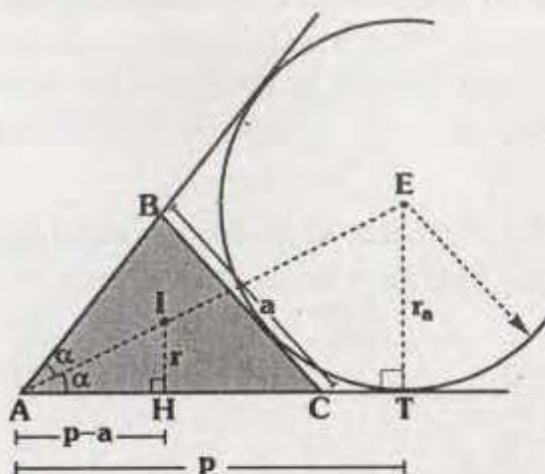
- En  $\Delta BCD$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{2R} \quad \dots (2)$$

- De (1) y (2):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

**Prueba** 



- Sea  $p$  el semiperímetro del  $\Delta ABC$
- Se ubica el incentro  $I$  del  $\Delta ABC$  y se traza  $\overline{IH} \perp \overline{AC}$  ( $H$  en  $\overline{AC}$ )

$$\Rightarrow AH = p - a$$

$$\cdot \angle AHI \sim \angle ATE \Rightarrow \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{pr}{S_{\Delta ABC}} = r_a(p-a)$$

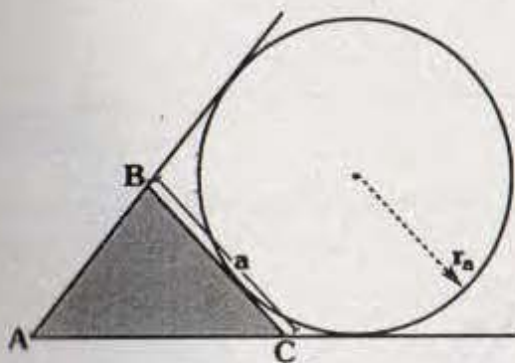
$$\therefore S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)$$

Análogamente, para cada lado. Sea  $AB=c$  y  $AC=b$ , se tendrá:

$$S_{\Delta ABC} = r_b(p-b)$$

$$S_{\Delta ABC} = r_c(p-c)$$

El área de toda región triangular es igual el producto del exradio con la diferencia del semiperímetro con la longitud del lado relativo a dicho exradio.



En el gráfico,  $p$  y  $r_a$  son el semiperímetro y exradio del  $\Delta ABC$

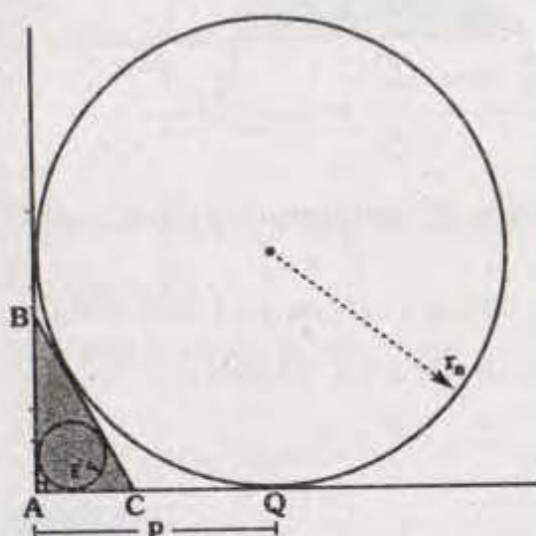
Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)$$

# EXPRESIONES PARA ÁREAS DE REGIONES LIMITADAS POR TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Además de conocer la forma de hallar el área de un triángulo rectángulo con los catetos, es importante conocer otras expresiones que por su presencia en muchos ejercicios y por su simplicidad en la expresión.

- En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita y exinscrita.



Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r_a r$$

Prueba

- Sabemos que:

$$S_{\Delta} = pr \quad \dots (1)$$

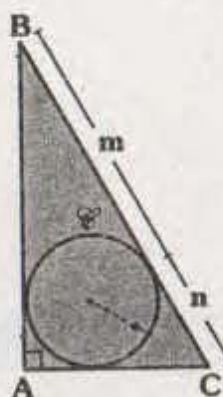
donde  $p$  es el semiperímetro de ABC

- Por propiedad de circunferencia:

$$\underbrace{AQ}_{r_a} = p$$

- En (1):  $S_{\Delta ABC} = r_a r$

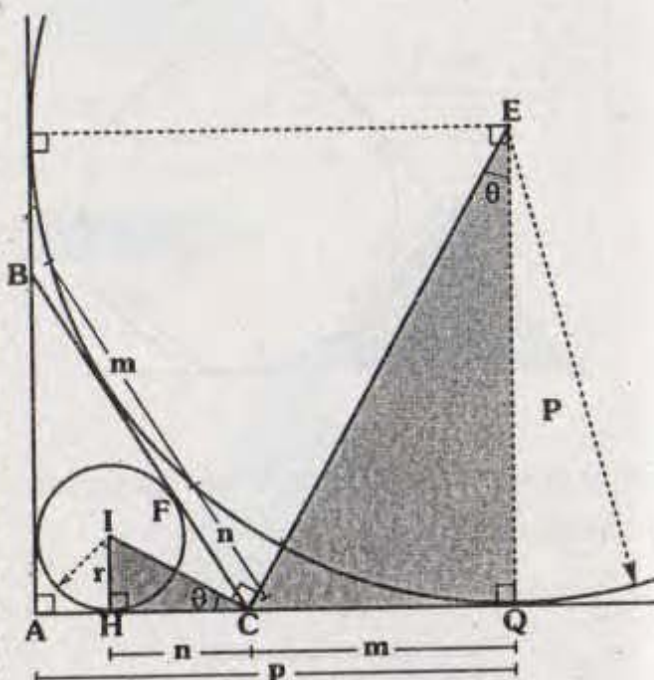
- En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita, se cumple:



$$S_{\Delta ABC} = mn$$

Prueba

- Tracemos también la circunferencia exinscrita relativa a AC (sólo como referencia)



- Por propiedad de circunferencia:



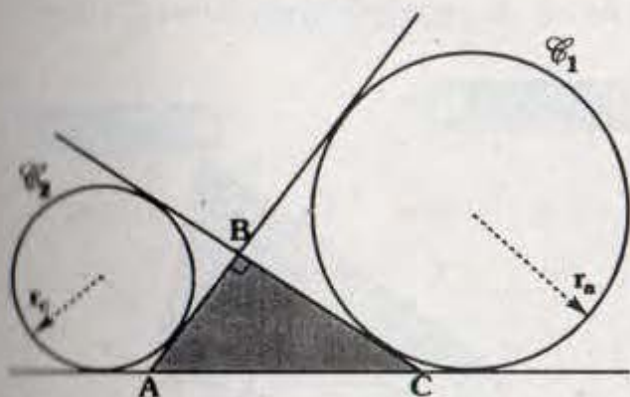
$$CF=CH=n \quad ; \quad BF=CQ=m \quad \text{y} \quad AQ=p$$

$$\cdot \triangle IHC \sim \triangle CQE: \quad \frac{r}{n} = \frac{m}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{rp} = mn$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = mn$$

□ En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son las circunferencia exinscrita para el  $\triangle ABC$

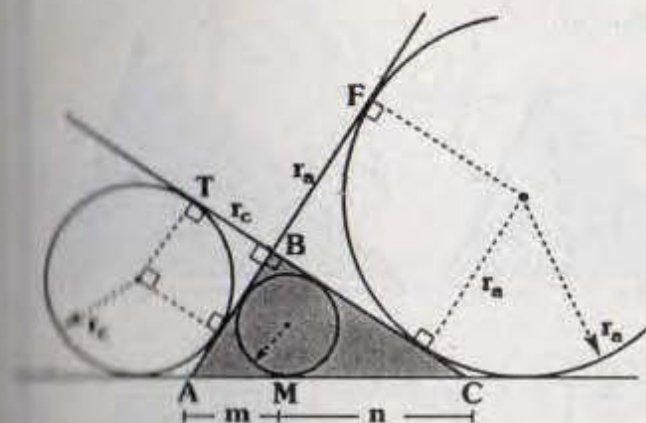


Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = r_a r_c$$

**Prueba**

• Tracemos ahora la circunferencia inscrita.

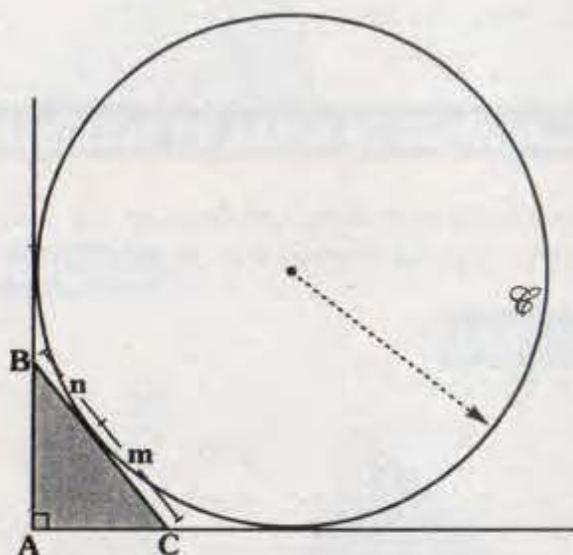


• Por propiedad de circunferencia:

$$\underline{BT} = AM = m \quad \text{y} \quad \underline{BF} = MC = n$$

$$\cdot \text{ Como } S_{\triangle ABC} = mn \Rightarrow S_{\triangle ABC} = r_c r_a$$

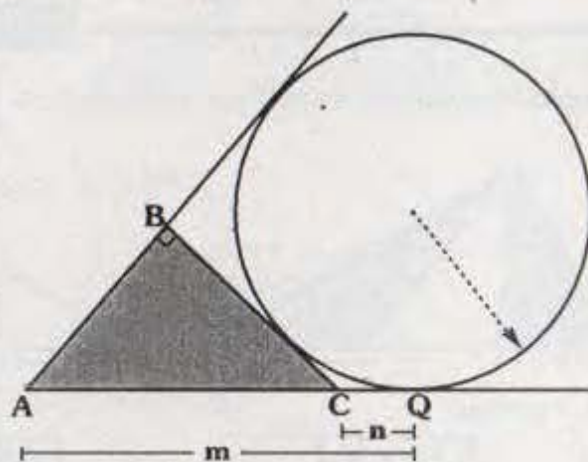
□ En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia exinscrita del  $\triangle ABC$



$$\text{Se cumple: } S_{\triangle ABC} = mn$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector

□ En el gráfico, se muestra la circunferencia exinscrita.



$$\text{Se cumple: } S_{\triangle ABC} = mn$$

**Prueba**

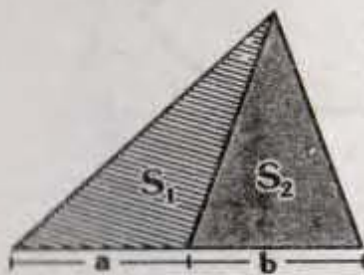
- Notemos que "m" es el semiperímetro
- Si trazamos la circunferencia inscrita, tangente a  $\overline{BC}$  en T, entonces  $BT=CQ=n$
- Usemos  $S_{\triangle ABC}=pr$ , donde r es inradio:
- Como:  $r=BT \Rightarrow n=r$   $\therefore S_{\triangle ABC}=mn$

**RELACIONES DE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES**

Ahora veremos diversas formas de comparar áreas de regiones triangulares, cuando tienen algunos elementos en común.

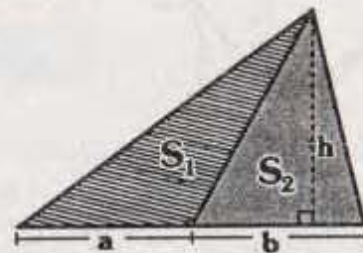
**TEOREMA**

**Prueba**



En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

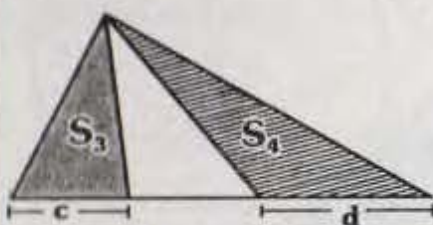


Usemos la fórmula básica:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{ah}{2} \\ S_2 &= \frac{bh}{2} \end{aligned} \right\} \frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

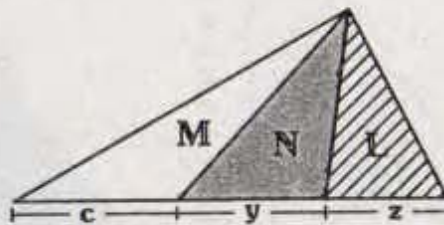
**Observación**

Veamos algunos casos particulares de lo anterior:

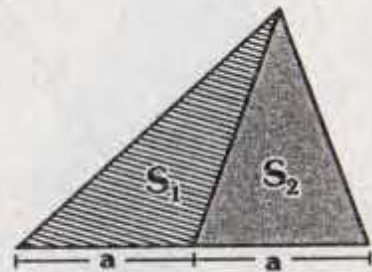


Se cumple:

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{c}{d}$$



$$\frac{M}{x} = \frac{N}{y} = \frac{L}{z}$$

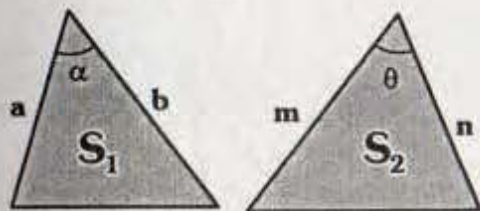


$$S_1 = S_2$$



**TEOREMA**

Si  $\alpha = \theta$  ó  $\alpha + \theta = 180^\circ$



Se cumple:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ab}{mn}$$

**Prueba**

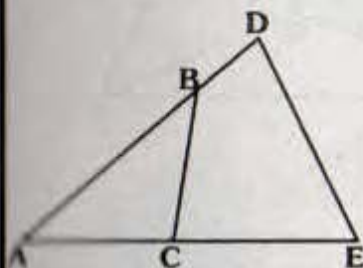
- Como  $\alpha = \theta$  ó  $\alpha + \theta = 180^\circ$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha = \text{sen} \theta$$

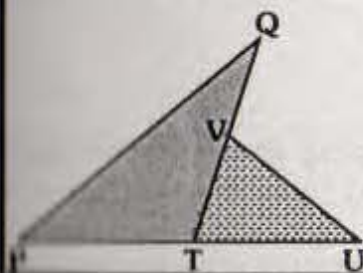
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{ab}{2} \text{sen} \alpha \\ S_2 &= \frac{mn}{2} \text{sen} \theta \end{aligned} \right\} \frac{S_1}{S_2} = \frac{ab}{mn}$$

**Observación**

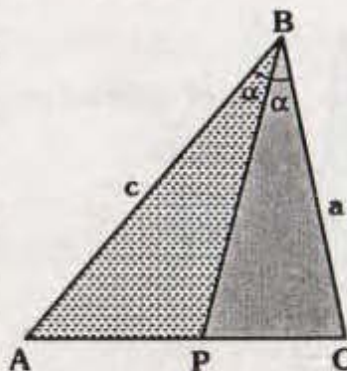
Como caso particular veamos:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{(AB)(AC)}{(AD)(AE)}$$

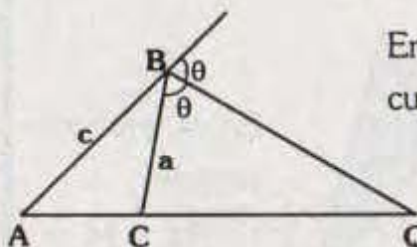


$$\frac{S_{\triangle PQT}}{S_{\triangle VTU}} = \frac{(PT)(TQ)}{(TV)(TU)}$$

**TEOREMA**

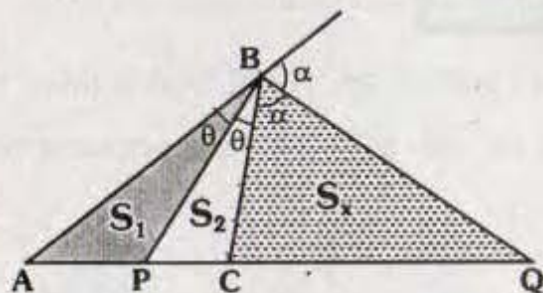
En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{c}{a}$$

**TEOREMA**

En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle CBQ}} = \frac{c}{a}$$

**Observación**

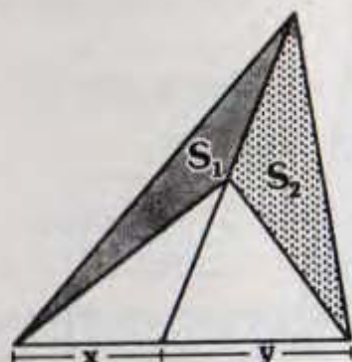
Se cumple:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle CBQ}}$$

Reemplazando:

$$S_x = \frac{S_1(S_1 + S_2)}{(S_1 - S_2)}$$

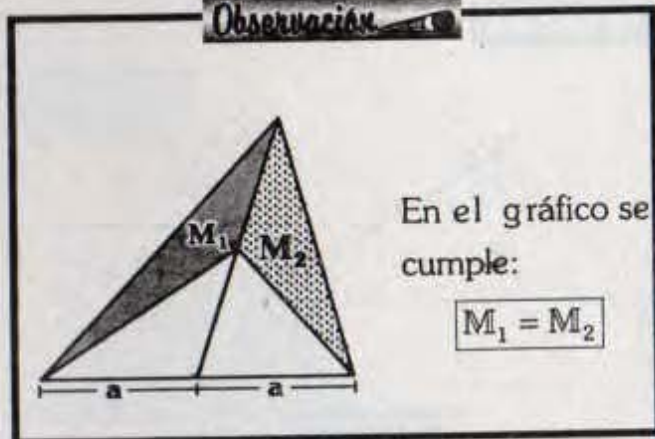
### TEOREMA



En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x}{y}$$

### Observación

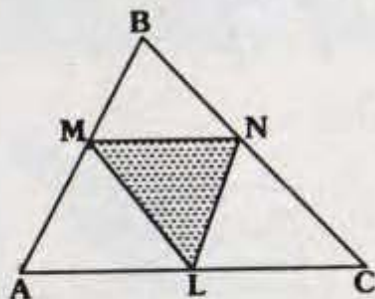


En el gráfico se cumple:

$$M_1 = M_2$$

### TEOREMA

En el gráfico, M, N y L son puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente.

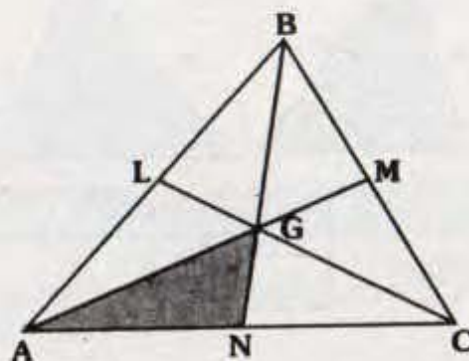


Se cumple:

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle MNL} = S_{\triangle LNC} = S_{\triangle MBN}$$

### TEOREMA

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC.

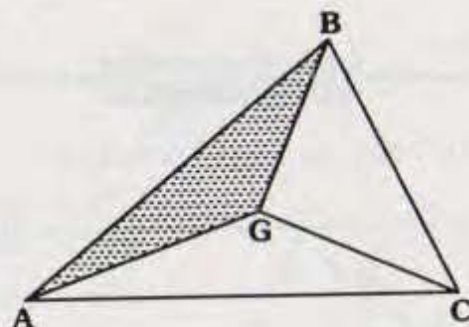


Se cumple:

$$S_{\triangle ALGA} = S_{\triangle ANG} = S_{\triangle NGC} = S_{\triangle CGM} = S_{\triangle MGB} = S_{\triangle GLB}$$

### COROLARIO

Si G es baricentro del triángulo ABC se cumple:



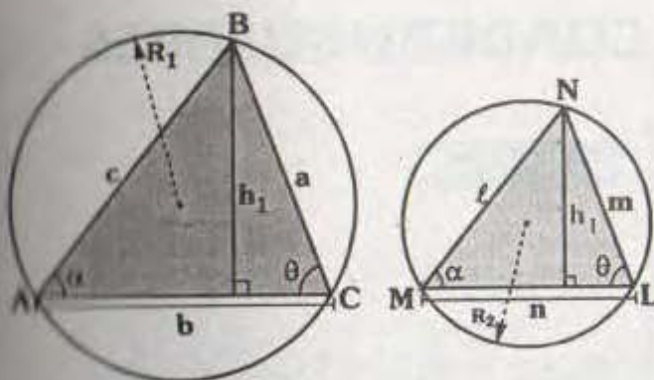
Se cumple:

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$$

### TEOREMA

La razón de áreas de dos regiones triangulares es igual al cuadrado de la razón de longitudes de segmentos homólogos.





En el gráfico,  $\Delta ABC \sim \Delta MNL$ , entonces se cumple:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}} = \left(\frac{a}{m}\right)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \left(\frac{c}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \dots = k^2$$

**Prueba**

• Por la fórmula básica:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bh_1}{2} \wedge S_{\Delta MNL} = \frac{nh_2}{2}$$

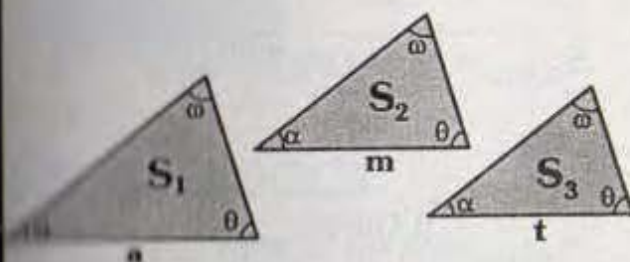
$$S_{\Delta ABC} = \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \dots (1)$$

• Como  $\Delta ABC \sim \Delta MNL$ , entonces:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} = \dots = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}} = \left(\frac{b}{n}\right)^2 = k^2$$

### Observación

1) Cuando se trate de comparar tres o más regiones semejantes; es recomendable usar:



$$\frac{S_1}{a^2} = \frac{S_2}{m^2} = \frac{S_3}{t^2}$$

2) En general para dos regiones semejantes:

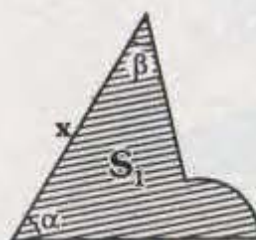


Figura 1

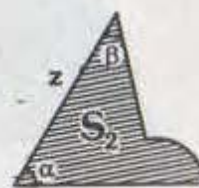


Figura 2

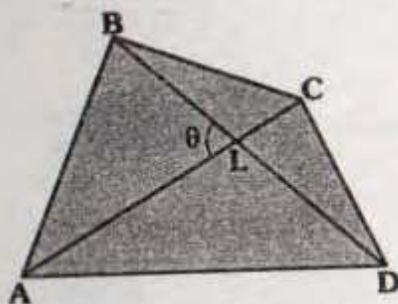
Si las figuras 1 y 2 son semejantes "x" y "z" son longitudes homólogas, Se

cumple: 
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{z}\right)^2$$

# ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

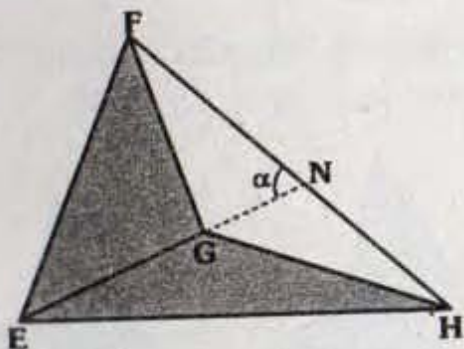
## FÓRMULA GENERAL

El área de toda región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales por el seno de la medida del ángulo entre dichas diagonales.



Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2} \operatorname{sen} \theta$$



En el gráfico, se cumple:

$$S_{\square EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

## Prueba

• Para el  $\square ABCD$ :

$$S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BL)}{2} \operatorname{sen} \theta + \frac{(AC)(DL)}{2} \operatorname{sen} \theta$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)}{2} \operatorname{sen} \theta \underbrace{(BL + LD)}_{BD}$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2} \operatorname{sen} \theta$$

• Para el  $\square EFGH$

$$S_{\square EFGH} = \underbrace{S_{\triangle EFH}}_{\text{}} - \underbrace{S_{\triangle FGH}}_{\text{}}$$

$$S_{\square EFGH} = \frac{(EN)(FH)}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{(GN)(FH)}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

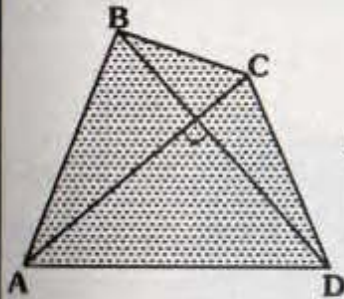
$$S_{\square EFGH} = \frac{(EN - GN)}{EG} \frac{(FH)}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\therefore S_{\square EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2} \operatorname{sen} \alpha$$



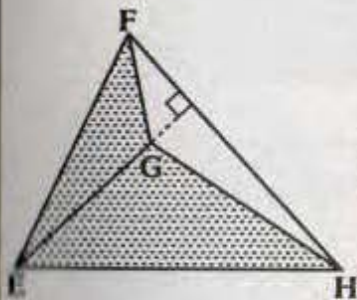
**Observación**

- Si las diagonales son perpendiculares.



Se cumple :

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

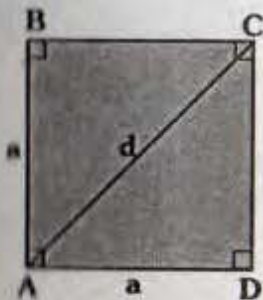


Se cumple :

$$S_{\triangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}$$

**REGIÓN CUADRADA**

En el gráfico ABCD es un cuadrado, se cumple:



$$S_{(ABCD)} = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

**REGIÓN RECTANGULAR**

En el gráfico, ABCD es rectángulo



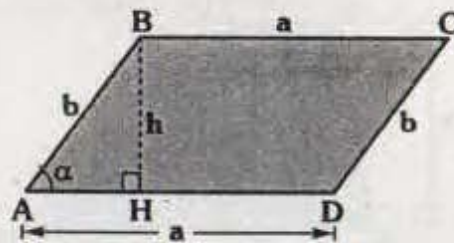
Se cumple :

$$S_{(ABCD)} = mn$$

**REGIÓN PARALELOGRAMICA**

En el gráfico, ABCD es paralelogramo

Se cumple:



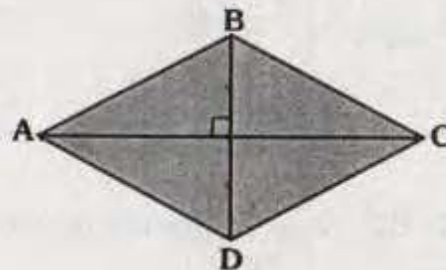
$$S_{(ABCD)} = ah = ab \sin \alpha$$

**Nota**

Las últimas expresiones planteadas ya han sido demostradas

**REGIÓN ROMBAL**

En el gráfico, ABCD es un rombo. Se cumple:



$$S_{\diamond ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

**Prueba**

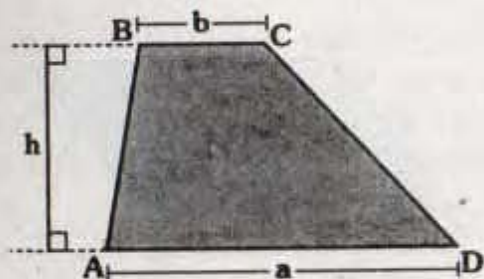
Por la fórmula general:

$$S_{\diamond ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2} \underbrace{\sin 90^\circ}_1$$

$$\therefore S_{\diamond ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

### REGIÓN TRAPEZIAL

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Se cumple:



$$S_{\triangle ABCD} = \left( \frac{a+b}{2} \right) h$$

**Prueba**

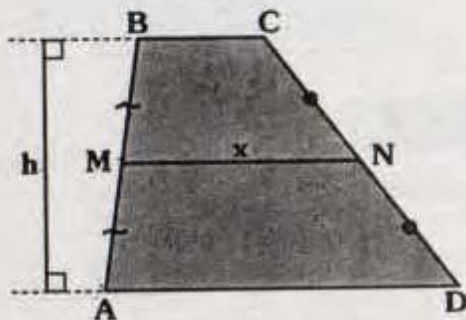
$$S_{\triangle ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$\frac{bh}{2} + \frac{ah}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABCD} = \left( \frac{a+b}{2} \right) h$$

**Observación**

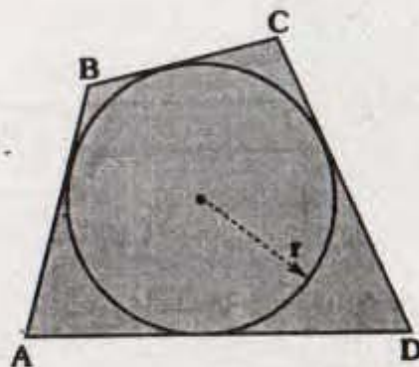
Si  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , M y N puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$



$\overline{MN}$  : Base media  $\Rightarrow S_{\triangle ABCD} = xh$

### REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

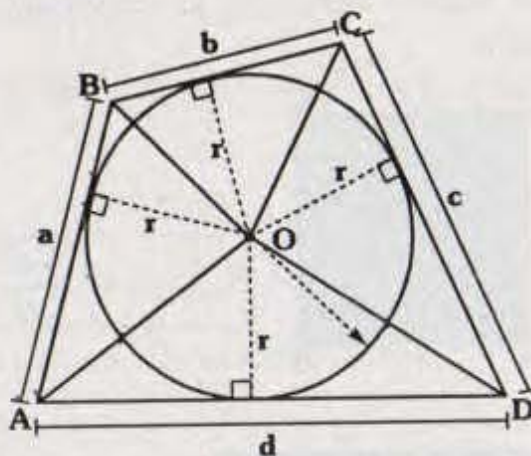
En el gráfico  $\triangle ABCD$  es circunscrito, se cumple



$$S_{\triangle ABCD} = pr$$

donde "p" es el semiperímetro del  $\triangle ABCD$

**Prueba**



• Antes, consideremos el teorema de Pitot:  $a+c=b+d$

• Como  $p = \frac{a+b+c+d}{2} = a+c = b+d$

•  $S_{\triangle ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD}$



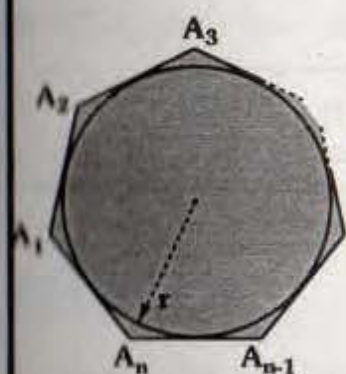
$$S_{\triangle ABCD} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}$$

$$S_{\triangle ABCD} = r \left( \frac{a+b+c+d}{2} \right) = r(a+c) = r(b+d)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$

**Observación**

El teorema anterior, se puede generalizar para todo polígono circunscrito.



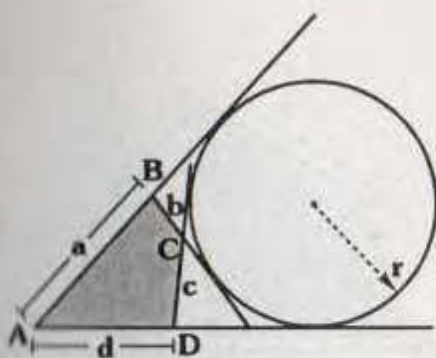
Sea  $A_1A_2A_3\dots A_n$ :  
polígono circunscrito

$p$ : semiperímetro  
Se cumple:

$$S_{A_1A_2\dots A_n} = pr$$

### ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO EXINSCRITO

En el gráfico, el  $\triangle ABCD$  es exinscrito



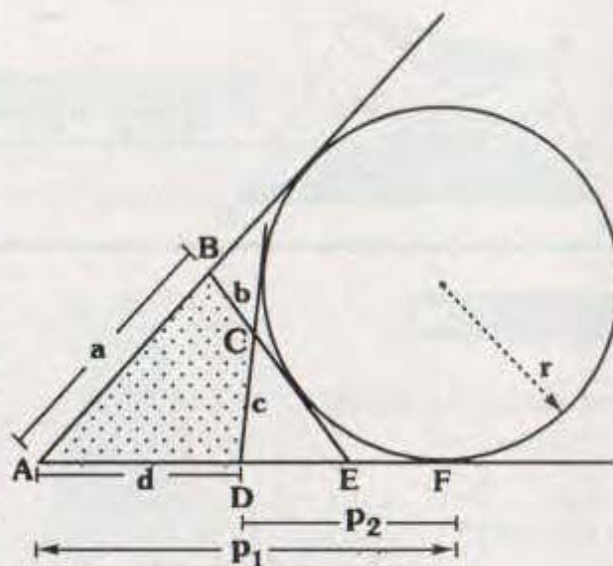
Se cumple:

$$S_{\triangle ABCD} = r(a-c) = r(d-b)$$

**Prueba**

$p_1$ : semiperímetro de  $\triangle ABE$

$p_2$ : semiperímetro de  $\triangle CDE$



$$\begin{aligned} S_{\triangle ABCD} &= S_{\triangle ABE} - S_{\triangle CDE} \\ &= r(p_1 - BE) - r(p_2 - CE) \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABCD} = r[(p_1 - p_2) - (BE - CE)]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_d \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

$$S_{\triangle ABCD} = r(d - b)$$

• Por teorema de Steiner:

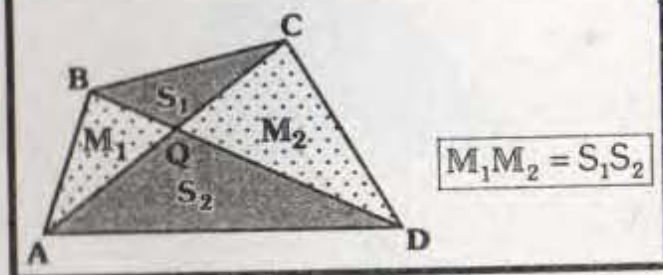
$$d - b = a - c$$

$$S_{\triangle ABCD} = r(d - b) = r(a - c)$$

# **DIVERSAS PROPIEDADES SOBRE ÁREAS EN CUADRILÁTEROS**

## **EN TODO CUADRILÁTERO**

• En el gráfico, se cumple:



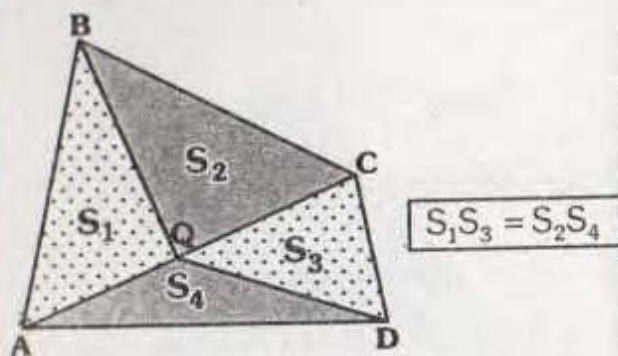
**Prueba**

Por razón de áreas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{• En } \triangle ABC: \frac{M_1}{S_1} = \frac{AQ}{QC} \\ \text{• En } \triangle ACD: \frac{S_2}{M_2} = \frac{AQ}{QC} \end{array} \right\} \frac{M_1}{S_1} = \frac{S_2}{M_2}$$

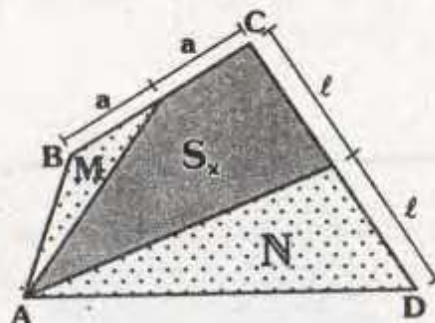
$$\therefore M_1 M_2 = S_1 S_2$$

En el gráfico,  $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ , se cumple:



La prueba es análoga a la anterior.

En el gráfico, se cumple:



**Prueba**

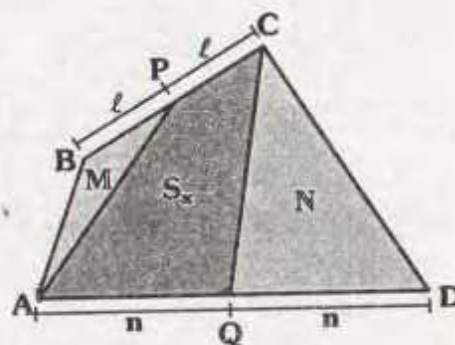
Notemos que:

$$S_x = S_{\triangle AMQ} + S_{\triangle CNQ}$$

$$S_x = S_{\triangle BQM} + S_{\triangle DQN}$$

$$S_x = M + N$$

En el gráfico, se cumple:

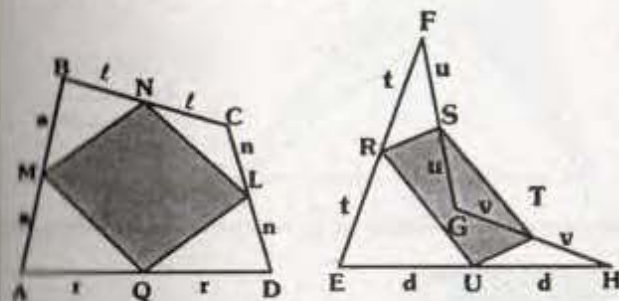


$$S_x = M + N$$



La prueba es análoga a la anterior, se deja como ejercicio para el lector.

En el gráfico, se cumple:



MNLQ: Paralelogramo

RSTU: Paralelogramo

$$S_{\square MNLQ} = \frac{S_{\triangle ABCD}}{2}$$

$$S_{\square RSTU} = \frac{S_{\triangle EFGH}}{2}$$

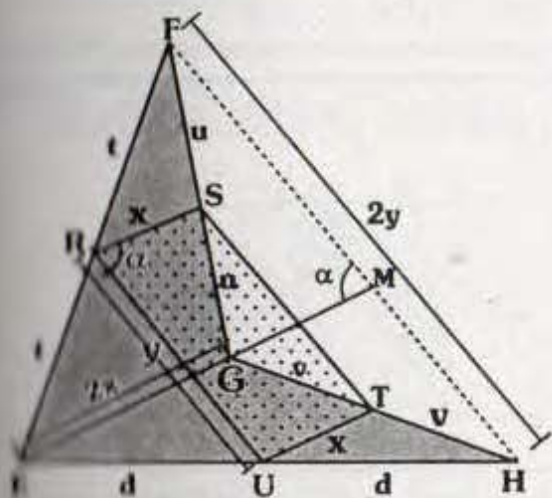
**Prueba**

• Ambos casos es similar, demostremos el segundo:

• En  $\triangle GHT$  y  $\triangle EFH$ , por base media:

$$FH = 2(ST) = 2(RU) \text{ y } \overline{FH} \parallel \overline{ST} \parallel \overline{RU}$$

$\Rightarrow$  RSTU es paralelogramo



• Luego:  $m\angle SRU = m\angle GMF$

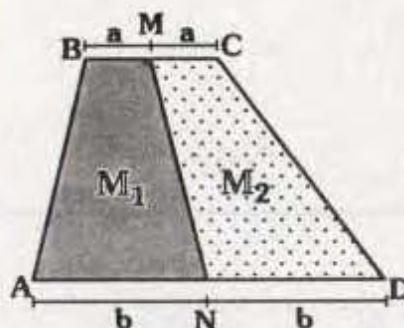
$$S_{\square RSTU} = xy \operatorname{sen} \alpha \quad y$$

$$S_{\triangle EFGH} = \frac{(2x)(2y)}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\therefore S_{\square RSTU} = \frac{S_{\triangle EFGH}}{2}$$

### EN EL TRAPECIO

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Se cumple:



Se cumple:

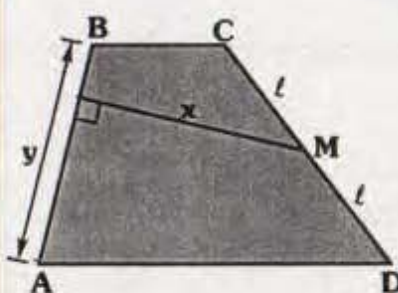
$$M_1 = M_2$$

**Prueba**

Notemos que debido a que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow$  los trapecio ABMN y NMCD tienen igual altura y la misma suma de bases, luego:

$$\underbrace{S_{\square ABMN}}_{M_1} = \underbrace{S_{\square NMCD}}_{M_2}$$

Si  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .

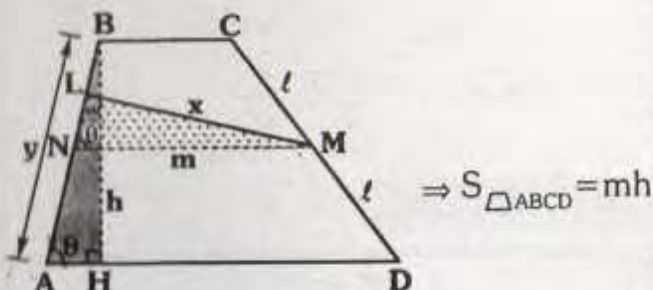


Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = xy$$

**Prueba**

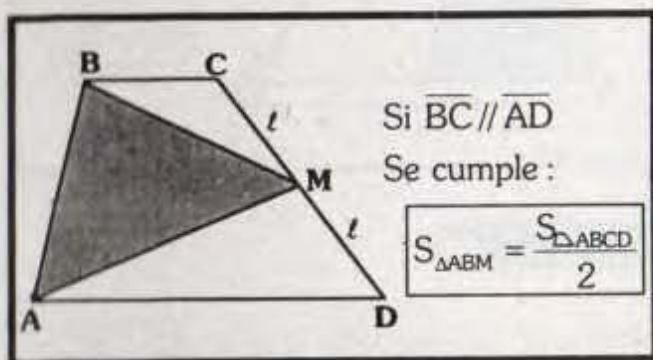
• Sea  $\overline{MN}$  la base media



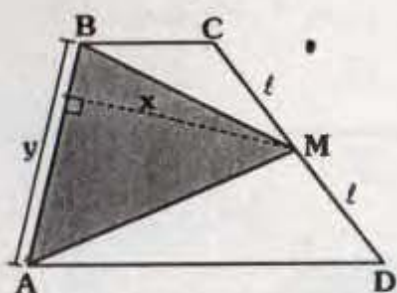
$\Delta AHB \sim \Delta NLM$

$$\frac{h}{y} = \frac{x}{m} \Rightarrow mh = xy$$

$$\therefore S_{\Delta ABCD} = xy$$



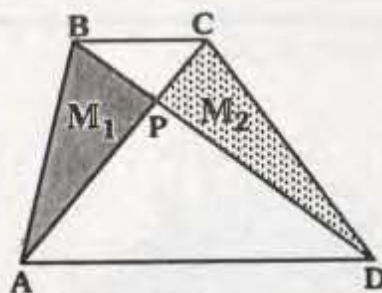
**Prueba**



• Por teorema

$$\left. \begin{array}{l} S_{\Delta ABCD} = xy \\ S_{\Delta ABM} = \frac{xy}{2} \end{array} \right\} S_{\Delta ABM} = \frac{S_{\Delta ABCD}}{2}$$

Si  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Se cumple:

$$M_1 = M_2$$

**Prueba**

Como los  $\Delta$ s ABD y ACD tienen a  $\overline{AD}$  en común (igual base) y  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow$  las alturas desde B y C en dichos triángulos son iguales, luego:

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$$

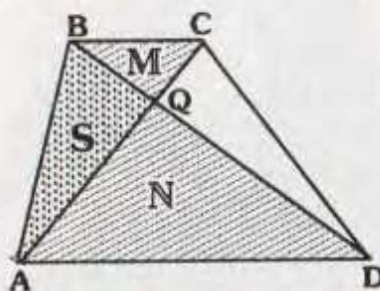
$$M_1 + S_{\Delta APD} = M_2 + S_{\Delta APD}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2$$

**Nota**

La propiedad expuesta es muy importante en la resolución de problemas, la usamos generalmente cuando no tenemos rectas paralelas.

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Se cumple:



$$S = \sqrt{MN} \wedge S_{\Delta ABCD} = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2$$



**Prueba**

- Por lo anterior:

$$S_{(QCD)} = S$$

- Por teorema:

$$(S)(S) = MN \Rightarrow S = \sqrt{MN}$$

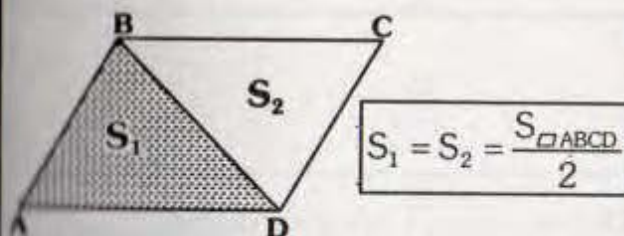
$$S_{\square ABCD} = M + N + 2S$$

$$S_{\square ABCD} = M + N + 2\sqrt{MN}$$

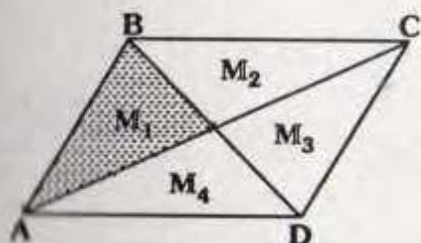
$$\therefore S_{\square ABCD} = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2$$

**EN EL PARALELOGRAMO**

Si ABCD es un paralelogramo, se cumple:

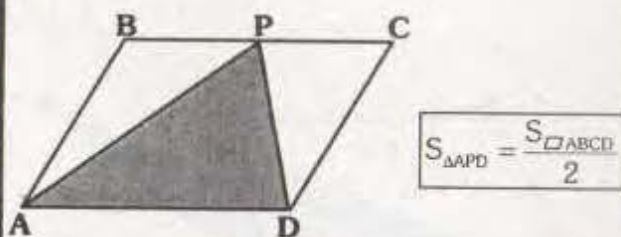
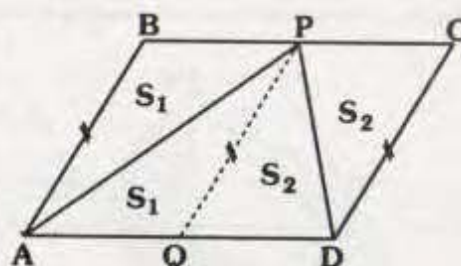


EFGH: paralelogramo, Se cumple:



$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = \frac{S_{\square ABCD}}{4}$$

ABCD: paralelogramo se cumple:

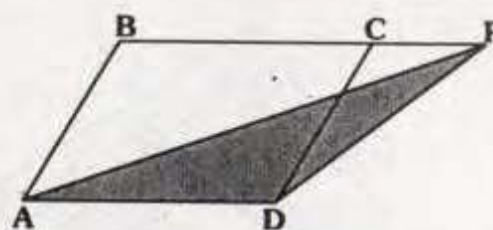
**Prueba**

- Sea  $\overline{PQ} \parallel \overline{AD} \Rightarrow ABQG$  y  $QPCD$ : paralelogramo

$$\Rightarrow S_{\triangle APD} = S_1 + S_2$$

$$S_{\square ABCD} = 2S_1 + 2S_2$$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle APD}$$

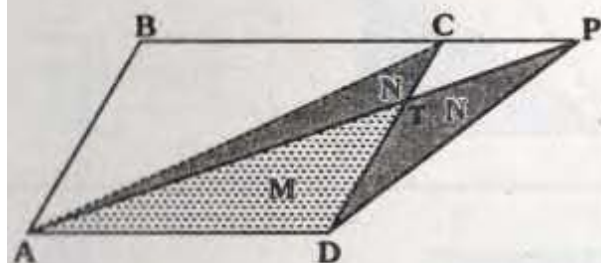


Si: ABCD es paralelogramo.

Se cumple:

$$S_{\triangle APD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Prueba

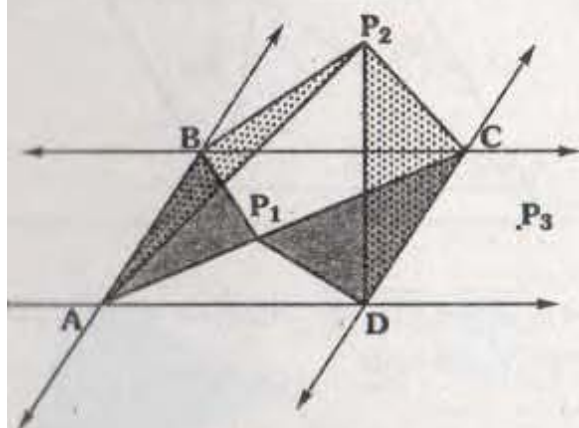


• Como  $\overline{AD} \parallel \overline{CP}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADP} = S_{\triangle ADP} = N$$

$$\bullet S_{\triangle ADP} = M + N$$

$$S_{\triangle ADP} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

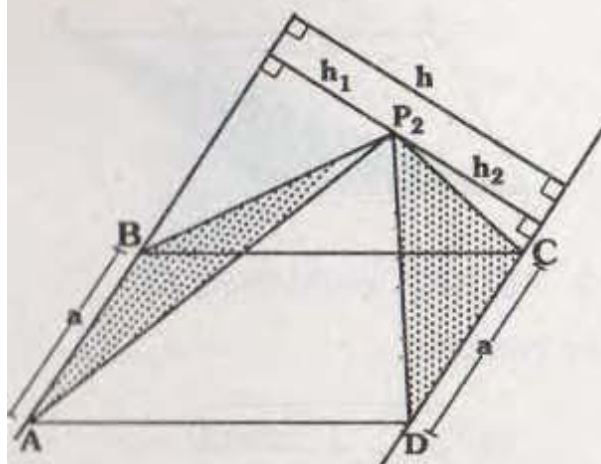


Si ABCD es un paralelogramo y P es un punto entre las rectas paralelas. Se cumple

$$\bullet S_{P_1AB} + S_{P_1CD} = S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\bullet S_{P_1CD} + S_{P_1AD} = S_{P_3BC} + S_{P_3AD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Prueba



• Demostremos para el punto  $P_2$

• Notemos:  $h_1 + h_2 = h$

$$\bullet S_{\square ABCD} = ah$$

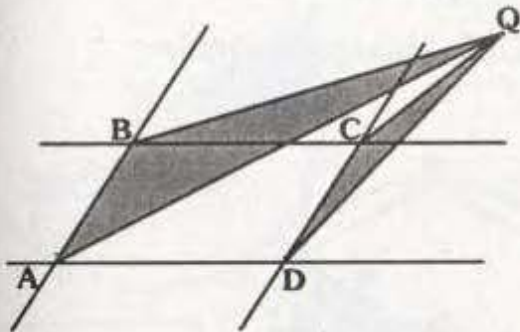
$$\bullet \left. \begin{aligned} S_{P_2AB} &= \frac{ah_1}{2} \\ S_{P_2CD} &= \frac{ah_2}{2} \end{aligned} \right\} S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \frac{a}{2}(h_1 + h_2)$$

$$\Rightarrow S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \frac{ah}{2} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$



Observación 

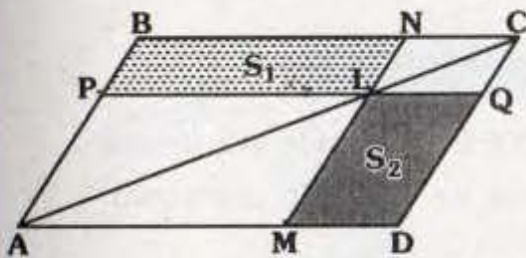
Si un punto no se ubica en la región indicada:



$$S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QCD} \neq \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Más bien se cumple:

$$S_{\triangle QAB} - S_{\triangle QCD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$



Si ABCD es un paralelogramo  
 $\overline{AD} \parallel \overline{PQ}$  y  $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$

Se cumple:

$$S_1 = S_2$$

Prueba 

- Notemos que APLM y LNCQ son paralelogramos, entonces:

$$S_{\triangle APL} = S_{\triangle ALM} \quad \text{y} \quad S_{\triangle LNC} = S_{\triangle LCQ}$$

- En ABCD:  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$

$$S_1 + S_{\triangle APL} + S_{\triangle LNC} = S_2 + S_{\triangle ALM} + S_{\triangle LCQ}$$

$$\therefore S_1 = S_2$$

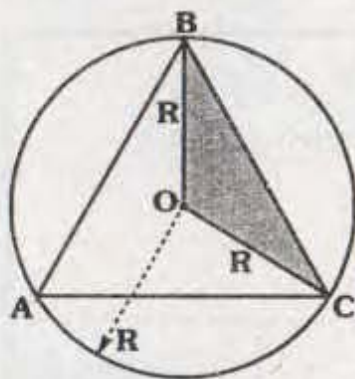
# ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES REGULARES

(En función del circunradio)

En general para hallar el área de una región poligonal, bastará hallar el área de su "triángulo elemental" y multiplicarlo con la cantidad de lados, veamos algunos casos:

## TRIÁNGULO EQUILÁTERO

$\triangle ABC$  : Equilátero

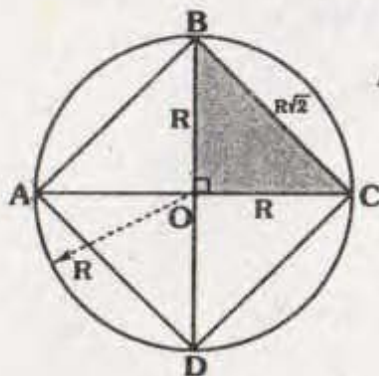


$$S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle AOC}$$

$$\frac{RR}{2} \text{sen} 120^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$$

## CUADRADO



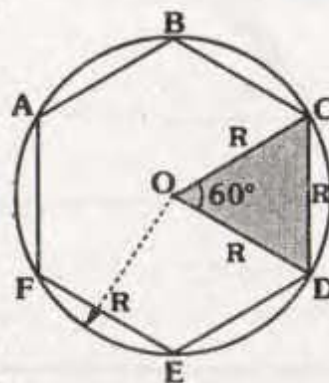
ABCD : Cuadrado

$$S_{ABCD} = 4 S_{\triangle AOC}$$

$$S_{ABCD} = 2R^2$$

## HEXÁGONO REGULAR

ABCDEF: Hexágono regular



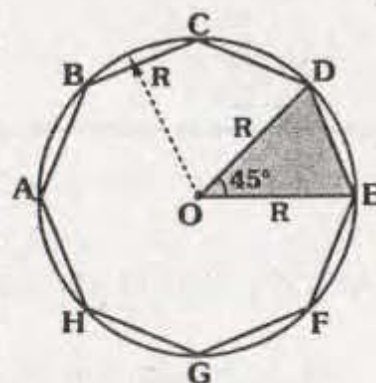
$$S_{ABCDEF} = 6 S_{\triangle AOC}$$

$$\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABCDEF} = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$$

## OCTÓGONO REGULAR

- ABCDEFGH: Octógono regular
- S: área de la región octogonal



$$S = 8 S_{\triangle AOC}$$

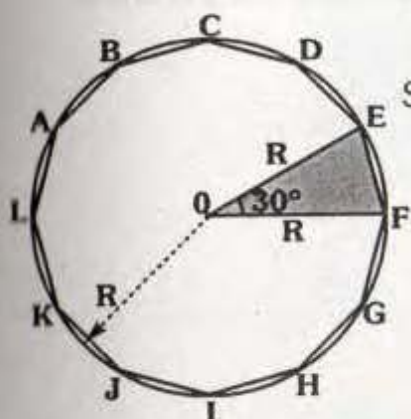
$$\frac{R^2}{2} \text{sen} 45^\circ$$

$$S = 2R^2 \sqrt{2}$$

## DODECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJKL: Dodécagono regular
- S: área de la región poligonal





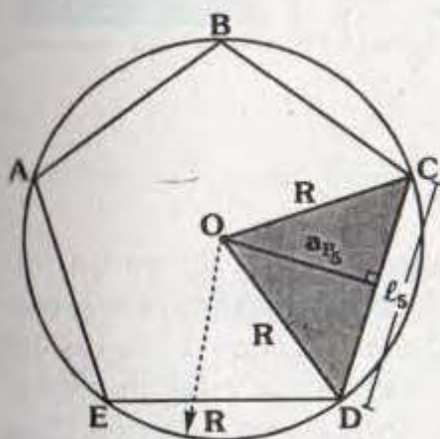
$$S = 12 S_{\triangle EOF}$$

$$\frac{R^2}{2} \sin 30^\circ$$

$$S = 3R^2$$

### PENTÁGONO REGULAR

- ABCDE: Pentágono regular
- S: área de ABCDE



$$S = 5 S_{\triangle AOC}$$

$$\frac{(\ell_5)(a_{p_5})}{2}$$

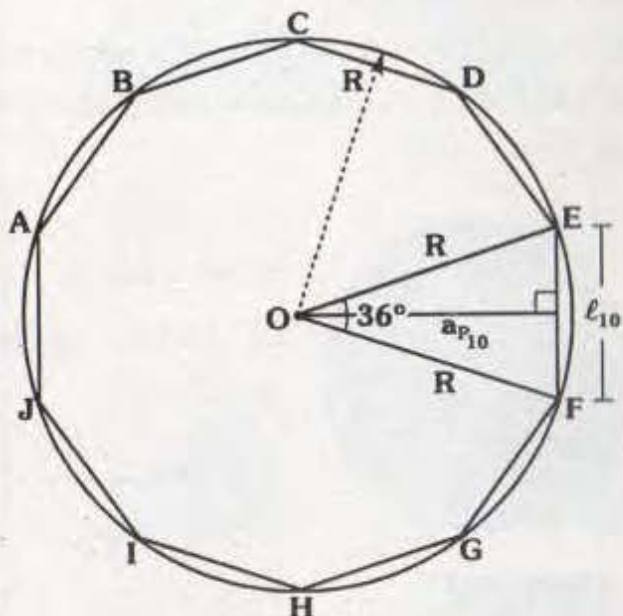
• Pero:  $\ell_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$$a_{p_5} = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

$$S = \frac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

### DECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJ: Decágono regular
- S: Área de la región poligonal



$$S = 10 S_{\triangle EOF}$$

$$\frac{(\ell_{10})(a_{p_{10}})}{2}$$

• Pero:  $\ell_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$

$$a_{p_{10}} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

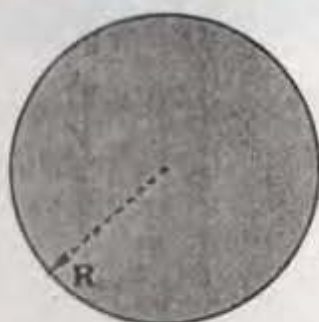
$$\Rightarrow S = \frac{5}{4} R^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

# ÁREAS DEL CÍRCULO Y PARTES NOTABLES

## ÁREA DEL CÍRCULO

El círculo es la región plana limitada por una circunferencia.

El área del círculo es igual a la constante  $\pi(3,14159...)$  multiplicado con el cuadrado de su radio.



En el gráfico:

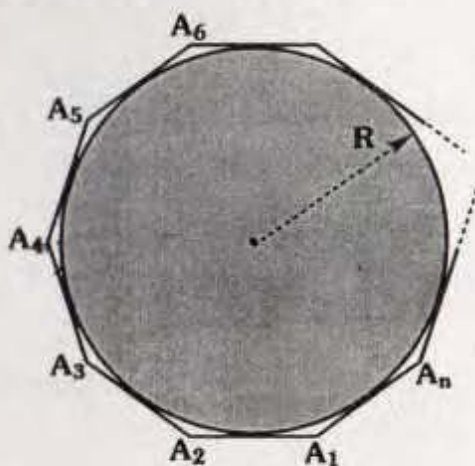
$A_0$  : área del círculo

Se cumple:

$$A_0 = \pi R^2$$

### Prueba

- Una manera de probar el teorema indicado, es usando la expresión dada en la página 21, como todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia y el número de lados tiende al infinito:  $n \rightarrow \infty$ , luego el perímetro del polígono tiende a la longitud de la circunferencia.



$A(\text{poligonal}) \rightarrow A_0$

$$A_0 = pr$$

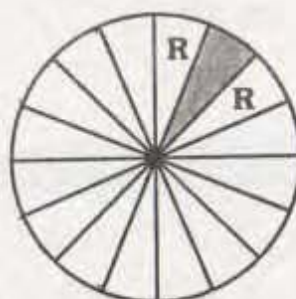
↓

$$\frac{2\pi R}{2}$$

$$\therefore A_0 = \pi R^2$$



### Otra método



Procedemos así:

- Se descompone el círculo en un número par (bastante grande) de sectores; se ordenan dichos sectores tal como se muestra, la cual tiende al área de un paralelogramo cuya base es  $\ell$  (longitud de la semicircunferencia) y altura  $r$ .

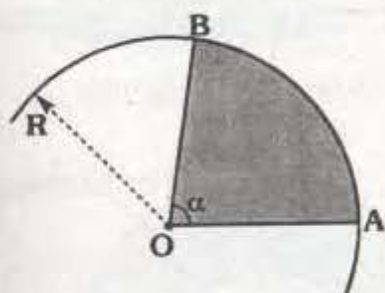
- Como la longitud de la circunferencia(2) es  $2\pi r \Rightarrow \ell = \pi r$

$$A_0 = \ell r \Rightarrow A_0 = \pi r^2$$

## SECTOR CIRCULAR

En el gráfico, la región sombreada es un sector circular:





$\alpha$  en grados sexagesimales. Se cumple:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2$$

**Prueba**

Usando regla de tres simple

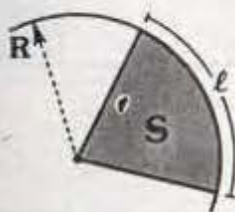
$$360^\circ \rightarrow A_\circ$$

$$\alpha \rightarrow S_{\Delta AOB}$$

Luego:  $S_{\Delta AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} A_\circ$

### Observación 1

Una forma alternativa para el área de un sector circular es en función a la longitud de arco:



$l$ : longitud de arco

Se cumple:  $S = \frac{lR}{2}$

### Observación 2

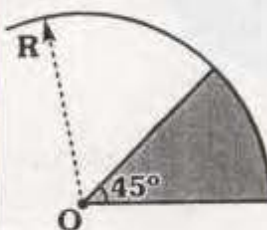
Debido a la presencia de algunos casos particulares, es recomendable recordar:



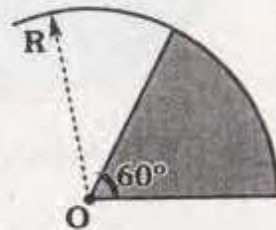
$$A_\circ = \frac{\pi R^2}{2}$$



$$A_\circ = \frac{1}{4} \pi R^2$$



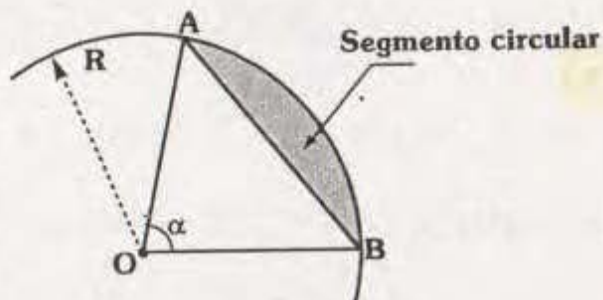
$$A_\circ = \frac{1}{8} \pi R^2$$



$$A_\circ = \frac{1}{6} \pi R^2$$

### SEGMENTO CIRCULAR

Se cumple:

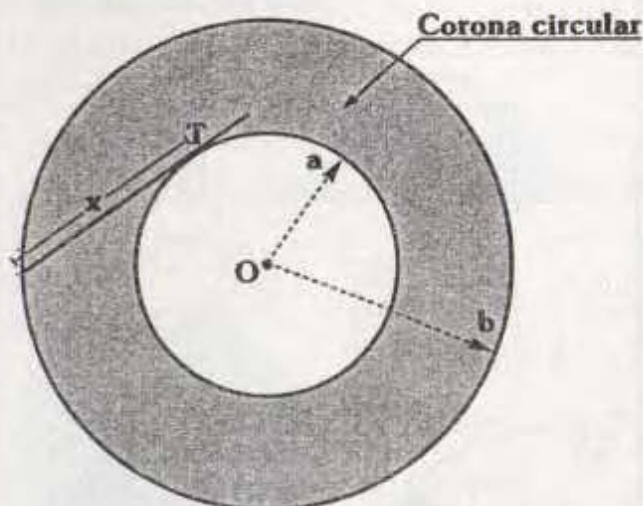


$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AOB} - S_{\Delta AOB}$$

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \text{sen} \alpha$$

# CORONA CIRCULAR

En el gráfico, T es punto de tangencia



- Sea  $A_{cc}$ : Área de la corona circular

Se cumple

$$A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)$$

También:

$$A_{cc} = \pi x^2$$

## Prueba

- $A_{cc} = \pi b^2 - \pi a^2$

$$\Rightarrow A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)$$

- En  $\triangle MTO$ :

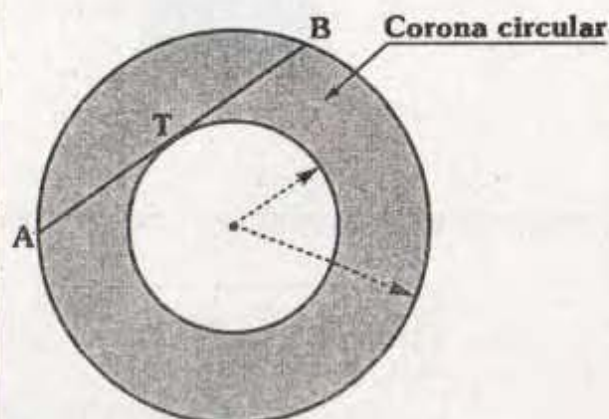
$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow x^2 = b^2 - a^2$$

$$\therefore A_{cc} = \pi x^2$$

## Observación

- T es punto de tangencia.

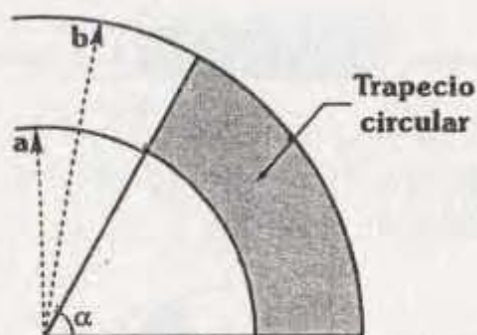


Se cumple:

$$A_{cc} = \frac{1}{4} \pi (AB)^2$$

# TRAPECIO CIRCULAR

$A_{TC}$ : Área del trapecio circular



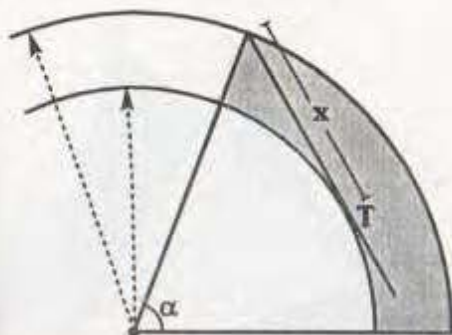
Se cumple:

$$A_{TC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi (b^2 - a^2)$$



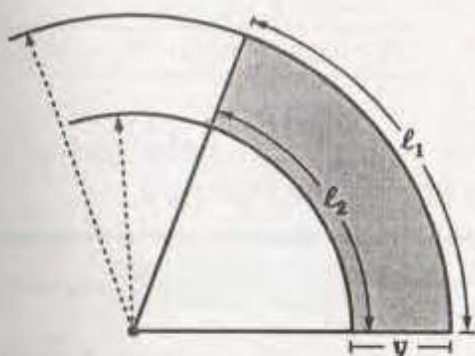
**Observación**

- T es punto de tangencia



Se cumple:

$$A_{TC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi x^2$$



- $\ell_1$  y  $\ell_2$ : longitudes de arco

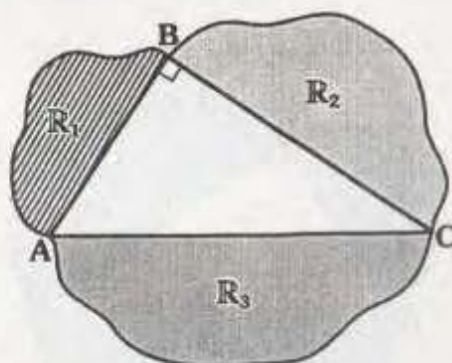
• Se cumple:

$$A_{TC} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{2} y$$

**TEOREMA**

En el gráfico, las regiones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son semejantes, de elementos homólogos

$\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente.



Se cumple:

$$S_{(R_3)} = S_{(R_1)} + S_{(R_2)}$$

**Demostración:**

- Como las regiones son semejantes, entonces:

$$\frac{S_{(R_3)}}{(AC)^2} = \frac{S_{(R_1)}}{(AB)^2} = \frac{S_{(R_2)}}{(BC)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{(R_3)}}{(AC)^2} = \frac{S_{(R_1)} + S_{(R_2)}}{(AB)^2 + (BC)^2} \quad \dots (1)$$

- En  $\triangle ABC$ :

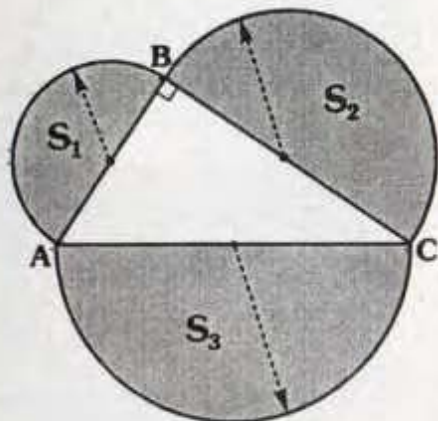
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

- En (1):

$$S_{(R_3)} = S_{(R_1)} + S_{(R_2)}$$

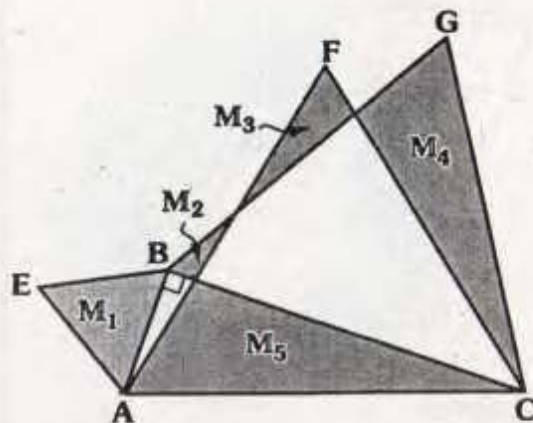
**Observación**

- A manera de corolario veamos algunos casos particulares:



Como los semicírculos son semejantes:

$$S_3 = S_1 + S_2$$



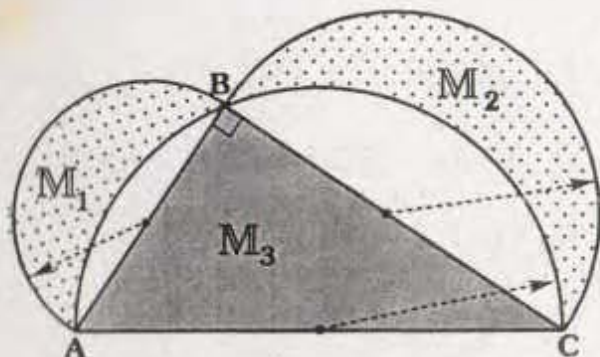
Si los  $\Delta$ s ABE, BGC y AFC son equiláteros, se cumple:

$$S_{\Delta AFC} = S_{\Delta AEB} + S_{\Delta BGC}$$

$$M_5 + M_3 = M_1 + M_2 + M_4$$

- Notar que sólo es condición que los lados del  $\Delta ABC$  sean lados homólogos y las regiones pueden ser internas o externas.

**TEOREMA DE LAS LÚNULAS DE HIPOCRATES**



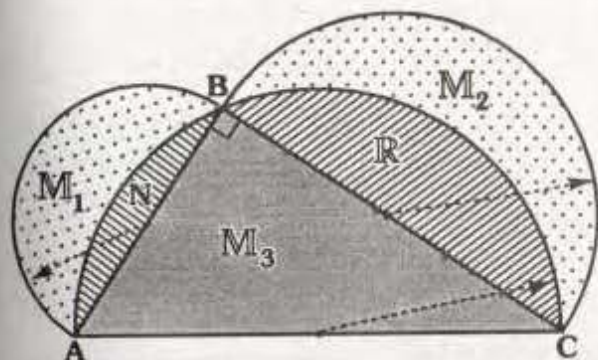
- En el gráfico,  $M_1$  y  $M_2$  son las áreas de las lúnulas y  $M_3$  es el área de la región ABC, se cumple:

$$M_3 = M_1 + M_2$$



**Prueba**

• Usaremos el teorema anterior:



Por corolario del teorema anterior:

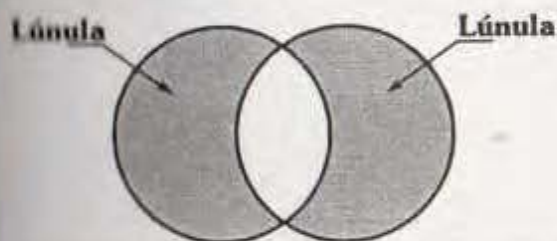
$$\underbrace{S_{AC}} = \underbrace{S_{AB}} + \underbrace{S_{BC}}$$

$$M_3 + N + R = M_1 + N + M_2 + R$$

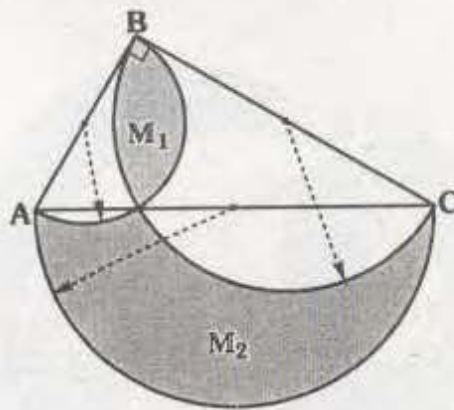
$$\therefore M_3 = M_1 + M_2$$

**Observación**

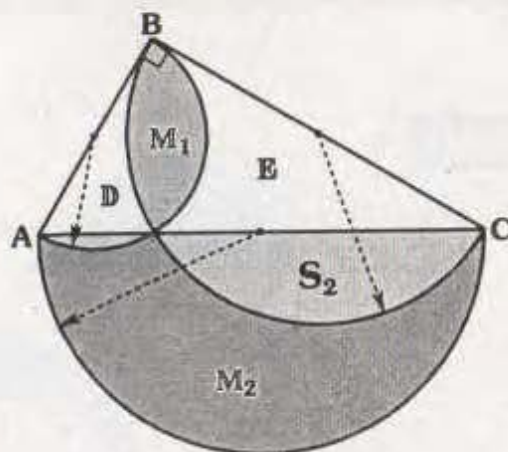
Se llama lúnula a la región no convexa limitada por dos arcos de circunferencias secantes.

**TEOREMA**

En el gráfico, se cumple:



$$M_2 - M_1 = S_{\triangle ABC}$$

**Demostración:**

Por teorema:

$$S_{AC} = \underbrace{S_{AB}} + \underbrace{S_{BC}}$$

$$M_2 + S_1 + S_2 = S_1 + D + M_1 + S_2 + E + M_1$$

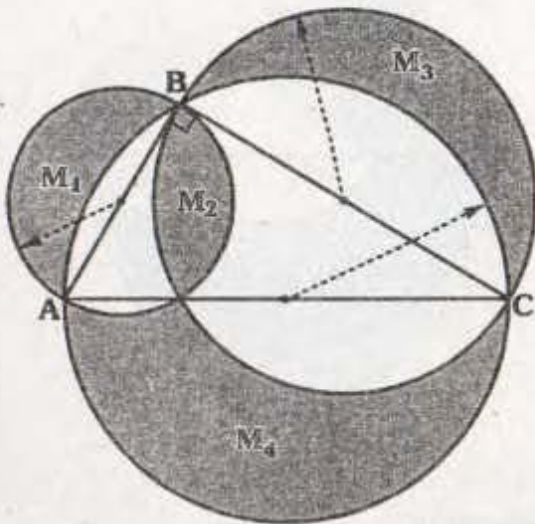
$$\Rightarrow M_2 = \underbrace{D + M_1 + E + M_1}_{S_{\triangle ABC}}$$

$$S_{\triangle ABC}$$

$$\therefore M_2 - M_1 = S_{\triangle ABC}$$

**Observación**

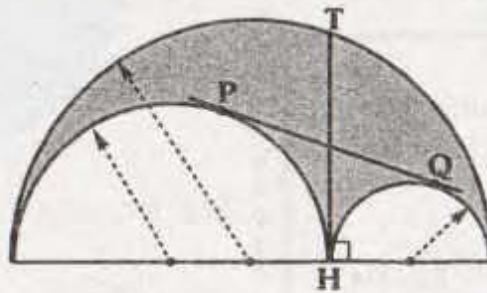
Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:



$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= M_1 + M_3 \\ S_{\triangle ABC} &= M_4 - M_2 \end{aligned} \right\} \boxed{M_4 = M_1 + M_2 + M_3}$$

**TEOREMA**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia.



Sea  $A$  el área de la región sombreada.

Se cumple:

$$\boxed{A = \pi \frac{(PQ)^2}{4} = \pi \frac{(HT)^2}{4}}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

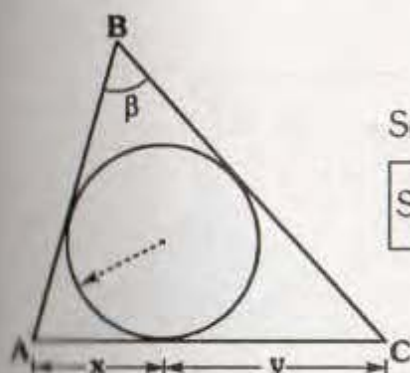


## TEOREMAS ADICIONALES

Ahora conoceremos casos generales y expresiones un tanto algebraicas, pero son fácilmente deducibles.

### TEOREMA

En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita.



Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

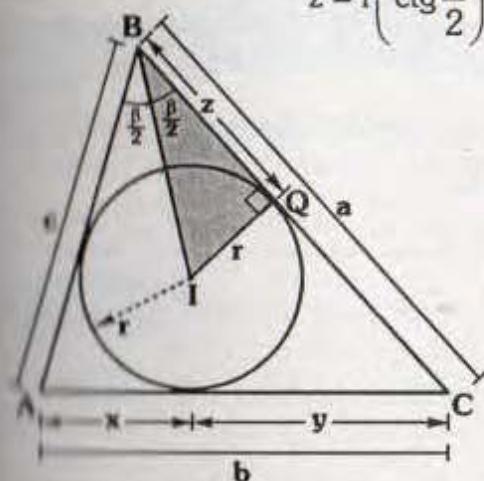
### Demostración:

Conocemos:

$$x = p - a$$

$$y = p - c$$

$$z = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) = p - b$$



Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

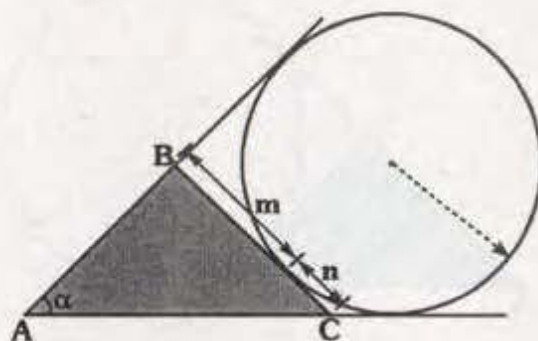
$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = p \cdot x \cdot r \left( \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) y$$

$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = \underbrace{p \cdot r}_{S_{\Delta ABC}} xy \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

### TEOREMA

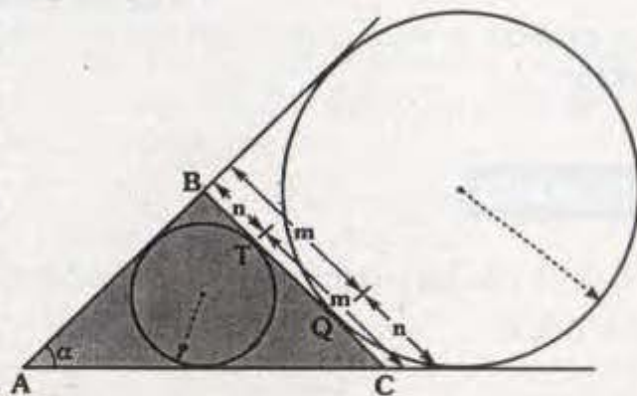
En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  es la circunferencia exinscrita



Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

### Demostración:

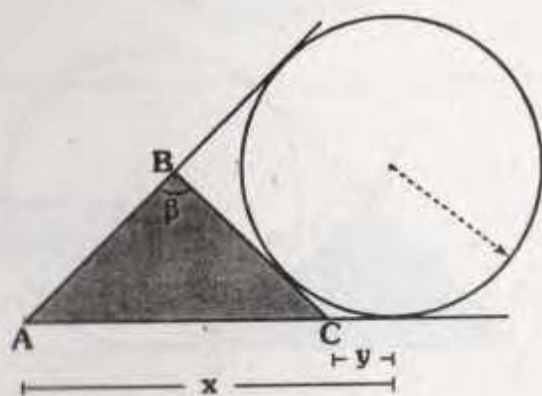


- Se puede proceder usando el teorema de Heron, pero mejor optemos por el resultado anterior.
- Se traza la circunferencia inscrita, por teorema de circunferencia:  $BT=QC$  y  $BQ=CT$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

### TEOREMA

En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia exinscrita.



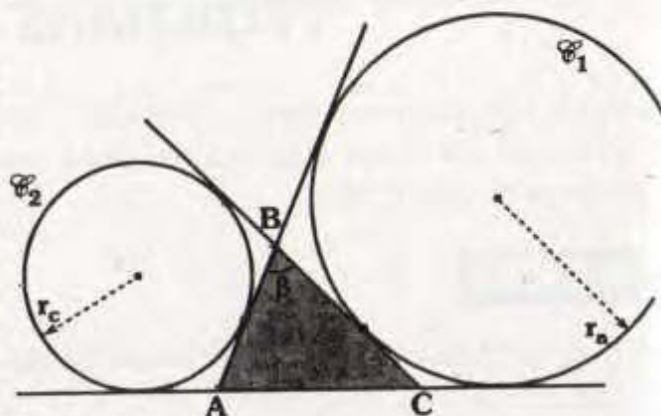
Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

### TEOREMA

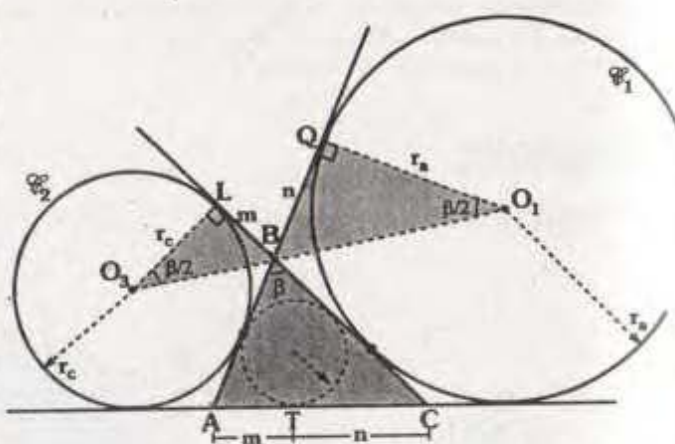
$\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son las circunferencias exinscritas del  $\Delta ABC$



Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r_1 r_2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

### Prueba



- Trazamos la circunferencia inscrita en el  $\Delta ABC$
- Sabemos:

$$S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \quad \dots (1)$$

- Por teoremas de circunferencia:

$$AT = BL = m = r_2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

$$BQ = TC = n = r_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$



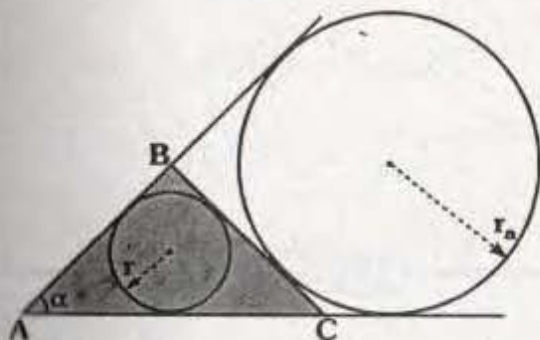
• En (1):

$$S_{\Delta ABC} = \left( r_c \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \cdot \left( r_a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = r_a r_c \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

### TEOREMA

En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  es la circunferencia inscrita y  $\mathcal{C}_2$  es la circunferencia exinscrita.



No cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r_a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

### Nota

El lector puede encontrar más expresiones para casos particulares ( $\alpha = 90^\circ$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ....)

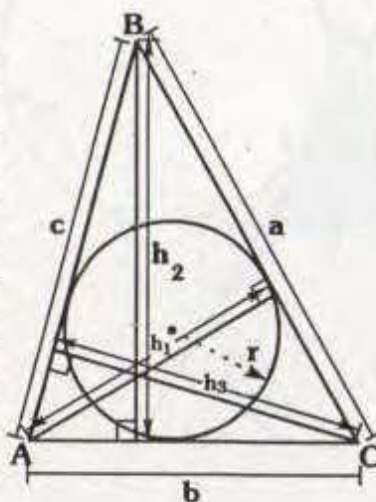
### TEOREMA

En un triángulo  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son las longitudes de sus alturas y " $r$ " es su inradio, se cumple:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

### Demostración

• Usemos la fórmula básica:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{ah_1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_1} = \frac{a}{2S_{\Delta ABC}}$$

• Análogamente tenemos:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2S_{\Delta ABC}} \text{ y } \frac{1}{h_3} = \frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a+b+c}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \dots (1)$$

• También sabemos:

$$S_{\Delta ABC} = pr \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \dots (2)$$

• De (1) y (2):

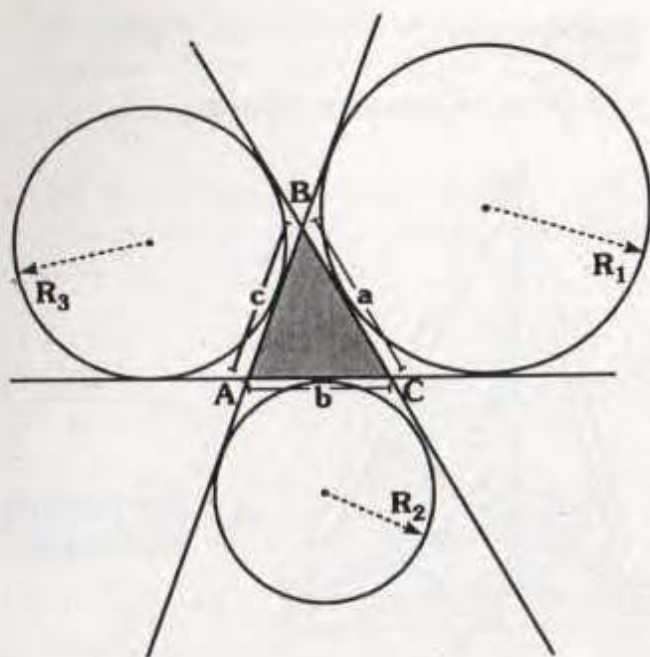
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

### TEOREMA

Sean  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  los exradios de un triángulo y  $r$  su inradio. Sea  $S$  el área de su región, se cumple:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$S = \sqrt{rR_1R_2R_3}$$



Demostremos el primer resultado

• Usemos las siguientes expresiones

$$S_{\Delta ABC} = R_1(p-a) \quad \dots(1)$$

$$S_{\Delta ABC} = R_2(p-b) \quad \dots(2)$$

$$S_{\Delta ABC} = R_3(p-c) \quad \dots(3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{p-a}{S_{\Delta ABC}} ; \frac{1}{R_2} = \frac{p-b}{S_{\Delta ABC}} \quad y$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{p-c}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad \dots(\alpha)$$

• Como  $S_{\Delta ABC} = pr$  ... (4)

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad \dots(\beta)$$

• De  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ahora para el segundo resultado:

• Multiplicando las expresiones (1), (2), (3) y (4):

$$(S_{\Delta ABC})^4 = p(p-a)(p-b)(p-c) \cdot rR_1R_2R_3 \dots (\theta)$$

• Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

• Reemplazando en  $(\theta)$

$$(S_{\Delta ABC})^2 = rR_1R_2R_3$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = \sqrt{rR_1R_2R_3}$$

### Observación

• De los últimos resultados, encontramos una relación entre los exradios y alturas de un triángulo:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

• Si usamos el teorema de las medias para  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ :

$$MA \geq MH$$

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \xrightarrow{\frac{1}{r}}$$

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 9r$$

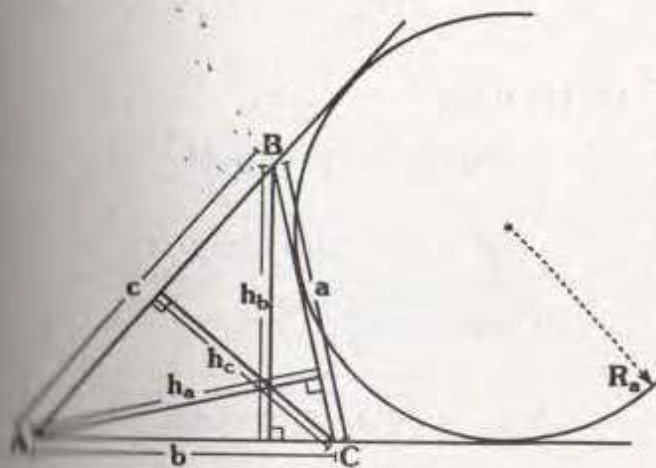
• Análogamente para las alturas:

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r$$



**TEOREMA**

En el gráfico,  $R_a$  es exradio relativo a  $\overline{BC}$  y  $h_a$ ,  $h_b$  y  $h_c$  son las alturas.



Se cumple: 
$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

Análogamente:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \quad \frac{1}{R_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

**Prueba**

• Por la fórmula básica, se tiene:

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S_{\triangle ABC}} \quad ; \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S_{\triangle ABC}} \quad y$$

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{b+c-a}{2S_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{p-a}{2S_{\triangle ABC}} \quad \dots(1)$$

• Pero:  $S_{\triangle ABC} = R_a(p-a)$

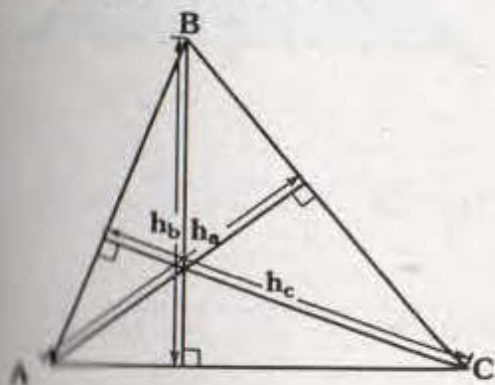
$$\Rightarrow \frac{1}{R_a} = \frac{p-a}{2S_{\triangle ABC}} \quad \dots(2)$$

• De (1) y (2):

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

**Observación**

Con los resultados anteriores se demuestra fácilmente una expresión para el área en función de las alturas.



Sea  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right)$

Usando:  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{rR_aR_bR_c}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}$$

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

Tendremos:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4 \sqrt{H \left( H - \frac{1}{h_a} \right) \left( H - \frac{1}{h_b} \right) \left( H - \frac{1}{h_c} \right)}}$$

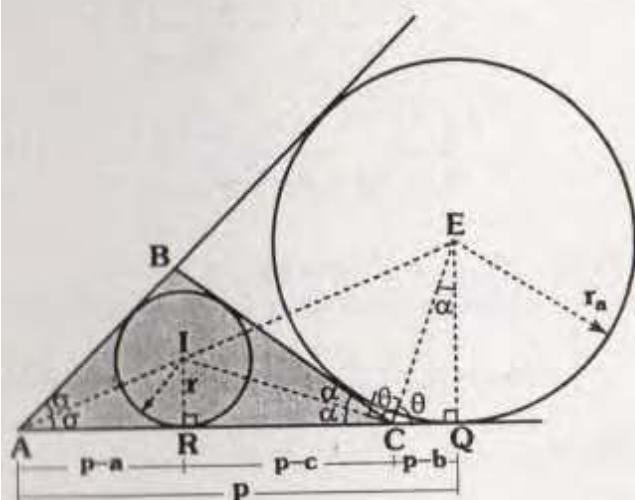
# OTRA MANERA DE DEMOSTRAR LA FÓRMULA DE HERÓN

Sea  $AB = c$

$BC = a$

$AC = b$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



• Trazamos la circunferencia inscrita y la exinscrita relativa a  $\overline{BC}$  y sean  $r$  y  $r_a$  sus respectivos radios.

• Por teorema de circunferencia:

$$AR = p-a; RC = p-c; CQ = p-b \quad \text{y}$$

$$AQ = p$$

•  $\angle IRC \sim \angle CQE$

$$\Rightarrow \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r_a}$$

$$\Rightarrow rr_a = (p-c)(p-b) \quad \dots(1)$$

•  $\angle AQE \sim \angle ARI$

$$\Rightarrow \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \quad \dots(2)$$

• De (1) y (2):

$$r^2 p = (p-a)(p-c)(p-b)$$

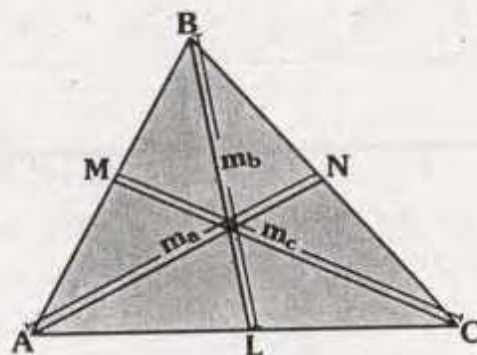
$$\underbrace{r^2 p^2}_{(S_{\triangle ABC})^2} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$(S_{\triangle ABC})^2$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

## AREA EN FUNCIÓN DE LAS MEDIANAS

En el gráfico,  $\overline{AN}$ ,  $\overline{CM}$  y  $\overline{BL}$  son medianas.



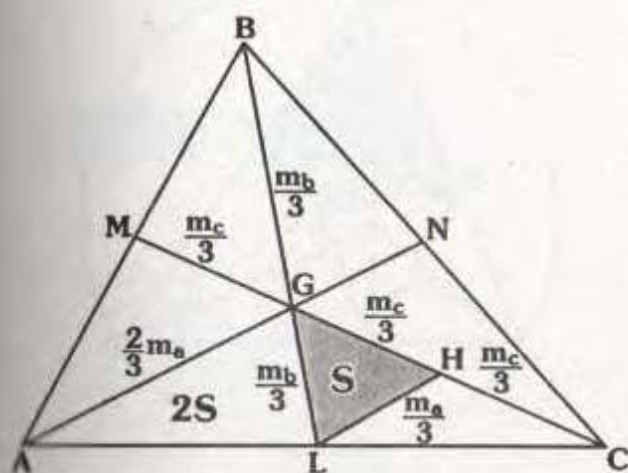
$$\text{Sea } M = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}$$



**Prueba**



- Se traza  $\overline{LH} \parallel \overline{AG}$ , luego:

$$LH = \frac{AG}{2} \quad \text{y} \quad GH = LC$$

- Luego tenemos:

$$S_{\triangle ABC} = 12 S_{\triangle LGH} \quad \dots (1)$$

- Para el  $\triangle LGH$ : usemos el teorema de Heron:

$$\text{Sea } p = \frac{1}{2} \left( \frac{m_a + m_b + m_c}{3} \right) \Rightarrow p = \frac{M}{3}$$

$$S = \sqrt{p \left( p - \frac{m_a}{3} \right) \left( p - \frac{m_b}{3} \right) \left( p - \frac{m_c}{3} \right)}$$

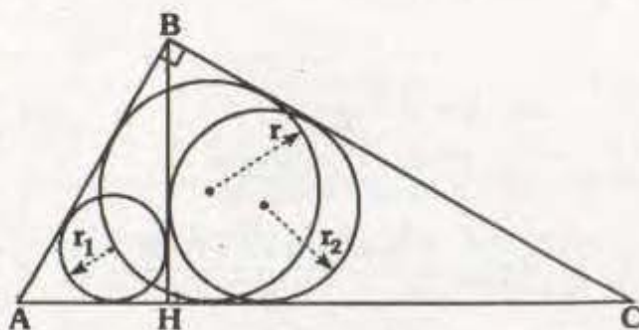
$$S = \frac{1}{9} \sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

- En (1):

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

**TEOREMA**

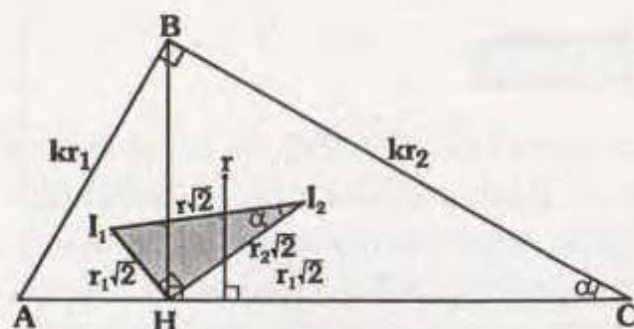
- En el gráfico,  $r$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son inradios de los triángulos  $ABC$ ,  $AHB$  y  $BHC$  respectivamente.



- Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = r^2 \frac{(r_1 + r_2 + r_3)}{(r_1 + r_2 - r)}$$

Demostración:



- Notemos que  $\triangle ABC \sim \triangle I_1 I_2 H$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle I_1 I_2 H}} = \frac{r^2}{x^2} \quad \dots (1)$$

- Donde "x" es inradio del  $\triangle I_1 I_2 H$

- Propiedad:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow I_1 I_2 = r\sqrt{2}$$

• En  $\triangle I_1HI_2$ :

$$r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + 2x$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 - r = \sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{(r_1 + r_2 - r)}{\sqrt{2}} \quad \dots(2)$$

$$S_{\triangle I_1HI_2} = \frac{(r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{2} + r\sqrt{2})}{2} x$$

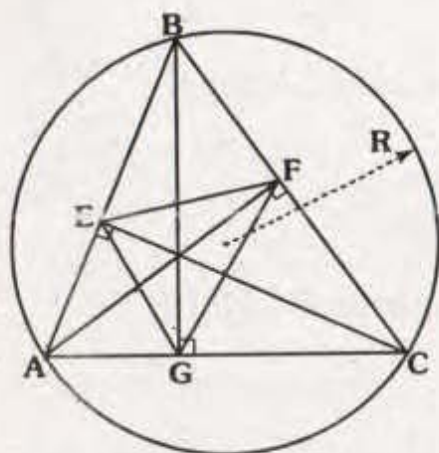
$$= \frac{(r_1 + r_2 + r)}{2} (r_1 + r_2 + r) \quad \dots(3)$$

• De (1), (2) y (3):

$$S_{\triangle ABC} = r^2 \left( \frac{r_1 + r_2 + r}{r_1 + r_2 - r} \right)$$

### TEOREMA

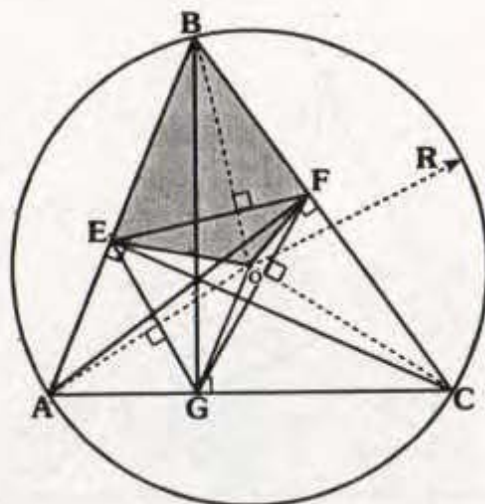
En el gráfico, el  $\triangle ABC$  es acutángulo y "p" es el semiperímetro del triángulo órtico EFG.



Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = pR$$

### Demostración:



• Por teorema de puntos notables:

$$\overline{OB} \perp \overline{EF}; \overline{OA} \perp \overline{EG} \text{ y } \overline{OC} \perp \overline{FG}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle EOFB} + S_{\triangle AEOG} + S_{\triangle FOGC}$$

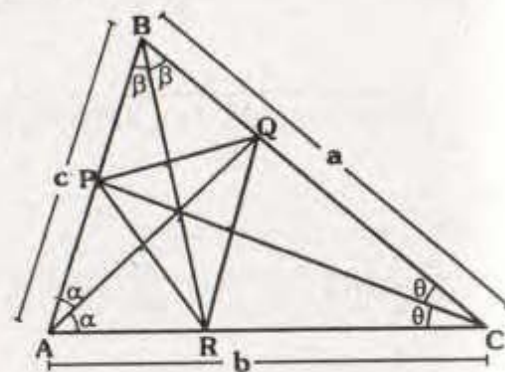
$$\frac{(EF)R}{2} + \frac{(EG)R}{2} + \frac{(FG)R}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = R \left( \frac{EF + EG + FG}{2} \right)$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = pR$$

### TEOREMA

En el gráfico, el  $\triangle PQR$  es el triángulo incéntrico.

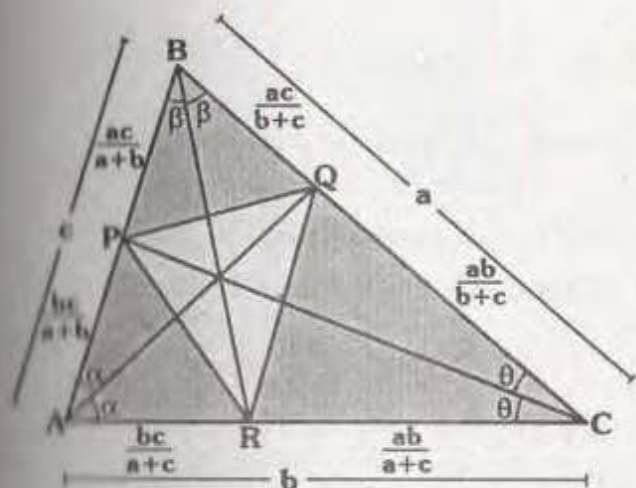




Se cumple:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

Prueba



Primero hallemos cada uno de las longitudes de los segmentos determinados por las bisectrices, por ejemplo:

$$AP = \frac{bc}{a+b} \quad \text{y} \quad PB = \frac{ac}{a+b}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(PB)(BQ)}{ac}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}$$

...(1)

Análogamente:

$$\frac{S_{\Delta APR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

...(2)

$$\frac{S_{\Delta CQR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

...(3)

• Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

• Ordenando tenemos:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

Observación

Usando el resultado anterior y apoyandonos en el teorema de las medias para los lados:

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

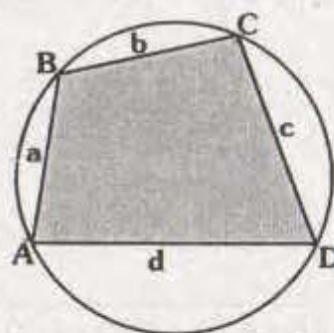
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{2abc}{(a+c)(b+c)(a+b)}$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} \leq \frac{1}{4}$$

### ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO INSCRITO O INSCRIPTIBLE

(Fórmula de Brahmagupta)

En el gráfico, el  $\square ABCD$  es inscrito.



Sea:

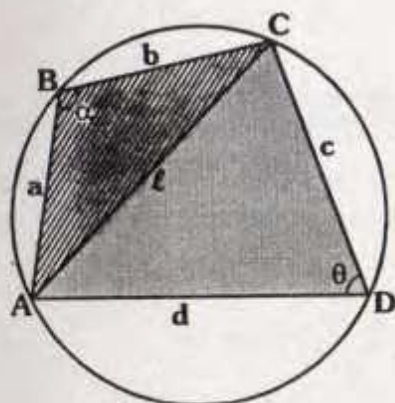
$$p = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Se cumple:

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

### Demostración:

- Como no sabemos si los lados opuestos son paralelos y para no considerar casos, optemos por obtener el área total por partes, así:



$$\begin{aligned} S_{\triangle ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} \\ S &= \frac{ab}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{cd}{2} \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Como } \alpha + \theta &= 180^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \theta \\ \Rightarrow 2S &= (ab + cd) \operatorname{sen} \theta \Rightarrow 4S = (2ab + 2cd) \operatorname{sen} \theta \quad \dots(1) \end{aligned}$$

- Usando teorema de cosenos en  $\triangle ABC$  y  $\triangle ACD$ :

$$\left. \begin{aligned} \ell^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ \ell^2 &= d^2 + c^2 - 2cd \cos \theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c^2 + d^2 - a^2 - b^2 &= (2ab + 2cd) \cos \theta \end{aligned}$$

Como  $\alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \theta$

- Sumando los cuadrados de las expresiones (1) y (2)

$$\begin{aligned} 16S^2 + (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) &= (2ab + 2cd)^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 \\ \Rightarrow 16S^2 &= (2ab + 2cd)^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 \\ 16S^2 &= (2ab + 2cd + c^2 + d^2 - a^2 - b^2)(2ab + 2cd - c^2 - d^2 + a^2 + b^2) \end{aligned}$$

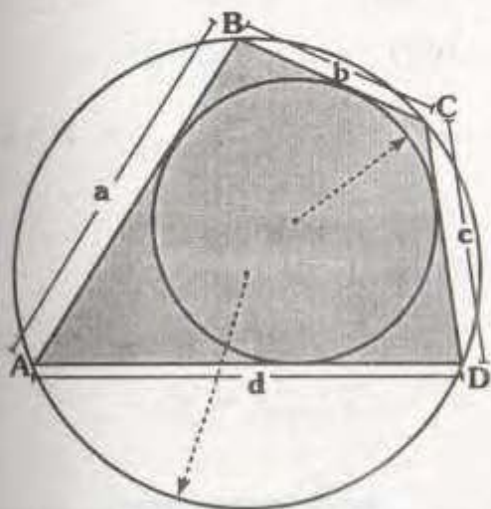
- Ordenando:  $16S^2 = [(c+d)^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2]$

$$\begin{aligned} 16S^2 &= \underbrace{(c+d+a-b)}_{(2p-2b)} \underbrace{(c+d+b-a)}_{(2p-2a)} \underbrace{(a+b+c-d)}_{(2p-2d)} \underbrace{(a+b+d-c)}_{(2p-2c)} \\ \Rightarrow 16S^2 &= 2(p-b)2(p-a)2(p-d)2(p-c) \end{aligned}$$

$$\therefore S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$



### PARA UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO E INSCRITO A LA VEZ (Bicéntrico)



En el gráfico, el  $\triangle ABCD$  es inscrito y circunscrito, al cual se denomina cuadrilátero bicéntrico.

Se cumple:

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{abcd}$$

**Prueba**

- Usando el teorema de Pitot:

$$a + c = b + d = p$$

- Por teorema de Brahmagupta:

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a+b & a+b & c+d & c+d \end{array}$$

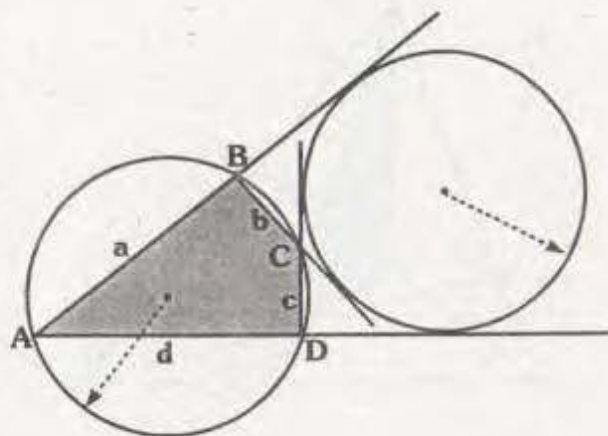
$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{abcd}$$

### Observación

- El teorema también es válida para un cuadrilátero es inscriptible y circunscriptible a la vez.

### PARA UN CUADRILÁTERO INSCRITO Y EXINSCRITO A LA VEZ

En el gráfico, el  $\triangle ABCD$  es inscrito y exinscrito.



Se cumple:

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{abcd}$$

**Prueba**

- Por la fórmula de Brahmagupta:

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \dots (1)$$

$$\text{con } p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

- Por teorema de Steiner:

$$a - c = d - b$$

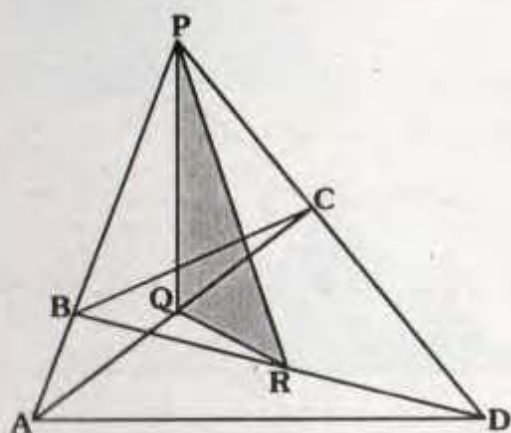
$$\Rightarrow a + b = c + d = p$$

• En (1)

$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{badc}$$

### TEOREMA

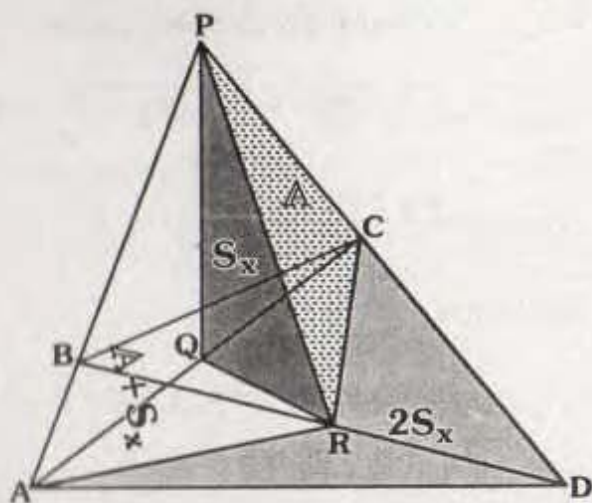
Sea el cuadrilátero convexo ABCD; sea p la intersección de las prolongaciones de  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$ ; Q y R son puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  respectivamente.



Se cumple:

$$S_{\triangle ABCD} = 4S_{(\triangle QPR)}$$

Demostración:



• Sea  $S_{\triangle PRC} = A$  y  $S_{\triangle PQR} = S_x$

• En  $\triangle PCR$ :

$$S_{\triangle RQPC} = S_{\triangle APQR} = A + S_x$$

• En  $\triangle APD$ : como  $BR = RD$

$$\Rightarrow S_{\triangle ARP} = S_{\triangle ADPR} = A + 2S_x$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADCR} = 2S_x$$

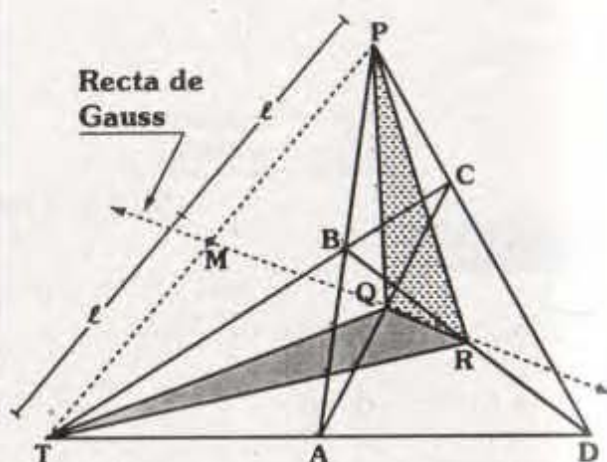
• En  $\triangle ABCD$ :

$$S_{\triangle ABCR} = S_{\triangle ADCR} = 2S_x$$

$$S_{\triangle ABCD} = 4S_x$$

### Observación

• Usando el resultado anterior, tendremos:



Si  $AQ = QC$  y  $BR = RD$

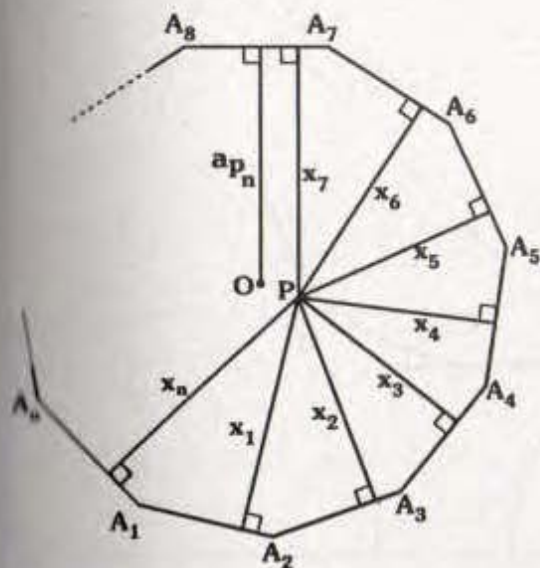
$$\Rightarrow S_{\triangle TQR} = S_{\triangle QPR}$$

• Además la prolongación de  $\overline{RQ}$ , llegará al punto medio de  $\overline{TP}$ , a dicha recta se le conoce como: "RECTA DE GAUSS"



**TEOREMA DE VIVIANI**

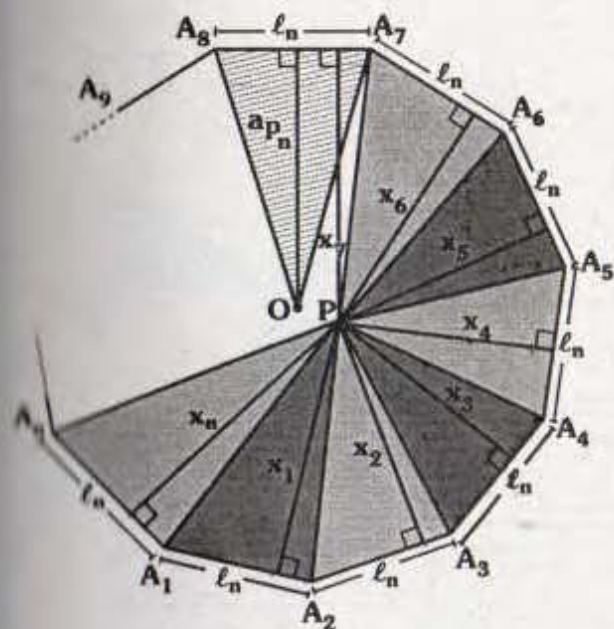
La suma de las distancias de un punto interior a todos los lados es igual al producto entre el número de lados con su respectivo apotema.



Sea  $A_1A_2A_3\dots A_n$  un polígono regular de "n" lados y centro  $O$ ,  $P$  es un punto interior del polígono.

Se cumple:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n(ap_n)$$

**Demostración:**

$$\Rightarrow S = n(S_{\triangle A_1OA_2})$$

$$\frac{(\ell_n)ap}{2}$$

$$S = n \frac{(\ell_n)(ap)}{2} \quad \dots(1)$$

• También:

$$S = S_{\triangle PA_1A_2} + S_{\triangle PA_2A_3} + S_{\triangle PA_3A_4} + \dots + S_{\triangle PA_nA_1}$$

$$\frac{(\ell_n)x_1}{2} + \frac{(\ell_n)x_2}{2} + \frac{(\ell_n)x_3}{2} + \dots + \frac{(\ell_n)x_n}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \quad \dots(2)$$

• De (1) y (2):

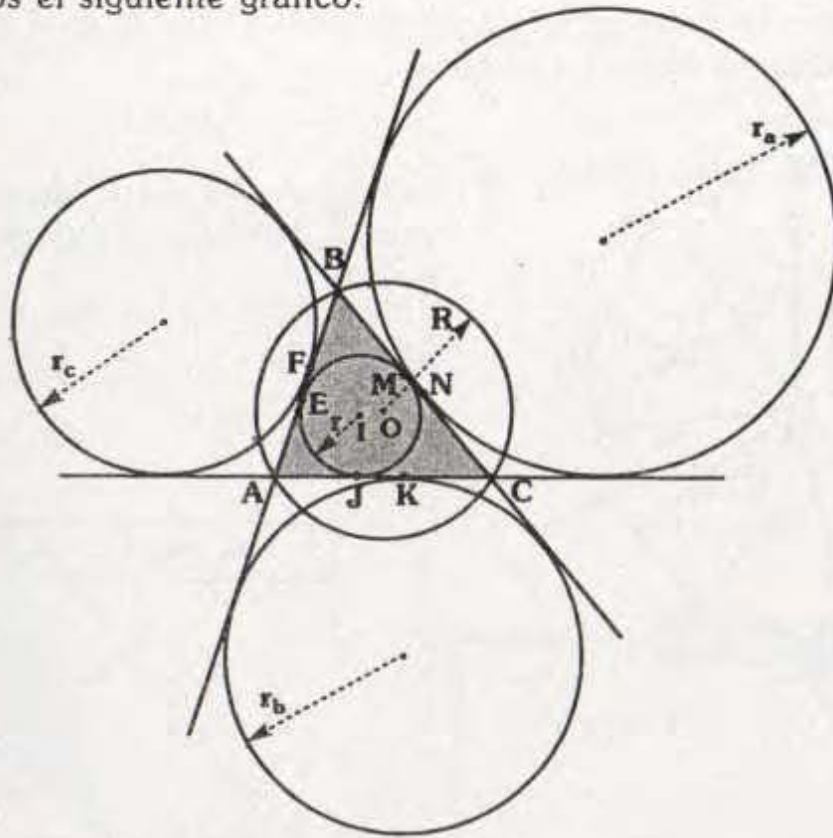
$$\frac{n(\ell_n)(ap)}{2} = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\therefore n(ap_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Sea "S" el área de la región poligonal

El siguiente grupo de teoremas se deja como ejercicio para el lector:

Consideremos el siguiente gráfico:



Sean  $AB=c$ ;  $BC=a$  y  $AC=b$  con:  $a \geq b \geq c$

$h_a$ ;  $h_b$  y  $h_c$ : alturas relativas a los lados que miden  $a$ ,  $b$  y  $c$

$p$ : semiperímetro de  $ABC$

Se cumple:

$$S_{\Delta IJK} = S_{\Delta IMN} + S_{\Delta IEF}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{R}{2} h_a h_b h_c} = \frac{2R^2}{abc} h_a h_b h_c = \frac{1}{2} \sqrt{abch_a h_b h_c}$$

$$S_{\Delta ABC} = r \frac{ar_a}{r_a - r} = r \frac{br_b}{r_b - r} = r \frac{cr_c}{r_c - r}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{r(a+b)r_c}{r+r_c} = \frac{r(a+c)r_b}{r+r_b} = \frac{r(b+c)r_a}{r+r_a}$$

$$ab = r_c + r_a r_b$$

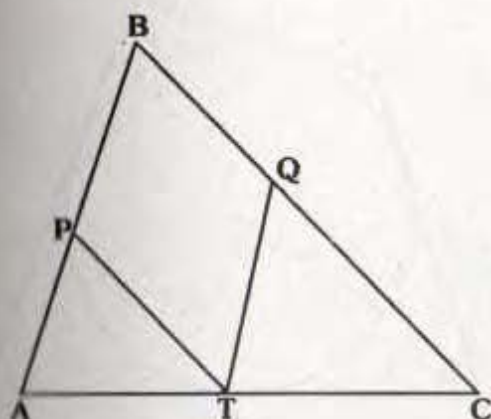
$$bc = r_a + r_b r_c$$

$$ac = r_b + r_a r_c$$

$$S_{\Delta IJK} = S_{\Delta IEF} + S_{\Delta IMN}$$



En el gráfico, TPBQ es paralelogramo.

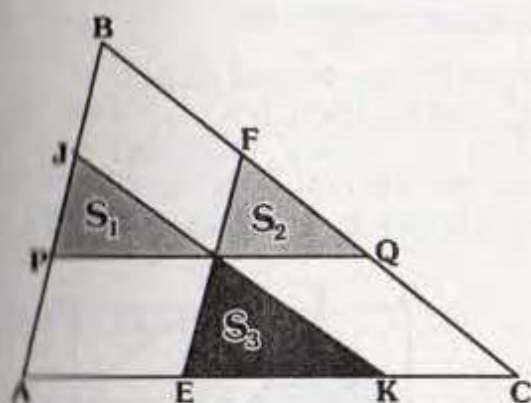


Se cumple:

$$\sqrt{S_{\triangle ABC}} = \sqrt{S_{\triangle APT}} + \sqrt{S_{\triangle TQC}}$$

En el gráfico,

$PQ \parallel AC$ ;  $JK \parallel BC$  y  $EF \parallel AB$



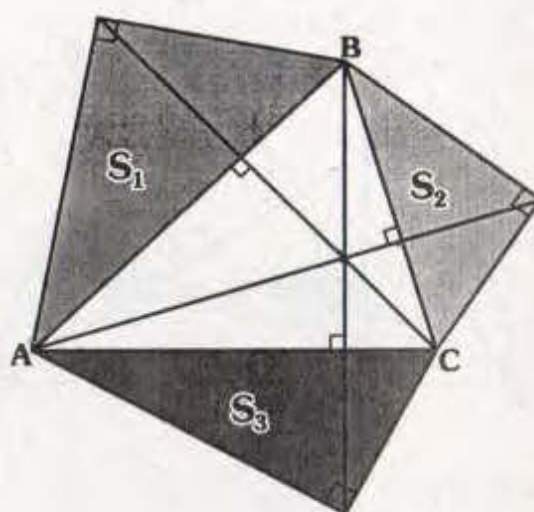
Se cumple:

$$\sqrt{S_{\triangle ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

$$S_{\triangle ABC} \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \geq \frac{9}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}}$$

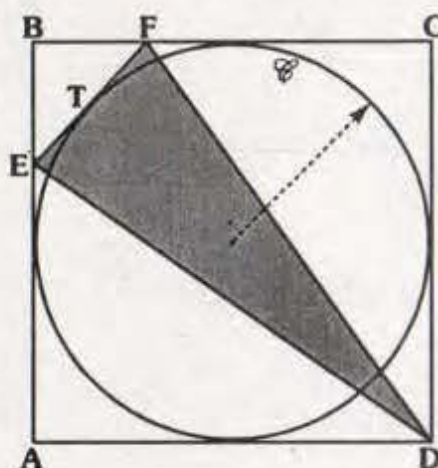
En el gráfico se cumple:



$$(S_{\triangle ABC})^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$3S_{\triangle ABC} \geq S_1 + S_2 + S_3$$

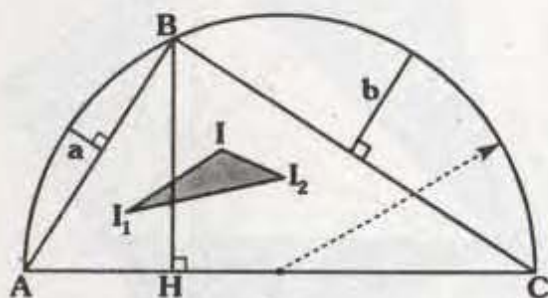
En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD y T es punto de tangencia.



Se cumple:

$$\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle ABCD}} = \frac{1}{4}$$

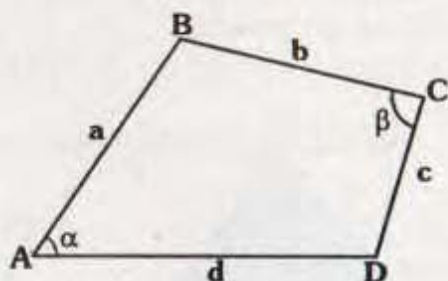
En el gráfico,  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$  son incentros de  $ABC$ ,  $AHB$  y  $BHC$  respectivamente "a" y "b" son flechas



Se cumple:

$$S_{\Delta I_1 I_2} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}$$

### Una expresión general

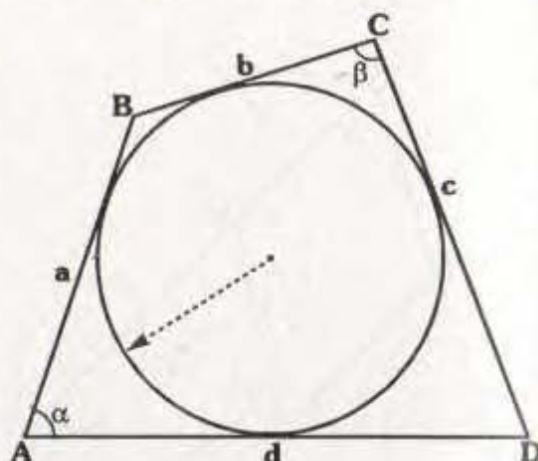


Sea:  $p = \frac{a+b+c+d}{4}$

Se cumple:

$$(S_{\square ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

• Si el  $\square ABCD$  es circunscrito



Se cumple

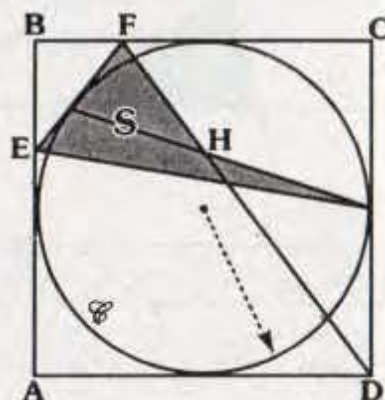
$$S_{\square ABCD} = abcd \sin\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

**Nota**  
El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.

### Un buen resultado:

Propuesto por Miguel Yépez  
(FC-UNMSM;2010)

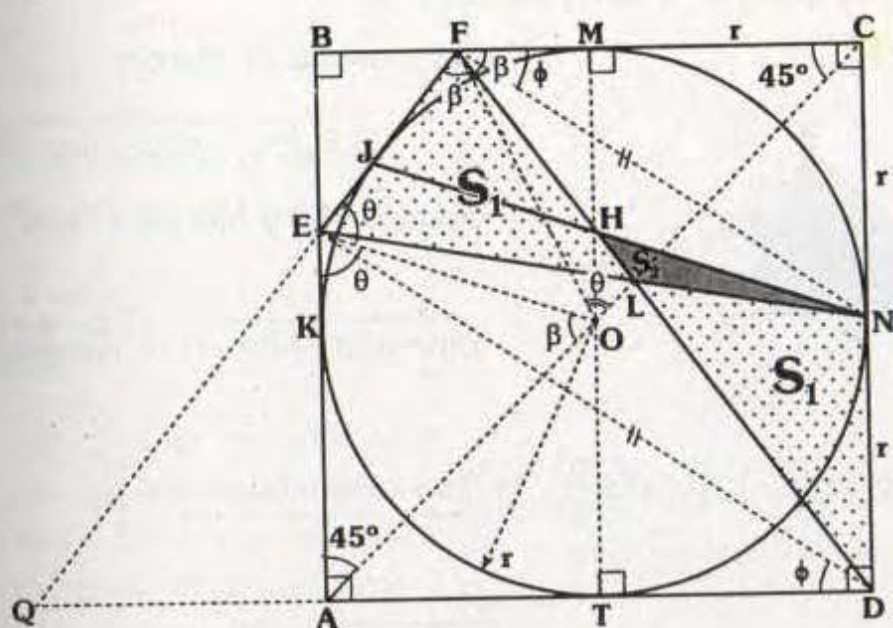
En el gráfico ABCD es un cuadrado y  $\square$  está inscrito en el pentágono AEFCD



Se cumple:

$$\frac{S}{S_{(ABCD)}} = \frac{1}{8}$$





1 Notemos que:  $\triangle AEO \sim \triangle COF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{OC} = \frac{AO}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{2r} = \frac{r}{FC}$$

2 Luego:  $\angle EAD \sim \angle NCF \Rightarrow \overline{ED} \parallel \overline{FN}$

3 Como  $\overline{ED} \parallel \overline{FN} \Rightarrow S_{\triangle ELF} = S_{\triangle LND} = S_1$

4 El área pedida "S" es  $S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_{\triangle HND}$

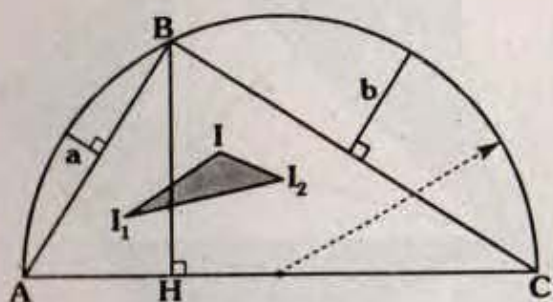
5 Por teorema de Newton en  $\triangle QFCD$ :  $\overline{JN}$ ,  $\overline{TM}$ ,  $\overline{FD}$  y  $\overline{QC}$  concurren en H.

6 Como  $\overline{TM}$  es diámetro  $\Rightarrow MT = 2r \Rightarrow \underbrace{S_1 + S_2}_S = S_{\triangle HND} = \frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}$

7  $S_{(ABCD)} = (2r)^2 = 4r^2$

$$\therefore \frac{S}{S_{(ABCD)}} = \frac{1}{8}$$

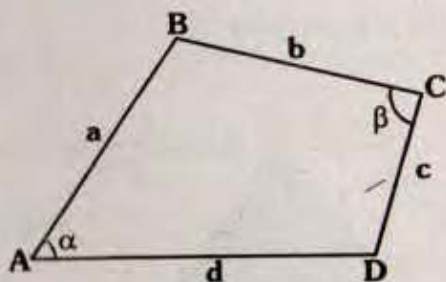
En el gráfico,  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$  son incentros de  $\triangle ABC$ ,  $\triangle AHB$  y  $\triangle BHC$  respectivamente "a" y "b" son flechas



Se cumple:

$$S_{\triangle I I_1 I_2} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}$$

### Una expresión general

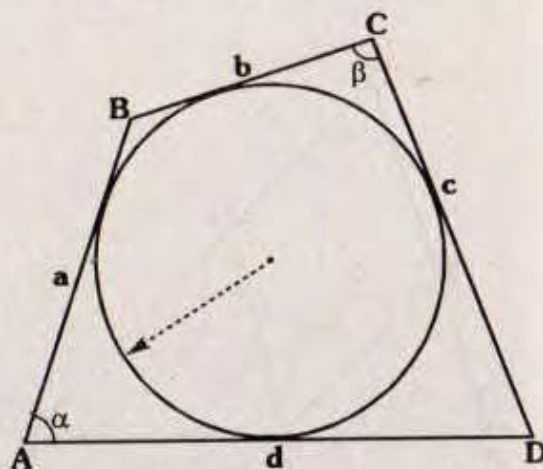


Sea:  $p = \frac{a+b+c+d}{4}$

Se cumple:

$$(S_{ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

• Si el  $\triangle ABCD$  es circunscrito



Se cumple

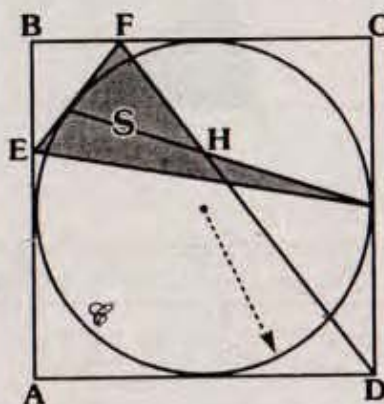
$$S_{\triangle ABCD} = abcd \sin\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

**Nota**  
El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.

### Un buen resultado:

Propuesto por Miguel Yépez  
(FC-UNMSM;2010)

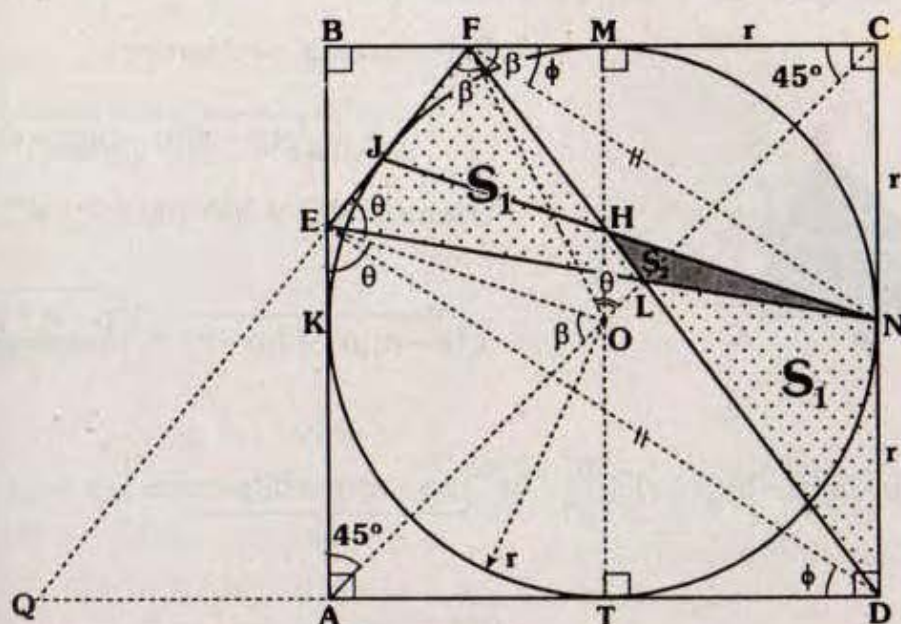
En el gráfico ABCD es un cuadrado y está inscrito en el pentágono AEFC



Se cumple:

$$\frac{S}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$$





- Notemos que:  $\triangle AEO \sim \triangle COF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{OC} = \frac{AO}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{2r} = \frac{r}{FC}$$

- Luego:  $\angle EAD \sim \angle NCF \Rightarrow \overline{ED} \parallel \overline{FN}$

- Como  $\overline{ED} \parallel \overline{FN} \Rightarrow S_{\triangle ELF} = S_{\triangle LND} = S_1$

- El área pedida "S" es  $S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_{\triangle HND}$

- Por teorema de Newton en  $\triangle QFCD$ :  $\overline{JN}$ ,  $\overline{TM}$ ,  $\overline{FD}$  y  $\overline{QC}$  concurren en H.

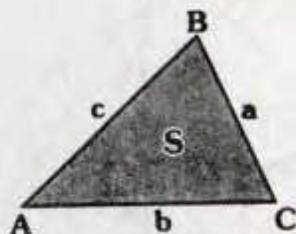
- Como  $\overline{TM}$  es diámetro  $\Rightarrow MT = 2r \Rightarrow \underbrace{S_1 + S_2}_S = S_{\triangle HND} = \frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}$

- $S_{(ABCD)} = (2r)^2 = 4r^2$

$$\therefore \frac{S}{S_{(ABCD)}} = \frac{1}{8}$$

### RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y SEMIPERÍMETRO

Sea el  $\triangle ABC$  de área "S" y semiperímetro "p".



Por teorema de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Usemos MG y MA para "p-a", "p-b", "p-c"

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27} \Rightarrow \underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} \leq \frac{p^4}{27}$$

$$\therefore \boxed{S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}}$$

La igualdad se cumple en el triángulo equilátero.

### RELACIÓN ENTRE EL ÁREA E INRADIO

- Sea el  $\triangle ABC$  de inradio r.
- Usando la expresión anterior para el  $\triangle ABC$  de inradio r.

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow Sr^2 \leq \frac{p^2 r^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow Sr^2 \leq \frac{S^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{S \geq 3\sqrt{3} r^2}$$

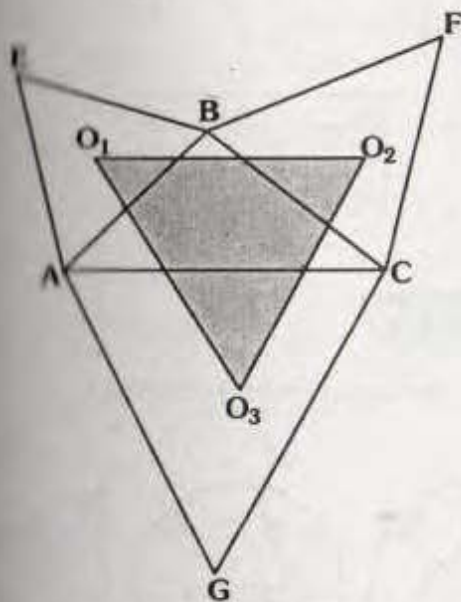


## TEMAS SELECTOS

Los temas tratados a continuación no son motivo de examen de admisión, son algunos de ellos deducibles con ayuda de la trigonometría, sirven para profundizar un poco más el tema de áreas y también como entrenamiento para alumnos preolímpicos.

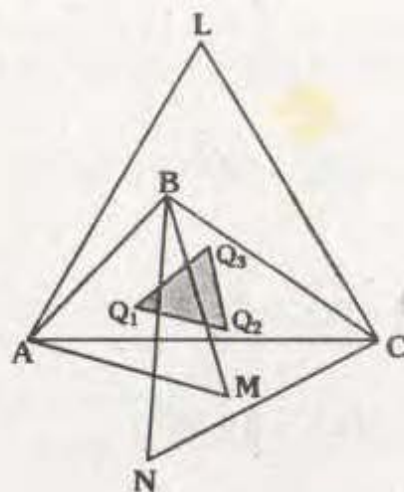
### TEOREMA DE NAPOLEÓN

Sea el triángulo ABC, sobre los lados se construyen triángulo equiláteros llamemos  $T_1$  al triángulo cuyos vértices son los centros de dichos triángulos, ahora construyamos sobre los lados triángulos equiláteros interiores sea  $T_2$  el triángulo cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros.



Se cumple:

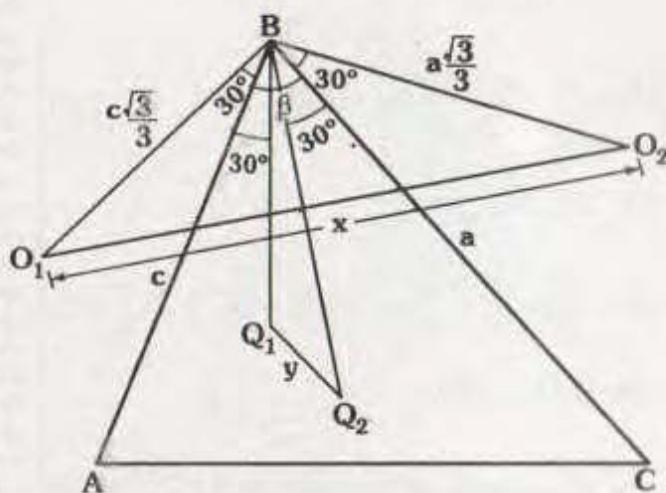
$$S_{(\triangle ABC)} = S_{T_1} - S_{T_2}$$



En el gráfico, los triángulos AEB, BFC, AGC, AMB, BNC y ALC son equiláteros, sus respectivos centros son  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ .

### Demostración:

Usemos el siguiente resultado los triángulos  $O_1O_2O_3$  y  $Q_1Q_2Q_3$  son equiláteros, lo cual ya fue probado (ver una prueba en la publicación de puntos notables: fascículo 7), consideremos el siguiente gráfico:



Sea  $BC=a$ ,  $AB=c$  y  $m\angle ABC = \alpha$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{ac}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad \dots(I)$$

También:

$$\bullet \quad BO_1 = BQ_1 = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

$$\bullet \quad BO_2 = BQ_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\bullet \quad m\angle O_1BO_2 = \beta + 60^\circ$$

$$\bullet \quad m\angle Q_1BQ_2 = \beta - 60^\circ$$

$$\Rightarrow S_{(\triangle O_1O_2O_3)} = S_{T_1} = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{(\triangle Q_1Q_2Q_3)} = S_{T_2} = y^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Luego:

$$S_{T_1} - S_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2 - y^2) \quad \dots(II)$$

• Por teorema de cosenos:

- En  $\triangle O_1BO_2$ :

$$x^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3} ac \cos(\beta + 60^\circ) \quad \dots(III)$$

- En  $\triangle Q_1BQ_2$ :

$$y^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3} ac \cos(\beta - 60^\circ) \quad \dots(IV)$$

• De (III) y (IV):

$$x^2 - y^2 = \frac{2}{3} ac [\underbrace{\cos(\beta - 60^\circ) - \cos(\beta + 60^\circ)}_{2\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} 60^\circ}] = \frac{2\sqrt{3}}{3} ac \operatorname{sen} \beta$$

....(V)

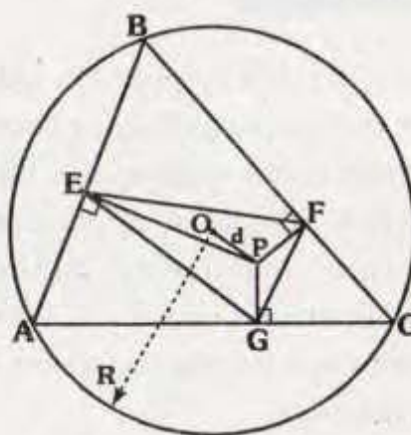
• (V) en (II)

$$S_{T_1} - S_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} ac \operatorname{sen} \beta \right) = \underbrace{\frac{ac}{2} \operatorname{sen} \beta}_{S_{\triangle ABC}}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{T_1} - S_{T_2}$$

### TEOREMA DE EULER

En el gráfico:  $d < R$

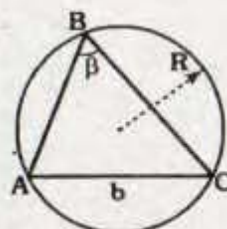


Se cumple:

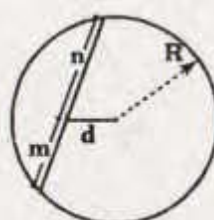
$$\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

### Prueba

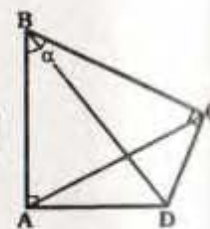
Usemos los siguientes teoremas:



$$b = 2R \operatorname{sen} \beta$$



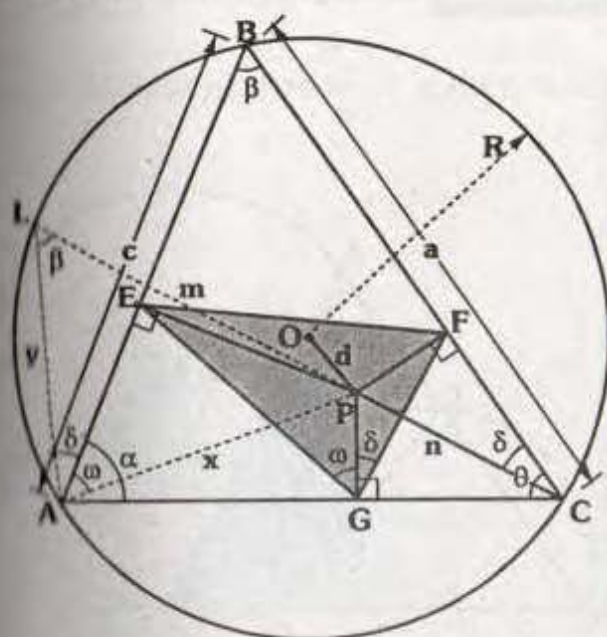
$$mn = R^2 - d^2$$



$$AC = BD \operatorname{sen} \alpha$$



Amplíemos el gráfico inicial:



• Sea  $CP=n$  y  $PL=m$

• Usamos razón de áreas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{(EG)(GF)}{xy} \\ \frac{S_{\triangle AEP}}{S_{\triangle APC}} &= \frac{my}{ac} \end{aligned} \right\} \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(EG)(GF)m}{xac}$$

• En los cuadriláteros AEPG y CGPF

$$EG = x \operatorname{sen} \alpha$$

$$FG = n \operatorname{sen} \theta$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{mn \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta}{ac} \quad \dots (*)$$

• Pero  $a = 2R \operatorname{sen} \alpha$

$$c = 2R \operatorname{sen} \theta$$

• Como:  $mn = R^2 - d^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

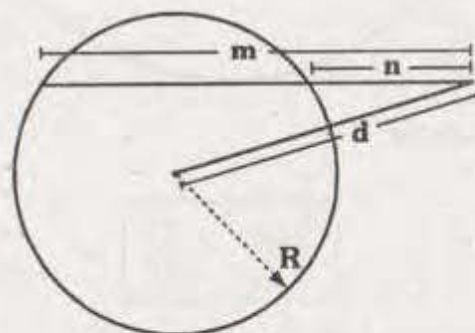
### Observación

- Como el punto P es interior a la circunferencia, entonces:

$$R^2 - d^2 \leq R^2 \Rightarrow \frac{R^2 - d^2}{4R^2} \leq \frac{1}{4}$$

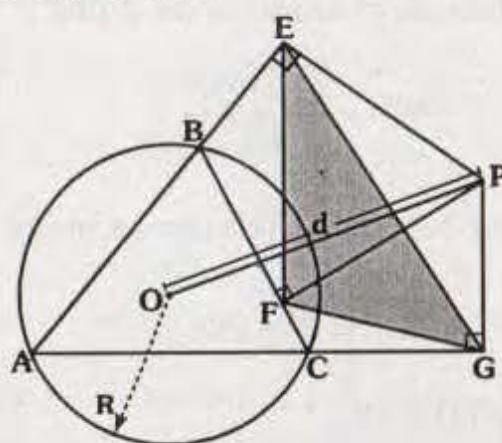
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{1}{4}$$

- La igualdad se da cuando  $d=0$ , es decir P es el circuncentro.
- Si P es un punto exterior con las mismas notaciones y usando:



$$d^2 - R^2 = mn$$

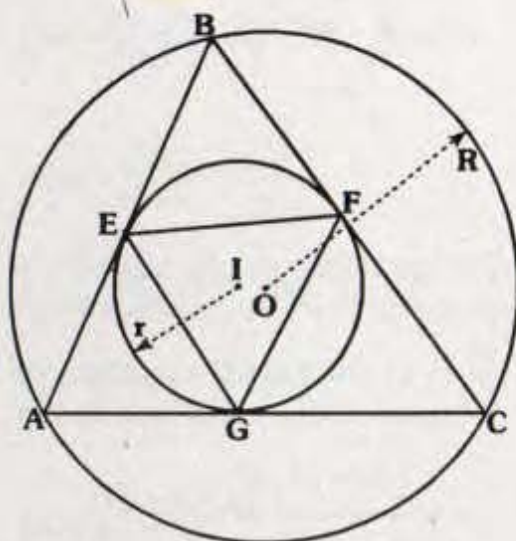
Se demuestra:



$$\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d^2 - R^2}{4R^2}$$

### TEOREMA

En el gráfico,  $R$  y  $r$  son circunradio e inradio del triángulo  $ABC$



Se cumple:

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r}{2R}$$

### Prueba

- Usando el teorema de Euler:

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R^2 - (IO)^2}{4R^2} \quad \dots(1)$$

- Por teorema (Relaciones métricas):

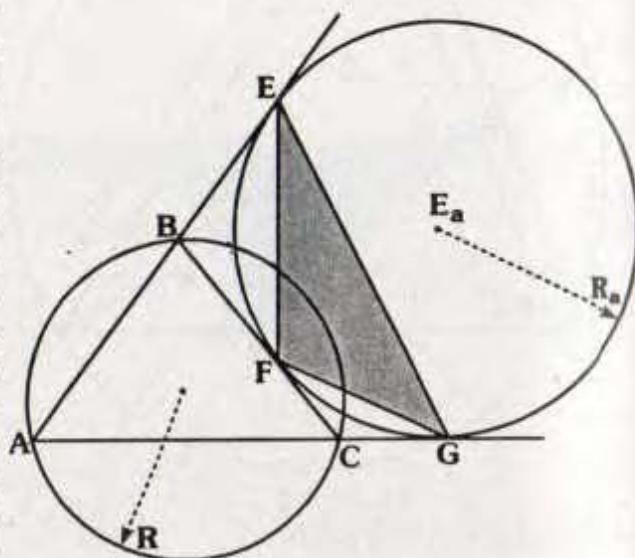
$$(IO)^2 = R^2 - 2Rr \quad \dots(2)$$

- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r}{2R}$$

### TEOREMA

En el gráfico,  $R_a$  es exradio relativo a  $\overline{BC}$ .



Se cumple:

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R_a}{2R}$$

### Demostración:

- Por teorema de Euler(para áreas)

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(E_aO)^2 - R^2}{4R^2} \quad \dots(1)$$

- Por teorema de relaciones métricas:

$$(E_aO)^2 = R^2 + 2RR_a \quad \dots(2)$$

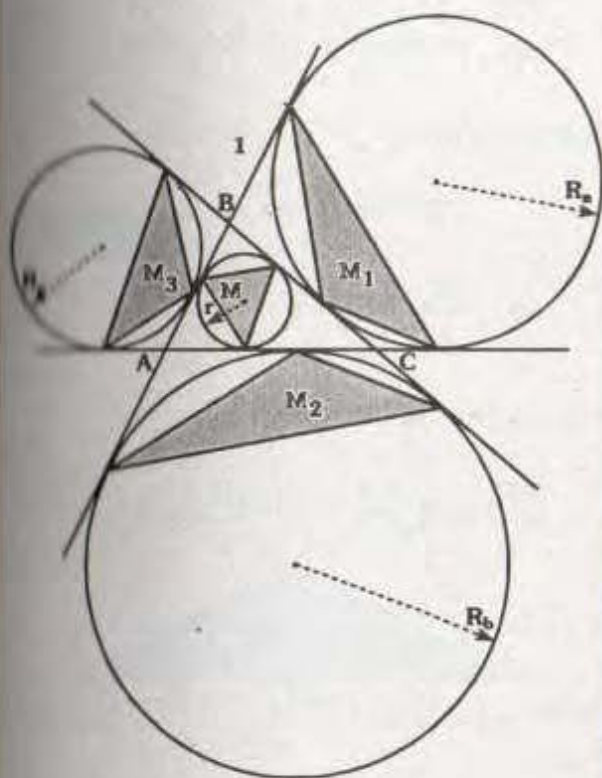
- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R_a}{2R}$$



**Observación**

Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:

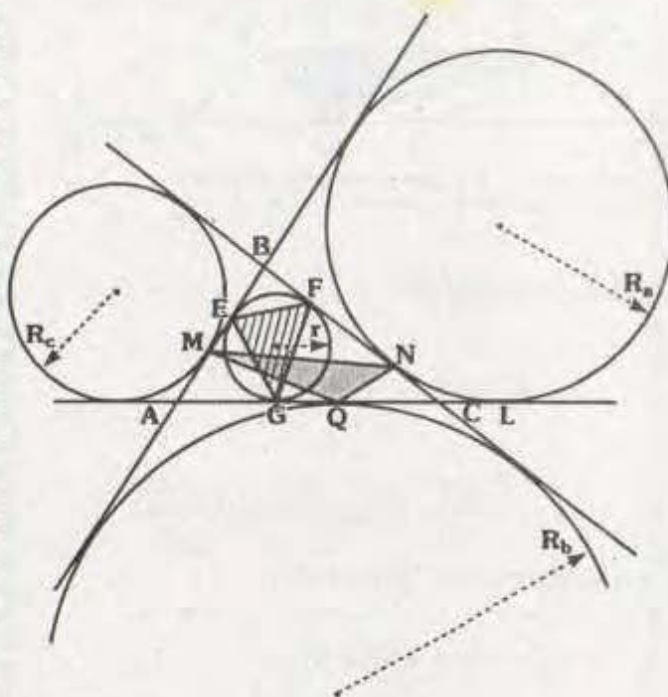


Sea  $R$  el circunradio del  $\triangle ABC$ , y usando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \\ \Rightarrow \frac{2R}{r} &= \frac{2R}{R_a} + \frac{2R}{R_b} + \frac{2R}{R_c} \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{M} &= \frac{S_{\triangle ABC}}{M_1} + \frac{S_{\triangle ABC}}{M_2} + \frac{S_{\triangle ABC}}{M_3} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{M} &= \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_3}} \end{aligned}$$

**TEOREMA**

En el gráfico, se muestra las circunferencias exinscritas y la inscrita.



Se cumple:

$$S_{\triangle EFG} = S_{\triangle MNQ}$$

**Demostración:**

- Sea  $R$  el circunradio del  $\triangle ABC$
- Por teorema (página 56)

$$\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{r}{2R} \quad \dots(\alpha)$$

- Solo grafiquemos la circunferencia inscrita, sean  $AB=c$ ;  $BC=a$ ;  $AC=b$

$$y \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$



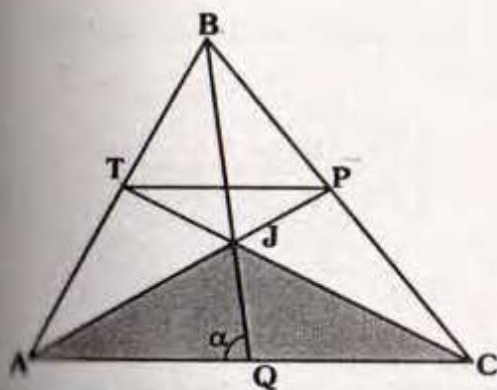


**TEOREMA**

Si en un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes AP, CT y BQ en F. Se cumple:

$$\frac{JQ}{BQ} + \frac{JP}{AP} + \frac{JT}{CT} = 1$$

*Prueba*



Usamos:

$$\left. \begin{aligned} \text{Área}(JBC) &= \frac{(AC)(JQ)}{2} \sin \alpha \\ \text{Área}(JBC) &= \frac{(AC)(BQ)}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \frac{JQ}{BQ} = \frac{\text{Área}(JBC)}{\text{Área}(ABC)} \dots (1)$$

Análogamente tenemos:

$$\frac{JP}{AP} = \frac{\text{Área}(JBC)}{\text{Área}(ABC)} \dots (2)$$

$$\frac{JT}{CT} = \frac{\text{Área}(JAB)}{\text{Área}(ABC)} \dots (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{JQ}{BQ} + \frac{JP}{AP} + \frac{JT}{CT} = \frac{\text{Área}(JBC) + \text{Área}(JBC) + \text{Área}(JAB)}{\text{Área}(ABC)}$$

$$\therefore \frac{JQ}{BQ} + \frac{JP}{AP} + \frac{JT}{CT} = 1$$

**Observación**

Veamos algunas consecuencias de este resultado

- Si J es circuncentro y el circunradio es R, entonces:

$$JQ = BQ - R ; \quad JP = AP - R \quad y$$

$$JT = CT - R$$

Luego:

$$\frac{BQ - R}{BQ} + \frac{AP - R}{AP} + \frac{CT - R}{CT} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{BQ}{R}} + \frac{1}{\frac{AP}{R}} + \frac{1}{\frac{CT}{R}} = \frac{2}{R}$$

- Si usamos:  $MH \leq MA$ , para

$$\frac{JQ}{BQ} ; \frac{JP}{AP} \quad y \quad \frac{JT}{CT}$$

$$\frac{\frac{JQ}{BQ} + \frac{JP}{AP} + \frac{JT}{CT}}{3} \leq \frac{\frac{JQ}{BQ} + \frac{JP}{AP} + \frac{JT}{CT}}{3} \cdot 1$$

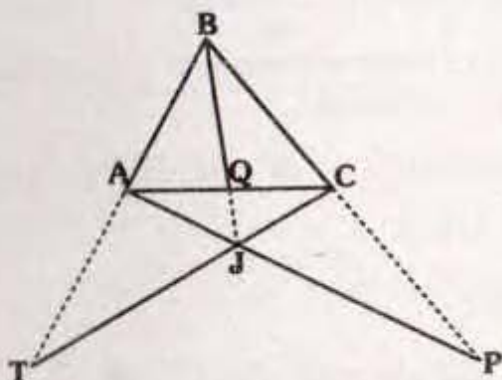
$$\Rightarrow \frac{BQ}{JQ} + \frac{AP}{JP} + \frac{CT}{JT} \geq 9$$

- También:  $\frac{9}{2}R \leq BQ + AP + CT$ , donde

$\overline{BQ}$ ,  $\overline{AP}$  y  $\overline{CT}$  son cevianas interiores que pasan por el circuncentro.

# TEOREMA

- En el gráfico, respecto del  $\triangle ABC$ ,  $\overline{BQ}$  es ceviana interior,  $\overline{CT}$  y  $\overline{AP}$  son cevianas exteriores concurrentes en J.



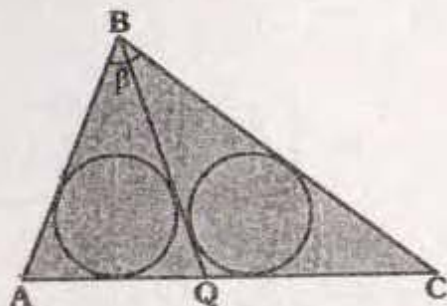
Se cumple:

$$\frac{JT}{CT} + \frac{JP}{AP} - \frac{JQ}{BQ} = 1$$

La prueba es análoga a la anterior se deja como ejercicio para el lector.

# TEOREMA

- En el gráfico, las circunferencias inscritas en los triángulos ABQ y CBQ son congruentes.

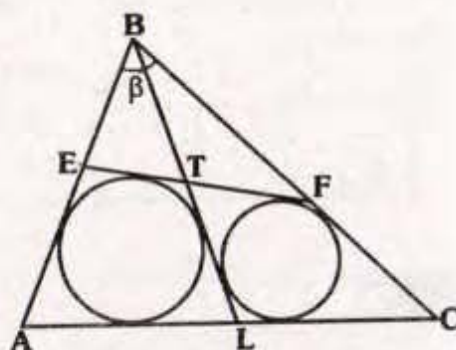


Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = (BQ)^2 \tan \frac{\beta}{2}$$

## Demostración:

- Usemos los siguientes teoremas:



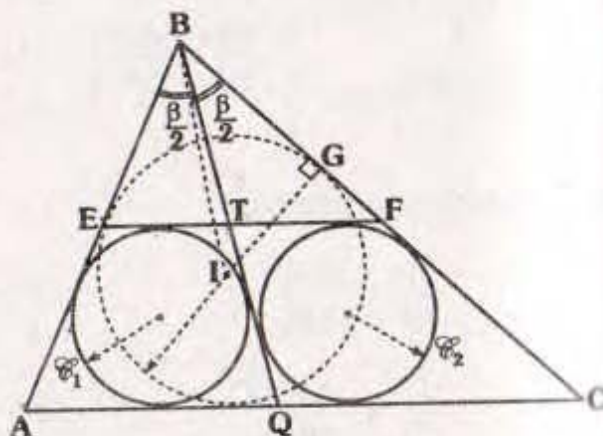
- Para cualquier ceviana interior, se cumple:

$$\begin{aligned} BL &= p_{\triangle EBF} \\ BT &= p_{\triangle ABC} - AC \end{aligned}$$

$p_{\triangle EBF}$  : Semiperímetro del  $\triangle EBF$

La prueba, se realizará en la publicación de circunferencia.

## En el gráfico inicial:



- En el gráfico,  $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2$
- Se traza  $\overline{EF}$  tangente común a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como  $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2 \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{AC}$



$$\Delta ABC \sim \Delta EBF :$$

$$\frac{BT}{BQ} = \frac{p_{\Delta EBF}}{p_{\Delta ABC}}$$

$$BQ = p_{\Delta EBF}$$

$$\text{Como } BT = p_{\Delta ABC} - AC \quad y$$

$$\underline{BG} = p_{\Delta ABC} - AC$$

$$r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

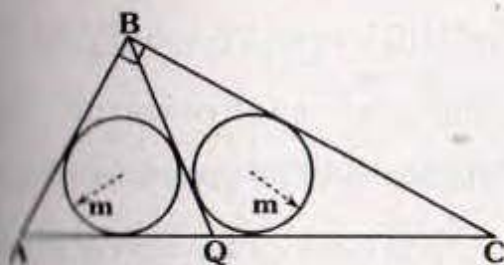
$$\Rightarrow BT = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

$$\underbrace{r p_{\Delta ABC}}_{S_{\Delta ABC}} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = (BQ)^2$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = (BQ)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

### COROLARIO

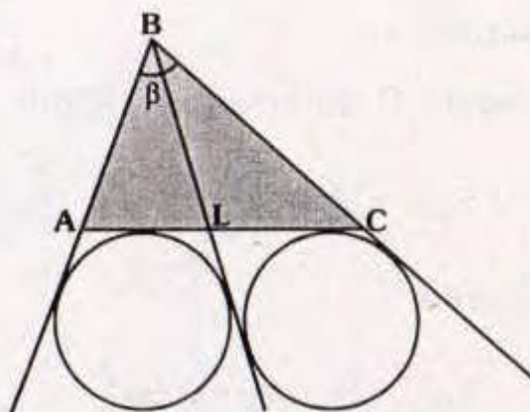
Cuando  $\beta = 90^\circ$ , tenemos:



$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = (BQ)^2$$

### Observación

Con el mismo criterio, si dos circunferencias exinscritas de los  $\Delta$ s ABL y BLC relativas a  $\overline{AL}$  y  $\overline{LC}$  respectivamente son congruentes.

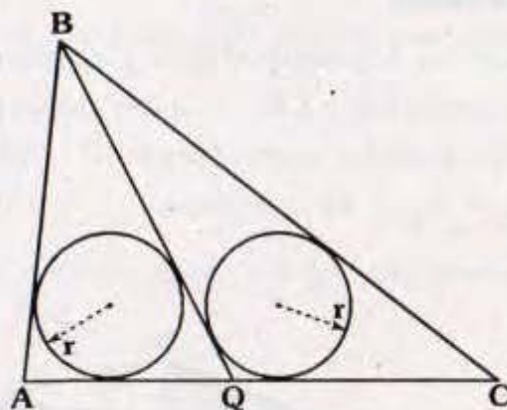


Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = (BL)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

### TEOREMA

En el gráfico, se muestra las circunferencias inscritas en los  $\Delta$ s ABQ y QBC.



Sea  $p$  el semiperímetro del  $\Delta ABC$  y  $AC = b$ .

Se cumple:

$$BQ = \sqrt{p(p-b)}$$

### Prueba

Sea  $AB=c$ ,  $BC=b$ ,  $AC=a$  y

$$m\angle ABC = \beta$$

- Usando el teorema (pag. N°69)

$$S_{\triangle ABC} = (BQ)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad \dots(1)$$

- Usando:

$$S_{\triangle ABC} = (p-a)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \quad \dots(2)$$

- Multiplicando las expresiones (1) y (2):

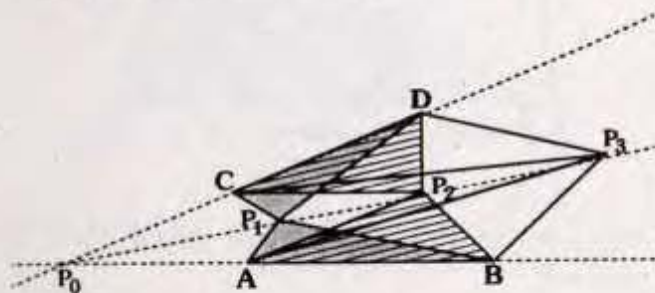
$$(S_{\triangle ABC})^2 = (BQ)^2 (p-a)(p-c)$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore BQ = \sqrt{p(p-b)}$$

### TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanares, tales como  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , el lugar geométrico de los puntos coplanares "P" tal que  $S_{\triangle APB} = S_{\triangle CPD}$  es una recta.



$$\text{Si: } S_{(\triangle P_1 AB)} = S_{(\triangle P_1 CD)}$$

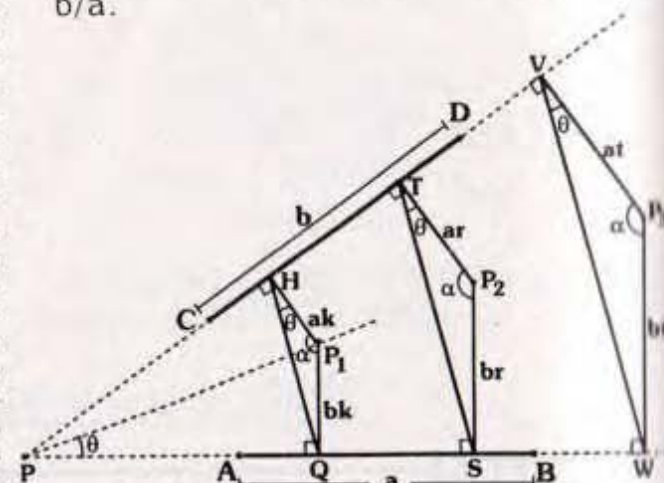
$$S_{(\triangle P_2 AB)} = S_{(\triangle P_2 CD)}$$

$$S_{(\triangle P_3 AB)} = S_{(\triangle P_3 CD)}$$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3, \dots$  son colineales

### Demostración:

- a) Analicemos primero si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  no son paralelos como las áreas de  $\triangle AP_1B$  y  $\triangle CP_1B$  son iguales y siendo  $AB$  y  $CD$  fijos (sea  $\overline{AB}=a$  y  $\overline{CD}=b$ ), entonces la razón de sus respectivas alturas es  $b/a$ .

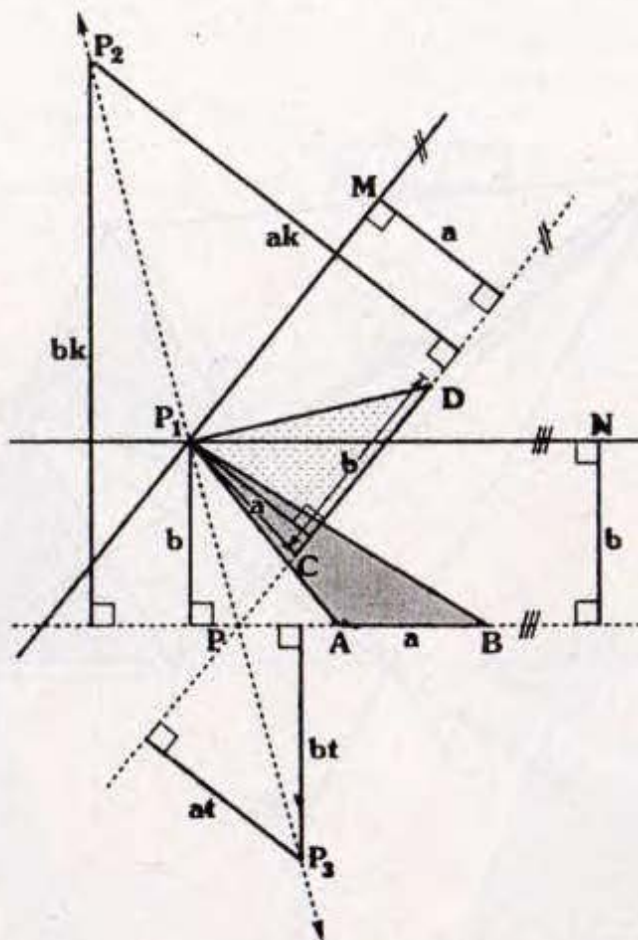


- Notemos que los  $\triangle HP_1Q$ ,  $\triangle TP_2S$  y  $\triangle VP_3W$  son semejantes  
 $m\angle P_1HQ = m\angle P_2TS = m\angle P_3VW = \theta$
- Como los cuadriláteros  $PHP_1Q$ ,  $PTP_2S$  y  $PVP_3W$  son inscriptibles  
 $m\angle P_1PQ = m\angle P_2PS = m\angle P_3PW = \theta$
- Es decir la prolongación de  $\overline{PP_1}$  pasará por  $P_2$  y  $P_3$   
 $\therefore P, P_1, P_2$  y  $P_3$  son colineales



\* Analicemos ahora puntos exteriores

Se podría partir de la misma forma como en el primer caso, se llegará al mismo resultado. Optemos por ubicar la recta.



Ubiquemos M y N tal que la distancia de M a  $\overline{CD}$  sea "a" y la distancia de N a  $\overline{AB}$  sea "b"

Por M se traza la paralela a  $\overline{CD}$  y por N la paralela  $\overline{AB}$  dichas paralelas se cortan en  $P_1$

$$\Rightarrow S_{\Delta P_1 AB} = S_{\Delta P_1 CD} = \frac{ab}{2}$$

Cualquier punto de la recta que pasa por P y  $P_1$  cumple que la condición.

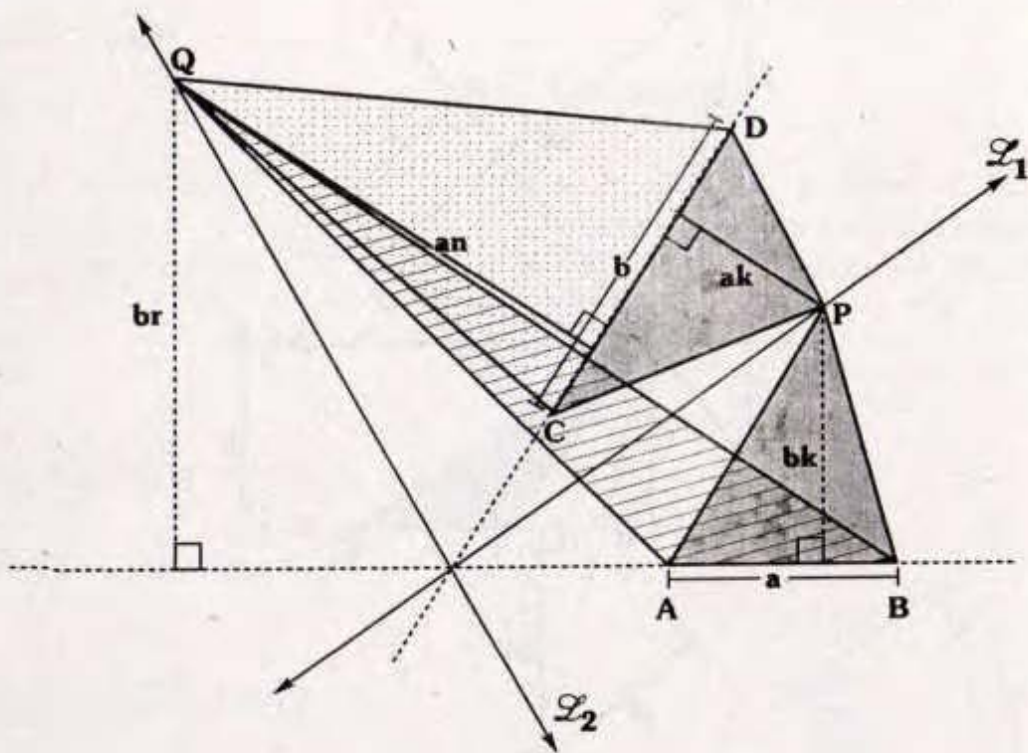
Por ejemplo:

$$- S_{\Delta P_2 AB} = S_{\Delta P_2 CD}$$

$$- S_{\Delta P_3 AB} = S_{\Delta P_3 CD}$$

Nota

- Cuando los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  no son paralelos, se tendrán dos rectas que cumple tal condición:



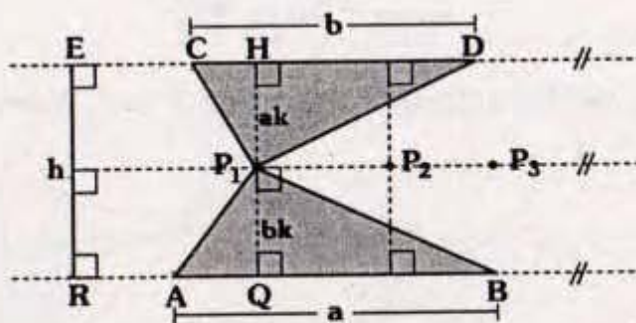
- Todo punto de  $\overline{L_1}$ , cumple:

$$S_{\triangle APB} = S_{\triangle CPD}$$

- Todo punto de  $\overline{L_2}$ , cumple:

$$S_{\triangle AQB} = S_{\triangle CQD}$$

b) Ahora analicemos cuando  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$





Si un punto ( $P_1$ ) cumple que:

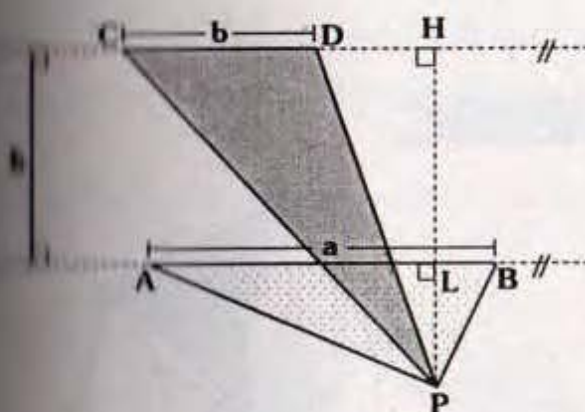
$$S_{\Delta P_1 AB} = S_{\Delta P_1 CD} \Rightarrow \frac{P_1 Q}{P_1 H} = \frac{b}{a}, \text{ si la distancia entre } \overline{AB} \text{ y } \overline{CD} \text{ es } h$$

entonces  $P_1 Q = \frac{hb}{a+b}$ ; lo mismo para cada

punto entre las paralelas ( $P_2$  y  $P_3$  por ejemplo), es decir  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$  son colineales.

Veamos ahora puntos exteriores, para ello consideremos:  $AB \neq CD$  ya que si  $AB = CD$ , solo habrán puntos entre las rectas que contengan a  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$

Sea  $a > b$ .



Si  $P$  cumple la condición, entonces:

$$S_{\Delta PAB} = S_{\Delta PCD} \Rightarrow \frac{PL}{PH} = \frac{b}{a}$$

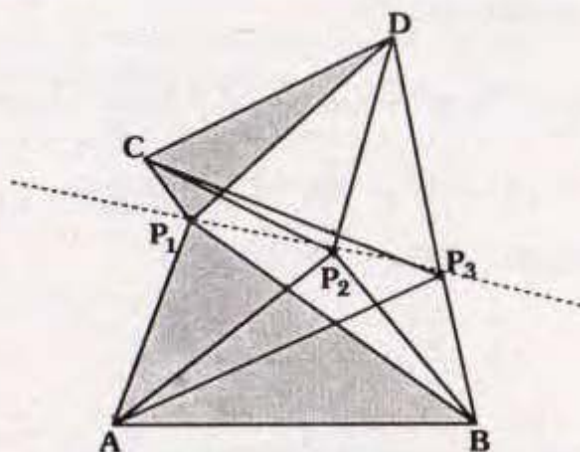
Luego  $PL = \frac{b}{(a-b)}h$ , luego "PL" es constante.

Todo punto ubicado en la paralela a  $\overline{AB}$  y que pase por  $P$  cumple la condición.

c) Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  están ubicados sobre una misma recta, la única posibilidad de encontrar puntos tal que  $S_{\Delta APB} = S_{\Delta CPD}$  es que  $AB = CD$  y cualquier punto cumpliría tal condición:

### TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanarios  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , el lugar geométrico de los puntos "P" en dicho plano tal que " $S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PCD}$ " es constante es una recta.



En el gráfico:

Si:

$$S_{\Delta P_1 AB} + S_{\Delta P_1 CD} = S_{\Delta P_2 AB} + S_{\Delta P_2 CD} = S_{\Delta P_3 AB} + S_{\Delta P_3 CD} = \dots$$

Se cumple:

$P_1, P_2, P_3, \dots$  son colineales

### Demostración:

• Analicemos solo tres puntos, sea  $AB > CD$ .





Análogamente:

$$S_{\triangle NAD} = S_{\triangle NBC} = \frac{S_{ABCD}}{2} \quad \dots(2)$$

También:

$$S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC} = \frac{br}{2} + \frac{dr}{2} = r \frac{(b+d)}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

De (1), (2) y (3):

Los puntos M, O y N cumplen la condición considerando los segmentos fijos  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC} \Rightarrow M, O$  y  $N$  son colineales, por el teorema anterior.

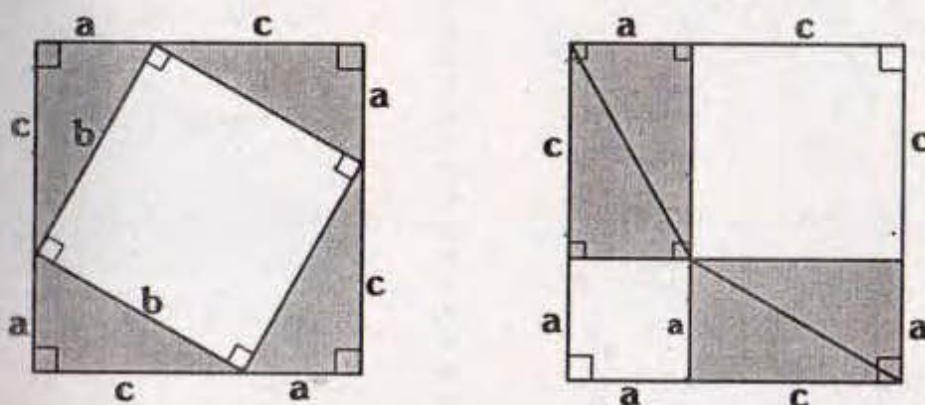
## ALGUNAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El descubrimiento del teorema recae sobre la escuela pitagórica, en la actualidad cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes.

En el libro de E.S.Loomis (1927) aparecen 367 pruebas diferentes.

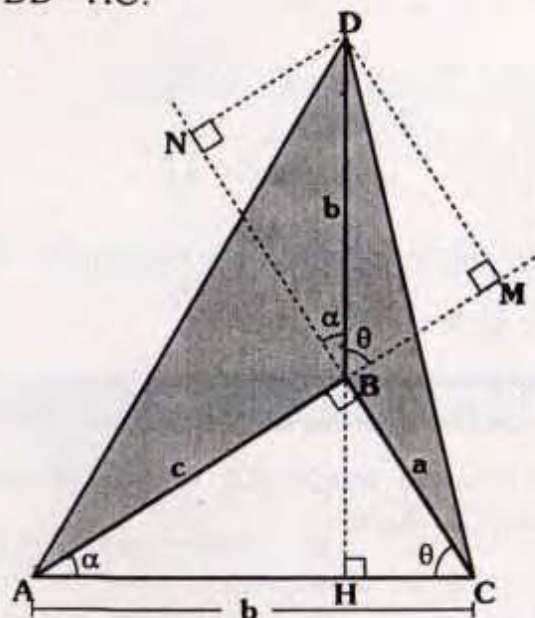
Aquí damos algunas pruebas, basadas en la idea de áreas.

■ Partimos de un cuadrado cuyo lado mide " $a+c$ "



Se puede considerar una prueba visual, notemos que a un cuadrado de lado " $a+c$ ", en la izquierda le hemos quitado cuatro triángulos congruentes de catetos " $a$ " y " $c$ ". Al cuadrado de la derecha le hacemos algo similar, entonces:  $b^2 = a^2 + c^2$

- Partimos así, se traza el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura  $\overline{BH}$ , se ubica D en la prolongación de  $\overline{HB}$  tal que  $BD=AC$ .



- En el gráfico, sea S, el área de la región cuadrangular no convexa ADCB.

$$\Rightarrow S = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}$$

Pero:  $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DBC}$

- También:

$$\triangle BMD \cong \triangle BCA \Rightarrow DM = c$$

$$\triangle BND \cong \triangle BAC \Rightarrow DN = a$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{c^2}{2} \quad \text{y} \quad S_{\triangle DBC} = \frac{a^2}{2}$$

Finalmente:

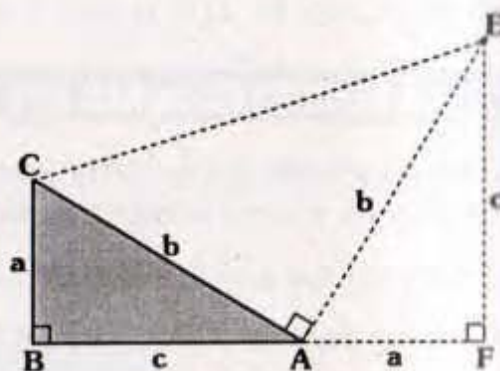
$$S = \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

En los anexos veremos una prueba física del teorema de pitágoras.

### ■ Demostración de James A. Garfield (1876)

- Dado el  $\triangle ABC$ , se ubica F en la prolongación de  $\overline{BA}$ , se ubica E en el mismo semiplano de C, determinado por  $\overline{AB}$ , tal que  $m\angle AFE = 90^\circ$ ,  $AF = BC = a$  y  $FE = AB = c$ .



- $\triangle ABC \cong \triangle EFA$

$$\Rightarrow AC = AE = b \quad \text{y}$$

$$m\angle EAC = 90^\circ$$

- Podemos asegurar:

$$S_{\square EFBC} = S_{\triangle CBA} + S_{\triangle CAE} + S_{\triangle AFE}$$

$$\left( \frac{a+c}{2} \right) (a+c) = \frac{ac}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{ac}{2}$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2$$



### 3.3 Demostración de Leonardo da Vinci:

Del gráfico notamos que:

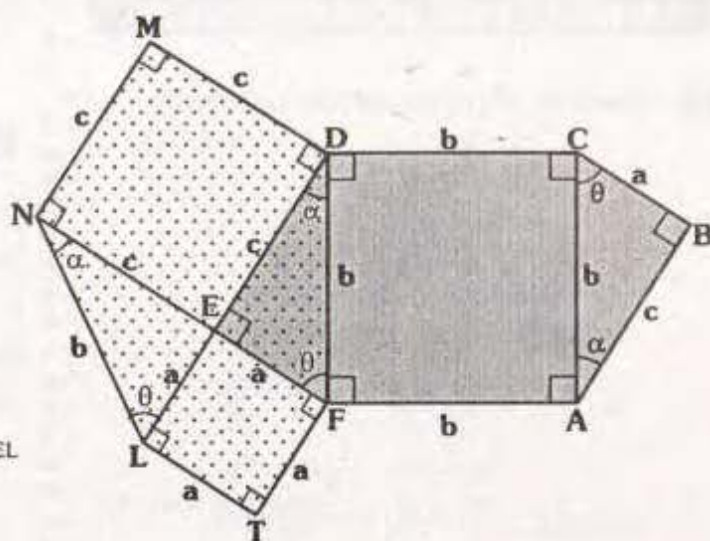
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle NEL$$

También:  $\square ABCDEF \cong \square NLTDFM$

$$S_{(ABCDEF)} = S_{(NLTDFM)}$$

$$b^2 + S_{\triangle DEF} = c^2 + S_{\triangle DEF} + a^2 + S_{\triangle NEL}$$

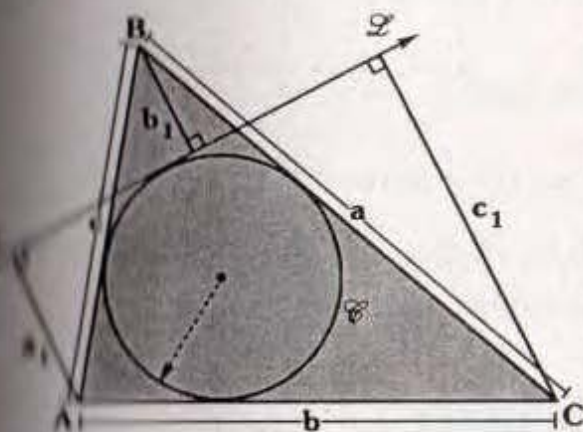
$$\therefore b^2 = c^2 + a^2$$



### TEOREMA DE HARCOUT

Para la circunferencia inscrita:

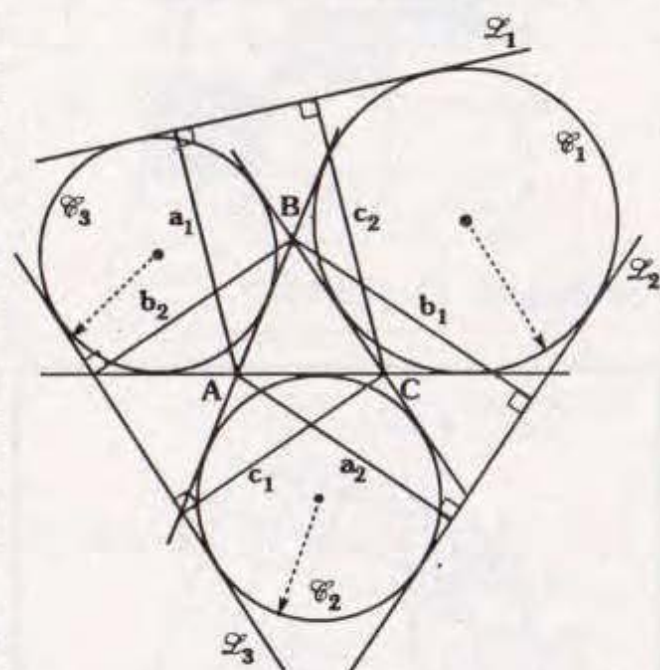
En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita,  $\mathcal{L}$  es tangente a  $\mathcal{C}$ .



Se cumple:

$$S_{ABC} = \frac{aa_1 + cc_1 - bb_1}{2}$$

Para las circunferencias exinscritas



En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  son las circunferencias exinscritas y  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$  son rectas tangentes.

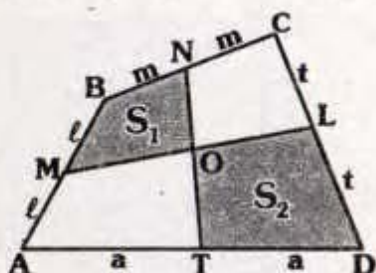
Se cumple:

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$$

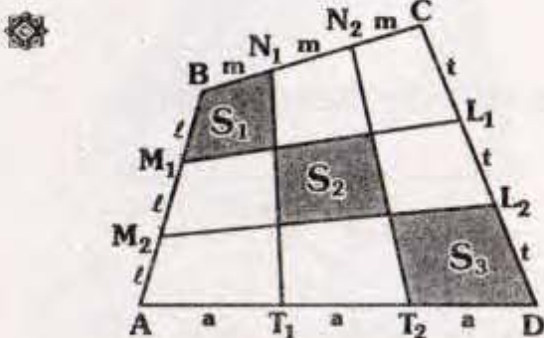
Estos teoremas fueron probados sintéticamente por el profesor Juan Carlos Salazar, sugiero: <http://www.oei.es/oim/revistaioim>.

## UN RESULTADO EXTRAORDINARIO

Veamos algunos casos previos:

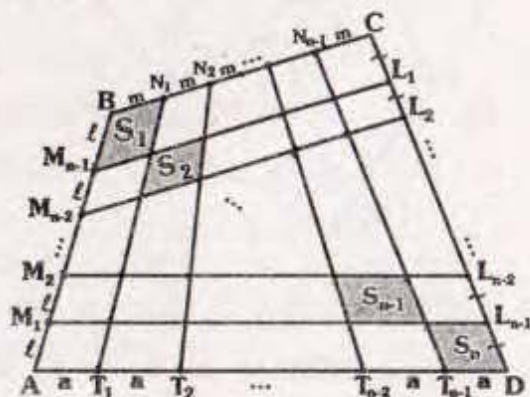


Se cumple: 
$$S_1 + S_2 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{2}$$



Se cumple: 
$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{3}$$

En general:



Se cumple:

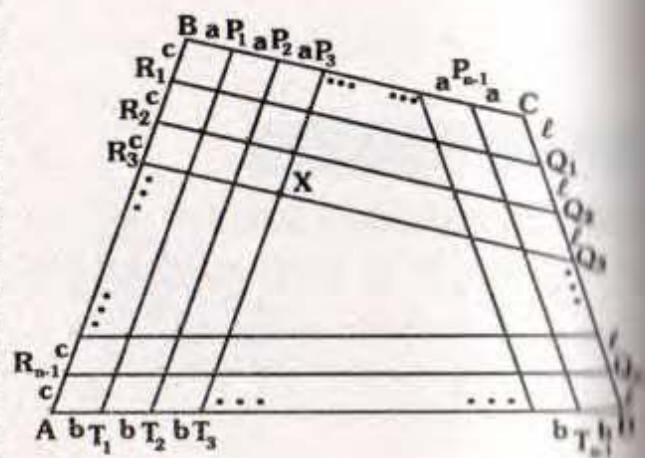
$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n = \frac{S_{\triangle ABCD}}{n}$$

### Demostración:

Primero hagamos algunas pruebas

### LEMA

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, cada lado lo dividimos en "n" partes iguales ( $n \geq 2$ ). Se unen los puntos correspondientes (ver gráfico), para formar un tablero de  $n \times n$ .



Se cumple:

Los segmentos: " $\overline{P_1T_1}, \overline{P_2T_2}, \dots, \overline{P_{n-1}T_{n-1}}$ " " $\overline{R_1Q_1}, \overline{R_2Q_2}, \dots, \overline{R_{n-1}Q_{n-1}}$ ", están también divididos en partes iguales.

### Prueba

Elijamos por ejemplo "X" ubicado en  $\overline{R_3Q_3}$  y  $\overline{P_3T_3}$ , bastará probar:

$$\frac{P_3X}{XT_3} = \frac{BR_3}{R_3A} \quad \wedge \quad \frac{R_3X}{XQ_3} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

Lo cual es inmediato, pues:



$$\overline{R_3P_3} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{T_3Q_3} \Rightarrow \Delta R_3XP_3 \sim \Delta Q_3XT_3$$

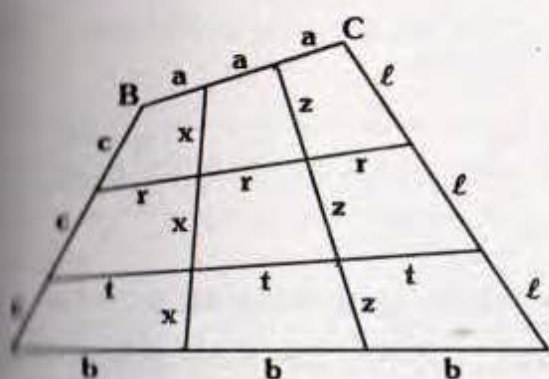
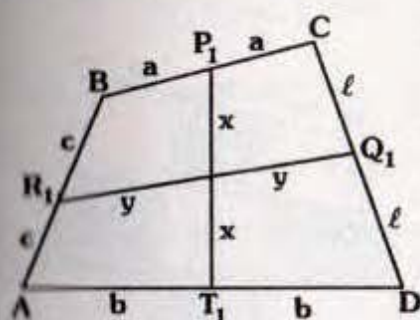
luego:

$$\frac{R_3X}{R_3P_3} = \frac{R_3X}{T_3Q_3} = \frac{R_3P_3}{T_3Q_3} = \frac{\frac{R_3P_3}{AC}}{\frac{T_3Q_3}{AC}} = \frac{BR_3}{DT_3} = \frac{AB}{AD}$$

$$= \frac{\frac{3}{n-3}}{\frac{n}{n-3}} = \frac{3}{n-3} = \frac{BR_3}{R_3A} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

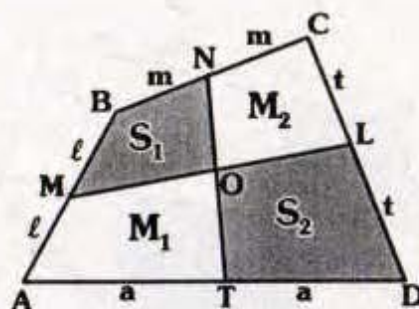
Se pudo haber elegido cualquier punto en general, la prueba es análoga.

Veamos algunos casos particulares:



Antes de las pruebas en general analicemos el tablero de "2x2" y "3x3" encontraremos más resultados que se pueden extender.

### En el tablero "2x2"



se cumple:

$$S_1 + S_2 = M_1 + M_2 = \frac{S_{\Delta ABCD}}{2}$$

La prueba es directa pues: MNLT es paralelogramo de centro O, como

$$\overline{MN} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{TL}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = 4S_{\Delta MBN} + 4S_{\Delta LTD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABCD}}{4} = S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD}$$

Análogamente:

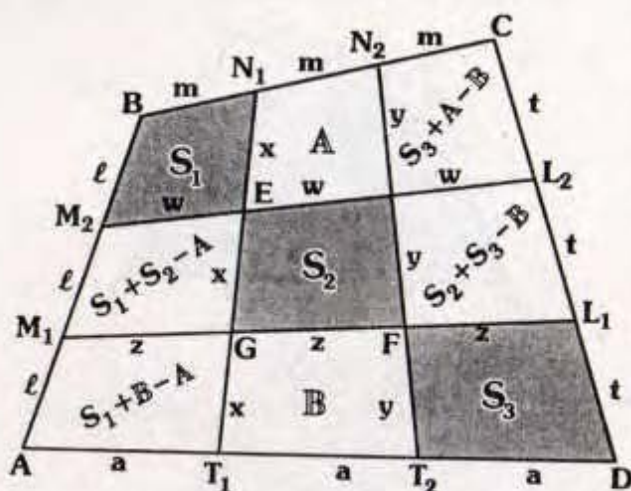
$$\frac{S_{\Delta ABCD}}{4} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta ANL}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta ANL}$$

$$\text{Como: } S_{\Delta MON} + S_{\Delta OLT} = S_{\Delta MOT} + S_{\Delta NOL}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = M_1 + M_2$$

### En el tablero "3x3"



- Usando el lema, entonces:

$\overline{M_1L_1}$ ,  $\overline{M_2L_2}$ ,  $\overline{N_1T_1}$ ,  $\overline{N_2T_2}$  y  $\overline{M_1L_1}$  son tri-secados.

- Notamos tableros de "2x2":

$M_1BN_2F$ ,  $GN_1CL_1$ ,  $T_1EL_2D$  y  $AM_2HT_2$

- Usemos la propiedad anterior, tenemos:

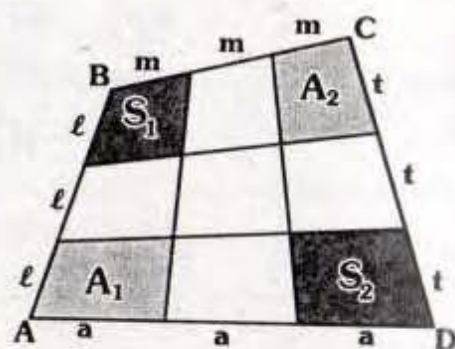
$$S_{\triangle ABCD} = 3(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{3} \dots (1)$$

También: si trazamos  $\overline{M_2N_1}$ ,  $\overline{GH}$  y  $\overline{T_2L_1}$ , notemos:  $S_1 + S_3 = 2S_2$

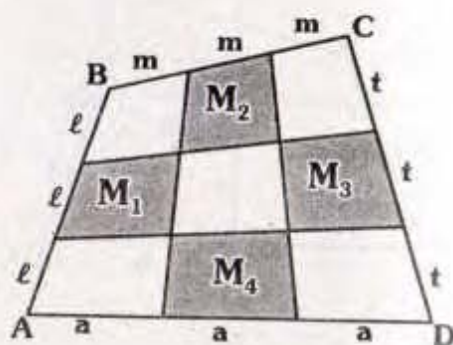
En (1):  $S_2 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{9}$

### Consecuencias para el tablero de "3x3"



Se cumple:

$$S_1 + S_2 = A_1 + A_2 = \frac{2}{9} S_{\triangle ABCD}$$



Se cumple

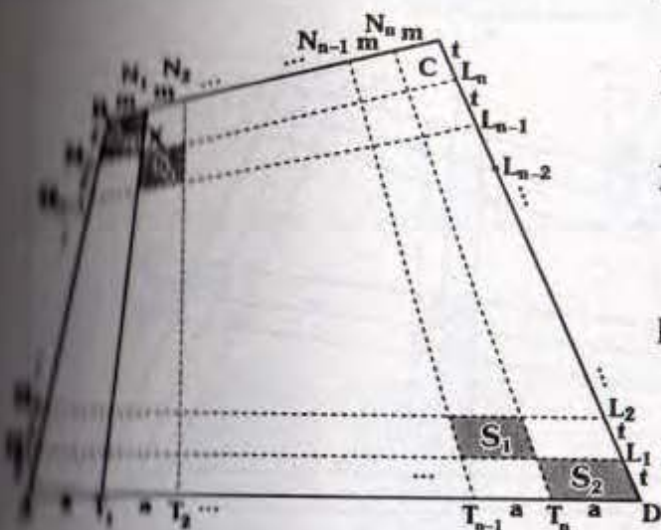
$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \frac{4}{9} S_{\triangle ABCD}$$

### Hagamos la prueba en general

Dada la forma que tiene el resultado, la prueba se hará por inducción, hemos visto que para  $n=2$  y  $n=3$ , ya fue probado. Supongamos que cumpla para todo " $n$ ", demosremos ahora para " $n+1$ "

Sea el tablero de  $(n+1) \times (n+1)$





Sea:  $S_{M_n B N_1 X} = S_{n+1}$

Hipotesis inductiva:  $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{n} S_{T_1 X L_n D}$

Notemos:  $AM_n = \ell n$

$N_1 C = mn$

Por lema:  $\frac{N_1 X}{X T_1} = \frac{M_n X}{X L_n} = \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n S_i + S_{n+1}}_{\sum_{i=1}^{n+1} S_i} = \frac{1}{n} S_{T_1 X L_n D} + S_{\Delta B X M_n} + S_{\Delta B X C}$$

$$\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{n} (S_{\Delta T_1 X D} + S_{\Delta L_n X D}) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta B X A} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta B X C} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n+1} S_{\Delta A X D} + \frac{n}{n+1} S_{\Delta C X D} \right) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta B X A} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta B X C}$$

$$\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{n+1} (S_{\Delta A X D} + S_{\Delta C X D} + S_{\Delta B X A} + S_{\Delta B X C}) = \frac{1}{n+1} S_{ABCD}$$

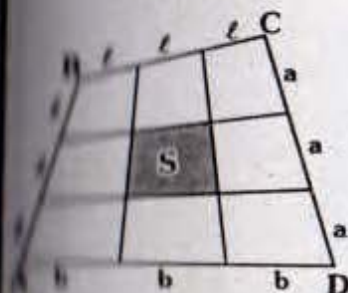
Con lo cual queda probado el teorema

Ahora veamos algunos resultados para todo tablero de "n x n" cuyas pruebas se dejan como desafíos para el lector.

### Para n: Impar

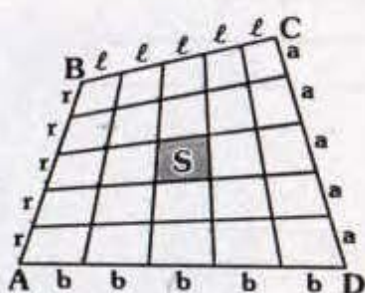
La región sombreada está ubicada en la mitad de la diagonal.

Tablero de 3x3



$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{9}$$

Tablero de 5x5



$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{25}$$

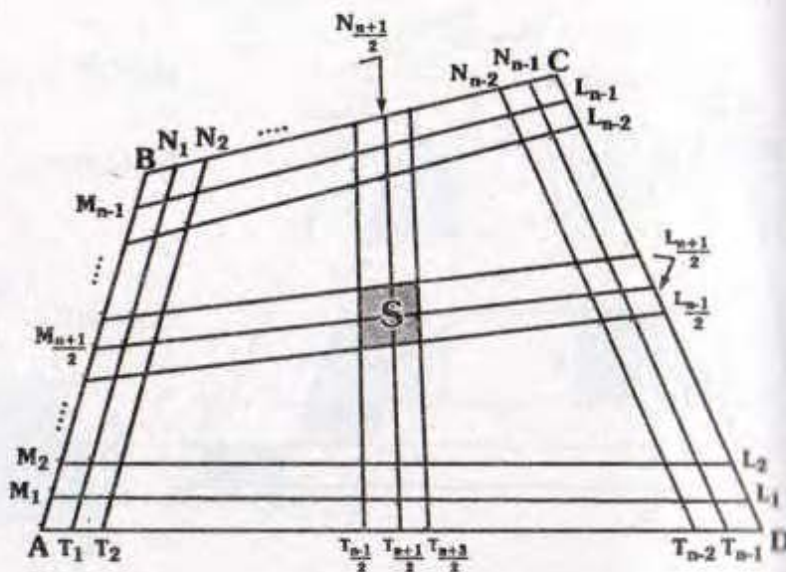
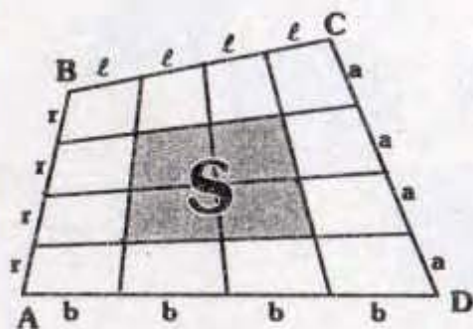
Tablero de n x n



$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{n^2}$$

Para  $n$ : par

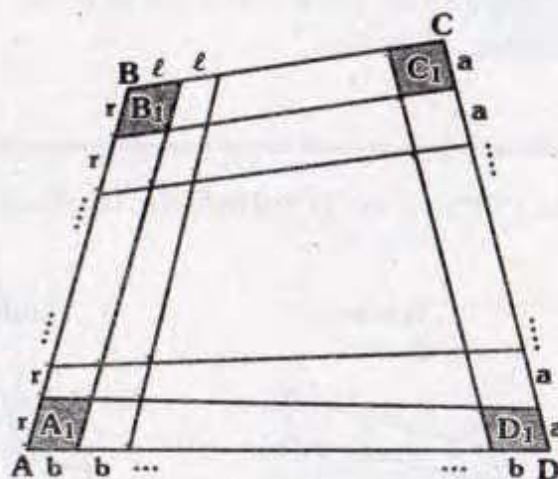
Tablero de  $4 \times 4$



Se cumple:

$$S = \frac{4}{n^2}$$

Para todo " $n$ "



Se cumple:

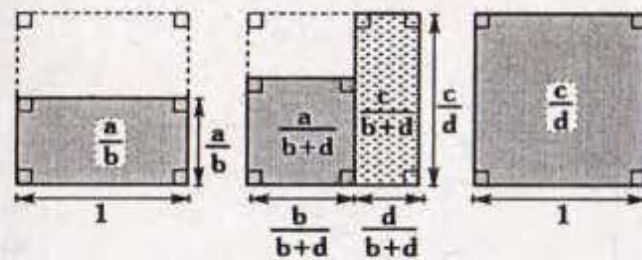
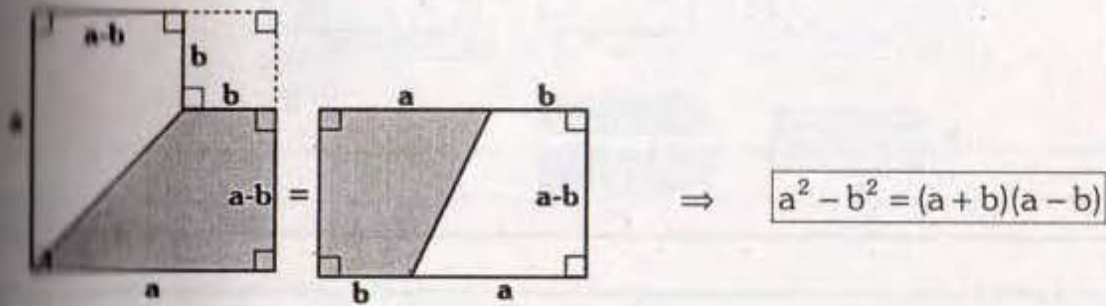
$$A_1 + C_1 = B_1 + D_1$$

Algo realmente maravilloso es que si sombreamos " $n$ " cualesquiera de los " $n^2$ " escaques, con la condición de que no pertenezcan a la misma fila o columna, entonces la suma de estas áreas es " $1/n$ " del total

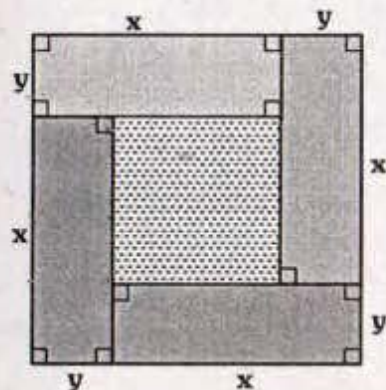


# PRUEBAS VISUALES

*"Los teoremas han de ser notables, sorprendentes, elegantes, intrigantes, rigurosos, creativos... y sobre todo, comprensibles"* **H. Zeeman**



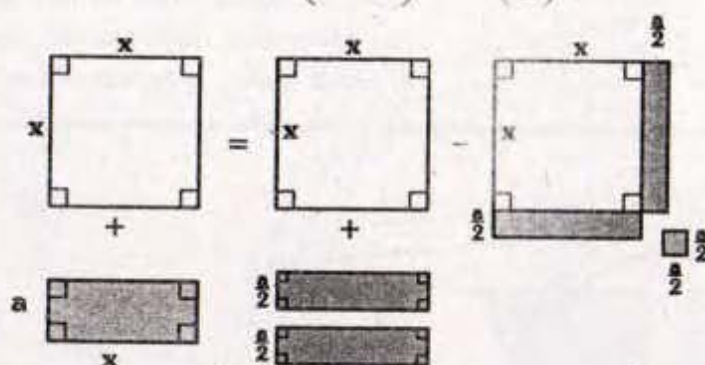
Si  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ; con  $a, b, c, d > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$



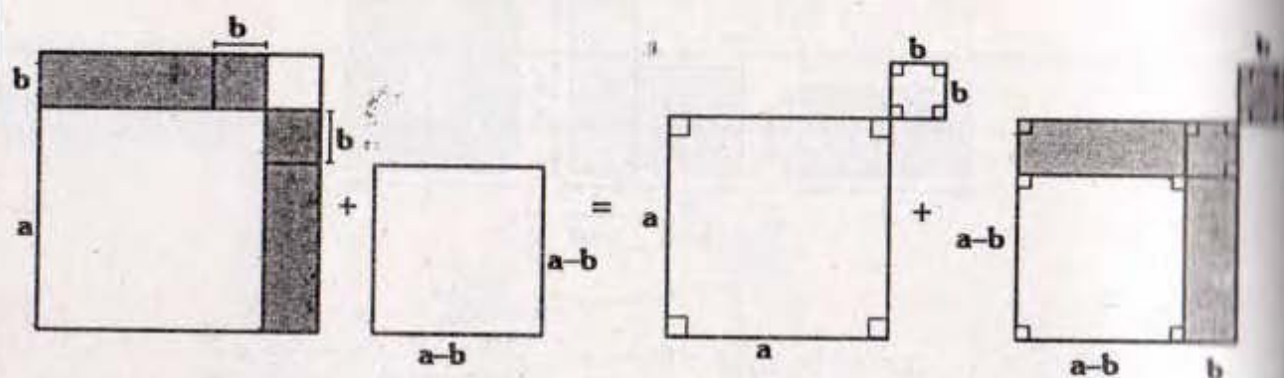
Sea  $x \geq y$   
 $(x+y)^2 \geq 4xy$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

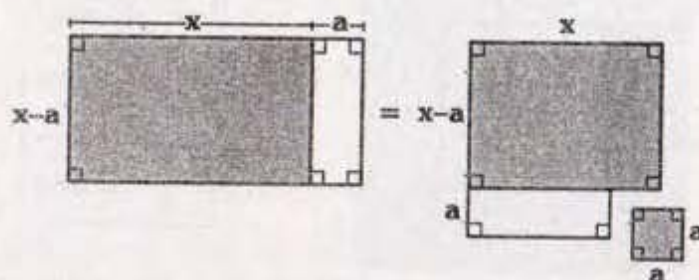
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

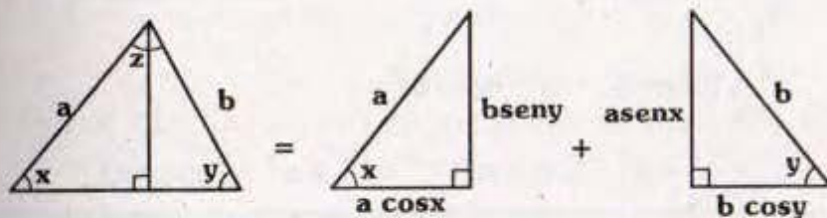
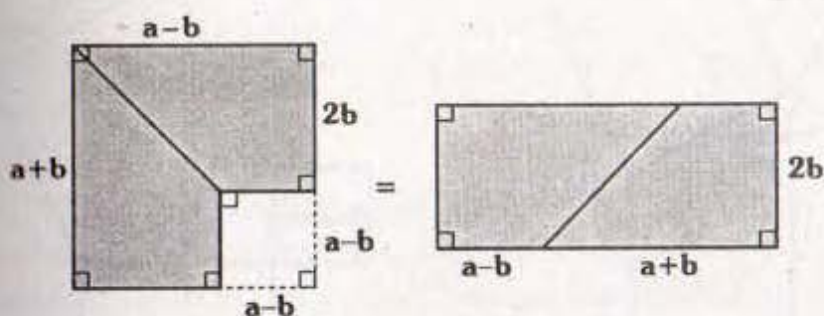


$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$



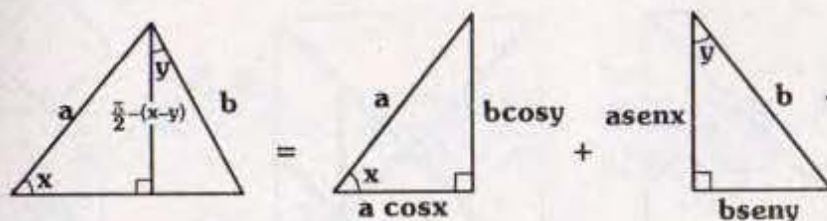


$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

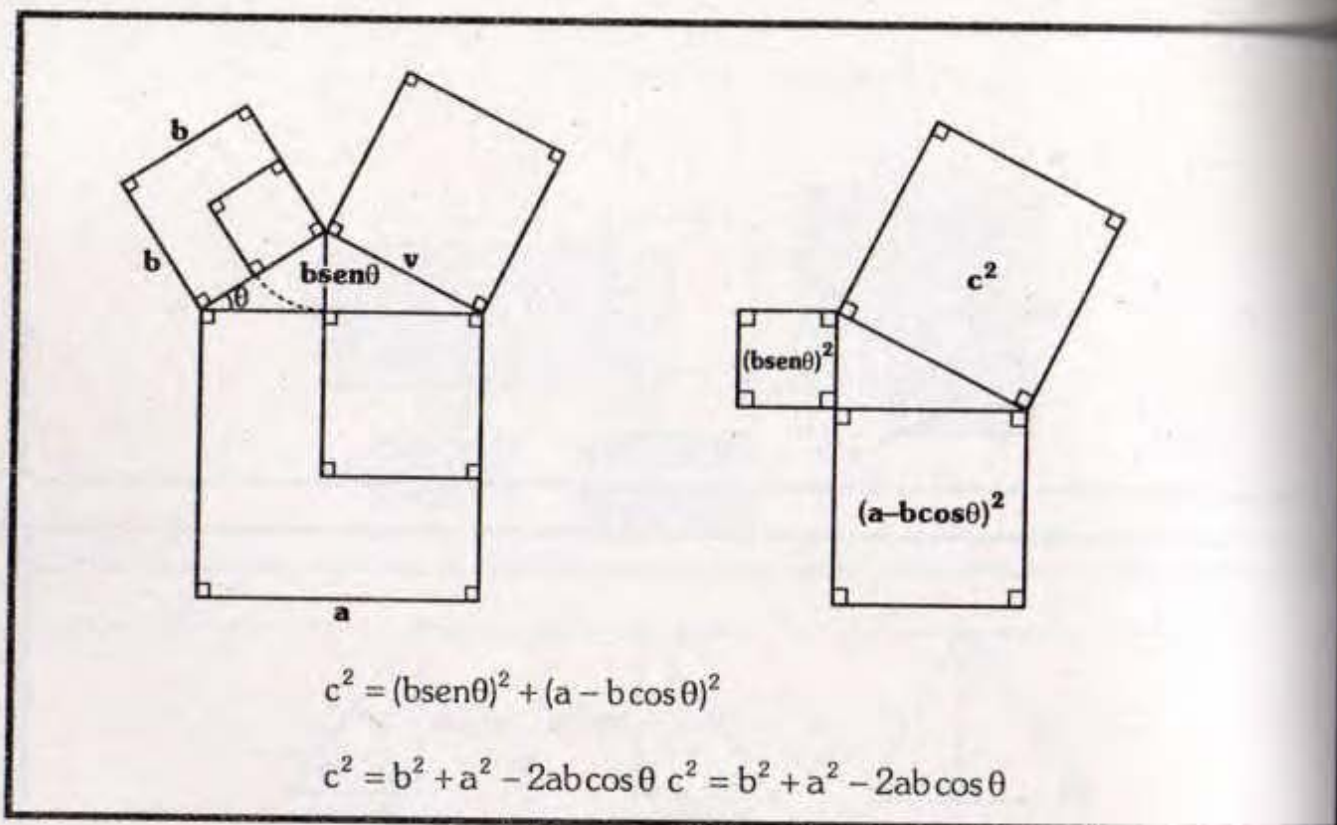


$$\frac{ab}{2} \text{sen } z = \frac{ab}{2} \text{sen } y \cos x + \frac{ab}{2} \text{sen } x \cos y$$

$$\text{sen } z = \text{sen}(x+y) = \text{sen } y \cos x + \text{sen } x \cos y$$

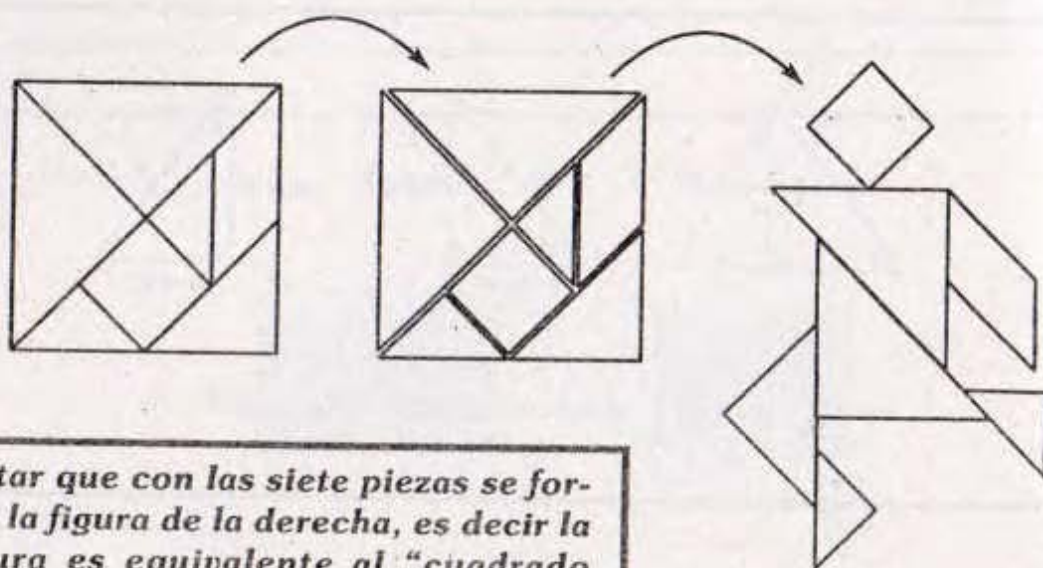


$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right) = \cos(x-y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{sen } y$$



### **SOBRE EL TANGRAM** (siete tableros de astusia)

Es un juego chino antiguo, consiste en formar siluetas con las siete piezas dadas sin sobreponerse. Es un juego que potencia la percepción visual, estimula la planificación de estrategias y desarrolla la orientación espacial.



*Notar que con las siete piezas se formó la figura de la derecha, es decir la figura es equivalente al "cuadrado inicial".*

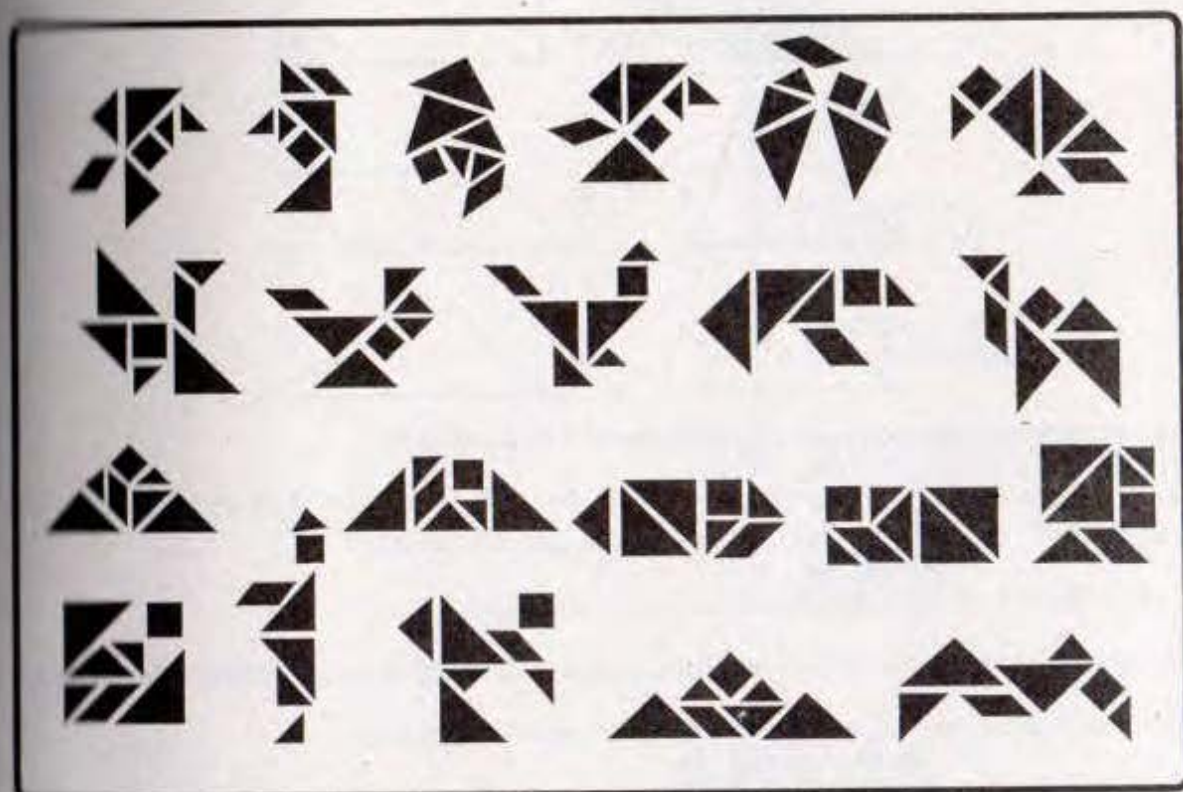


Es quizás uno de los juegos más antiguos del mundo. Hoy en día el Tangram no solo se usa como entretenimiento también se utiliza en psicología, en filosofía y particularmente en pedagogía. En matemáticas el Tangram se emplea para introducir conceptos geométricos de equivalencias de áreas y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños, pues permite ligar de manera concreta de manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

En el siglo XV era llamado "rompecabezas chino" se volvió tan popular que había niños y adultos, personas comunes y personalidades del mundo de las ciencias y artes. Napoleón Bonaparte se convirtió en un especialista en Tangram desde su prisa en la isla de Santa Helena.

En cuanto a la cantidad de figuras que se pueden realizar, en 1973 los diseñadores holandeses Joost Elffers y Michael Schuyt produjeron 7500 nuevas figuras.

A continuación veamos algunas figuras equivalentes al cuadrado inicial:



## EQUIDESCOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS

En este breve espacio analizaremos sobre la equidescomponibilidad de polígonos, el problema se origina de la pregunta siguiente: si dos regiones poligonales tienen áreas iguales, ¿es factible dividir uno de ellos en un número finito de partes las cuales puedan reorganizarse para formar el otro?

Observemos las siguientes figuras:

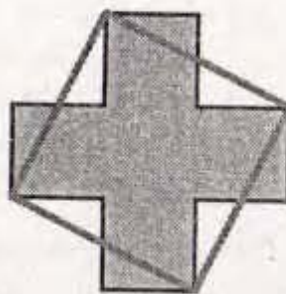


Fig. 1

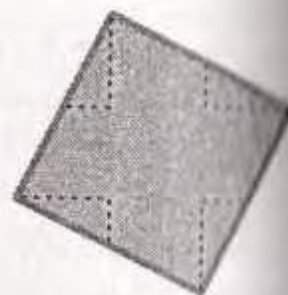
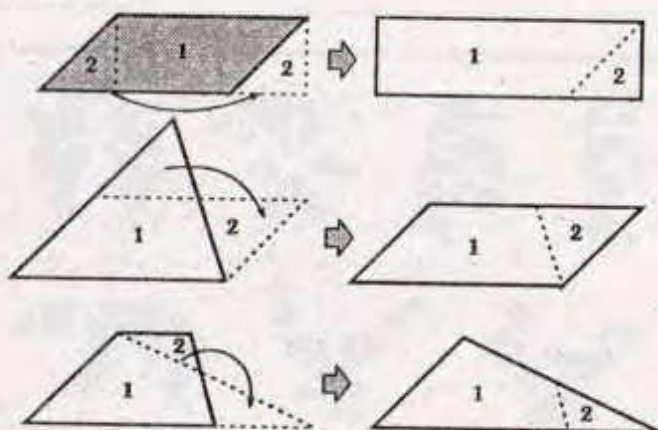


Fig. 2

La figura 1 representa una cruz que tiene igual área que la figura 2 que es un cuadrado, notemos que ambas figuras tienen igual área. Este hecho se expresa así: las figuras representadas son equidescomponibles. Dos figuras son equidescomponibles, si es factible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales puedan reorganizarse para formar la segunda figura. Es evidente que dos figuras equidescomponibles tienen áreas iguales.

Veamos estos casos, también sencillos:



A continuación daremos una serie de proposiciones sin demostración:

- Si una figura A es equidescomponible con una figura B, y la figura B es equidescomponible con una figura C, entonces las figuras A y C son equidescomponibles.
- Todo triángulo es equidescomponible con un rectángulo;
- Dos paralelogramos que tienen una base común y la misma área son equidescomponibles.
- Dos rectángulos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.
- Todo polígono es equidescomponible con algún rectángulo.
- ( Teorema de Bolyai ) Dos polígonos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.



# **Geometría**

## **ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS**

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

**ÁREAS**  
**DE REGIONES PLANAS**

# Problemas Resueltos

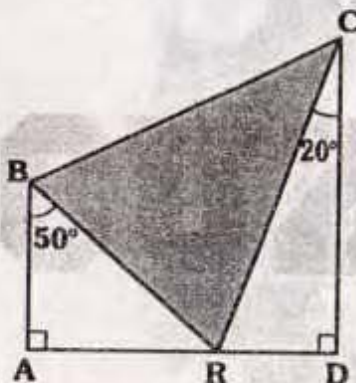
## Ciclo Anual

### ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

#### PROBLEMA N° 1

En el gráfico,  $CD = 10$  y  $BR = 6$ . Calcule el área de la región sombreada.

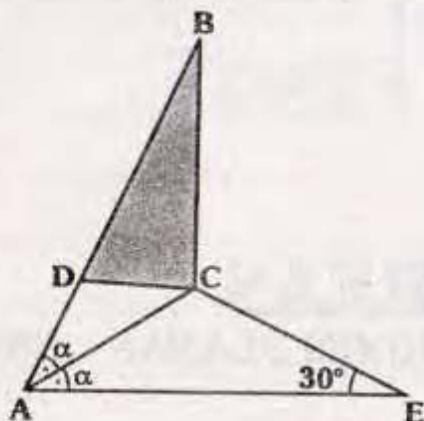
- A) 60
- B) 30
- C) 15
- D) 20
- E) 25



#### PROBLEMA N° 2

En el gráfico,  $DB = 10$  y  $CE = 8$ , calcule el área de la región sombreada.

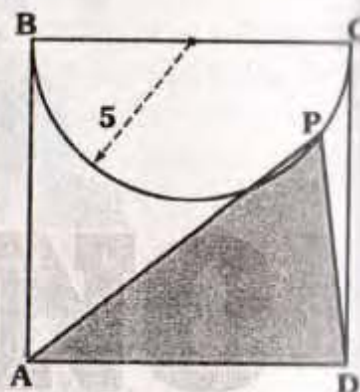
- A) 30
- B) 15
- C) 25
- D) 20
- E) 10



#### PROBLEMA N° 3

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, el  $m\widehat{CP} = 37^\circ$ , calcule el área de la región sombreada.

- A) 30
- B) 35
- C) 40
- D) 25
- E) 20



#### PROBLEMA N° 4

Se tiene el cuadrado ABCD, cuyo lado mide 10, se traza la circunferencia  $\mathcal{C}$  cuyo radio es 1, la cual es tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . Si:  $P \in \mathcal{C}$ , calcule el área mínima de la región triangular PAD.

- A) 20                      B) 30                      C) 40
- D) 28                      E) 25

#### PROBLEMA N° 5

Se tiene la región triangular ABC de área  $8m^2$ , se ubica D en la prolongación de  $\overline{AC}$  tal que  $AC = CD$ , M es punto medio de  $\overline{BC}$ . Calcule el área de la región trian-



que MCD.

- A)  $8m^2$  B)  $4m^2$  C)  $6m^2$   
D)  $9m^2$  E)  $5m^2$

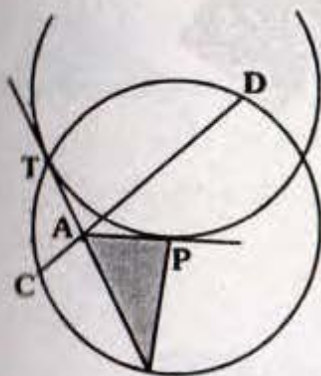
**PROBLEMA N° 6**

Se tiene el triángulo cuyos lados miden 8 y 10. Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo inicial.

- A) 8 B) 1 C) 0,5  
D) 4 E) 2,5

**PROBLEMA N° 7**

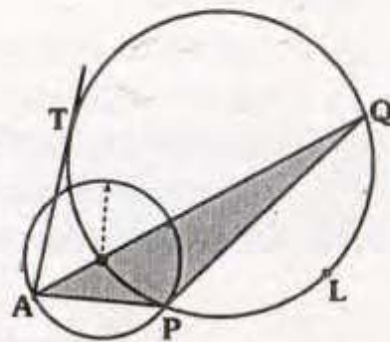
En el gráfico, T y P son puntos de tangencia,  $(AC)(AD) = 20$  y  $m\widehat{TP} = 53^\circ$ . Calcule el área de la región sombreada.



**PROBLEMA N° 8**

En el gráfico, T es punto de tangencia, si  $m\widehat{UQ} = 120^\circ$  y  $AT = 4$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $2\sqrt{3}$   
B) 4  
C) 8  
D)  $4\sqrt{3}$   
E)  $\frac{16}{3}\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 9**

Los lados de un triángulo miden 4 y 6. Calcule el área máxima de dicha región triangular.

- A) 12 B)  $12\sqrt{2}$  C) 15  
D)  $6\sqrt{2}$  E)  $8\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 10**

Se tiene el triángulo ABC, ubicamos M en AC y N en BC tal que  $AB \parallel MN$  en el triángulo MNC se traza la altura CH, si  $AB = NC$  y  $(HC)(BC) = 10$ . Calcule el área de la región ABC.

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 7,5 E) 12,5

**PROBLEMA N° 11**

En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se sabe que  $AC = 8\sqrt{2}$  y  $m\angle A = 67,5^\circ$ . Calcule el área de la región ABC.

- A) 16 B)  $16\sqrt{2}$  C) 32 D)  $32\sqrt{2}$  E) 24

**PROBLEMA N° 12**

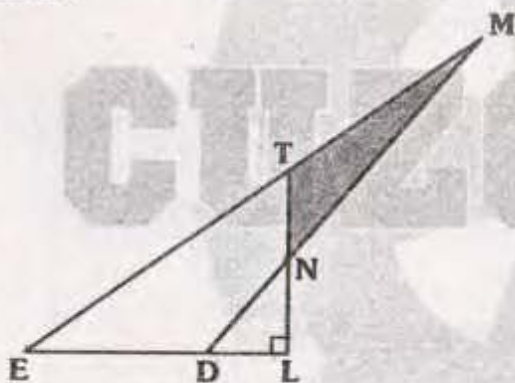
Calcule el área de la región correspondiente a un hexágono equiángulo ABCDEF, si  $AB = 3$ ,  $CD = 6$ ,  $DE = 2$  y  $EF = 4$ .

- A)  $20\sqrt{3}$       B)  $18\sqrt{3}$       C)  $\frac{85}{4}\sqrt{3}$   
D)  $\frac{93}{4}\sqrt{3}$       E)  $\frac{83}{4}\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 13**

En el gráfico,  $TN = NL = 4$ ,  $5(ED) = 7(DL) = 35$ . Calcule el área de la región sombreada.

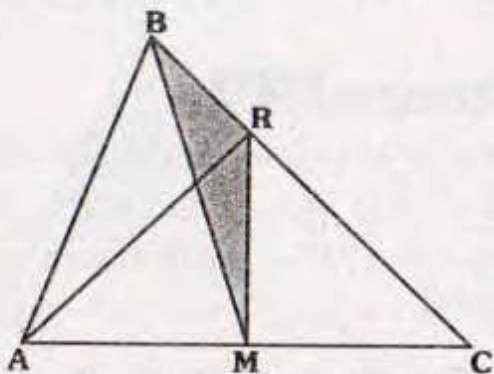
- A) 30  
B) 40  
C) 50  
D) 60  
E) 70



**PROBLEMA N° 14**

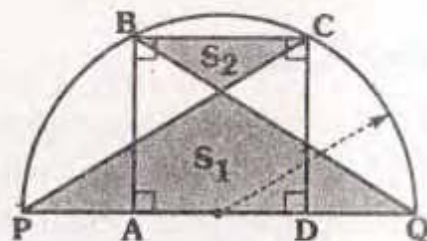
Calcule el área de la región triangular BRM, si área de la región ABR es 10 y  $AM = MC$ .

- A) 10  
B) 5  
C) 15  
D) 20  
E) 25



**PROBLEMA N° 15**

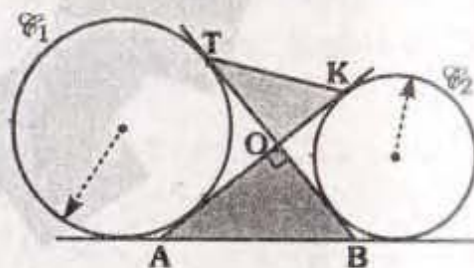
En la figura, ABCD es un cuadrado y  $S_2 = 2$ . Calcule  $S_1$ .



- A) 4      B) 6      C) 8      D) 9      E) 10

**PROBLEMA N° 16**

Calcule el área de la región triangular TOB, si el área de la región triangular AOB es 6 ( $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son circunferencias exinscritas para el triángulo ABC).



- A) 4,5      B) 5,5      C) 6  
D) 3      E) 1,5

**PROBLEMA N° 17**

Se tiene el triángulo equilátero ABC en donde "M" es punto medio de  $\overline{AB}$ . Calcule el área de la región CGK, si "K" es ortocentro del triángulo ABC, "G" es baricentro del triángulo BCM y  $BC = 6$ .

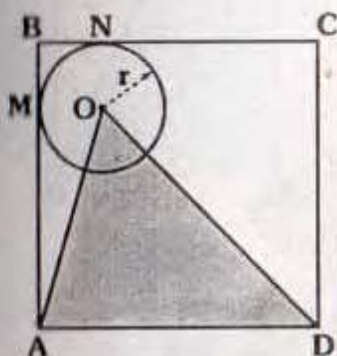
- A) 2      B)  $\sqrt{3}$       C)  $2\sqrt{6}$



III  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  E)  $\sqrt{6}$

**PROBLEMA N° 18**

En el lado del cuadrado ABCD mide  $a$ . Calcule el área de la región triangular AOD. (M y N son puntos de tangencia)



- A)  $\frac{ar}{2}$  B)  $\frac{a(a-r)}{2}$   
 C)  $\frac{a(a+r)}{2}$  D)  $ar$   
 E)  $\frac{a(a+r)}{2}$

**PROBLEMA N° 19**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica en BC el punto "M" tal que  $AB = MC$ , luego se traza la altura BH. Si  $AH = 4$ , calcule el área de la región triangular AMH.

- A) 2 B)  $4\sqrt{3}$  C) 16  
 D) 8 E)  $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 20**

En un triángulo escaleno se cumple que su área es numéricamente igual al triple de su perímetro. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en este

triángulo.

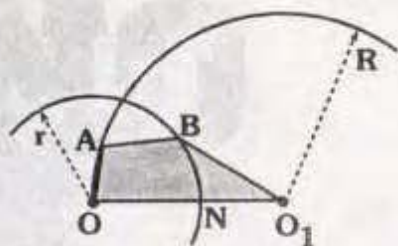
- A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1,5

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N° 21**

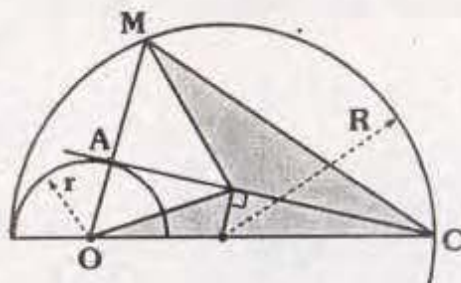
En el gráfico,  $R = 8u$ ,  $r = 6u$ ,  $m\widehat{BN} = 27^\circ$  y  $m\widehat{AO} = 18^\circ$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $12\sqrt{2}u^2$   
 B)  $13\sqrt{2}u^2$   
 C)  $14\sqrt{3}u^2$   
 D)  $16\sqrt{3}u^2$   
 E)  $10\sqrt{3}u^2$



**PROBLEMA N° 22**

En el gráfico, A es punto de tangencia. Si  $(OM)(AC) = 24$ ,  $R = 5$  y  $r = 2$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 24 B) 12 C) 15 D)  $15/2$  E) 20

**PROBLEMA N° 23**

$$\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{ABCDEF}}$$

- A)  $\frac{1}{2}$     B)  $\frac{1}{3}$     C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     D)  $\frac{2}{3}$     E)  $\frac{1}{4}$

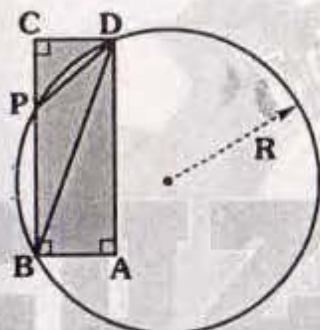


- A)  $S_x = S_1 - S_2 + S_3$     B)  $S_x = S_1 + S_2 + S_3$   
 C)  $S_x = S_1 + S_2 - S_3$     D)  $S_x = \frac{S_1 S_2}{S_3}$   
 E)  $S_x = S_2 + S_3 - S_1$

**PROBLEMA N° 29**

En un triángulo ABC, BD = 6; PD = 4 y  $BC = \frac{3R}{2}$ ; calcule el área de la región sombreada.

- A) 18  
 B) 12  
 C) 15  
 D) 16  
 E) 14



**PROBLEMA N° 30**

Se tiene una región hexagonal regular ABCDEF cuya área es  $6\sqrt{3}$ ; calcule el área de la región cuadrangular cuyos vértices son los puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  y  $\overline{AF}$ .

- A)  $2\sqrt{6}$     B)  $3\sqrt{3}$     C)  $2\sqrt{3}$   
 D)  $5\sqrt{6}$     E)  $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 31**

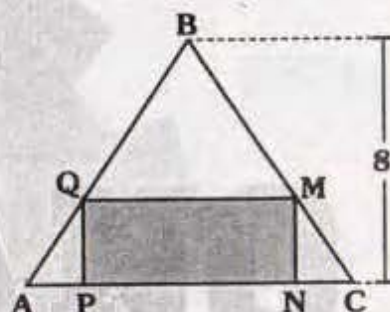
En un trapecio ABCD sus diagonales se cortan en O; en  $\overline{CD}$  y en la base  $\overline{AD}$  se ubican los puntos M y N tal que  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ ;

$\overline{MN}$  corta a  $\overline{BD}$  en E;  $MD = 2(CM)$  y las áreas de las regiones triangulares BOC y END son iguales a 4, calcule el área de la región trapezoidal ABCD.

- A) 10    B) 30    C) 36    D) 54    E) 25

**PROBLEMA N° 32**

Si el área de la región rectangular sombreada es 32 y  $AC = 16$ ; calcule QM.

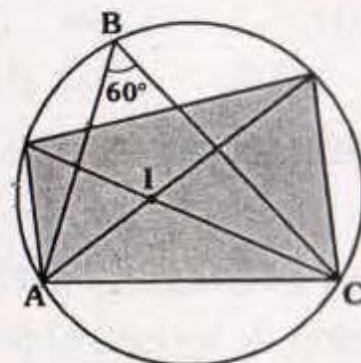


- A) 5    B) 9    C) 6    D) 8    E) 12

**PROBLEMA N° 33**

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada siendo "I" el incentro del triángulo ABC y  $AI + IC = 12$ .

- A) 36  
 B)  $48\sqrt{2}$   
 C)  $12\sqrt{3}$   
 D)  $20\sqrt{3}$   
 E)  $36\sqrt{3}$





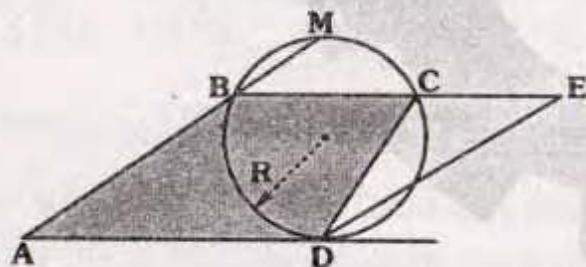
**PROBLEMA N° 34**

En el trapecio  $ABCD$  ( $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ), se traza la diagonal  $AC$ ; en  $\overline{AB}$  se ubica  $M$  tal que  $\overline{DM} \cap \overline{AC} = \{N\}$ . Si las áreas de las regiones  $AMN$  y  $CND$  es  $2\text{cm}^2$  y  $10\text{cm}^2$  respectivamente. Calcule el área de la región  $BDM$ .

- A)  $8\text{ cm}^2$       B)  $10\text{ cm}^2$       C)  $6\text{ cm}^2$   
D)  $4\text{ cm}^2$       E)  $12\text{ cm}^2$

**PROBLEMA N° 35**

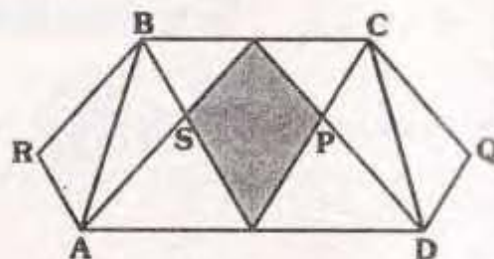
En el gráfico,  $D$  es punto de tangencia y  $ABED$  es paralelogramo. Si  $m\widehat{BM} = m\widehat{MC} = 53^\circ$  y  $R = 5$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 92      B) 82      C) 102  
D) 112      E) 144

**PROBLEMA N° 36**

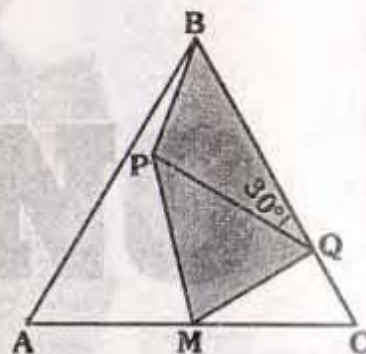
Según el gráfico,  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$  y el área de la región sombreada es 6. Calcule la suma de áreas de la regiones paralelogramicas  $ARBS$  y  $PCQD$ .



- A) 18      B) 10      C) 12      D) 6      E) 9

**PROBLEMA N° 37**

En la figura,  $ABC$  es equilátero,  $AM = MC = 3$  y  $PQ = 4$ . Calcule el área de la región sombreada.

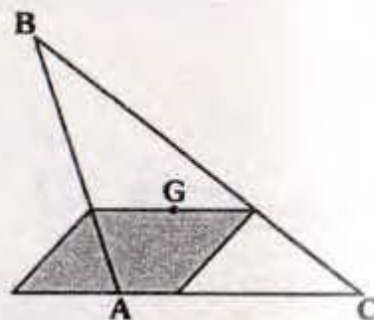


- A) 6  
B) 9  
C)  $3\sqrt{3}$   
D) 4  
E)  $2\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 38**

Si  $G$  es baricentro de la región triangular  $ABC$ . Si  $AB=7$ ;  $BC=9$  y  $AC=4$ , calcule el área de la región paralelogramica sombreada.

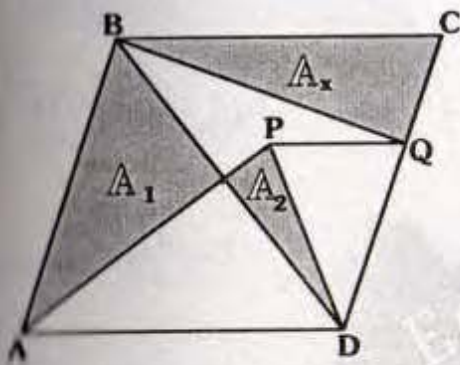
- A)  $6\sqrt{2}$   
B)  $6\sqrt{5}$   
C)  $4\sqrt{3}$   
D)  $5\sqrt{5}$   
E)  $\frac{8}{3}\sqrt{5}$





**PROBLEMA N° 39**

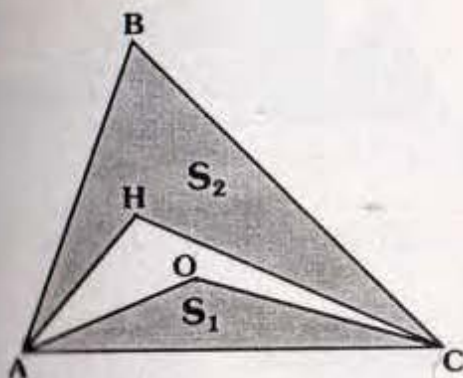
En el gráfico, ABCD es un romboide y  $PQ \parallel BC$ . Calcule el área  $A_x$  en función de las áreas  $A_1$  y  $A_2$ .



- A)  $\frac{A_1 + A_2}{2}$       B)  $2(A_1 - 2A_2)$   
 C)  $A_1 - A_2$       D)  $3(A_1 - 2A_2)$   
 E)  $A_1 - 2A_2$

**PROBLEMA N° 40**

En el gráfico, H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC. Calcule

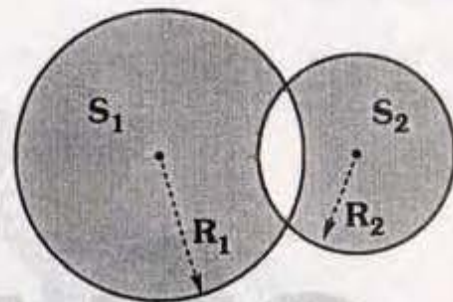


- A) 2      B) 1      C) 3  
 D) 3/2      E) 2/3

**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N° 41**

En el gráfico,  $S_1$  y  $S_2$  son las áreas de las regiones sombreadas. Si  $R_1 = 9$  y  $R_2 = 4$ , calcule  $S_1 - S_2$ .



- A)  $36\pi$       B)  $65\pi$       C)  $49\pi$   
 D)  $25\pi$       E)  $72\pi$

**PROBLEMA N° 42**

Se tiene el triángulo ABC, con  $AB=10$ ,  $BC=12$  y  $AC=14$  está inscrito en la circunferencia de centro O. Halle el área de la corona circular limitada por las circunferencias concéntricas de centro O y tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ .

- A)  $24\pi$       B)  $12\pi$       C)  $11\pi$   
 D)  $25\pi$       E)  $16\pi$

**PROBLEMA N° 43**

Si  $m\widehat{AB} = 60^\circ$ , calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas.

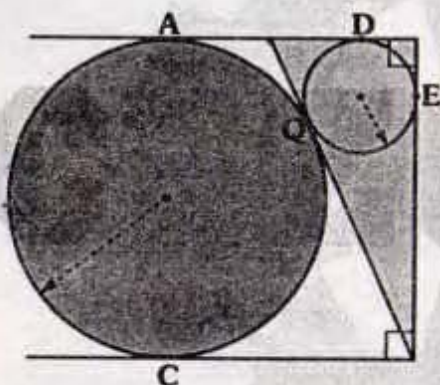


- A) 1    B) 2    C) 3    D)  $\frac{3}{2}$     E)  $\frac{4}{3}$

**PROBLEMA N° 44**

Calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas. (A, Q, C, D y E son puntos de tangencia)

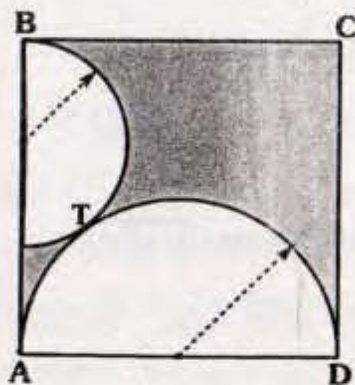
- A)  $\pi$   
B)  $\frac{3}{2}\pi$   
C)  $2\pi$   
D)  $\sqrt{2}\pi$   
E)  $\frac{5}{4}\pi$



**PROBLEMA N° 45**

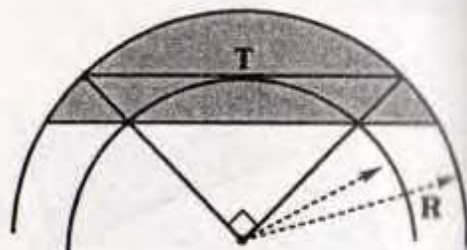
En el gráfico, ABCD es un cuadrado. T es punto de tangencia. Si  $AB = 6$ , calcule el área de la región sombreada.

- A)  $36 - 10\pi$   
B)  $15 - 2\pi$   
C)  $9 - \pi$   
D)  $36 - 4\pi$   
E)  $36 - \frac{13}{2}\pi$



**PROBLEMA N° 46**

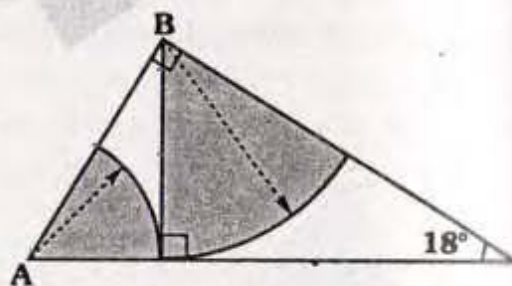
T es punto de tangencia y  $R = 2\sqrt{2}$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{4}{3}(\pi - \sqrt{3})$     B)  $\frac{4}{3}(\pi - \sqrt{2})$   
C)  $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$     D)  $\frac{2}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$   
E)  $\frac{4}{3}(4\pi - 3)$

**PROBLEMA N° 47**

En el gráfico, halle la suma de áreas de las regiones sombreadas, si  $AB = \sqrt{5}$ .



- A)  $\pi$     B)  $2\pi$     C)  $3\pi$     D)  $4\pi$     E)  $\pi/2$

**PROBLEMA N° 48**

En el gráfico, las circunferencias son congruentes de radio 2 y son tangentes a los lados del polígono convexo mostrado. Halle



Es la suma de las áreas de las regiones sombreadas.

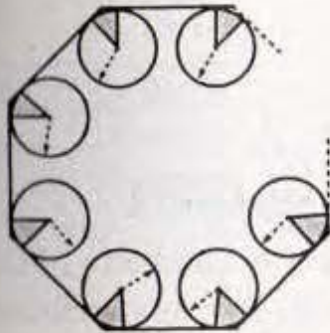
A)  $3a$

B)  $a$

C)  $3a$

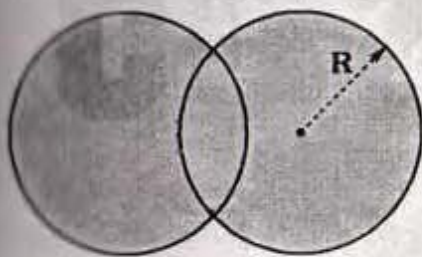
D)  $3a$

E)  $\frac{3}{2}a$



**PROBLEMA N° 49**

En el gráfico, las circunferencias son iguales y congruentes, halle el área de la región sombreada.



A)  $2\pi R^2$

B)  $4\pi R^2$

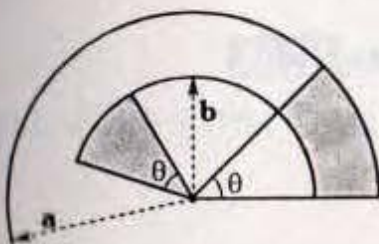
C)  $\frac{3}{2}\pi R^2$

D)  $\frac{3}{4}\pi R^2 + R^2$

E)  $\frac{3}{2}\pi R^2 + R^2$

**PROBLEMA N° 50**

En el gráfico las regiones sombreadas son equivalentes. Halle  $a/b$ .



A) 1

B) 2

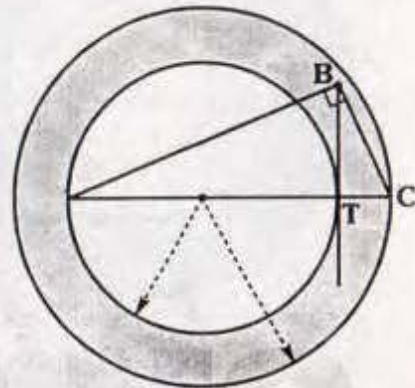
C)  $\sqrt{3}$

D)  $\sqrt{2}$

E)  $2\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 51**

En el gráfico,  $BC = 6u$ . Siendo T punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



A)  $16\pi u^2$

B)  $18\pi u^2$

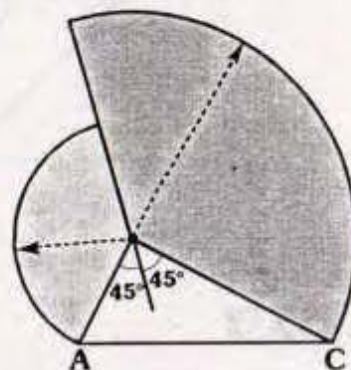
C)  $6\sqrt{2}\pi u^2$

D)  $36\pi u^2$

E)  $24\pi u^2$

**PROBLEMA N° 52**

En el gráfico,  $AC = a$ , calcule el área de la región sombreada.



A)  $\pi a^2$

B)  $\frac{3}{4}\pi a^2$

C)  $\frac{1}{2}\pi a^2$

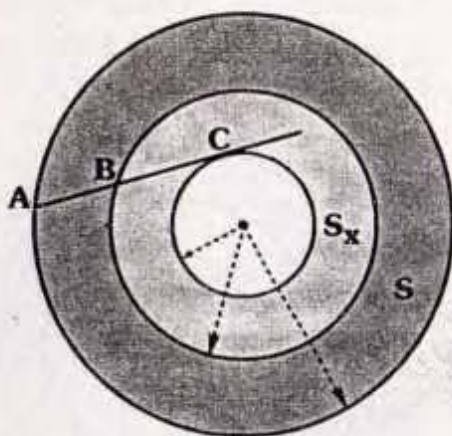
D)  $\frac{3}{8}\pi a^2$

E)  $\frac{2}{3}\pi a^2$

**PROBLEMA N° 53**

En el gráfico, C es punto de tangencia y  $AB = BC$ . Calcule  $S_x$  en función de S.

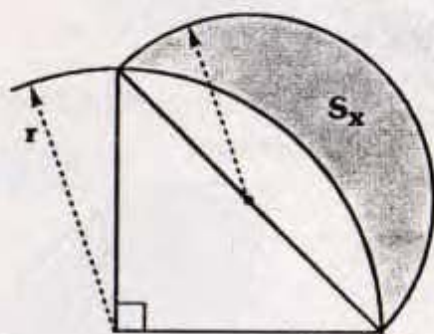
- A)  $\frac{S}{3}$
- B)  $2S$
- C)  $\frac{S}{2}$
- D)  $\frac{S}{4}$
- E)  $\frac{3}{2}S$



**PROBLEMA N° 54**

En el gráfico, calcule  $S_x$  en función de r.

- A)  $\frac{\pi r^2}{2}$
- B)  $r^2$
- C)  $2r^2$
- D)  $2\pi r^2$
- E)  $\frac{r^2}{2}$



**PROBLEMA N° 55**

Se tiene el cuadrado ABCD se ubica M y N en  $\overline{AC}$  tal que la circunferencia que contiene a M y N es tangente a  $\overline{BA}$  y  $\overline{BC}$ . Si  $AM = MN = NC = \sqrt{2}$ , calcule el

área del círculo limitado por la circunferencia.

- A)  $\pi$
- B)  $2\pi$
- C)  $4\pi$
- D)  $8\pi$
- E)  $6\pi$

**PROBLEMA N° 56**

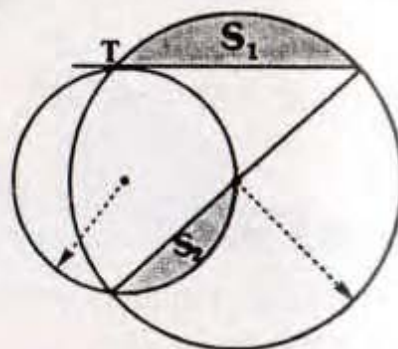
Se tiene el cuadrado JFDC, M es punto medio de  $\overline{FD}$ , una circunferencia pasa por M y es tangente a  $\overline{JC}$  en J, el segmento tangente a la circunferencia trazado por D a la circunferencia mide  $4\sqrt{3}$ . Calcule el área del círculo limitado por la circunferencia.

- A)  $16\pi$
- B)  $9\pi$
- C)  $25\pi$
- D)  $49\pi$
- E)  $20\pi$

**PROBLEMA N° 57**

En el gráfico, T es punto de tangencia calcule  $S_1/S_2$ .

- A) 1
- B)  $\sqrt{2}$
- C) 2
- D)  $\pi$
- E)  $\frac{\pi+1}{\pi}$

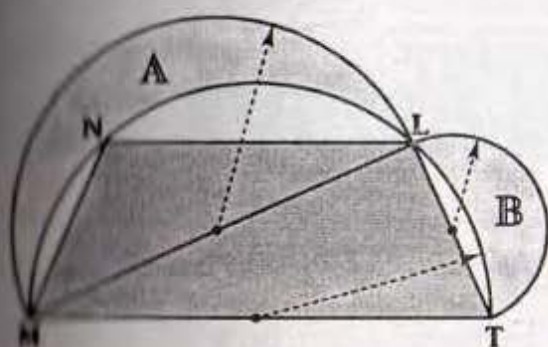


**PROBLEMA N° 58**

En el gráfico,  $MN = NL = LP$ , calcule

$$\frac{A + B}{S_{(MNLT)}}$$





- A) 1                      B) 2                      C)  $3/2$   
 D)  $2/3$                       E)  $4/3$

**PROBLEMA N° 59**

En la circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro O y radio  $\hat{r}$ , se ubican los puntos A y B,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son circunferencias de diámetros  $\overline{AO}$  y  $\overline{BO}$ , si  $m\widehat{AB} = 90^\circ$ , calcule el área de la región externa a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  e interna a  $\mathcal{C}$ .

- A)  $\frac{49}{2}\pi - 9$                       B)  $\frac{99}{2}\pi - 9$

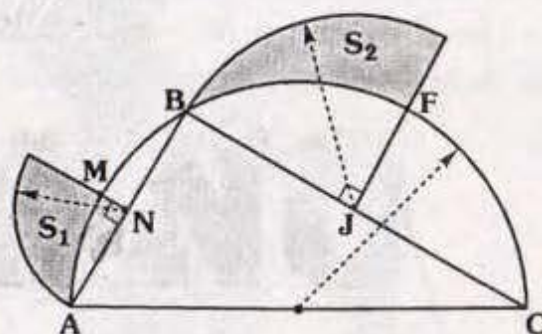
C)  $\frac{115\pi}{4} - 10$

D)  $20\pi - 6$

E)  $\frac{99}{4}\pi - 12$

**PROBLEMA N° 60**

En el gráfico,  $\overline{MN}$  y  $\overline{FJ}$  son flechas relativas a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente. Si  $S_1 = 3$  y  $S_2 = 4$ . Halle el área de la región ABC.



A) 5

B) 10

C) 7

D) 14

E) 25



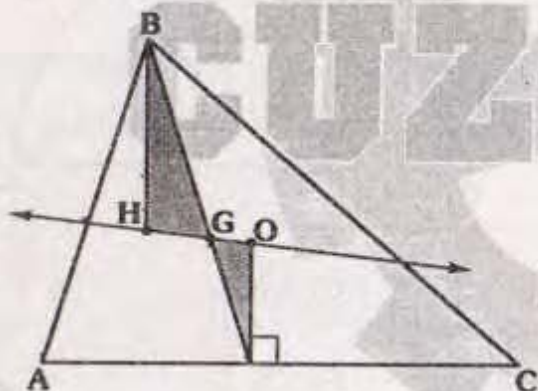
# Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Un

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N° 61 Seminario

En la figura mostrada, H es el ortocentro y G el baricentro del triángulo ABC. Si  $AB=13u$ ,  $BC=15u$  y  $AC=14u$ . Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $55/8$       B)  $33/4$       C)  $44/3$   
D)  $17/3$       E)  $23/4$

### PROBLEMA N° 62 Seminario

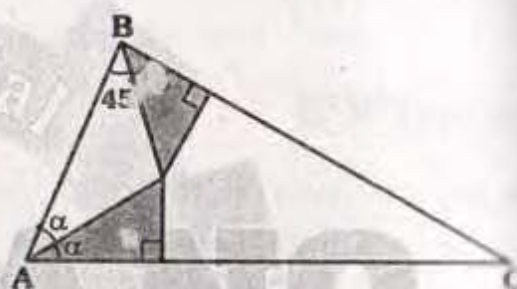
En el triángulo ABC,  $AB < BC$ ,  $\overline{BE}$  es bisectriz interior y  $\overline{BD}$  es bisectriz exterior, demostrar:

$$A_{\triangle ABD} = A_2 \left( \frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} \right)$$

donde:  $A_1 = A_{\triangle CBE}$  y  $A_2 = A_{\triangle EBA}$

### PROBLEMA N° 63 Seminario

En la figura,  $AB = 6u$  y  $BC = 8u$ . Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $10u^2$       B)  $8u^2$       C)  $4u^2$   
D)  $2u^2$       E)  $6u^2$

### PROBLEMA N° 64 Seminario

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y una recta secante que interseca a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{BC}$  en N; además contiene a los incentros de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Si  $MB=m$ ,  $MA=\ell$  y  $CN=n$ . Halle el área de AMNC.

- A)  $\frac{3}{2}\ell(m+n)$       B)  $\frac{\ell}{2}(m+n) + \frac{mn}{2}$   
C)  $\frac{3\ell}{2}(m+n) - \frac{mn}{2}$       D)  $\frac{mn}{2} + \frac{3\ell}{2}(m+n)$   
E)  $mn + \ell(m+n)$



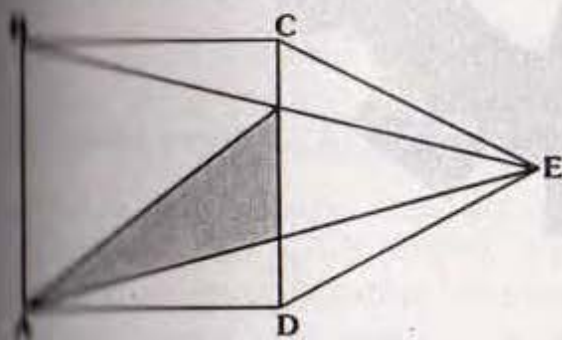
**PROBLEMA N° 65** Seminario

En un triángulo ABC, cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  y las alturas relativas a dichos lados son  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  respectivamente. Hallar el área de la región ABC.

- A)  $\sqrt{abch_1h_2h_3}$       B)  $\frac{1}{4}\sqrt{abch_1h_2h_3}$   
 C)  $\frac{1}{2}\sqrt{abch_1h_2h_3}$       D)  $\sqrt{\frac{abch_1h_2h_3}{2}}$   
 E)  $\frac{1}{2}\sqrt{abch_1h_2h_3}$

**PROBLEMA N° 66** Seminario

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide  $\ell$  y DCE es un triángulo equilátero. Hallar el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{\ell^2}{2}(3\sqrt{3}-2)$       B)  $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)$   
 C)  $\frac{\ell^2}{2}(\sqrt{3}-1)$       D)  $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-1)$   
 E)  $\frac{\ell^2}{2}(4\sqrt{3}-3)$

**PROBLEMA N° 67** Seminario

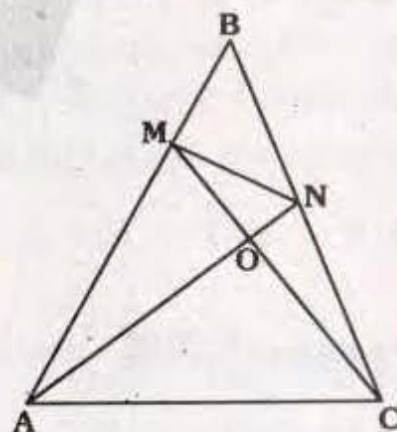
En un triángulo isósceles ABC,  $AB = BC$ ,  $AC = b$ , las medianas congruentes son perpendiculares. Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $\frac{3}{8}b^2$       B)  $\frac{3}{4}b^2$       C)  $\frac{3}{2}b^2$   
 D)  $2b^2$       E)  $3b^2$

**PROBLEMA N° 68** Seminario

En la figura,  $A_{\triangle MBN} = Xu^2$ ,  $A_{\triangle MON} = Yu^2$ ,  $A_{\triangle AOC} = Zu^2$ . Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $\frac{3}{2}(X+Y+Z)$   
 B)  $\frac{XY}{Z}$   
 C)  $\frac{XZ}{Y}$   
 D)  $\frac{YZ}{X}$   
 E)  $\frac{2}{3}(X+2Y+Z)$



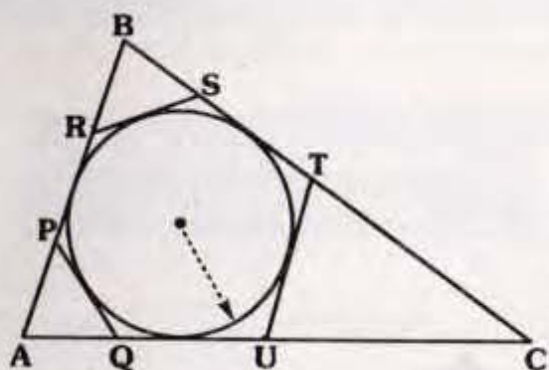
**PROBLEMA N° 69** Seminario

Si  $p$  representa al semiperímetro y

$$(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU}) = 336$$

$$p_{APQ} + p_{RBS} + p_{TCU} = 21$$

Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



- A) 2    B) 3    C) 4    D) 5    E) 6

**PROBLEMA Nº 70** Seminario

En un triángulo ABC se ubica el ortocentro O,  $\overline{BH}$  es altura del triángulo ABC, F es un punto de la prolongación de  $\overline{BH}$ , tal que  $m\angle AFC = 90^\circ$ . Si  $(AC)(BH) = 32u^2$  y  $(AC)(OH) = 8u^2$ . Halle el área de la región triangular AFC en  $u^2$ .

- A) 6    B) 7    C) 8    D) 9    E) 10

**PROBLEMA Nº 71** Seminario

En un cuadrado ABCD sobre el lado  $\overline{BC}$  se construye exteriormente el triángulo rectángulo BMC (recto en M). Si el producto de las áreas de las regiones triangulares ABM y MCD es  $36u^4$ , entonces el área de la región triangular BMC (en  $u^2$ ) es:

- A) 18    B) 15    C) 12    D) 6    E) 5

**PROBLEMA Nº 72** Seminario

Se tiene un triángulo de lados  $9u$ ,  $10u$  y  $11u$ . Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo.

- A)  $\frac{80}{11}\sqrt{2}$     B)  $\frac{40}{13}\sqrt{2}$     C)  $\frac{20}{33}\sqrt{2}$   
D)  $\frac{80}{11}\sqrt{3}$     E)  $\frac{40}{11}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 73** Seminario

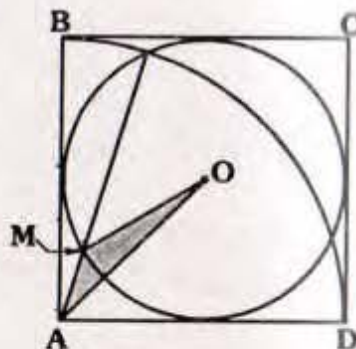
En un triángulo ABC se ubica D en la prolongación de  $\overline{AC}$  tal que  $AC : CD :: 3:1$ , M es punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\overline{DM} \cap \overline{AB} = \{N\}$ . Halle la relación entre las áreas de las regiones BMN y ANMC.

- A) 1: 5    B) 1: 6    C) 1: 9  
D) 2: 9    E) 2: 5

**PROBLEMA Nº 74** Examen parcial

En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 8 con una circunferencia inscrita de centro O. Después del vértice A se traza el arco BD, luego el área de la región triangular AOM es:

- A)  $\sqrt{7}$   
B) 2,5  
C)  $\sqrt{6}$   
D) 3  
E)  $\sqrt{5}$





**PROBLEMA N° 75** Seminario

Sea  $A$  el área de una región triangular. Hallar el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos medios de las medianas.

- A)  $A/4$       B)  $A/6$       C)  $A/8$   
D)  $A/16$       E)  $A/24$

**PROBLEMA N° 76** Seminario

En un triángulo  $ABC$ , se cumple que  $BC=a$ ,  $AC=b$  y  $AB=c$ , el incentro es  $I$ ; la bisectriz del ángulo  $B$  corta a la circunferencia circunscrita en  $F$ ; si  $r$  y  $r_b$  representan las longitudes del inradio y exradio relativo a  $AC$ , probar que el área de la región  $AIF$  tiene por expresión:  $\frac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

**PROBLEMA N° 77** Seminario

En un cuadrilátero inscriptible  $ABCD$ ,  $AB=7\text{cm}$ ;  $BC=CD=15\text{cm}$  y  $AD=25\text{cm}$ . Hallar el área del triángulo  $ABC$ .

- A)  $24\text{cm}^2$       B)  $48\text{cm}^2$       C)  $20\text{cm}^2$   
D)  $42\text{cm}^2$       E)  $50\text{cm}^2$

**PROBLEMA N° 78** Seminario

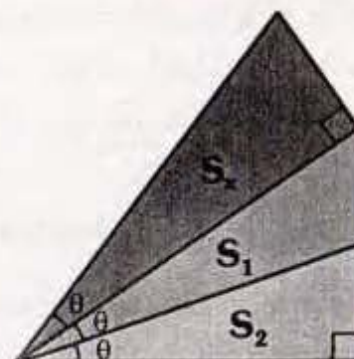
Calcular el área de la región triangular cuyos lados miden  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{7}$ .

- A)  $\frac{\sqrt{35}}{3}$       B)  $\frac{\sqrt{59}}{4}$       C)  $\frac{49}{15}$   
D)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$       E)  $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{105}}\right)$

**PROBLEMA N° 79** Seminario

De la figura, hallar  $S_x$  en función de  $S_1$  y  $S_2$ .

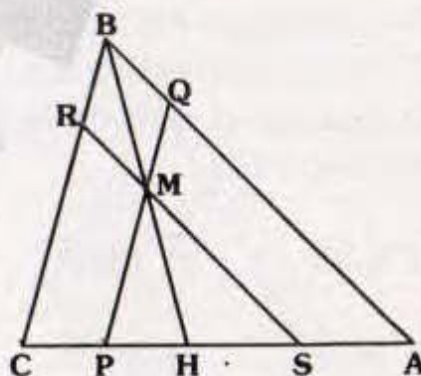
- A)  $S_1^2/S_2$   
B)  $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$   
C)  $\sqrt{S_1 S_2}$   
D)  $S_2^2/S_1$   
E)  $S_1 + S_2$



**PROBLEMA N° 80** Seminario

En la figura  $PQ \parallel CB$ ,  $RS \parallel BA$ ,  $AH=2(HC)$ ,  $S_{\triangle ABC} = 120u^2$ ,  $BM=MH$ . Hallar  $S_{AQMS} - S_{MRCP}$ .

- A) 40  
B) 80  
C) 90  
D) 60  
E) 30



**PROBLEMA N° 81** Seminario

En el triángulo  $ABC$ ,  $I$  es incentro y  $G$  es baricentro. Si  $AB = 15u$ ,  $BC = 13u$  y  $AC = 14u$ . Calcule  $S_{\triangle BIG}$ .

- A) 2      B) 1      C)  $4/3$   
D)  $2/3$       E)  $5/3$



**PROBLEMA N° 82**

Práctica Calificada

En un triángulo  $ABC$ , se cumple que  $AC=6$ ,  $AB+BC=18$  y su inradio mide 2. Calcule el área de la superficie del triángulo  $ABC$ .

- A) 14    B) 16    C) 18    D) 20    E) 24

**PROBLEMA N° 83**

Práctica Calificada

En un triángulo  $ABC$  (recto en  $B$ ),  $I$  es incentro,  $AI=a$ ,  $IC=b\sqrt{2}$ . Calcule el área de la superficie triangular  $AIC$ .

- A)  $2ab$     B)  $ab$     C)  $\frac{ab}{2}$   
D)  $\frac{1}{4}ab$     E)  $\frac{a^2 + b^2}{2}$

**PROBLEMA N° 84**

Práctica Calificada

En un triángulo  $ABC$  dos lados miden 9 y 13, la mediana relativa al tercer lado mide 10. Calcule el área de la superficie del triángulo  $ABC$ .

- A)  $8\sqrt{14}$     B)  $10\sqrt{14}$     C)  $12\sqrt{14}$   
D)  $14\sqrt{14}$     E)  $16\sqrt{14}$

**PROBLEMA N° 85**

Práctica Calificada

En un triángulo acutángulo  $ABC$ , la  $m\angle ABC = 72^\circ$ , se trazan las alturas  $\overline{AF}$  y  $\overline{CH}$ . Entonces, el área de la región triangular  $HBF$  es  $(a - b\sqrt{5})$  veces el área de la región triangular  $ABC$ . Calcule  $a/b$ .

- A) 2    B) 3    C) 4    D) 5    E) 6

**PROBLEMA N° 86**

Práctica Calificada

El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero  $ABC$  mide 10. Halle el área de la región triangular  $AMN$  (en  $u^2$ ).

- A)  $\sqrt{3}$     B)  $2\sqrt{3}$     C)  $3\sqrt{3}$   
D)  $4\sqrt{3}$     E)  $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 87**

Práctica Calificada

Una región triangular  $ABC$ , de baricentro  $G$  tiene  $k$   $u^2$  de área. Por  $G$  se traza una paralela a  $\overline{AC}$  que interseca a los lados  $AB$  y  $BC$  en  $P$  y  $Q$  respectivamente. Halle el área de la región  $APQC$  (en  $u^2$ ).

- A)  $\frac{k}{6}$     B)  $\frac{k}{5}$     C)  $\frac{2}{5}k$   
D)  $\frac{3}{7}k$     E)  $\frac{5}{9}k$

**PROBLEMA N° 88**

Práctica Calificada

En un triángulo  $ABC$  se traza la mediana  $\overline{AM}$  y la bisectriz  $\overline{BD}$  del ángulo  $ABC$ ,  $D \in \overline{AC}$ ,  $\overline{BD} \cap \overline{AM} = \{Q\}$ ,  $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ . Si el área de  $BQM$  es  $S$ , halle el área de la región triangular  $ABC$ .

- A)  $5S$     B)  $6S$     C)  $7S$     D)  $8S$     E)  $9S$

**PROBLEMA N° 89**

Examen de Selección

El perímetro de un triángulo isósceles es 28u. Si uno de los lados congruentes mide



10 u, entonces el área (en  $u^2$ ) de la región triangular es:

- A)  $4/3$       B)  $6\sqrt{21}$       C)  $8\sqrt{21}$   
D) 28

**PROBLEMA N° 90** Seminario

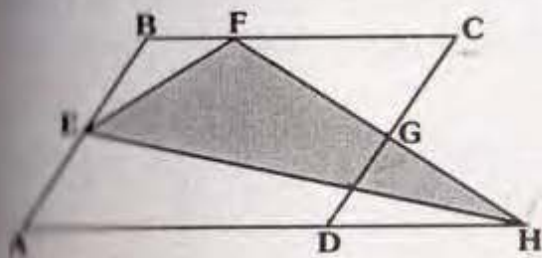
En una circunferencia se inscribe el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica un punto F sobre el arco  $\widehat{BC}$ . Si  $AB = 5\sqrt{3}$ ,  $BF = 6$  y  $m\widehat{AB} = 60^\circ$ , entonces el área de la región triangular BFC es:

- A)  $\frac{9}{2}(4 - \sqrt{3})$       B)  $9(4 - \sqrt{3})$   
C)  $9(8 - \sqrt{3})$       D)  $\frac{9}{2}(2 - \sqrt{3})$   
E)  $4(3 - \sqrt{3})$

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N° 91** Seminario

En el romboide ABCD de área S, se cumple que  $AE = DG$ . Hallar el área de la región sombreada.



- A)  $S/2$       B)  $S/3$       C)  $S/4$       D) S      E)  $2S$

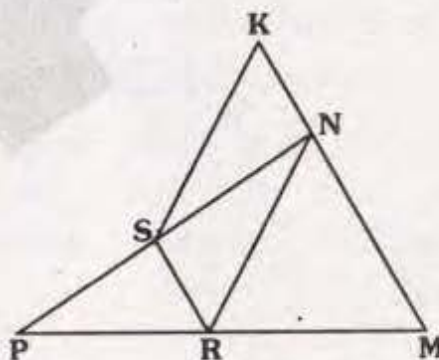
**PROBLEMA N° 92** Seminario

En un trapecio ABCD de bases  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$  ( $BC < AD$ ); la base media y la diagonal  $\overline{AC}$  se cortan en Q. Calcular el área de BQD, si las áreas de las regiones trapeciales parciales determinadas por la base media son  $S_1$  y  $S_2$  ( $S_1 > S_2$ ).

- A)  $\frac{S_1 + S_2}{2}$       B)  $S_1 - S_2$       C)  $\frac{S_1 - S_2}{2}$   
D)  $\sqrt{S_1 S_2}$       E)  $\frac{2S_1 S_2}{S_1 - S_2}$

**PROBLEMA N° 93** Seminario

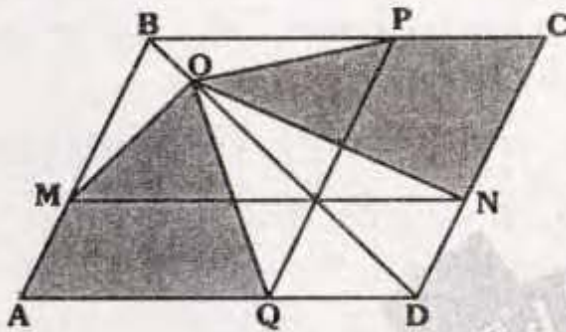
En la siguiente figura el área de la región triangular PSR es  $Au^2$  y  $b(MN) = a(NK)$ , entonces el área de la región limitada por el paralelogramo KSRN es:



- A)  $\frac{3A(a-b)}{2b}$       B)  $\frac{4}{3} \frac{A(a-b)}{b}$   
C)  $\frac{A(a-b)}{b}$       D)  $\frac{A(a-b)}{2b}$   
E)  $\frac{2A(a-b)}{b}$

**PROBLEMA Nº 94** Práctica Calificada

En el paralelogramo ABCD de la figura  $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$  y  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ . Si  $S_{\triangle OMAQ} = 17u^2$ , calcule  $S_{\triangle OPCN}$  en  $u^2$ .



- A) 8,5      B) 13      C) 17,5  
D) 21      E) 17

**PROBLEMA Nº 95** Práctica Calificada

Las bases de un trapezio miden  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ). Halle la longitud del segmento paralelo a las bases que determina dos trapezios de la misma área.

- A)  $\sqrt{ab}$       B)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$       C)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$   
D)  $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$       E)  $\frac{a^3+b^3}{ab}$

**PROBLEMA Nº 96** Práctica Calificada

En el triángulo ABD,  $C \in \overline{AD}$  ( $AC > CD$ ) y  $P \in \overline{AB}$ , tal que  $\overline{CP} \parallel \overline{BD}$ . Si M es punto medio de  $\overline{AD}$  y  $S_{\triangle ABC} = 16m^2$ , halle  $S_{\triangle MPBC}$  en  $m^2$ .

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 12

**PROBLEMA Nº 97** Práctica Calificada

En el cuadrado ABCD de  $20u$  de lado,  $M \in \overline{CD}$ ,  $N \in \overline{AB}$  y  $\overline{AM} \parallel \overline{CN}$ . Si la distancia entre  $\overline{AM}$  y  $\overline{CN}$  es 40, calcule el área de la región AMCN (en  $u^2$ )

- A) 100      B) 120      C) 130  
D) 140      E) 150

**PROBLEMA Nº 98** Práctica Calificada

En una circunferencia de centro O y de radio R unidades, se inscribe un hexágono regular ABCDEF. Las prolongaciones de las cuerdas  $\overline{AE}$  y  $\overline{CD}$  se interceptan en el punto G. Si  $\overline{EC} \cap \overline{AD} = \{K\}$ , entonces el área (en  $u^2$ ) de la región cuadrangular EKDG es:

- A)  $\frac{2R^2\sqrt{3}}{5}$       B)  $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$       C)  $\frac{5R^2\sqrt{3}}{8}$   
D)  $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$       E)  $\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$

**PROBLEMA Nº 99** Práctica Calificada

Sea ABC un triángulo,  $AC = b$ ,  $BC = a$  ( $a > b$ ),  $r_a$  y  $r_b$  son los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los lados BC y AC respectivamente. Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $\frac{2\sqrt{r_a r_b} ab}{\sqrt{r_a^2 - r_b^2}}$       B)  $\frac{(a^2 - b^2)r_a r_b}{r_a^2 - r_b^2}$       C)  $\frac{ab\sqrt{r_a r_b}}{a - b}$   
D)  $\frac{r_a r_b (a - b)}{r_a - r_b}$       E)  $\frac{(r_a + r_b)ab}{r_a - r_b}$



**PROBLEMA N° 100** Práctica Calificada

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra;  $AB=a$ ,  $BC=b$ ,  $CD=c$ ,  $AD=d$ . Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $\frac{(a+b)\sqrt{abcd}}{c+d}$  B)  $\frac{ab\sqrt{abcd}}{ab+cd}$   
 C)  $\frac{ac\sqrt{abcd}}{ac+bd}$  D)  $\frac{bd\sqrt{abcd}}{ad+bc}$   
 E)  $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)\sqrt{abcd}$

**PROBLEMA N° 101** Práctica Calificada

En un rombo la suma de las longitudes de sus diagonales es 70 u y la longitud del radio de la circunferencia inscrita al rombo es 12u. Entonces el área (en  $u^2$ ) de la región limitada por el rombo es:

- A) 300 B) 480 C) 560  
 D) 600 E) 640

**PROBLEMA N° 102** Práctica Calificada

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se inscribe un cuadrado EFLJ,  $E \in AC$ ,  $F \in AB$ ,  $L \in BC$ . Las áreas de las regiones triangulares AEF y LJC son  $Vu^2$  y  $Wu^2$ . Halle el área de la región cuadrada EFLJ. (en  $u^2$ )

- A)  $\frac{\sqrt{V.W}}{2}$  B)  $\sqrt{V.W}$  C)  $\sqrt{2V.W}$   
 D)  $2\sqrt{V.W}$  E)  $\frac{V.W}{V+W}$

**PROBLEMA N° 103** Práctica Calificada

En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica:  $m\angle BCD = 90^\circ$ ,  $AB = 13u$ ,  $BC = 20u$ ,  $CD = 10u$  y  $DA = 17u$ . Entonces, el área (en  $u^2$ ) de la región cuadrangular ABCD es:

- A) 200 B) 210 C) 220  
 D) 310 E) 320

**PROBLEMA N° 104** Práctica Calificada

En un triángulo ABC se ubican los puntos M en  $\overline{AC}$  y N en  $\overline{BC}$  tal que:  $MC = 2AM$  y  $BN = 2NC$ . Si  $\overline{AN} \cap \overline{BM} = \{P\}$  y el área de la región triangular APB es  $10u^2$ , entonces el área (en  $u^2$ ) de la región cuadrangular PMCN es:

- A) 10 B) 15 C) 20  
 D) 25 E) 30

**PROBLEMA N° 105** Seminario

Sea el rombo ABCD, P es punto medio de  $\overline{BC}$ ,  $AP = 9\text{cm}$ ,  $DP = 13\text{cm}$ . Halle el área limitado por el rombo ABCD en  $\text{cm}^2$ .

- A)  $12\sqrt{14}$  B)  $14\sqrt{14}$  C)  $18\sqrt{14}$   
 D)  $22\sqrt{14}$  E)  $24\sqrt{14}$

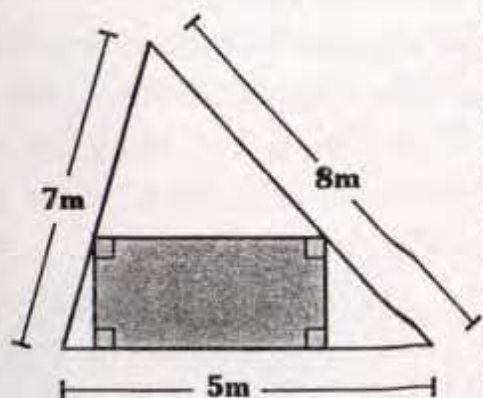
**PROBLEMA N° 106** Examen Parcial

En el triángulo cuyos lados miden 5; 7 y 8m se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura. Entonces el área máxima en  $\text{m}^2$  que puede encerrar dicho



rectángulo es:

- A)  $\sqrt{55}$
- B)  $6\sqrt{3}$
- C)  $\sqrt{65}$
- D)  $5\sqrt{3}$
- E)  $\sqrt{85}$



**PROBLEMA N° 107** Seminario

Se tiene un rectángulo de área  $60 u^2$ , cuyos lados son longitudes enteras, entonces el perímetro máximo de dicho rectángulo es:

- A) 122 u      B) 64u      C) 32u
- D) 100u      E) 60u

**PROBLEMA N° 108** Seminario

Por los vértices opuestos de un cuadrado, cuyo lado mide 5m, se trazan dos paralelas distantes 7m. Calcular el área de la región paralelográfica (no cuadrado) que se forma.

- A) 50      B)  $\frac{625}{4}$       C)  $\frac{625}{2}$
- D)  $\frac{1225}{8}$       E)  $\frac{1225}{24}$

**PROBLEMA N° 109** Seminario

Tres polígonos regulares de  $n$  lados de áreas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  cuyas longitudes de lados miden  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  respectivamente. Si

$A_3 = A_1 + A_2$ . Calcule  $a_3$  en función de  $a_1$  y  $a_2$ .

- A)  $\sqrt{a_1 a_2}$       B)  $a_1 + a_2$       C)  $\frac{a_1 + a_2}{3}$
- D)  $\frac{a_1 + a_2}{n}$       E)  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

**PROBLEMA N° 110** Seminario

En un cuadrado ABCD, se traza una recta secante que pasa por el centro y que interseca a los lados  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$ , las distancias trazadas de los vértices a la recta miden  $a$ ;  $b$ ;  $c$  y  $d$ , si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$ . Hallar el área de la región cuadrada.

- A) 120      B) 150      C) 100
- D) 200      E) 160

**PROBLEMA N° 111** Seminario

Hallar el área encerrada por el trapecio ABCD, si  $AB=BC=4$ ,  $m\angle ABC = m\angle ACD = 90^\circ$  y  $AC=CD$

- A) 12      B) 24      C) 20      D) 36      E) 32

**PROBLEMA N° 112** Práctica Calificada

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  respectivamente. Entonces, el área de la región cuadrangular MNPQ es igual a la mitad del área de la región cuadrangular ABCD.



II. En un trapecio ABCD ( $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ): El segmento de recta que une los puntos medios de las bases, divide a la región cuadrangular ABCD en dos regiones cuadrangulares equivalentes.

III. En un triángulo escaleno ABC, las medianas del triángulo dividen a la región triangular en seis regiones triangulares equivalentes.

- A) VFV      B) VVF      C) FFV  
D) VVV      E) FVV

**PROBLEMA Nº 113** Seminario

El área de la región de un triángulo ABC es de  $18u^2$ , se traza la altura BH y la mediatriz de  $\overline{AC}$  que interseca a  $\overline{BC}$  en N. Calcule el área de la región cuadrangular ABNH (en  $u^2$ )

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 12

**PROBLEMA Nº 114** Seminario

En un cuadrilátero MNPQ, se tiene que  $m\angle M = 30^\circ$ ,  $m\angle N = 150^\circ$ ,  $m\angle P = 120^\circ$ ,  $MN = K\sqrt{3}$  y  $NP = \ell$ , entonces el área de la región cuadrangular MNPQ es:

- A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}k(\ell + k)$       B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}k(\ell + 2k)$   
C)  $\sqrt{3}k(\ell + k)$       D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell(\ell + 2k)$   
E)  $\frac{\sqrt{3}}{2}k(2\ell + k)$

**PROBLEMA Nº 115**

Seminario

Dentro del rectángulo ABCD se ubica el punto M tal que  $AM = \sqrt{2}u$ ,  $BM = 2u$  y  $CM = 6u$ . Si  $AD = 2(AB)$ , entonces el área de la región rectangular ABCD (en  $u^2$ )

- A) 16      B) 18      C) 20  
D) 24      E) 28

**PROBLEMA Nº 116**

Seminario

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ ; sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demostrar que el área de la región triangular ABC es igual al producto del semiperímetro del triángulo DEF con R.

**PROBLEMA Nº 117**

Seminario

Sobre la hipotenusa AB del triángulo ABC se contruye un cuadrado ABDE exterior al triángulo. Si O es el centro del cuadrado y  $CO = L$ , entonces el área de la región cuadrangular ACBO es:

- A)  $L^2$       B)  $\frac{L^2}{2}$       C)  $\frac{L^2}{3}$   
D)  $\frac{2L^2}{3}$       E)  $\frac{3L^2}{4}$



**PROBLEMA N° 118**

Seminario

Si las bases de un trapecio isósceles ABCD circunscrito a una circunferencia miden  $2a$  y  $2b$  entonces el área de ABCD es:

- A)  $\frac{(a+b)^2}{2}$       B)  $\frac{(a+b)}{2}\sqrt{ab}$   
C)  $(a+b)\sqrt{ab}$       D)  $2(a+b)\sqrt{ab}$   
E)  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$

**PROBLEMA N° 119**

Seminario

En un trapecio ABCD ( $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ); M es punto medio de  $\overline{AD}$ . Luego se traza  $\overline{MQ} \perp \overline{BC}$ . Si  $MQ = a$  y  $BC = b$ , entonces el área de la región limitada por el trapecio es:

- A)  $ab$       B)  $2ab$       C)  $3ab$   
D)  $\frac{ab}{2}$       E)  $\frac{3ab}{4}$

**PROBLEMA N° 120**

Seminario

ABCD es un trapecio ( $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ )  
 $m\angle BAC = 2(m\angle CDA) = 60^\circ$ .

Si  $2(BC) = AD = 8$ , entonces el área de ABCD es:

- A)  $5\sqrt{3}$       B)  $6\sqrt{3}$       C)  $12\sqrt{3}$   
D)  $8\sqrt{3}$       E) C ó D

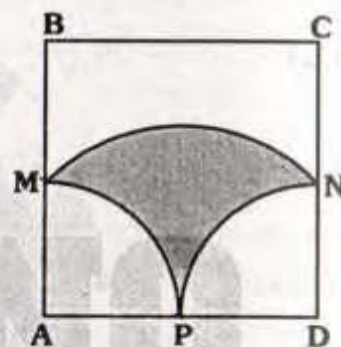
**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N° 121**

Seminario

ABCD es un cuadrado de lado  $\ell$ , los centros de los arcos son: A, D y P (P, M y N son puntos medios)

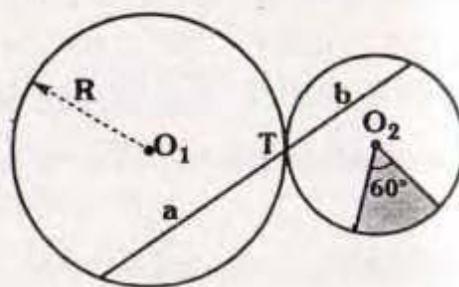
- A)  $\ell^2/8$   
B)  $\ell^2/2$   
C)  $\ell^2/3$   
D)  $\ell^2/5$   
E)  $\ell^2/4$



**PROBLEMA N° 122**

Seminario

Hallar el área del sector circular mostrado en función de  $a$ ,  $b$  y  $R$  (T es punto de tangencia,  $O_1$  y  $O_2$  son centros)



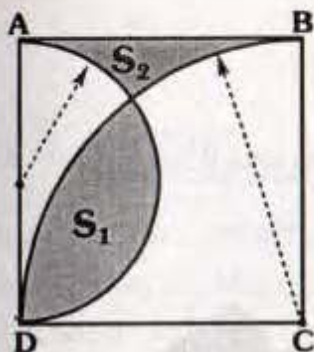
- A)  $\frac{\pi a^2 R^2}{6b^2}$       B)  $\frac{\pi b^2 R^2}{6a^2}$       C)  $\frac{\pi a^2 b^2}{6R^2}$   
D)  $\frac{\pi a^4}{6bR}$       E)  $\frac{\pi b^4}{6bR}$



**PROBLEMA N° 123** Seminario

En la figura hallar  $S_1 - S_2$ , si el lado del cuadrado ABCD mide  $2\sqrt{2}u$ .

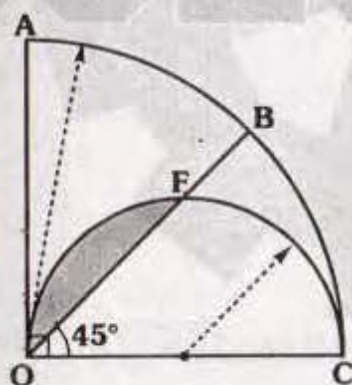
- A)  $3\pi - 4$
- B)  $3\pi - 6$
- C)  $3\pi - 8$
- D)  $2\pi - 3$
- E)  $2\pi - 4$



**PROBLEMA N° 124** Seminario

Si  $\overline{AB} = \overline{BC}$  y el área de la región sombreada es  $36 \text{ cm}^2$ , halle el área de la superficie triangular mixtilínea FBC (en  $\text{cm}^2$ )

- A)  $18 \text{ cm}^2$
- B)  $36 \text{ cm}^2$
- C)  $18\pi \text{ cm}^2$
- D)  $36\pi \text{ cm}^2$
- E)  $9\pi \text{ cm}^2$



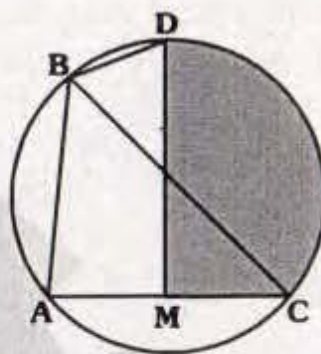
**PROBLEMA N° 125** Seminario

Hallar el área de la corona circular determinada por la circunferencia inscrita y circunscrita a un polígono regular de lado "a".

- A)  $\frac{\pi a^2}{4}$
- B)  $\frac{\pi a^2}{2}$
- C)  $\pi a^2$
- D)  $a^2(\pi - 1)$
- E)  $\frac{\pi a^2}{8}$

**PROBLEMA N° 126** Seminario

En la figura  $m\angle ABC = 45^\circ$  y  $\overline{BD}$  es bisectriz exterior del ángulo en B, M es punto medio de  $\overline{AC}$ . Calcular el área de la región sombreada (R es el radio de la circunferencia)



- A)  $\frac{R^2}{2}(2\pi + 3)$
- B)  $\frac{R^2}{6}(2\pi + 3)$
- C)  $\frac{R^2}{8}(3\pi + 2)$
- D)  $\frac{R^2}{8}(3\pi + 1)$
- E)  $\frac{\pi R^2}{5}$

**PROBLEMA N° 127** Práctica Calificada

En una circunferencia de radio R unidades, se trazan dos cuerdas paralelas situadas a un mismo lado del centro de la circunferencia. Si las medidas de los arcos que corresponden a estas cuerdas son  $30^\circ$  y  $150^\circ$ , entonces el área (en  $u^2$ ) de la parte de la región circular limitada por estas cuerdas es:

- A)  $\frac{\pi R^2}{4}$
- B)  $\frac{\pi R^2}{5}$
- C)  $\frac{\pi R^2}{6}$
- D)  $\frac{\pi R^2}{8}$
- E)  $\frac{\pi R^2}{3}$



**PROBLEMA N° 128** Práctica Calificada

Dos radios  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  de una circunferencia, forman un ángulo agudo cuya medida es  $60^\circ$ . Desde el punto A se traza el segmento AC perpendicular a la recta tangente trazada a la circunferencia por el punto B (C está en la recta tangente). Si  $OA = R$ ; entonces el área de la región limitada por  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  y el arco AB es:

- A)  $\frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{12}$       B)  $\frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$   
 C)  $\frac{(7\sqrt{3} - 2\pi)R^2}{12}$       D)  $\frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{18}$   
 E)  $\frac{(7\sqrt{3} - 3\pi)R^2}{24}$

**PROBLEMA N° 129** Práctica Calificada

Dos circunferencia son concéntricas, una cuerda de la circunferencia mayor es tangente a la menor, la longitud de la cuerda es  $2u$ . Halle (en  $u^2$ ) el área de la corona circular.

- A)  $\pi$       B)  $2\pi$       C)  $3\pi$   
 D)  $4\pi$       E)  $6\pi$

**PROBLEMA N° 130** Práctica Calificada

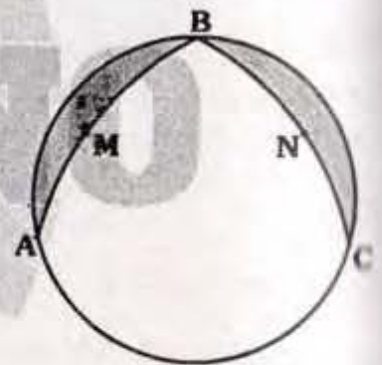
Sea L la longitud de un lado del cuadrado ABCD, con centro en D se traza el arco AC,  $\overline{BD} \cap \widehat{AC} = \{E\}$  se ubica el punto medio M del lado CD,  $\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{F\}$ . Calcule el área de la región limitada por los segmentos EF, FM, MC y el arco CE.

- A)  $\frac{L^2}{24}(3\pi - 2)$       B)  $\frac{L^2}{18}(\pi - 1)$   
 C)  $\frac{L^2}{12}(2\pi - 3)$       D)  $\frac{L^2}{9}(2\pi - 5)$   
 E)  $\frac{\pi L^2}{16}$

**PROBLEMA N° 131** Seminario

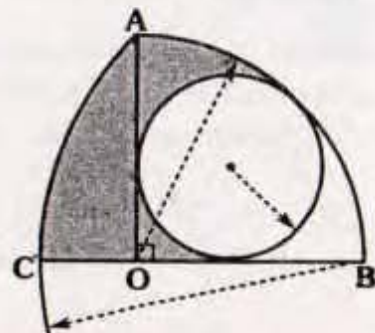
En la figura,  $\widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \equiv \widehat{AC}$ , sobre la circunferencia de radio R con centros en A y C se trazan los arcos AMB y BNC. Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{R^2}{6}(\pi - \sqrt{3})$   
 B)  $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$   
 C)  $\frac{R^2}{6}(\pi + \sqrt{3})$   
 D)  $\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} + \pi)$   
 E)  $\frac{R^2}{6}(4\sqrt{3} - 2\pi)$



**PROBLEMA N° 132** Seminario

En la figura, se cumple que  $OA = OB = 2u$ , halle el área de la región sombreada.





A)  $(n-1)u^2$

B)  $\left(\pi - \frac{8}{5}\right)u^2$

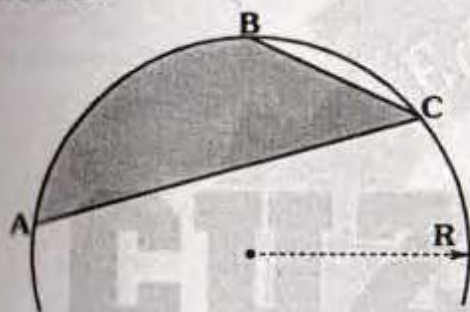
C)  $(4 + 5\pi\sqrt{2} - 6\pi - 4\sqrt{2})u^2$

D)  $(6\pi + 3\pi\sqrt{2} + 4 - 4\sqrt{2})u^2$  E)  $\pi u^2$

**PROBLEMA N° 133**

Seminario

En la figura mostrada, R es radio del arco de circunferencia, si  $m\widehat{AB} = 90^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 45^\circ$ . Halle el área de la región sombreada.



A)  $\pi R^2$

B)  $\frac{\pi R^2}{2}$

C)  $\frac{\pi R^2}{3}$

D)  $\frac{\pi R^2}{4}$

E)  $\frac{\pi R^2}{8}$

**PROBLEMA N° 134**

Seminario

En un triángulo equilátero de lado L, haciendo centro en cada vértice y con radios  $\frac{2}{5}L\sqrt{3}$  se trazan arcos de circunferencia. Halle el área del círculo en el interior del triángulo curvilíneo tangente a los arcos trazados.

A)  $\frac{\pi L^2}{3}$

B)  $\frac{\pi L^2}{2}$

C)  $\frac{\pi L^2}{\sqrt{3}}$

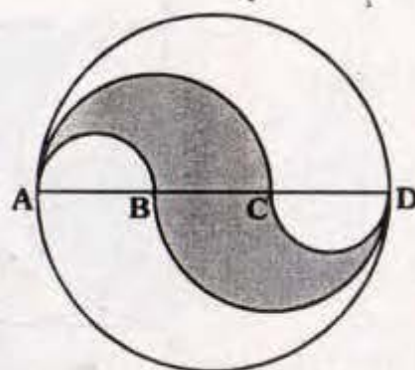
D)  $\frac{\pi L^2}{12}$

E)  $\frac{\pi L^2}{75}$

**PROBLEMA N° 135**

Seminario

En la figura  $\overline{AD}$  es diámetro y  $AB=BC=CD$ , calcule la relación entre el área de la región sombreada y el de la no sombreada (todas las curvas son semicircunferencias)



A)  $1/3$

B)  $2/5$

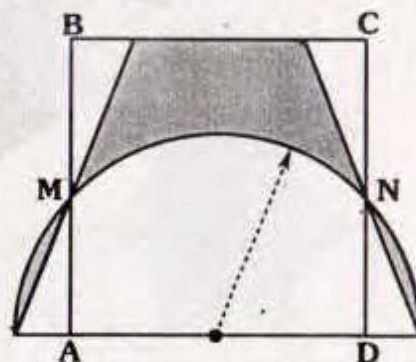
C)  $1/2$

D)  $1$

E)  $2/3$

**PROBLEMA N° 136**

Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado ( $AB=a$ , M y N son puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ )



A)  $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})$

B)  $\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2})$

C)  $\frac{a^2}{2}(2-\sqrt{2})$

D)  $\frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

E)  $\frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})$

**PROBLEMA N° 137**

Seminario

En el gráfico, se tiene un cuadrado cuyo lado mide  $\ell$ , se tiene también dos semicírculos y un círculo inscrito. Hallar el área de la región sombreada.

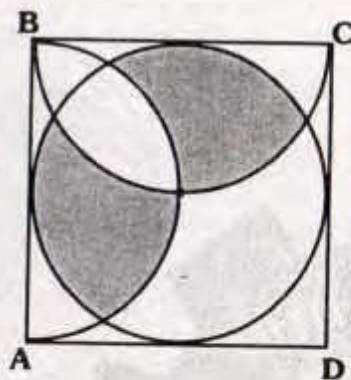
A)  $\pi\ell^2/4$

B)  $\pi\ell^2/6$

C)  $\pi\ell^2/3$

D)  $\pi\ell^2/8$

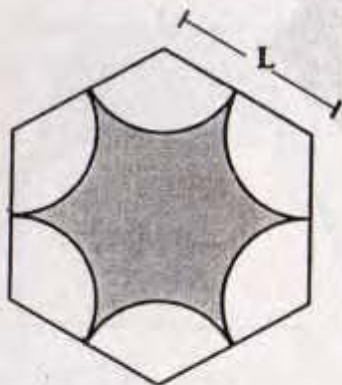
E)  $\pi\ell^2/16$



**PROBLEMA N° 138**

Seminario

Los vértices del hexágono regular mostrado son centros de seis circunferencias congruentes y tangentes exteriores. Hallar el área de la región sombreada.



A)  $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3} + \pi)$

B)  $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$

C)  $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3} + 2\pi)$

D)  $\frac{L^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3})$

E)  $L^2(3\sqrt{3} - \pi)$

**PROBLEMA N° 139**

Seminario

Hallar el área de la corona circular, si  $PA=3u$  y  $PC=6u$  (C y M son puntos de tangencia)

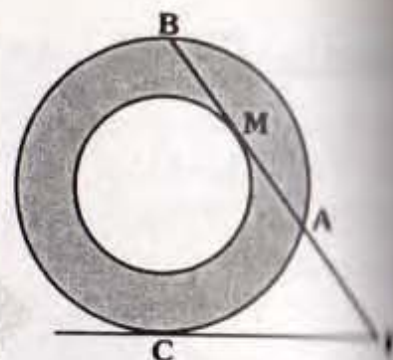
A)  $\frac{27}{4}\pi u^2$

B)  $\frac{45}{4}\pi u^2$

C)  $25\pi u^2$

D)  $\frac{81}{4}\pi u^2$

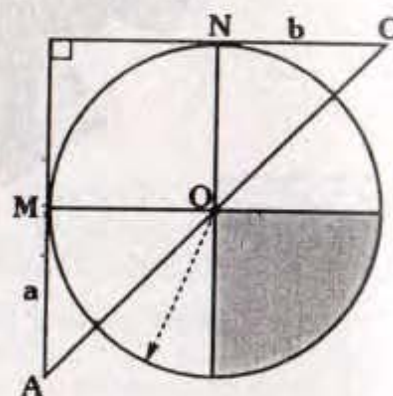
E)  $\frac{45}{2}\pi u^2$



**PROBLEMA N° 140**

Seminario

En la figura M y N son puntos de tangencia. Hallar el área de la región sombreada.



A)  $\frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)$

B)  $\pi(a^2 + b^2)$

C)  $\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$

D)  $\frac{\pi}{4}ab$

E)  $\frac{\pi}{2}ab$



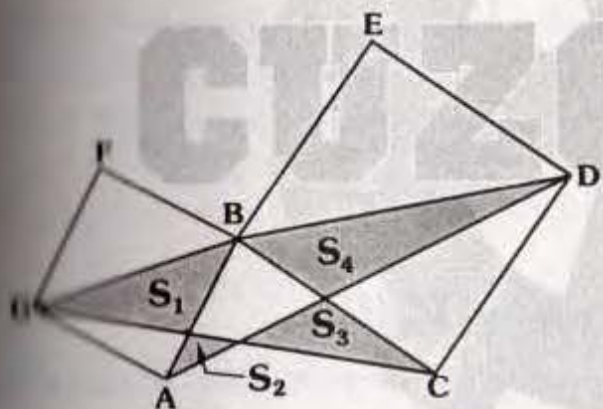
# Problemas Resueltos

## Ciclo Semestral

### ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

#### PROBLEMA N° 141

En el gráfico, ABFG y BCDE son cuadrados. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.

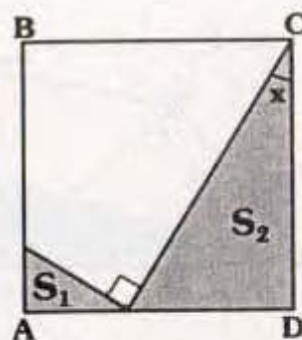


- A)  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$       B)  $S_1 S_3 = S_2 S_4$   
 C)  $S_1^2 + S_3^2 = S_2^2 + S_4^2$       D)  $S_1 - S_3 = S_4 - S_2$   
 E)  $S_1 S_2 = S_4 S_3$

#### PROBLEMA N° 142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado,  $S_1$  y  $S_2$  son las áreas de las regiones sombreadas. Si  $S_2 = 16S_1$ , calcule  $x$ .

- A)  $16^\circ$   
 B)  $37^\circ$   
 C)  $30^\circ$   
 D)  $22,5^\circ$   
 E)  $26,5^\circ$



#### PROBLEMA N° 143

En el triángulo ABC se traza la mediana BM tal que  $m\angle BMA = 60^\circ$ , si  $(BC)^2 - (AB)^2 = 12$ . Calcule el área de la región triangular ABC.

- A)  $3\sqrt{3}$       B)  $6\sqrt{3}$       C)  $9\sqrt{3}$   
 D) 6      E) 9

#### PROBLEMA N° 144

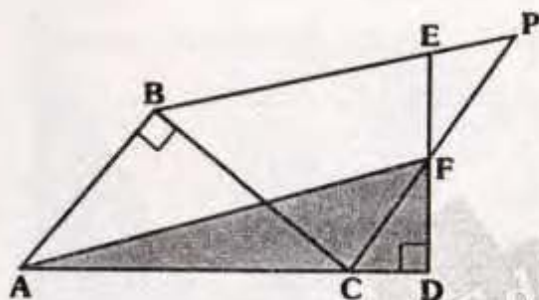
Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica Q en  $\overline{AD}$ , la mediatriz de  $\overline{CQ}$  corta a  $\overline{AB}$  en P. Si  $AQ = m$ , calcule el área de la región triangular PBC.

- A)  $m^2$       B)  $2m^2$       C)  $\frac{m^2}{4}$   
 D)  $\frac{m^2}{2}$       E)  $4m^2$

**PROBLEMA N° 145**

En el gráfico, E es excentro relativo a  $\overline{BC}$  del triángulo ABC, si  $m\angle EPF = m\angle BCA$ ,

calcule  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}$



- A) 1                      B) 2                      C)  $\sqrt{2}$   
D)  $\sqrt{3}$                       E)  $\frac{4}{3}$

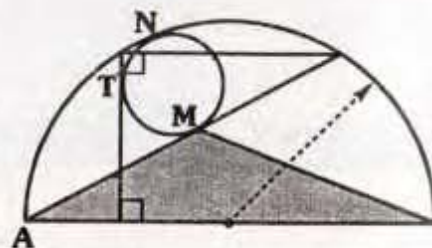
**PROBLEMA N° 146**

$E_1$  y  $E_2$  son los excentros relativos a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente,  $\overline{E_1E_2}$  interseca a la circunferencia exinscrita relativa a  $\overline{BC}$  en el punto M, tal que  $E_1M = ME_2 = 4(BM) = 4$ , calcule el área de la región triangular ABC.

- A)  $\frac{36}{5}$                       B) 9                      C)  $\frac{18}{5}$   
D) 4                      E)  $\frac{27}{8}$

**PROBLEMA N° 147**

Si T, N y M son puntos de tangencia y  $AM=6$  calcule el área de la región sombreada.



- A) 12    B) 24    C) 18    D)  $6\sqrt{2}$     E)  $18\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 148**

Sea el triángulo ABC de inradio r; sea  $r_a$  el radio de la semicircunferencia que su diámetro está en  $\overline{AC}$  y es tangente a  $\overline{BA}$  y  $\overline{BC}$ , análogamente se define  $r_b$  y  $r_c$ .

Si  $\frac{x}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ . Calcule x.

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D)  $\sqrt{2}$                       E)  $\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 149**

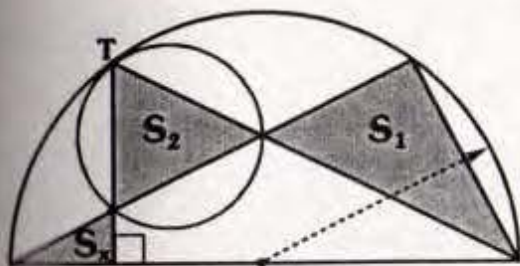
Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en  $\overline{AC}$  (P en  $\overline{AQ}$ ) tal que  $m\angle ABP = m\angle CBQ$ , se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos ABP y BQC, tangentes a  $\overline{AC}$  en M y N respectivamente. Demuestre

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{QN} + \frac{1}{NC}$$

**PROBLEMA N° 150**

En el gráfico, halle  $S_x$  en función de  $S_1$  y  $S_2$  (T es punto de tangencia)





- A)  $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2$  B)  $\sqrt{S_1 S_2}$  C)  $S_2^2 / S_1$   
 D)  $\frac{(S_1 - S_2)^2}{2S_2}$  E)  $\frac{(S_1 - S_2)^2}{2S_1}$

**PROBLEMA N° 151**

Dada una región triangular ABC de incentro "I", sea "H" la proyección del excentro relativo a  $\overline{AB}$  sobre  $\overline{AC}$ . Luego con centro en "H" se traza el cuadrante  $\widehat{CAP}$ , tal que la semicircunferencia de diámetro  $\overline{PH}$  contiene a "I". Si  $IH = 6$ , calcule el área de la región triangular ABC.

- A) 36 B) 18 C) 12  
 D) 20 E)  $6\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 152**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), E es excentro relativo a  $\overline{BC}$ , se traza la circunferencia de centro C y radio CE, la cual corta a  $\overline{AC}$  en M. Si  $AB = 12$  y  $BC = 5$ , calcule el área de la región triangular BMC.

- A)  $\frac{30}{13}\sqrt{15}$  B)  $\frac{18}{13}\sqrt{13}$  C)  $\frac{30}{13}\sqrt{13}$   
 D)  $\frac{17}{3}\sqrt{13}$  E)  $\frac{17}{13}\sqrt{5}$

**PROBLEMA N° 153**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices interiores  $\overline{AE}$  y  $\overline{CF}$  secantes en I, si  $AF = a$  y  $EC = b$ . Calcule la suma de áreas de las regiones triangulares AFI y EIC.

- A)  $ab$  B)  $\frac{ab}{2}$  C)  $\frac{ab}{3}$   
 D)  $\frac{ab}{4}$  E)  $2ab$

**PROBLEMA N° 154**

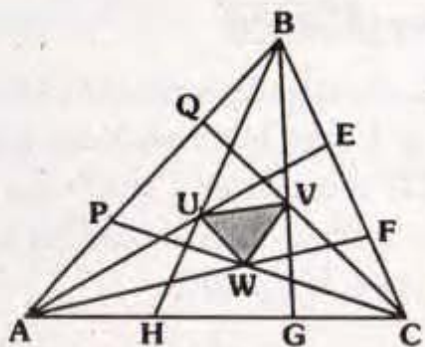
Se tiene el triángulo equilátero ABC, una recta que pasa por el circuncentro y corta a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{BC}$  en N. Si  $BM = a$  y  $BN = b$ , calcule el área de la región triangular ABC.

- A)  $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \sqrt{3}$  B)  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$   
 C)  $\frac{9\sqrt{3}}{4} \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$  D)  $a^2 b^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$   
 E)  $\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 b^2$

**PROBLEMA N° 155**

En el gráfico,  $AP = PQ = QB$ ;  $BE = EF = FC$  y  $AH = HG = GC$ .

Calcule  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle UUV}}$

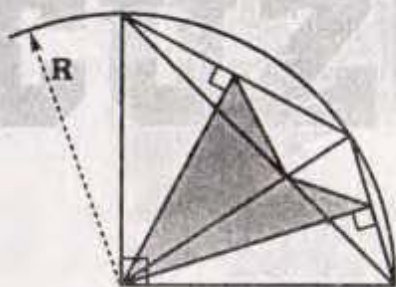


- A) 9                      B) 12                      C) 16  
D) 25                      E) 36

**PROBLEMA N° 156**

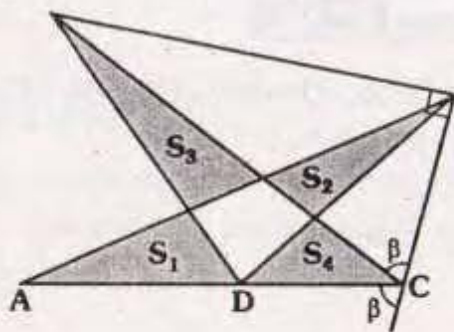
En el gráfico, halle el área de la región sombreada en función de  $R$ .

- A)  $R^2$   
B)  $R^2 \frac{\sqrt{2}}{4}$   
C)  $R^2 \frac{\sqrt{2}}{8}$   
D)  $\frac{R^2}{2}$   
E)  $\frac{R^2}{4}$



**PROBLEMA N° 157**

En el gráfico,  $AD = 2(DC)$ . Indique la relación entre las áreas de las regiones indicadas.

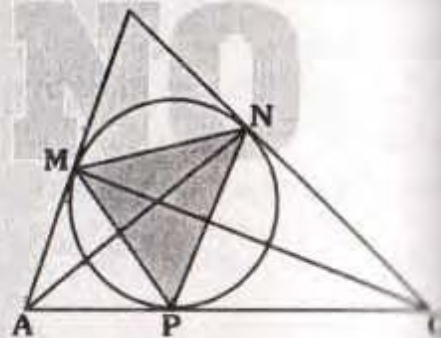


- A)  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$   
B)  $S_1 S_2 = S_3 S_4$   
C)  $S_4 = S_1 + S_2 + S_3$   
D)  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$   
E)  $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2 + S_4^2$

**PROBLEMA N° 158**

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Si  $\frac{1}{S_{\triangle AMN}} + \frac{1}{S_{\triangle MNC}} = \frac{1}{k}$ . Calcule  $S_{\triangle MNP}$

- A)  $k$   
B)  $k/2$   
C)  $2k$   
D)  $1,5$   
E)  $k\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 159**

En el triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en M y N respectivamente. Si  $AM = m$ ,  $MB = n$ ,  $NC = \ell$ , y  $\frac{1}{mn} + \frac{1}{n\ell} + \frac{1}{m\ell} = 0,25$ ; calcule el inradio del triángulo ABC.

- A) 1                      B) 2                      C) 0,25  
D) 1,5                      E) 4



**PROBLEMA N° 160**

Sean L, M y N los pies de las perpendiculares del baricentro G del triángulo ABC a los lados BC, AC y AB. Demostrar:

$$S_{ALMN} = \frac{4(S_{\triangle ABC})^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$$

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N° 161**

Dado el triángulo ABC, en la prolongación de  $\overline{CA}$  y  $\overline{BA}$  se ubican los puntos P y Q respectivamente, se trazan  $\overline{PH} \perp \overline{BC}$  y  $\overline{QM} \perp \overline{BC}$  ( $H \in \overline{BM}$  y  $M \in \overline{HC}$ ); calcule el área de la región PQMH si  $BH = MH = MC$ ;  $BQ = 6u$ ,  $PC = 8u$  y  $m\angle BAC = 60^\circ$ .

- A)  $10\sqrt{3}u^2$     B)  $6\sqrt{3}u^2$     C)  $u^2$   
D)  $12\sqrt{3}u^2$     E)  $24\sqrt{3}u^2$

**PROBLEMA N° 162**

Dado el trapecio ABCD, M es punto medio de  $\overline{CD}$  ( $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ). Calcule el área de la región trapecial ABCD si  $(BM)(AM) = 20u^2$ ;  $m\angle BCD = 120^\circ$  y  $m\angle BMC = m\angle MAD$

- A)  $5\sqrt{3}u^2$     B)  $20\sqrt{3}u^2$     C)  $20u^2$   
D)  $10\sqrt{2}u^2$     E)  $10\sqrt{3}u^2$

**PROBLEMA N° 163**

Se tiene el triángulo ABC, de circuncentro O, ortocentro H y circunradio a, donde  $m\angle BAC = 45^\circ$ , si la distancia de H hacia  $\overline{AB}$  es b, calcule el área de la región BOHC.

- A)  $2b\sqrt{2a^2 - b^2}$     B)  $b\sqrt{2a^2 - b^2}$   
C)  $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}$     D)  $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2 - b^2}$   
E)  $\frac{b}{3}\sqrt{2a^2 - b^2}$

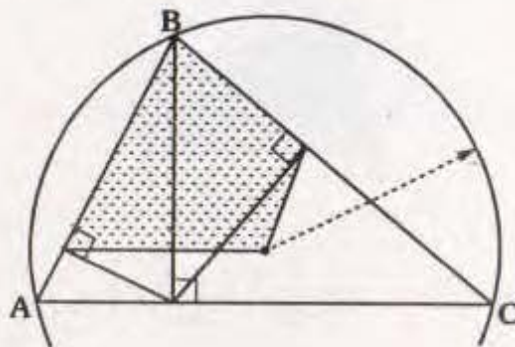
**PROBLEMA N° 164**

Se tiene el ángulo DOB, se ubica C y A en los lados OD y OB respectivamente. Sea E el punto de intersección de los segmentos AD y BC. Se traza por C la recta paralela a AB y se traza por A la recta paralela a CD. Sea F el punto de intersección de las dos rectas trazadas. Demostrar que

$$\text{Área}(\text{OAEC}) = \text{Área}(\text{BFDE})$$

**PROBLEMA N° 165**

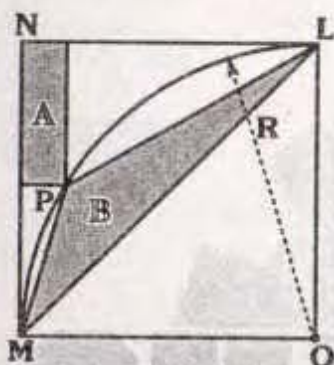
Si el área de la región ABC es S, calcule el área de la región sombreada.



- A)  $S/2$       B)  $S/3$       C)  $S/4$   
 D)  $S \frac{\sqrt{2}}{2}$       E)  $S \frac{\sqrt{2}}{4}$

**PROBLEMA N° 166**

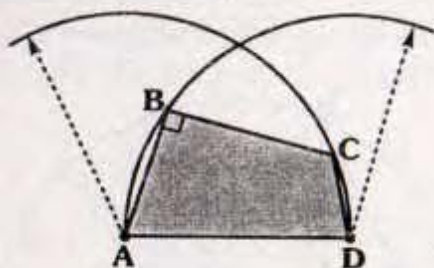
Calcule "R", en función de las áreas A y B indicadas, si MNLO es un cuadrado.



- A)  $\sqrt{\frac{2A^2}{B}}$       B)  $\sqrt{\frac{2B^2}{A}}$       C)  $2\sqrt{\frac{B^2}{A}}$   
 D)  $\sqrt{\frac{B^2}{A}}$       E)  $\sqrt{\frac{A^2}{B}}$

**PROBLEMA N° 167**

En el gráfico,  $AB = \sqrt{3}$  y  $CD = 1$ . Calcule el área de la región sombreada.

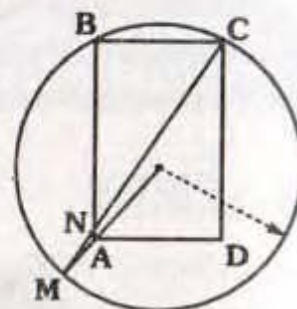


- A)  $6\sqrt{5}$       B)  $\frac{7}{2}\sqrt{13}$       C)  $6\sqrt{3}$

- D)  $\frac{7}{2}\sqrt{3}$       E)  $\frac{7}{4}\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 168**

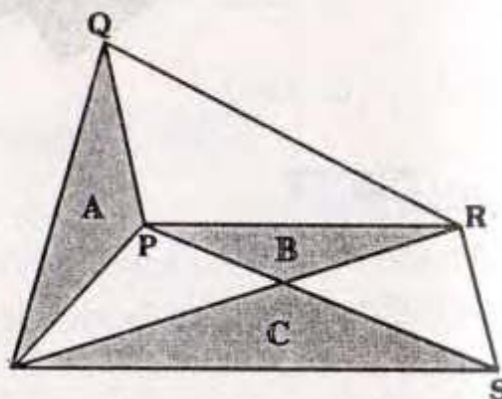
En el gráfico,  $AD = 5(AN)$  y  $AM = k$ . Calcule el área de la región rectangular ABCD.



- A)  $4k^2$   
 B)  $5k^2$   
 C)  $6k^2$   
 D)  $10k^2$   
 E)  $\frac{5}{2}k^2$

**PROBLEMA N° 169**

En el gráfico, PQRS es un paralelogramo. Si A, B, C son las áreas de las regiones sombreadas, indique la relación entre A, B y C.



- A)  $A + B = C$       B)  $A - B = C$   
 C)  $AB = 2C$       D)  $\sqrt{AB} = C$   
 E)  $\sqrt{A+B} = C$



**PROBLEMA N° 170**

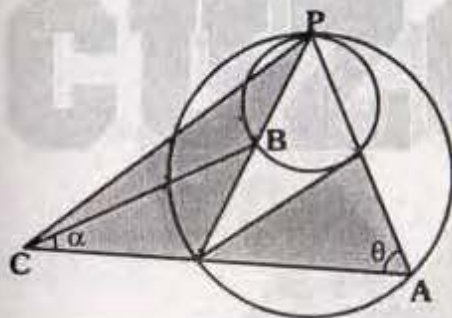
Se tiene el triángulo ABC de baricentro G. Si  $m\angle AGC = 120^\circ$  y  $(AC)^2 - (BG)^2 = 16$ . Halle el área de la región cuadrangular no convexa ABGC.

- A)  $4\sqrt{3}$       B)  $8\sqrt{3}$       C)  $16\sqrt{3}$   
D)  $2\sqrt{3}$       E)  $3\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 171**

En el gráfico, P es punto de tangencia,  $\alpha + \theta = 90^\circ$ ;  $AP = a$  y  $CB = b$ . Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.

- A)  $ab$   
B)  $2ab$   
C)  $\frac{ab}{2}$   
D)  $\frac{ab}{4}$   
E)  $\frac{ab}{4}$



**PROBLEMA N° 172**

Se tiene el cuadrado ABCD, en la parte interna se traza una circunferencia tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$ , se ubica E en  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{EC}$  es tangente a la circunferencia en P. Si  $m\angle PCB = 37^\circ$  y  $PC = 7$ . Halle el área de la región cuadrada ABCD.

- A) 36      B) 54      C) 72  
D)  $36\sqrt{2}$       E)  $54\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 173**

En un triángulo ABC ( $m\angle B = 45^\circ$ ) de ortocentro "H", en  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  se ubican los puntos P y Q, tal que PBQH es un paralelogramo. Si  $AC = a$ , calcule el área de la región APQC.

- A)  $\frac{a^2}{4}$       B)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$       C)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$   
D)  $\frac{a^2}{2}$       E)  $\frac{a^2}{3}$

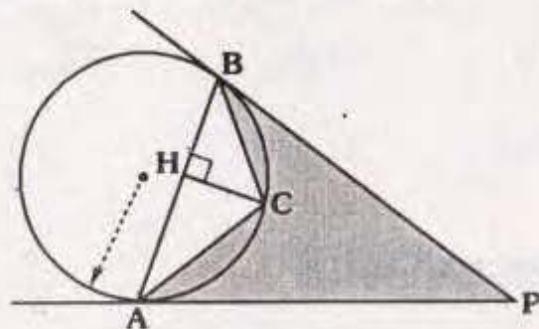
**PROBLEMA N° 174**

Una de las bases de un trapecio mide  $7u$  y la circunferencia inscrita determina en uno de los lados no paralelos segmentos cuyas longitudes son 4 y  $9u$ . Calcule el área de la región trapezoidal.

- A)  $168u^2$       B)  $204u^2$       C)  $176u^2$   
D)  $156u^2$       E)  $144u^2$

**PROBLEMA N° 175**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si  $AP = a$  y  $HC = b$ . Halle el área mínima de la región sombreada.



- A)  $ab$       B)  $\frac{ab}{2}$       C)  $\frac{ab}{4}$   
D)  $ab\sqrt{2}$       E)  $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$



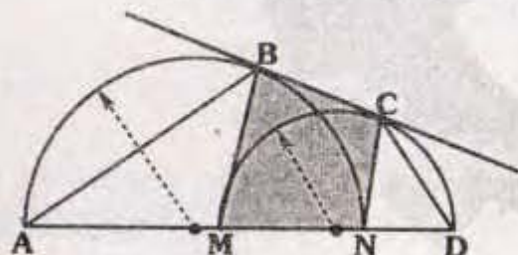
**PROBLEMA N° 176**

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B). M y N son puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  respectivamente, E es un punto de  $\overline{AD}$  tal que  $m\angle BEN = 90^\circ$ ,  $AM = BC$  y  $m\angle MEB = m\angle BEC$ . Si  $(AE)(ED) = 16$ , calcule el área de la región ABCD.

- A) 8                      B) 16                      C)  $16\sqrt{2}$   
D)  $8\sqrt{2}$                       E)  $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 177**

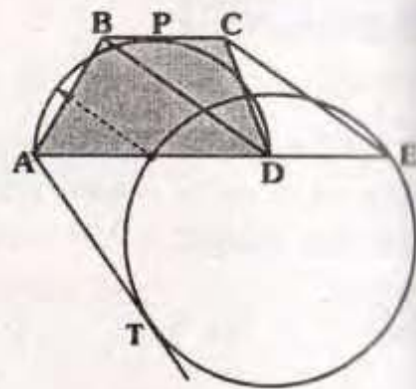
En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y  $(AB)(CD) = 16$ , halle el área de la región MBCN.



- A) 16                      B) 8                      C) 32  
D)  $8\sqrt{2}$                       E)  $8\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 178**

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia y DBCE es un paralelogramo. Si  $AT = 6$ , halle el área de la región sombreada.



- A) 18  
B) 20  
C) 24  
D) 36  
E) 9

**PROBLEMA N° 179**

Se tiene el paralelogramo ABCD en el que se ubica el punto M,  $\overline{MC} \cap \overline{BD} = \{N\}$ , si las áreas de las regiones BCN y NCD son  $A_1$  y  $A_2$ . Halle el área de la región triangular MAD en función de  $A_1$  y  $A_2$ .

- A)  $A_1 + A_2$                       B)  $\sqrt{A_1 A_2}$                       C)  $2\sqrt{A_1 A_2}$   
D)  $\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2}$                       E)  $\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1}$

**PROBLEMA N° 180**

En el pentágono ABCDE se cumple que las regiones triangulares ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son equivalentes, si  $\overline{AC}$  y  $\overline{AD}$  cortan a  $\overline{BE}$  en M y N respectivamente. Halle  $BM/NE$ .

- A) 1                      B)  $\frac{1}{2}$                       C)  $\frac{1}{3}$   
D)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$                       E)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

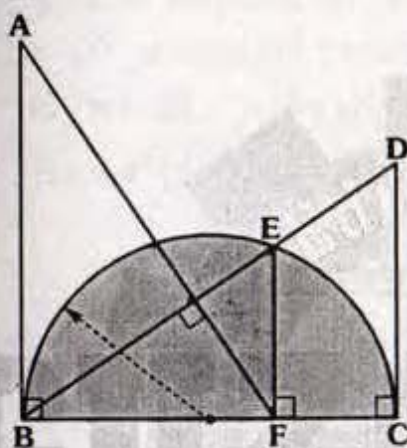


# ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

## PROBLEMA N° 181

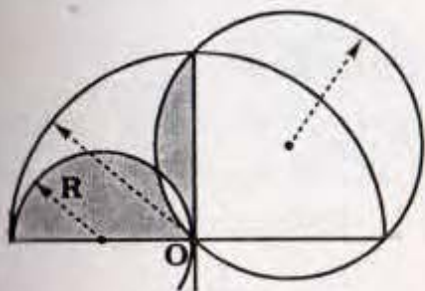
En el gráfico,  $AB = a$ ,  $EF = b$  y  $DC = c$ , calcule el área del semicírculo.

- A)  $\frac{ab^2}{c} \pi$
- B)  $\frac{\sqrt{ab}}{c} \pi$
- C)  $\frac{ac^2}{8b} \pi$
- D)  $\frac{bc^2}{8a} \pi$
- E)  $\frac{\sqrt{bc}}{a} \pi$



## PROBLEMA N° 182

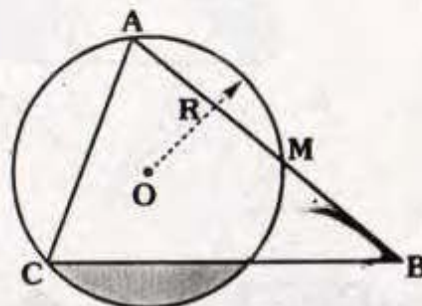
En el gráfico, O es punto de tangencia. Halle la diferencia de áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $\frac{3}{7} R^2$
- B)  $\frac{1}{4} R^2$
- C)  $\frac{1}{2} R^2$
- D)  $R^2$
- E)  $2R^2$

## PROBLEMA N° 183

En el gráfico, O es ortocentro del triángulo ABC,  $3(AM) = 2(BM)$  y  $R = 5$ . Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $37\pi - 4$
- B)  $4\sqrt{3}\pi - 3$
- C)  $2\sqrt{3}\pi - 3$
- D)  $\frac{185}{36}\pi - 12$
- E)  $\frac{185}{18}\pi - 8$

## PROBLEMA N° 184

En el triángulo acutángulo ABC, con centro en B se traza el arco de circunferencia que contiene al circuncentro y ortocentro de dicho triángulo el cual corta a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en M y N. Si  $AC = b$ , calcule el área del sector circular MBN.

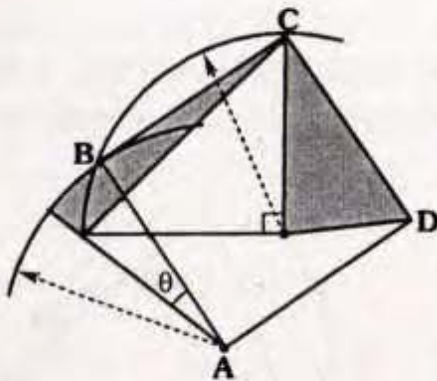
- A)  $\frac{\pi}{3} b^2$
- B)  $\frac{\pi}{6} b^2$
- C)  $\frac{\pi}{12} b^2$
- D)  $\frac{\pi}{16} b^2$
- E)  $\frac{\pi}{18} b^2$

## PROBLEMA N° 185

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.



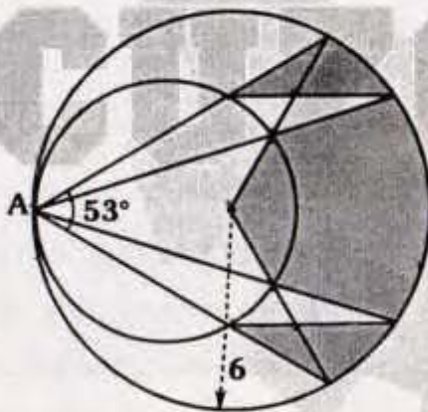
- A)  $\pi \frac{\theta}{180^\circ}$   
 B)  $\pi \frac{\theta}{270^\circ}$   
 C)  $\pi \frac{\theta}{90^\circ}$   
 D)  $\pi \frac{\theta}{135^\circ}$   
 E)  $\pi \frac{\theta}{143^\circ}$



**PROBLEMA N° 186**

En el gráfico, A es punto de tangencia calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

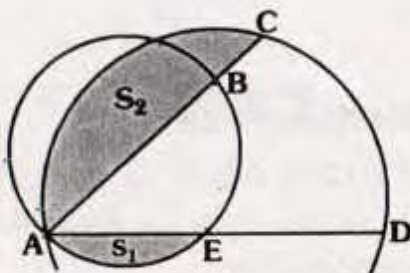
- A)  $\frac{53}{3}\pi$   
 B)  $\frac{53}{4}\pi$   
 C)  $\frac{53}{10}\pi$   
 D)  $\frac{53}{5}\pi$   
 E)  $\frac{53}{8}\pi$



**PROBLEMA N° 187**

En el gráfico,  $AB=4$ ;  $BC=AE=2$  y  $ED=10$ . Calcule  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- A) 4  
 B) 2  
 C) 3  
 D) 9  
 E) 6



**PROBLEMA N° 188**

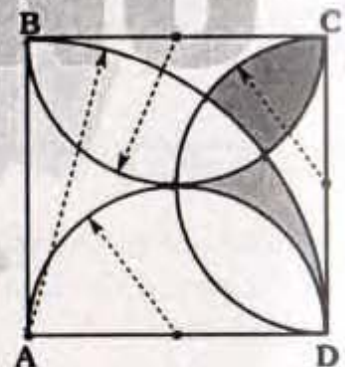
En un triángulo rectángulo ABC,  $m\angle B=90^\circ$  y  $m\angle C=53^\circ$ , se tiene la circunferencia inscrita de centro "O" tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en P y Q respectivamente. Se traza la secante AST que contiene al centro. Si la diferencia entre el semiperímetro del triángulo ABC y BC es 12, calcule el área de la región limitada por la circunferencia y las cuerdas  $\overline{PQ}$  y  $\overline{ST}$ .

- A)  $2(\pi+4)$  B)  $4(\pi-2)$  C)  $6(\pi+3)$   
 D)  $8(\pi+4)$  E)  $4(\pi+2)$

**PROBLEMA N° 189**

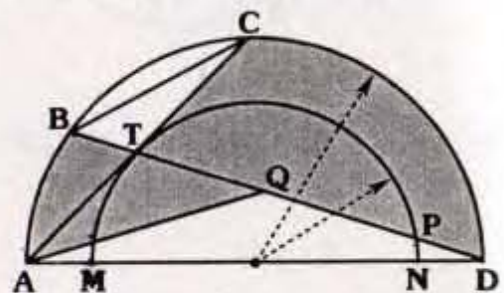
Halle la razón entre las áreas de las regiones sombreadas, si ABCD es un cuadrado.

- A)  $\pi$   
 B)  $\pi/3$   
 C)  $1/3$   
 D)  $1/2$   
 E) 1



**PROBLEMA N° 190**

En la figura, T es punto de tangencia,  $TQ=QP$ ,  $BC=6$  y  $m\angle TP=120^\circ$ , calcule el área de la región sombreada.



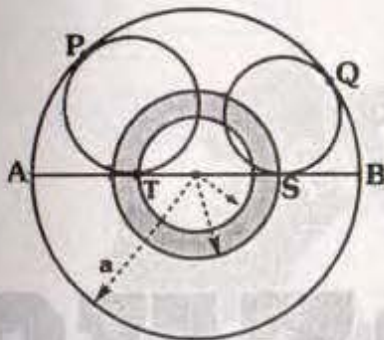


- A)  $6\pi$  B)  $9\pi$  C)  $12\pi$   
 D)  $15\pi$  E)  $18\pi$

**PROBLEMA N° 191**

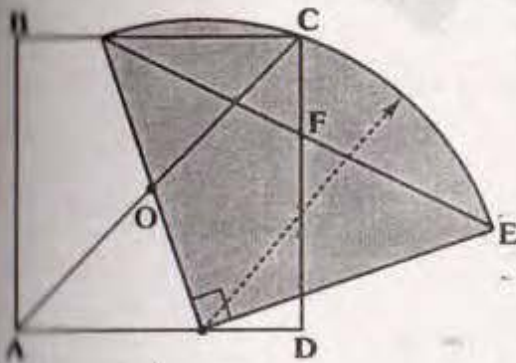
En el gráfico,  $m\widehat{AP} = 53^\circ$  y  $m\widehat{BQ} = 37^\circ$ .  
 Si  $a = 72$ , calcule el área de la región sombreada. (T y S son puntos de tangencia)

- A)  $600\pi$   
 B)  $400\pi$   
 C)  $500\pi$   
 D)  $480\pi$   
 E)  $720\pi$



**PROBLEMA N° 192**

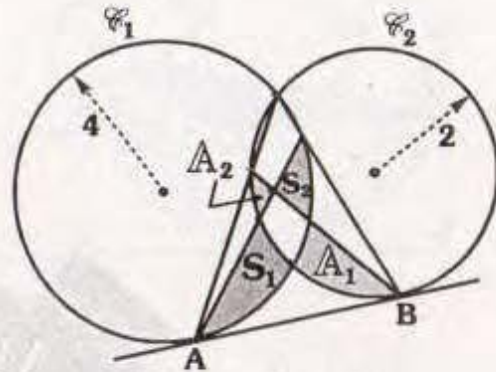
En el gráfico, O es centro del cuadrado ABCD, si  $EF = a$ , halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{\pi a^2}{8}$  B)  $\frac{\pi a^2}{6}$  C)  $\frac{\pi a^2}{4}$   
 D)  $\frac{\pi a^2}{2}$  E)  $\frac{\pi a^2}{5}$

**PROBLEMA N° 193**

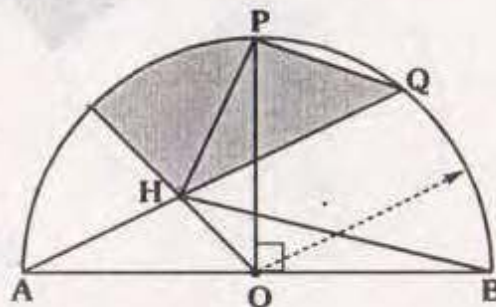
En el gráfico  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son ortogonales, A y B son puntos de tangencia. Halle:  
 $S_1 - A_1 + S_2 - A_2$ .



- A)  $2(\pi - 1)$  B)  $\pi - 2$  C)  $2(\pi - 2)$   
 D)  $4(\pi - 1)$  E)  $3(\pi - 2)$

**PROBLEMA N° 194**

En el gráfico,  $m\angle HPO = m\widehat{PQ} = 30^\circ$  y la distancia de P a  $\overline{HB}$  es  $2u$ , calcule el área de la región sombreada.

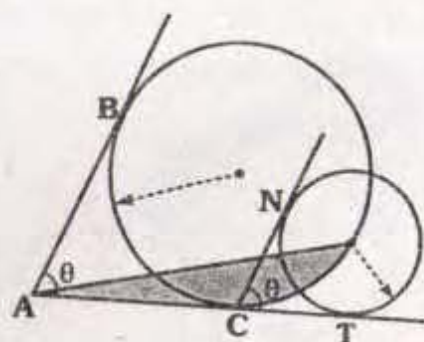


- A)  $\frac{\pi}{2}$  B)  $\pi$  C)  $\frac{3}{2}\pi$  D)  $\frac{3}{4}\pi$  E)  $2\pi$

**PROBLEMA N° 195**

En el gráfico, B, C, N y T son puntos de tangencia. Si  $AC = 2(CT) = 2\sqrt{3}$ . Cal-

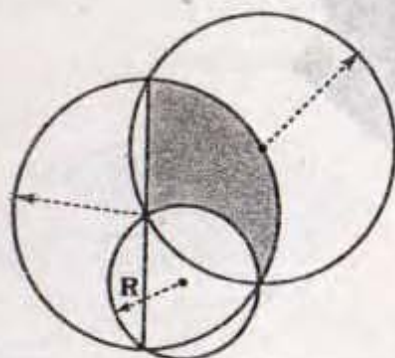
calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{4}{3}\pi$       B)  $\pi - 2$       C)  $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{3}$   
 D)  $\frac{2}{3}\pi$       E)  $\frac{3\pi - \sqrt{3} + 2}{4}$

**PROBLEMA N° 196**

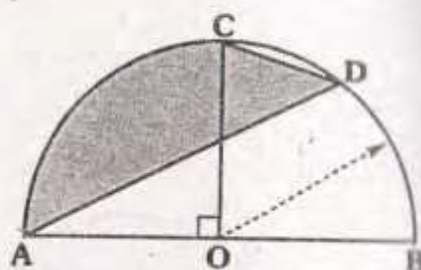
En el gráfico,  $R = 2\sqrt{3}$ , halle el área de la región sombreada.



- A)  $8\sqrt{3} + 3\pi$       B)  $4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$   
 C)  $8\pi + 3\sqrt{3}$       D)  $8\pi + \sqrt{3}$   
 E)  $8\pi - 3\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 197**

En la figura el área de la región sombreada es igual a la suma de las áreas de las regiones no sombreadas. Calcule  $m\angle$



- A)  $30^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $45^\circ$   
 D)  $72^\circ$       E)  $36^\circ$

**PROBLEMA N° 198**

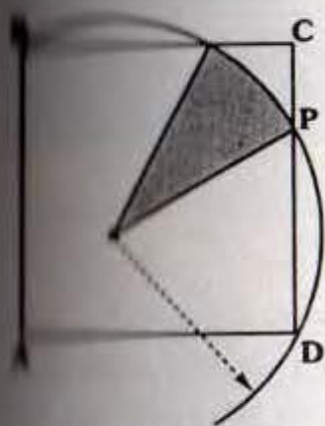
Se tiene una circunferencia de centro O y radio R,  $\overline{AB}$  es una cuerda, M está en  $\overline{AB}$  tal que  $m\angle OMA = 45^\circ$ , la prolongación de  $\overline{MO}$  corta a la circunferencia en N. Si  $AB = \sqrt{2}(MN)$ . Halle el área del menor segmento circular AN.

- A)  $R^2(\pi - \sqrt{2})$       B)  $\frac{R^2}{6}(\pi - 2)$   
 C)  $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$       D)  $\frac{R^2}{12}(\pi - 3)$   
 E)  $\frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

**PROBLEMA N° 199**

En el gráfico  $PD = 6(PC)$ , calcule la razón entre las áreas de la región sombreada y la región cuadrada ABCD.



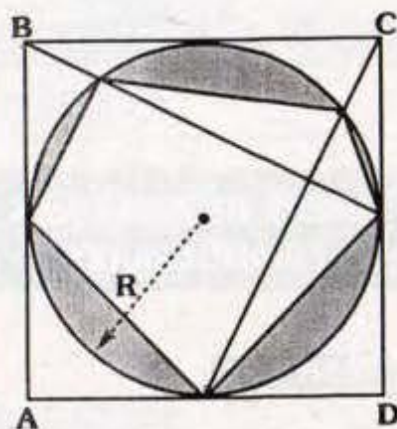


- A)  $\frac{10}{441}\pi$       B)  $\frac{5}{441}\pi$       C)  $\frac{5}{221}\pi$   
 D)  $\frac{10}{221}\pi$       E)  $\frac{16}{441}\pi$

**PROBLEMA N° 200**

En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD, halle la

suma de áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $\frac{R^2}{5}(5\pi - 11)$       B)  $\frac{R^2}{10}(10\pi - 11)$   
 C)  $\frac{R^2}{5}(10\pi - 11)$       D)  $\frac{R^2}{5}(5\pi - 8)$   
 E)  $\frac{R^2}{10}(5\pi - 11)$





# Problemas Resueltos

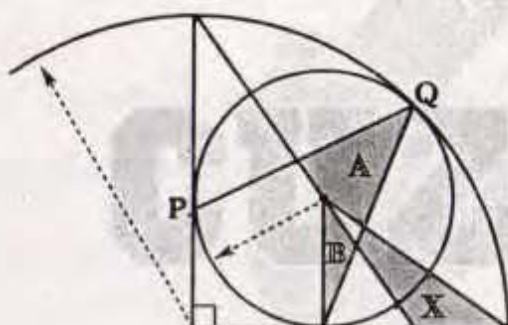
Ciclo

Semestral  
Intensivo

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N° 201

Si P, Q y T son puntos de tangencia, calcule X en función de A y B.



- A)  $A - B$       B)  $\frac{2A+B}{2}$       C)  $\frac{A+2B}{2}$   
D)  $\frac{A+B}{2}$       E)  $2A - B$

### PROBLEMA N° 202

Dado el triángulo rectángulo isósceles ABC (recto en C). Sea P en BC, M es el punto medio de AB y sea L y N puntos del segmento  $\overline{AP}$  tal que  $\overline{CN}$  es perpendicular a  $\overline{AP}$  y  $AL=CN$ . Si el área ABC es 4 veces el área de LMN. Calcule  $m\angle CAP$ .

- A)  $15^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $45^\circ$   
D)  $22,5^\circ$       E)  $18^\circ$

### PROBLEMA N° 203

En el triángulo ABC se trazan la mediana AM y las cevianas BD y CE concurrentes en P, si los inradios de los triángulos BPP y CDP son iguales. Calcule AB/AC.

- A) 1      B) 0,5      C) 2  
D)  $\sqrt{2}$       E)  $\sqrt{3}$

### PROBLEMA N° 204

El triángulo ABC tiene  $m\angle ACB = 120^\circ$  y el lado AC mayor que el lado BC. Hallando que el área del triángulo equilátero de lado AB es 31 y el área del triángulo equilátero de lado AC-BC es 19, hallar el área de ABC.

- A) 3      B) 4      C) 6  
D)  $4\sqrt{3}$       E)  $6\sqrt{3}$

### PROBLEMA N° 205

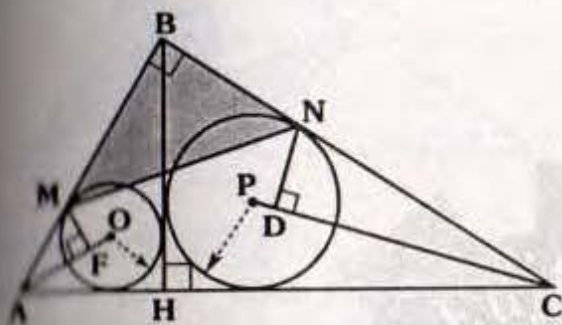
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD; se ubican M y N en las prolongaciones de  $\overline{CA}$  y  $\overline{BA}$  tal que  $\overline{MB} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{NC}$ . Si el área de la región triangular ABC es A. Calcule el área de la región MDN.

- A) A      B)  $2A$       C)  $3A$   
D)  $\frac{3}{2}A$       E)  $4A$



**PROBLEMA N° 206**

En el gráfico, se muestran las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC. Si  $(AO)(AF)(PC)(CD) = k$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\sqrt{k}$       B)  $\frac{\sqrt{k}}{2}$       C)  $2\sqrt{k}$   
 D)  $\frac{\sqrt{k}}{4}$       E)  $\frac{\sqrt{k}}{2}$

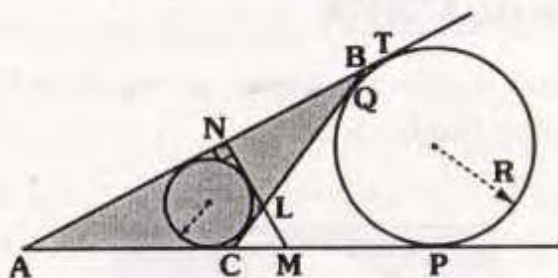
**PROBLEMA N° 207**

En un triángulo ABC:  $r_a$ ,  $r_b$  y  $r_c$  son las medidas de los exradios.  
 Si  $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = 100$ , calcule el perímetro del triángulo.

- A) 10      B)  $10\sqrt{2}$       C) 20  
 D) 50      E) 25

**PROBLEMA N° 208**

En la figura se muestra la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ANLC, además Q y T son puntos de tangencia. Si la  $\angle BAC = 37^\circ$  y  $R(AM) = 25$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 2      B) 10      C) 15  
 D) 20      E) 18

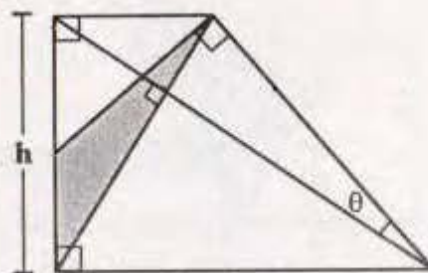
**PROBLEMA N° 209**

Se tiene el triángulo ABC ( $AB = BC$ ), P es un punto de la región exterior relativa a  $\overline{BC}$ , tal que  $m\angle ABC = 2(m\angle BPA)$ ,  $m\angle PAC = 15^\circ$  y  $AB = 8$ . Calcule el área de la región triangular APC.

- A) 8      B) 16      C) 24  
 D)  $8(\sqrt{6} + \sqrt{2})$       E)  $16(8 - \sqrt{2})$

**PROBLEMA N° 210**

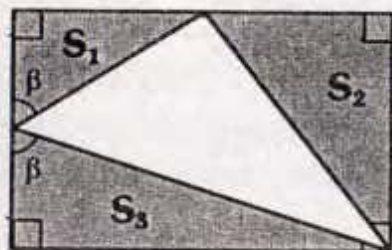
Halle el área de la región sombreada en función de h y  $\theta$ .



- A)  $h^2 \sin \theta$       B)  $h^2 \tan \theta$       C)  $\frac{h^2 \tan \theta}{2}$   
 D)  $h^2 \cos \theta$       E)  $\frac{h^2 \sin \theta}{2}$

**PROBLEMA N° 211**

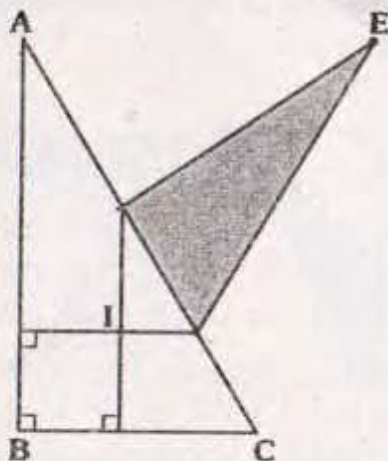
Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $S_3 = S_1 + S_2$     B)  $S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$   
 C)  $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$     D)  $2S_3 = S_1 + S_2$   
 E)  $2S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$

**PROBLEMA N° 212**

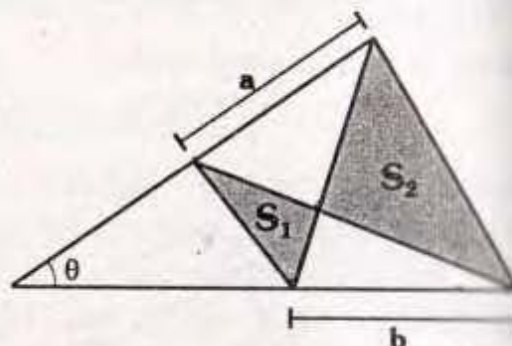
En el gráfico, I es incentro y E es uno de los excentros del triángulo ABC. Si  $AC=k$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $k^2$     B)  $2k^2$     C)  $0,5k^2$   
 D)  $0,25k^2$     E)  $4k^2$

**PROBLEMA N° 213**

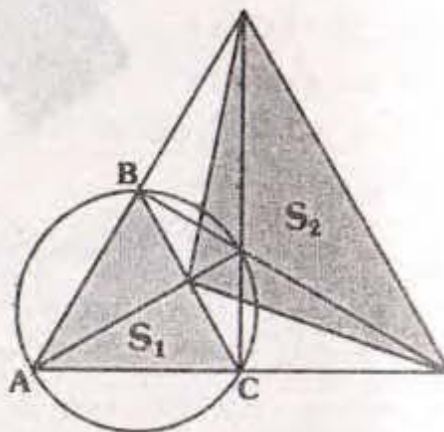
Calcule  $S_2 - S_1$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $\theta$ .



- A)  $ab \sin \theta$     B)  $abt \theta$     C)  $ab \sin 2\theta$   
 D)  $\frac{ab}{2} \sin \theta$     E)  $\frac{ab}{2} \sin 2\theta$

**PROBLEMA N° 214**

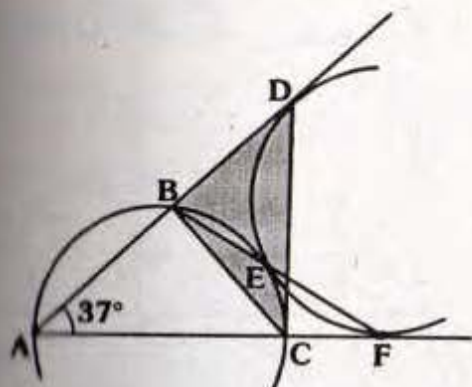
En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, demuestre que  $S_2 = 2S_1$ .



**PROBLEMA N° 215**

En el gráfico, D, E y F son puntos de tangencia y  $AB = 10$ . Calcule el área de la región sombreada.



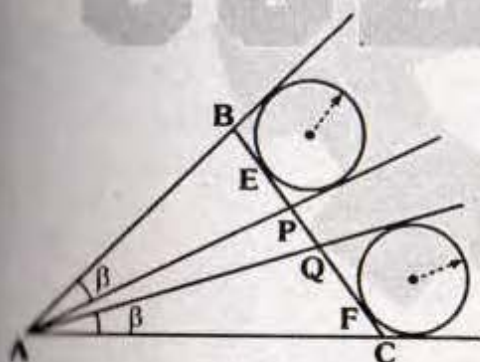


- A) 40 B) 20 C) 30 D) 24 E) 48

**PROBLEMA N° 216**

En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son las circunferencias exinscritas en los triángulos ABP y AQC.

Si  $\frac{1}{BE} + \frac{1}{EP} = k$ . Calcule:  $\frac{1}{QF} + \frac{1}{FC}$



- A) k B) k/2 C) 2k D) k/4 E) k/3

**PROBLEMA N° 217**

En el triángulo ABC, se cumple que  $AB=c$ ,  $BC=a$  y  $AC=b$ , si  $\theta_{ABC} = \frac{(p-a)(p-c)+p(p-a)}{4}$  donde  $p$  es el semiperímetro. Calcule  $m\angle ABC$ .

- A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 53°

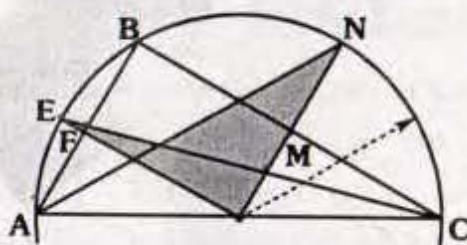
**PROBLEMA N° 218**

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en  $\overline{BC}$  y Q en  $\overline{PC}$ , S y M en  $\overline{AC}$  tal que  $S \in \overline{AM}$ . Si  $AM=MC$ ,  $\overline{SP} \parallel \overline{MQ}$ , las regiones ABPS y SPC son equivalentes,  $BC=a$  y  $QC=b$ . Calcule PC.

- A)  $\sqrt{ab}$  B)  $\frac{a+b}{2}$   
C)  $\sqrt{a^2+b^2}$  D)  $\sqrt{a^2+b^2+ab}$   
E)  $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

**PROBLEMA N° 219**

En el gráfico,  $\overline{EF}$  y  $\overline{MN}$  son flechas de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente. Si  $EF=1$ ,  $MN=7$ . Calcule el área de la región sombreada.



- A) 26 B) 52 C) 40 D) 50 E) 60

**PROBLEMA N° 220**

Se tiene el pentágono ABCDE convexo, tal que  $AB=BC$ ,  $CD=DE$ ,  $m\angle ABC=120^\circ$  y  $m\angle CDE=60^\circ$ . Si  $BD=2$ , calcule el área de la región pentagonal ABCDE.

- A)  $4\sqrt{3}$  B)  $6\sqrt{3}$  C) 4  
D)  $2\sqrt{3}$  E)  $\sqrt{3}$



**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N° 221**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), tal que  $AB=3$  y  $BC=4$ , la circunferencia exinscrita respecto a  $\overline{AB}$  es tangente a  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  en P y Q respectivamente, mientras que la circunferencia exinscrita relativa a  $\overline{BC}$  es tangente a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{AC}$  en N.  $\overline{PQ} \cap \overline{AB} = \{E\}$  y  $\overline{BC} \cap \overline{MN} = \{F\}$ . Calcule el área de la región cuadrangular EACF.

- A) 6                      B)  $6\sqrt{2}$                       C) 12  
D) 8                      E)  $8\sqrt{2}$

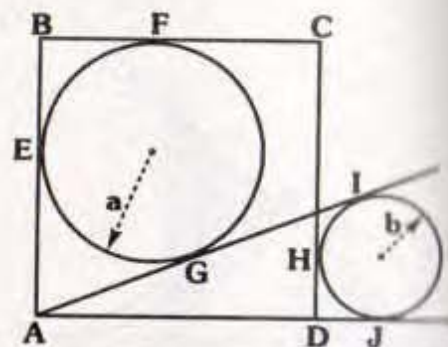
**PROBLEMA N° 222**

Se tiene el paralelogramo ABCD se ubica E en  $\overline{BC}$  y F en  $\overline{AD}$ , tal que  $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$  y  $\overline{EF} \cap \overline{BD} = \{L\}$ . Si  $S_{\triangle ABLF} = 16$  y  $S_{\triangle LECD} = 21$ . Calcule el área de la región ABCD.

- A) 60                      B) 50                      C) 44  
D) 70                      E) 80

**PROBLEMA N° 223**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y  $a=2(b)=4$ . Calcule el área de la región ABCD (E, F, G, H, I y J: puntos de tangencia)



- A)  $8(3+2\sqrt{2})$                       B)  $16(3+2\sqrt{2})$   
C)  $32(3+2\sqrt{2})$                       D)  $8(\sqrt{2}+1)$   
E)  $16(\sqrt{2}+1)$

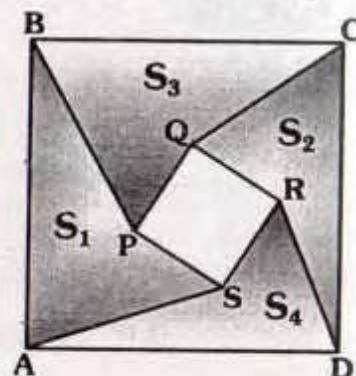
**PROBLEMA N° 224**

Se tiene el triángulo CED inscrito en la circunferencia de centro O. Las mediatrices de  $\overline{EC}$  y  $\overline{ED}$  cortan a  $\overline{ED}$  y  $\overline{EC}$  en B y A respectivamente,  $\overline{EM}$  es diámetro, si  $m\widehat{CD} = 60^\circ$  y  $AB=3$ . Calcule el área de la región MBOA.

- A)  $5\sqrt{3}$                       B)  $6\sqrt{3}$                       C)  $4\sqrt{3}$   
D)  $9\sqrt{3}$                       E)  $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 225**

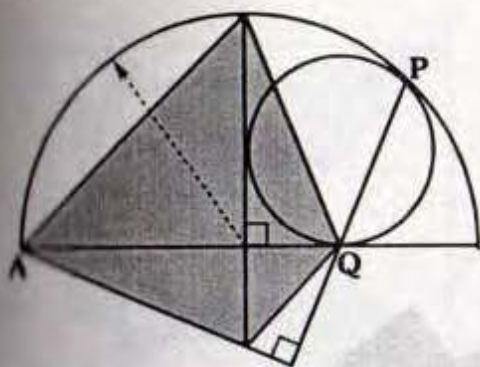
En el gráfico, ABCD y PQRS son cuadrados. Demuestre que  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$





**PROBLEMA N° 226**

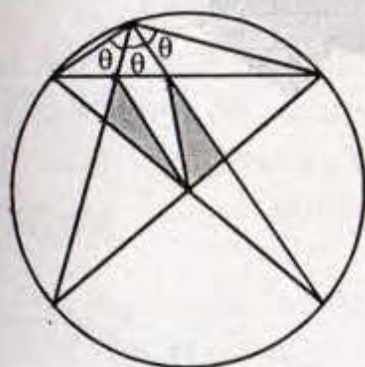
Según el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si  $AQ = a$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $a^2$       B)  $\frac{a^2}{2}$       C)  $2a^2$       D)  $\frac{a^2}{4}$       E)  $\frac{a^2}{3}$

**PROBLEMA N° 227**

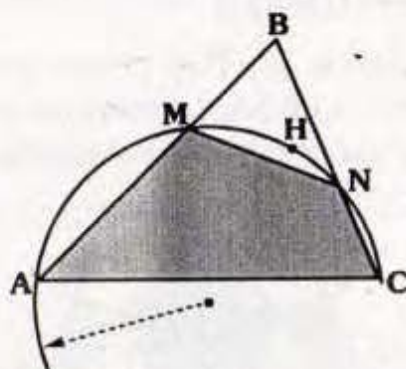
En el gráfico, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $\sin 2\theta$       B) 1      C)  $1/2$       D)  $\tan \theta$       E)  $\sin \theta$

**PROBLEMA N° 228**

En el gráfico,  $m\widehat{MN} = 2\beta$  y H es ortocentro del triángulo ABC, calcule la razón de áreas de las regiones AMNC y ABC.



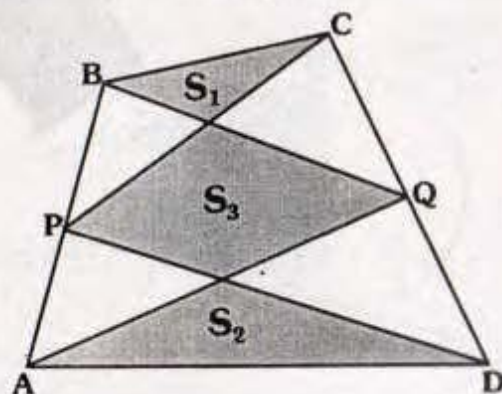
- A)  $2\cos\beta + 2$       B)  $2\cos\beta + 1$       C)  $2\cos\beta$       D)  $2\cos\beta - 1$       E)  $\cos 2\beta$

**PROBLEMA N° 229**

En el gráfico,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son las áreas de las regiones sombreadas.

Si  $(AP)(QD) = (PB)(CQ)$ , demuestre:

$$S_3 = S_1 + S_2.$$

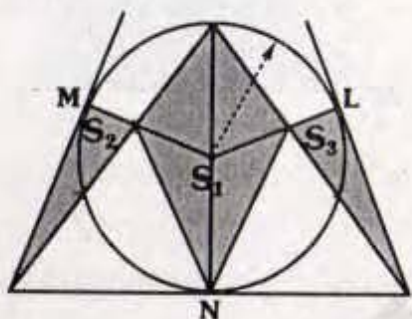


**PROBLEMA N° 230**

Se tiene una región cuadrangular inscrita en una circunferencia, cuya área es  $A$  y semiperímetro  $p$ . Demuestre  $4A \leq p^2$ .

**PROBLEMA N° 231**

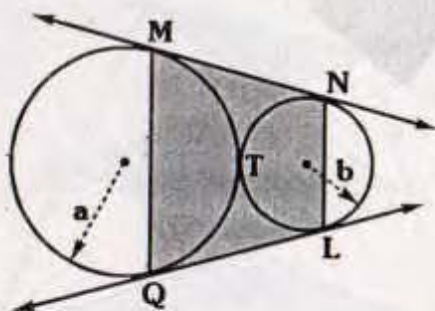
En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $S_1 = S_2 + S_3$     B)  $S_1 = 2(S_2 + S_3)$   
 C)  $S_1^2 = S_2 S_3$     D)  $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2$   
 E)  $S_1 = \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3}$

**PROBLEMA N° 232**

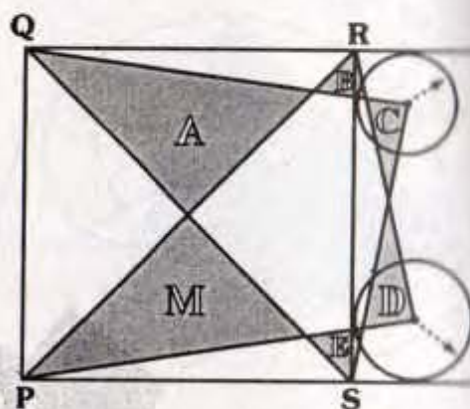
En el gráfico, M, N, L, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}$     B)  $\frac{ab}{a+b} \sqrt{a^2+b^2}$   
 C)  $\frac{4ab\sqrt{ab}}{a+b}$     D)  $\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$   
 E)  $\frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$

**PROBLEMA N° 233**

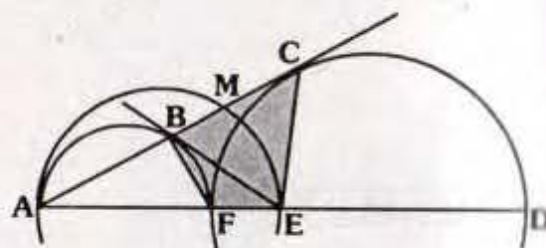
En el gráfico, PQRS es un cuadrado, halle la relación entre las áreas de las regiones sombreadas indicadas.



- A)  $A+B+C=D+E+M$   
 B)  $A+E+D=M+B+C$   
 C)  $A+C+E=M+B+D$   
 D)  $A+M=2(B+C+D+E)$   
 E)  $A+M=B+C+D+E$

**PROBLEMA N° 234**

En el gráfico, A, B, C y F son puntos de tangencia. Si  $m\widehat{AM} = m\widehat{CD}$ ,  $BF=5$  y  $EC=7$ . Calcule el área de la región sombreada.



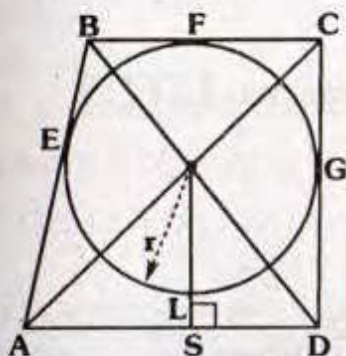
- A)  $8\sqrt{3}$     B)  $16\sqrt{3}$     C)  $20\sqrt{3}$   
 D)  $14\sqrt{3}$     E)  $12\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 235**

En el gráfico, E, F y G son puntos de tangencia. Si  $\frac{(AB)(CD)}{(BC)(AD)} = a$ . Calcule LS.

- A)  $ar$   
 B)  $(a-1)r$   
 C)  $(a+2)r$   
 D)  $3(a-1)r$   
 E)  $2(a-1)r$



**PROBLEMA N° 236**

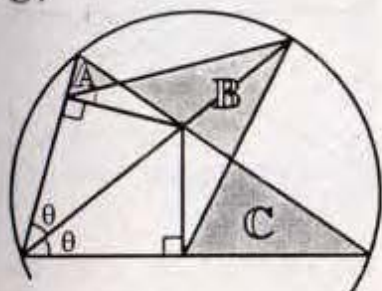
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita de centro I es tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en P y Q respectivamente. La prolongación de PI corta a  $\overline{AC}$  en F y la prolongación de QI

corta a  $\overline{AC}$  en E. Halle  $\frac{S_{\triangle EPQF}}{S_{\triangle ABC}}$

- A) 1                      B)  $1/2$                       C)  $\sqrt{2}/2$   
 D)  $\sqrt{2}/4$                       E)  $\sqrt{3}/4$

**PROBLEMA N° 237**

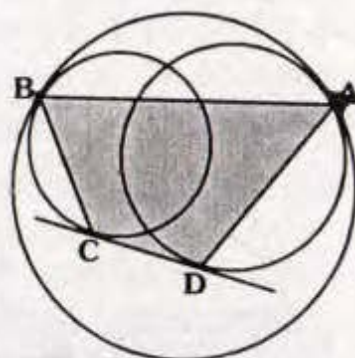
En el gráfico, A, B y C son las áreas de las regiones sombreadas. Demostrar que  $B = A + C$ .



**PROBLEMA N° 238**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si el cuadrilátero ABCD es circunscriptible,  $AB=12$ ,  $CD=6$  y  $BC=8$ . Calcule el área de la región ABCD.

- A)  $24\sqrt{10}$   
 B)  $12\sqrt{10}$   
 C)  $6\sqrt{10}$   
 D)  $18\sqrt{10}$   
 E)  $36\sqrt{10}$



**PROBLEMA N° 239**

En el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica los puntos M y N en  $\overline{AB}$  tal que  $AM=MN=NB$  y los puntos P y Q en  $\overline{CD}$

tal que  $CP=PQ=QD$ . Halle  $\frac{S_{\triangle AMCP}}{S_{\triangle MNPQ}}$

- A)  $1/2$                       B)  $1/3$                       C)  $2/3$   
 D)  $1/5$                       E) 1

**PROBLEMA N° 240**

Se tiene el cuadrilátero ABCD, tal que  $m\angle ABC = 90^\circ$ ,  $m\angle ACB = m\angle BDC$ ,  $m\angle DBC = m\angle ACD + m\angle ADC$ ,  $AC=BD$  y  $CD=3$ . Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

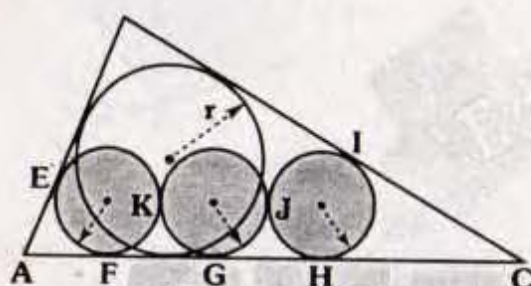
- A)  $2\sqrt{3}$                       B)  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$                       C)  $3\sqrt{3}$   
 D)  $\frac{7}{2}\sqrt{3}$                       E)  $\frac{7}{4}\sqrt{3}$



# ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

## PROBLEMA N° 241

En el gráfico, los círculos sombreados son congruentes,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita y E, F, G, H, I, J y K son puntos de tangencia. Si  $AC = 8$  y  $r = 1$ , halle el área de uno de los círculos sombreados.



- A)  $\pi$       B)  $\frac{\pi}{3}$       C)  $\frac{\pi}{9}$   
D)  $\frac{2}{3}\pi$       E)  $\frac{4}{9}\pi$

## PROBLEMA N° 242

Sobre los lados AB y BC del triángulo ABC se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ y BNMC, de centros  $O_1$  y  $O_2$  respectivamente. Calcule la razón de áreas de los círculos inscritos en los triángulos  $O_1BO_2$  y ABN.

- A) 1      B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{3}$   
D)  $\frac{2}{5}$       E)  $\frac{1}{4}$

## PROBLEMA N° 243

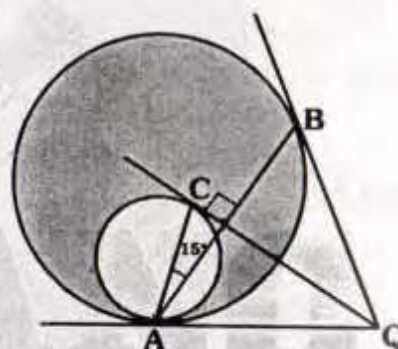
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B),  $m\angle BAC = 30^\circ$ , con centro en C

y radio CB se traza el arco de circunferencia que corta a AC en D. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilíneo ABD, si  $BC = 7 + 4\sqrt{3}$ .

- A)  $9\pi$     B)  $16\pi$     C)  $12\pi$     D)  $4\pi$     E)  $6\pi$

## PROBLEMA N° 244

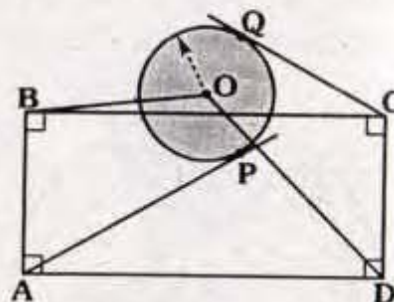
En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Si  $AQ = 3 + 2\sqrt{3}$ .



- A)  $2\pi(2 + \sqrt{3})$       B)  $(2 + \sqrt{3})\pi$   
C)  $2(5 + 2\sqrt{3})\pi$       D)  $4\pi(\sqrt{3} + 1)$   
E)  $3\sqrt{3}\pi$

## PROBLEMA N° 245

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si  $(OB)^2 + (OD)^2 - (AP)^2 - (CQ)^2 = 8$ . Calcule el área de la región sombreada.

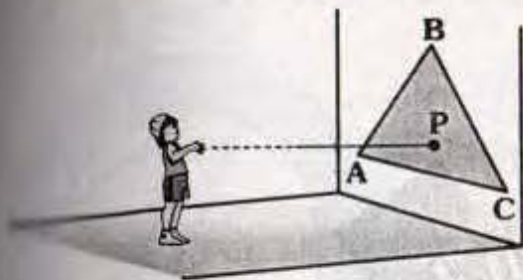


- A)  $2\pi$     B)  $4\pi$     C)  $5\pi$     D)  $6\pi$     E)  $8\pi$



**PROBLEMA N° 246**

En el gráfico, se muestra a Miguelito lanzando dardos sobre la placa triangular equilátera ABC. Si todos los dardos caen en la región interior, calcule la probabilidad que con los lados PA, PB y PC se forme un triángulo no acutángulo.

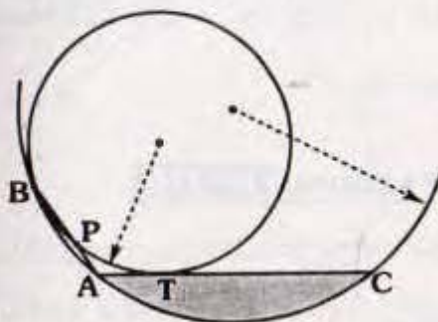


- A)  $\frac{\sqrt{3}}{9}(2\pi - 3\sqrt{3})$  B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})$   
 C) 1 D)  $\frac{1}{6}(\pi\sqrt{3} - 3)$   
 E)  $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$

**PROBLEMA N° 247**

En el gráfico, B y T son puntos de tangencia. Si  $m\widehat{TP} = 60^\circ$  y  $AC = 2\sqrt{3}$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$   
 B)  $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$   
 C)  $\frac{5}{3}\pi - \sqrt{3}$   
 D)  $\pi - \sqrt{3}$   
 E)  $2\pi - \sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 248**

Se tienen tres círculos  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  secantes dos a dos y con un punto común y congruentes de radio r. Si:  $A_{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)} = 53\pi$ ;  $A_{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3)} = 49\pi$ ;  $A_{(\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3)} = 47\pi$  y  $A_{(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3)} = 823\pi$ . Halle r.

- A) 18 B) 19 C) 23 D) 29 E) 31

**PROBLEMA N° 249**

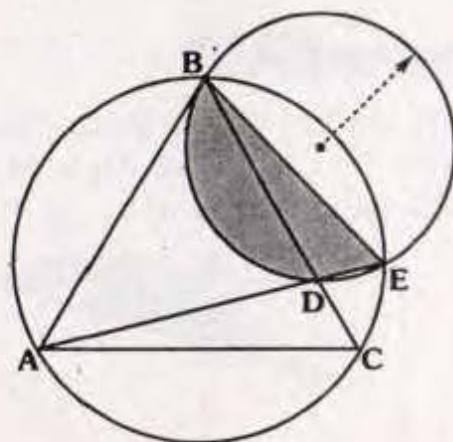
Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia de centro O y radio R, con centro en el vértice A se trazan los arcos BO y CLE respectivamente. Calcule el área de la región limitada por  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CLE}$ ,  $\widehat{EO}$  y  $\widehat{BO}$ .

- A)  $\frac{1}{6}\pi R^2$  B)  $\frac{1}{4}\pi R^2$  C)  $\frac{1}{3}\pi R^2$   
 D)  $\pi R^2$  E)  $2\pi R^2$

**PROBLEMA N° 250**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero,  $m\angle BAE = 45^\circ$  y  $DE = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ . Halle el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{4}{3}\pi$   
 B)  $\frac{2}{3}\pi$   
 C)  $\frac{3}{4}\pi$   
 D)  $\frac{5}{3}\pi$   
 E)  $2\pi$

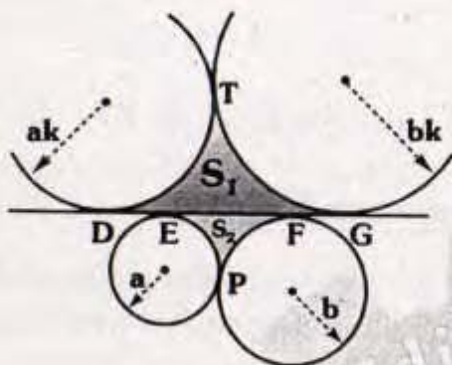




**PROBLEMA N° 251**

En el gráfico, D, E, F, G, P y T son puntos de tangencia. Halle  $\frac{S_1}{S_2}$

- A) k  
B)  $\sqrt{k}$   
C)  $k^2$   
D)  $(a/b)^2$   
E) a/b



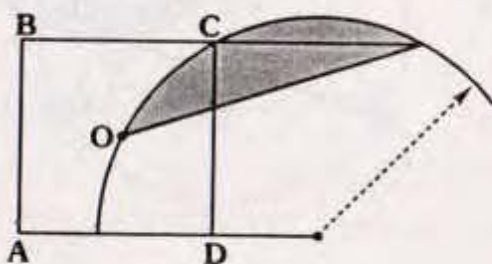
**PROBLEMA N° 252**

En un triángulo rectángulo, las áreas de los círculos exinscritos relativos a los catetos y el círculo inscrito son A, B y C respectivamente. Calcule el área del círculo exscrito relativa a la hipotenusa.

- A)  $\frac{AB}{C}$   
B)  $\frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})^2}{2}$   
C)  $\sqrt[3]{ABC}$   
D)  $(\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C})^2$   
E)  $(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})^2$

**PROBLEMA N° 253**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule el área de la región sombreada. (AB = 4)

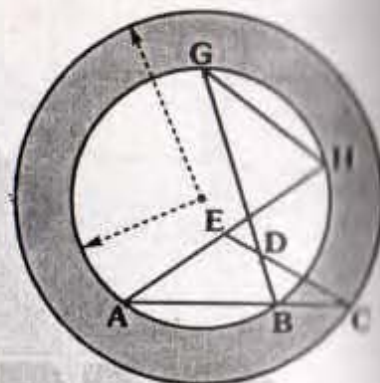


- A)  $5(\pi - 2)$  B)  $4(\pi - 2)$  C)  $5\pi - 8$   
D)  $3(\pi - 2)$  E)  $10(\pi - 1)$

**PROBLEMA N° 254**

En el gráfico,  $\overline{GH} \parallel \overline{EC}$  y  $DC = 4(EB) = 4$ . Calcule el área de la región sombreada

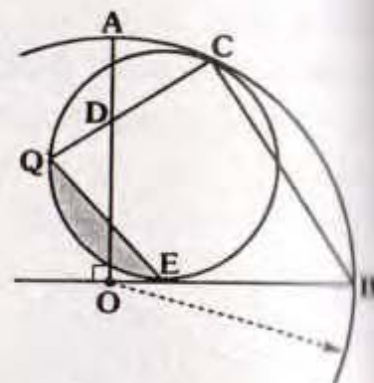
- A)  $16\pi$   
B)  $4\pi$   
C)  $20\pi$   
D)  $12\pi$   
E)  $25\pi$



**PROBLEMA N° 255**

En el gráfico, E y C son puntos de tangencia, si  $m\angle ADC = m\angle OBC$ ;  $m\widehat{QC} = 217^\circ$  y  $OE = 2$ . Halle el área de la región sombreada.

- A)  $9(\pi - 2)$   
B)  $8(\pi - 2)$   
C)  $6(\pi - 2)$   
D)  $9\pi - 2$   
E)  $8\pi - 3$



**PROBLEMA N° 256**

Se tiene el triángulo equilátero ABC cuyo lado mide "a", P varía en  $\overline{BC}$  y Q en  $\overline{AB}$ , sea  $\overline{AP} \cap \overline{CQ} = \{S\}$ , tal que  $m\angle ASQ = 60^\circ$ .



Calcule el área mínima del círculo circunscrito al triángulo QSP.

- A)  $\frac{\pi a^2}{10}$  B)  $\frac{\pi a^2}{6}$  C)  $\frac{\pi a^2}{3}$   
D)  $\frac{\pi a^2}{2}$  E)  $\pi a^2$

**PROBLEMA N° 257**

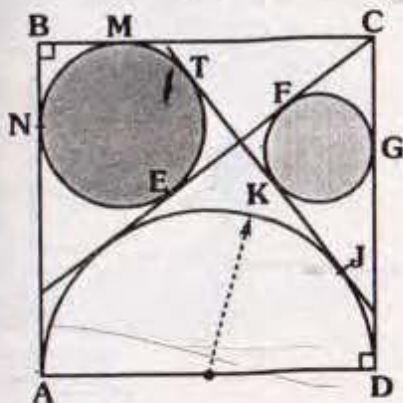
Se tienen los pentágonos regulares coplanarios ABCDE y AEFGH, se traza la circunferencia que pasa por F, D y C. Calcule la razón de los círculos inscritos en el triángulo rectilíneo HAB y mixtilíneo FED.

- A) 1 B)  $\frac{1}{2}$  C)  $\frac{1}{4}$   
D)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  E)  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**PROBLEMA N° 258**

En el gráfico, ABCD cuadrado y N, M, T, E, H, F, G, K y J son puntos de tangencia, halle la razón de áreas de dicho círculos.

- A) 9/4  
B) 4  
C) 3/2  
D) 6  
E) 1/2



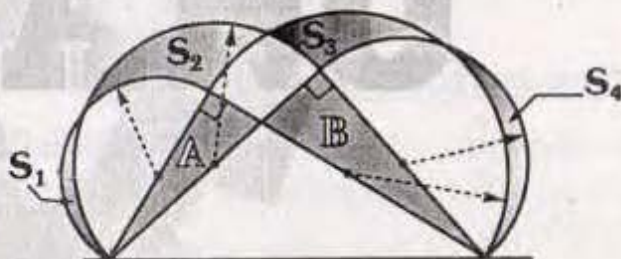
**PROBLEMA N° 259**

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AQ y BP que se intersectan en H. Si  $m\angle ACB = \theta$  y el circunradio del triángulo ABC es R. Calcule el área del círculo circunscrito al triángulo PHQ.

- A)  $\pi R^2 \sin \theta$  B)  $\pi R^2 \sin^2 \theta$   
C)  $\pi R^2 \cos^2 \theta$  D)  $\pi R^2 (1 + \cos \theta)$   
E)  $\pi R^2 (1 - \sin \theta)$

**PROBLEMA N° 260**

Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $A + B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$   
B)  $A + B = S_2 + S_3 - S_1 - S_4$   
C)  $A - B = S_1 + S_3 - S_2 - S_4$   
D)  $A - B = S_1 + S_2 - S_3 - S_4$   
E)  $A - B = S_2 - S_1 + S_3 - S_4$





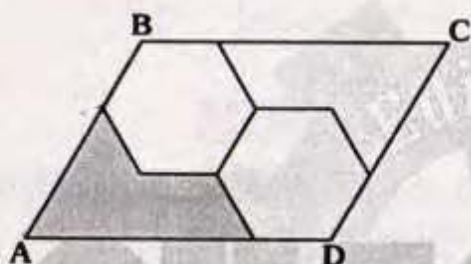
# Problemas Resueltos

## Ciclo Repaso

### PROBLEMA N° 261

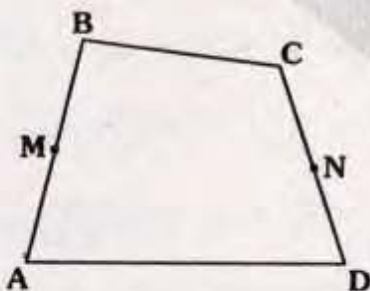
En el gráfico, los hexágonos mostrados son regulares. Calcule la razón de áreas de la región sombreada y la región ABCD.

- A)  $1/3$
- B)  $1/4$
- C)  $1/8$
- D)  $1/6$
- E)  $2/9$



### PROBLEMA N° 262

En el gráfico,  $AM = MB$  y  $CN = ND$  indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.



- I) Si  $S_{(ABCD)} = 2(S_{\triangle AMN})$ , entonces ABCD es un trapecio;
- II) Si  $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle CND}$ , entonces ABCD es un trapecio;
- III) Si  $S_{(AMCN)} = S_{(BNDM)}$ , entonces ABCD es un trapecio.

- A) VFV
- B) VVV
- C) FFF
- D) VVF
- E) FFV

### PROBLEMA N° 263

¿Cuántos puntos P en el plano del triángulo ABC existen, tal que

$$S_{\triangle APB} = S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAC}?$$

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) infinitos

### PROBLEMA N° 264

En el gráfico, se muestra a Dianita lanzando dardos a una placa cuadrada. Si todos los dardos llegan a la región interior, calcule la probabilidad que la distancia del punto dejado por el dardo, al lado más próximo sea menor o igual a la distancia a la diagonal.



- A)  $\sqrt{2} - 1$
- B)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
- C)  $\sqrt{2}$
- D)  $\frac{1}{2}$
- E)  $\frac{1}{4}$



**PROBLEMA N° 265**

En el gráfico,  $\alpha + \theta = 45^\circ$  y  $(AD)(GD) = 10\sqrt{2}$ . Si ABCD, AEFG y HIC son cuadrados. Halle el área de la región sombreada.

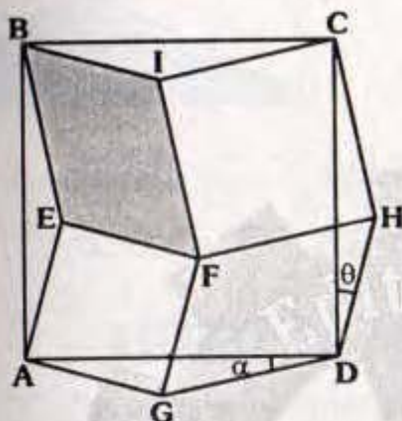
A) 20

B) 10

C) 15

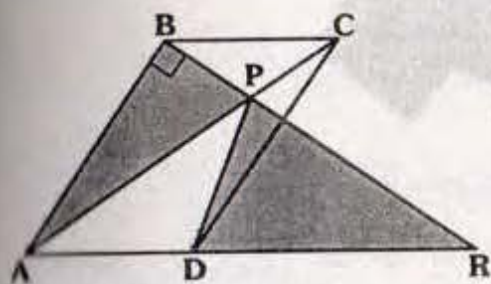
D)  $10\sqrt{2}$

E)  $20\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 266**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo y  $(AB)(PR) = k$ . Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) k

B) 2k

C) 4k

D) k/2

E) k/4

**PROBLEMA N° 267**

En el gráfico, Q, T y M son puntos de tangencia. Si  $AB=5$ ;  $BC=6$  y  $AC=7$ . Calcule la razón de inradios de los triángulos ABT y ATC.

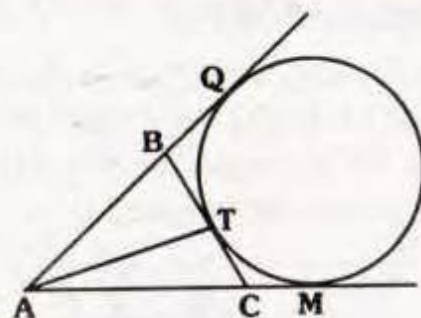
A) 1

B) 1/2

C) 2

D) 2/3

E) 3/2



**PROBLEMA N° 268**

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la mediana BM. Si  $12(AB) = 5(BC)$ , calcule la razón de inradios de los triángulos AMB y MBC.

A)  $\frac{5}{12}$

B)  $\frac{10}{13}$

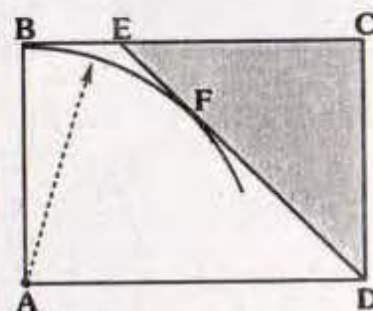
C)  $\frac{5}{13}$

D)  $\frac{25}{18}$

E)  $\frac{16}{25}$

**PROBLEMA N° 269**

En el gráfico, ABCD es un rectángulo, si  $EF=4$  y  $FD=6$ , calcule el área de la región sombreada.



A) 20

B) 16

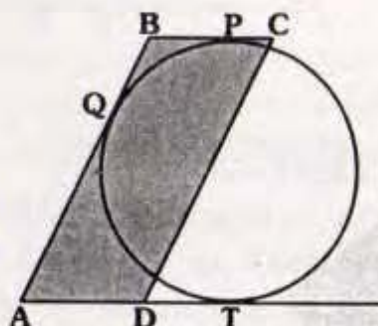
C) 12

D) 48

E) 24

**PROBLEMA N° 270**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, si  $PC=DT$ ,  $BQ=a$  y  $QA=b$ . Calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)

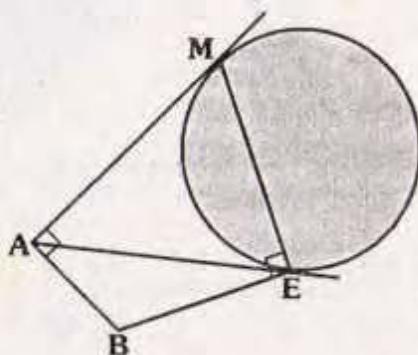


- A)  $ab$                       B)  $(a+b)^2$   
 C)  $\frac{(a+b)^2}{2}$                 D)  $(a+b)\sqrt{ab}$   
 E)  $\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{2}$

**PROBLEMA N° 271**

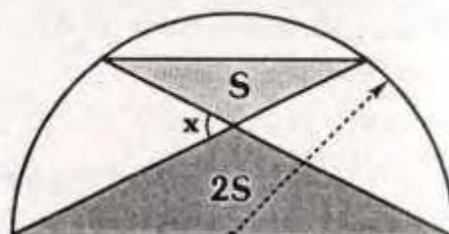
En el gráfico, E y M son puntos de tangencia. Si  $AB = k$ , halle el área de la región sombreada.

- A)  $\pi k^2$   
 B)  $2\pi k^2$   
 C)  $\frac{\pi k^2}{2}$   
 D)  $\frac{\pi k^2}{4}$   
 E)  $\pi\sqrt{2}k^2$



**PROBLEMA N° 272**

En el gráfico, calcule x.



- A)  $30^\circ$                       B)  $45^\circ$                       C)  $60^\circ$   
 D)  $37^\circ$                       E)  $53^\circ$

**PROBLEMA N° 273**

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro), se ubica P en  $\widehat{AB}$ , Q en  $\overline{AO}$  y T en  $\overline{OB}$  tal que OQPT es rectángulo. Si  $\overline{AB}$  corta a  $\overline{QP}$  en E y a  $\overline{TP}$  en F,  $AE=a$  y  $FB=b$ . Halle el área de la región EPF.

- A)  $ab$                       B)  $\frac{ab}{2}$                       C)  $2ab$   
 D)  $ab\sqrt{2}$                 E)  $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA N° 274**

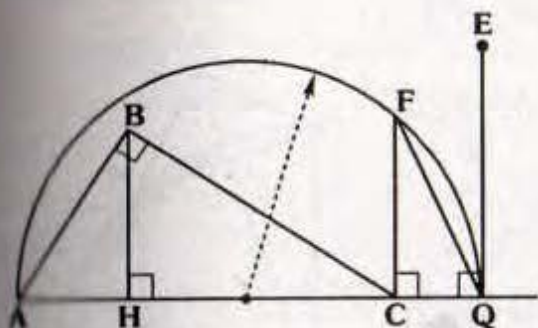
En los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$  de un paralelogramo ABCD se ubican los puntos P y Q tal que el cuadrilátero PCDQ es un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez. Calcule la razón de áreas de las regiones ABCD y PCDQ, sabiendo que  $AD=4(AB)$  y  $m\angle BAD = 60^\circ$ .

- A) 3 : 1                      B) 5 : 3                      C) 4 : 1  
 D) 7 : 5                      E)  $\sqrt{3} : 2$



**PROBLEMA N° 275**

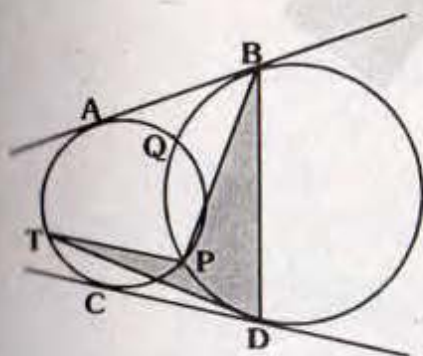
En el gráfico, E es excentro del triángulo ABC. Si  $AC=m$  y  $FQ=n$ , calcule BH.



- A)  $m+n$       B)  $\frac{m+n}{2}$       C)  $\sqrt{m^2+n^2}$   
 D)  $\frac{2m^2}{n}$       E)  $\frac{2n^2}{m}$

**PROBLEMA N° 276**

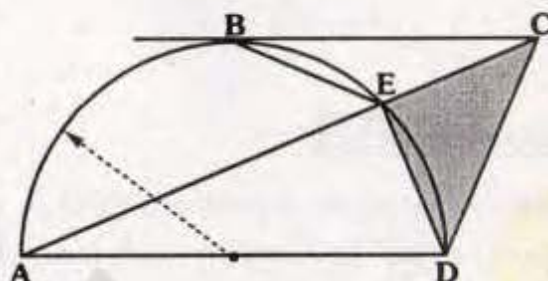
Calcule el área de la región sombreada si  $AB=a$  y  $m\widehat{TCP} = m\widehat{QPD} = \theta$  (A, B, C y D son puntos de tangencia)



- A)  $a^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$       B)  $\frac{a^2}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$   
 C)  $2a^2 \sin\theta$       D)  $\frac{a^2}{2} \sin\theta$   
 E)  $a^2 \cos\theta$

**PROBLEMA N° 277**

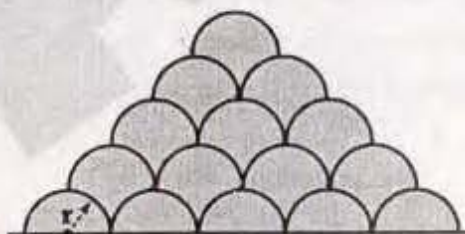
En el gráfico, B es punto de tangencia y  $BE=a$ , calcule el área de la región sombreada, si  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .



- A)  $a^2$       B)  $2a^2$       C)  $4a^2$   
 D)  $\frac{a^2}{2}$       E)  $\frac{a^2}{4}$

**PROBLEMA N° 278**

En el gráfico, se muestra un conjunto de semicircunferencias congruentes de radio r. Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $5r^2(8+\pi)$       B)  $2r^2(8+\pi)$   
 C)  $\frac{5r^2}{2}(8+\pi)$       D)  $3r^2(8+\pi)$   
 E)  $\frac{3r^2}{2}(8+\pi)$

**PROBLEMA N° 279**

En la semicircunferencia de diámetro  $\overline{AD}$ , en cuya prolongación se ubica P,

luego se traza la secante PCB. Si  $m\widehat{AB} = 90^\circ$  y  $(BC)(CP) = k$ , halle el área de la región triangular ACD.

- A)  $k$                       B)  $k/2$                       C)  $2k$   
D)  $\frac{k}{4}$                       E)  $k\sqrt{2}$

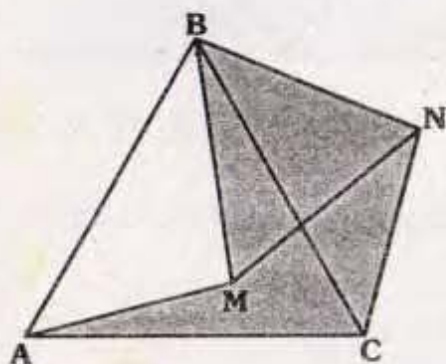
**PROBLEMA N° 280**

Se tiene el triángulo equilátero EFG, L es un punto de la región interior. Si  $m\angle FEL = m\angle EGL$  y las áreas de las regiones triangulares ELF y LFC son A y B respectivamente. Calcule el área de la región ELC.

- A)  $A+B$                       B)  $\sqrt{AB}$                       C)  $\sqrt{2AB}$   
D)  $2\sqrt{AB}$                       E)  $\sqrt{3AB}$

**PROBLEMA N° 281**

En el gráfico, los triángulos ABC y MBN son equiláteros. Si  $AC = 8$ , calcule el área de la región sombreada.

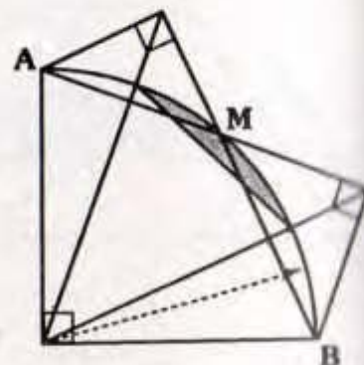


- A)  $16\sqrt{3}$                       B) 16                      C) 64  
D)  $24\sqrt{3}$                       E) 32

**PROBLEMA N° 282**

Del gráfico, si  $AM = \sqrt{2}$  y  $MB = 2$ , calcular el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{5(\pi - \sqrt{2})}{4}$   
B)  $\frac{3(\pi - 2\sqrt{2})}{8}$   
C)  $\frac{(\pi - \sqrt{2})}{8}$   
D)  $\frac{5(\pi - 2\sqrt{2})}{8}$   
E)  $\frac{5(\pi - 2\sqrt{2})}{4}$



**PROBLEMA N° 283**

En el triángulo rectángulo ABC, (recto en B), se traza la circunferencia inscrita de radio r, la cual es tangente a  $\overline{AB}$  en P y a  $\overline{BC}$  en Q. E es excentro del triángulo ABC relativa a BC, calcule el área de la región PQE.

- A)  $r^2$                       B)  $\frac{r^2}{2}$                       C)  $r^2\sqrt{2}$   
D)  $r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$                       E)  $2r^2$

**PROBLEMA N° 284**

Dado el paralelogramo ABCD,  $AB = 10$  ubica T en  $\overline{BC}$  tal que las regiones TCD y ABD están en la razón de 1 a 3, además el cuadrilátero ABTD es bicéntrico. Calcule el área de la región ABCD.

- A)  $37\sqrt{6}$                       B)  $39\sqrt{6}$                       C)  $40\sqrt{6}$



- D)  $48\sqrt{6}$  E)  $\frac{3200}{49}\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 285**

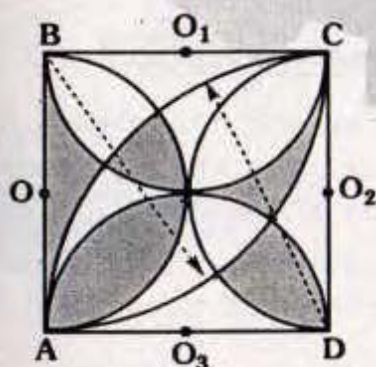
Desde un punto "P" exterior a una circunferencia de centro "O", se traza la tangente PT y la secante PAB tal que la medida del arco AB es " $\theta$ ", en  $\overline{PO}$  se ubica el punto "R" tal que la  $m\angle TRP = 90^\circ$  y  $TR = 4$ . Calcule el área de la región triangular ARB.

- A)  $8\sin\theta$  B)  $8\cos\theta$  C)  $8\tan\theta$   
D)  $(8\sin\theta)/3$  E)  $(8\cos\theta)/3$

**PROBLEMA N° 286**

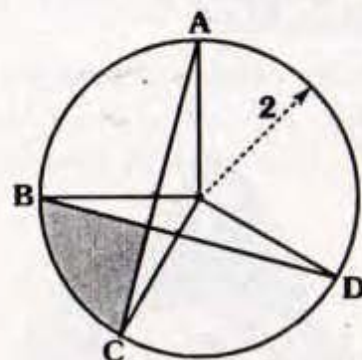
En la figura mostrada ABCD es un cuadrado de lado " $\ell$ ". Calcule el área de la región sombreada ( $O$ ;  $O_1$ ;  $O_2$ ;  $O_3$  son centros de las semicircunferencia)

- A)  $\pi\ell^2/2$   
B)  $\pi\ell^2/4$   
C)  $\pi\ell^2/8$   
D)  $\pi\ell^2/16$   
E)  $\pi\ell^2/32$



**PROBLEMA N° 287**

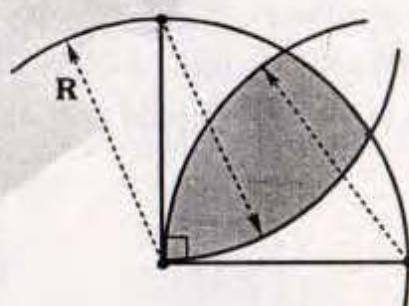
En el gráfico,  $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 90^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 60^\circ$ . Halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{1}{3}(\pi + \sqrt{3})$  B)  $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - \pi)$   
C)  $\frac{1}{3}(\sqrt{3} + \pi + 4)$  D)  $\frac{1}{3}(2\pi + 3 - 3\sqrt{3})$   
E)  $3\pi\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 288**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.

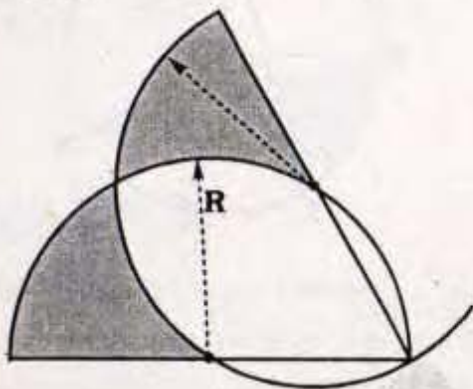


- A)  $\frac{R^2}{3}\left(\frac{4}{5}\pi - \sqrt{3}\right)$  B)  $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$   
C)  $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{4}\pi - \sqrt{3}\right)$  D)  $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$   
E)  $\frac{R^2}{3}\left(\frac{5}{4}\pi - \sqrt{3}\right)$



**PROBLEMA N° 289**

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada.



- A)  $R^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$     B)  $R^2 \frac{\sqrt{5}}{2}$     C)  $R^2 \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 D)  $R^2 \frac{\sqrt{3}}{8}$     E)  $R^2 \frac{\sqrt{2}}{5}$

**PROBLEMA N° 290**

En una circunferencia de radio 1, se ubican los puntos A, B y C, (B en  $\widehat{AC}$ ) tal que  $m\widehat{AB} = 40^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 100^\circ$ . Calcule el área de la región limitada por  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\widehat{BC}$ .

- A)  $\frac{5}{18}\pi$     B)  $\frac{7}{18}\pi$     C)  $\frac{5}{13}\pi$   
 D)  $\frac{4}{9}\pi$     E)  $\frac{5}{6}\pi$

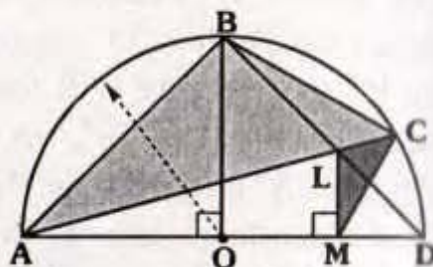
**PROBLEMA N° 291**

Se tiene un trapecio isósceles ABCD en el cual se traza la altura  $\overline{CH}$ ; si el área de la región triangular ACH es 12; calcule el área de la región trapezoidal.

- A) 12    B) 24    C) 18    D) 20    E) 15

**PROBLEMA N° 292**

Según el gráfico, calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares ABC y MLC, si:  $BL = LD$ .



- A)  $2\sqrt{2}$     B) 8    C) 6  
 D) 4    E)  $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 293**

Los lados de un rectángulo miden  $10 + \sin x$  y  $16 - \sin x$ , halle el área máxima de la región rectangular.

- A) 160    B) 165    C) 187  
 D) 169    E) 178,25

**PROBLEMA N° 294**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, P es un punto interior tal que  $AD = AP$ ,  $PB = BC$ ,  $AB = 6$  y  $m\angle DAP = m\angle PBC = 90^\circ$ . Calcule el área de la región pentagonal APBCD.

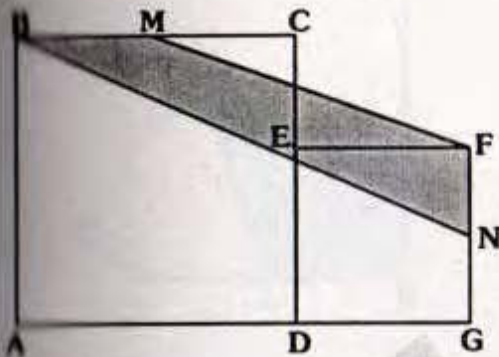
- A) 12    B) 36    C) 24  
 D) 9    E) 18

**PROBLEMA N° 295**

En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados, M y N son puntos medios de  $\overline{BC}$  y  $\overline{EF}$ .



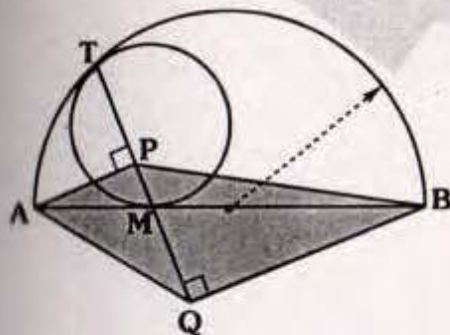
En el gráfico,  $GC = k$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $k^2$       B)  $k^2 \frac{\sqrt{2}}{4}$       C)  $k^2 \sqrt{2}$   
 D)  $\frac{k^2}{2}$       E)  $\frac{k^2}{4}$

**PROBLEMA N° 296**

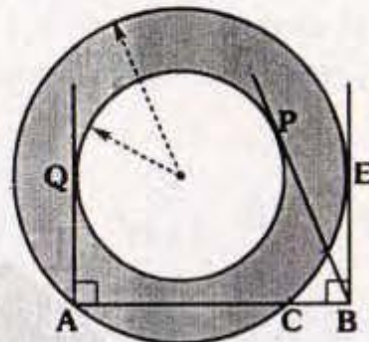
En el gráfico, T y M son puntos de tangencia. Si  $AP = a$  y  $BQ = b$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{(b^2 - a^2)\sqrt{2}}{2}$       B)  $\frac{2}{3}(b^2 - a^2)$   
 C)  $\frac{ab}{2}$       D)  $b^2 - a^2$   
 E)  $\frac{b^2 - a^2}{2}$

**PROBLEMA N° 297**

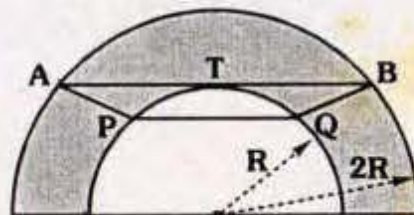
Según la figura, el área de la región sombreada es  $\pi a^2$ . Calcule "BP", si E, P y Q son puntos de tangencia.



- A)  $a\sqrt{6}$       B)  $a\sqrt{5}$   
 C)  $a\sqrt{3}$       D)  $a\sqrt{2}$   
 E)  $a$

**PROBLEMA N° 298**

Calcule el área de la región sombreada si  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ,  $PQ = R$  y "T" es punto de tangencia.



- A)  $\frac{R^2}{6}(7\pi - 6)$       B)  $\frac{R^2}{3}(2\pi - 3)$   
 C)  $\frac{R^2}{4}(3\pi - \sqrt{3})$       D)  $\frac{R^2}{5}(5\pi - 3)$   
 E)  $\frac{R^2}{7}(2\pi - 1)$

**PROBLEMA N° 299**

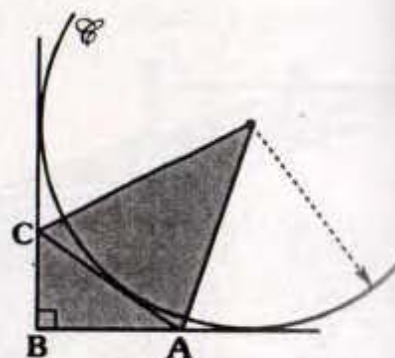
En un triángulo ABC sobre los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  se ubican los puntos P y N respectivamente de modo que:  $\frac{PA}{PB} = \frac{NC}{NA} = k$ . Calcule el área de la región triangular APN, si el área de la región triangular ABC es "S".

- A)  $\frac{3Sk}{(1+k)^2}$       B)  $\frac{2Sk}{(1+k)^2}$       C)  $\frac{Sk}{(1+k)^2}$   
D)  $\frac{5k}{(1+k)^2}$       E)  $\frac{4Sk}{(1+k)^2}$

**PROBLEMA N° 300**

En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia exinscrita del triángulo ABC, si  $AB+BC=a$  y

AC=b. Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{a(a+b)}{4}$       B)  $\frac{(a+b)^2}{4}$   
C)  $\frac{b(a+b)^2}{4}$       D)  $\frac{a^2+b^2}{2}$   
E)  $\frac{a^2+b^2}{4}$





# **Geometría**

## **SOLUCIONARIO**

● ANUAL

● CEPRE UNI

● SEMESTRAL

● SEMESTRAL INTENSIVO

● REPASO

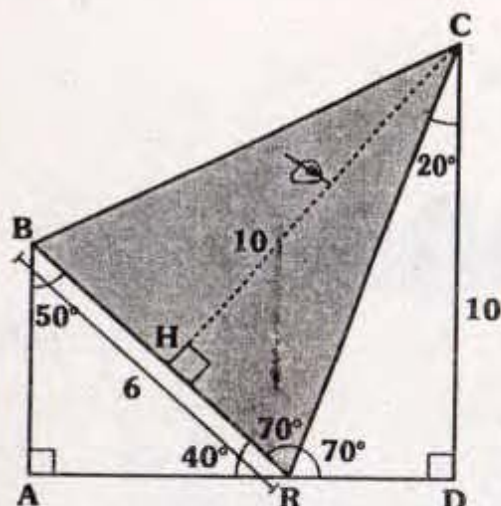
**ÁREAS**  
**DE REGIONES PLANAS**



# Solucionario

## Ciclo Anual

### RESOLUCIÓN N° 1



Nos piden  $S_{\Delta BRC}$

- Como  $BR=6$ , ya tendríamos la base, solo nos falta "la altura".
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que:

$$m\angle DRC = m\angle CRB = 70^\circ$$

- Por teorema de la bisectriz:

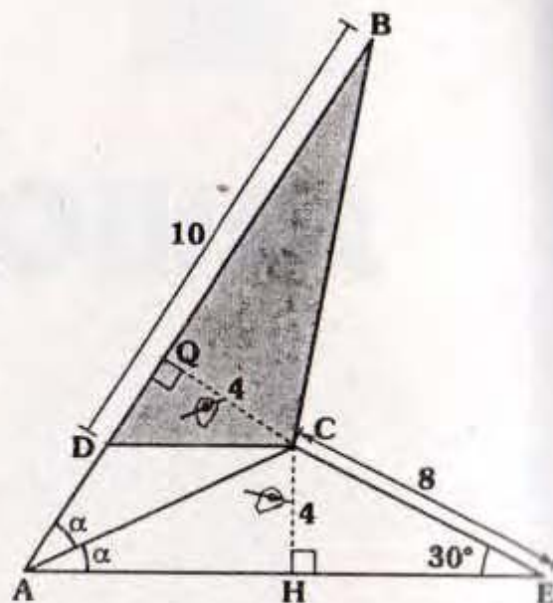
$$CH = CD = 10$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BRC} = \frac{(6)(10)}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta BRC} = 30$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 2



Nos piden  $S_{\Delta DBC}$

- Como se conoce DB (la base), nos falta "la altura".
- Se traza  $\overline{CQ} \perp \overline{DB}$ . Por teorema de la bisectriz:

$$CQ = CH$$

- $\angle CHE$ : Notable de  $30^\circ \Rightarrow HC = 4$

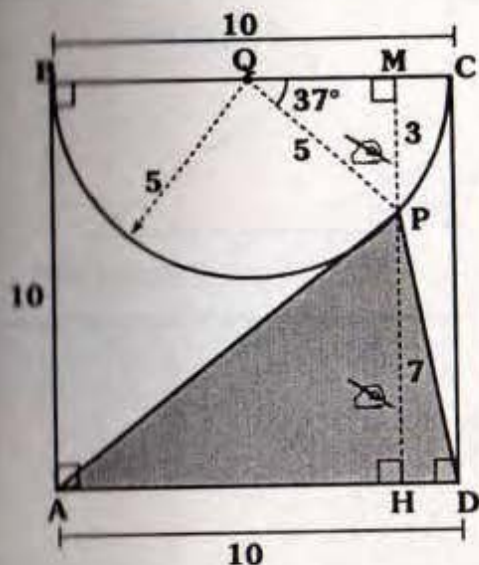
$$\Rightarrow S_{\Delta DBC} = \frac{(10)(4)}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta DBC} = 20$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 3**



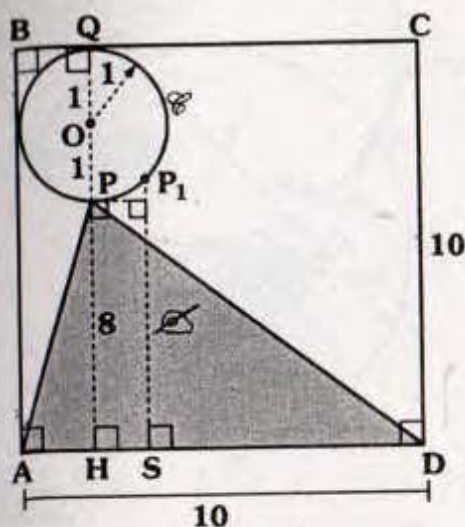
Piden  $S_{\triangle APD}$

- Trazamos  $\overline{PH} \perp \overline{AD}$  y se prolonga  $\overline{HP}$  hasta que corte a  $\overline{BC}$  en M.
- $\triangle QMP$ : notable de  $37^\circ \Rightarrow PM = 3$
- Luego:  $PH = 7$

$$\Rightarrow S_{\triangle APD} = \frac{(10)(7)}{2} = 35$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 4**



Nos piden  $S_{\triangle APD}$ , tal que sea mínima.

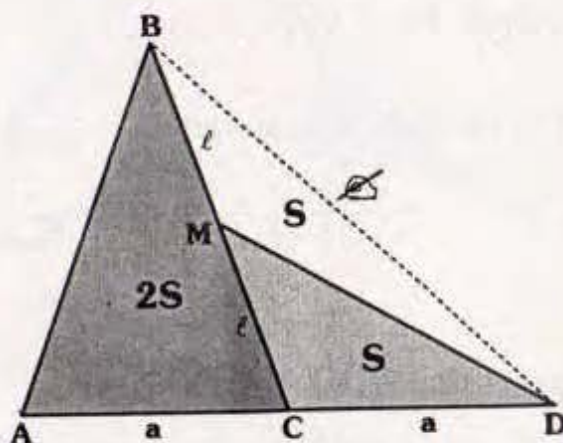
- Como  $P \in \mathcal{C}$ , analicemos cuando la altura es mínima.
- Notemos que P debe estar en la prolongación de  $\overline{QO}$ , pues para otro punto distinto de P, por ejemplo  $P_1$ .
- Vemos que:  $P_1S > PH$

$$\Rightarrow S_{\triangle APD} = \frac{(10)(8)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle APD} = 40$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 5**



Piden  $S_{\triangle MCD}$

Dato  $S_{\triangle ABC} = 8m^2$

• Sea  $S_{\triangle MCD} = S$

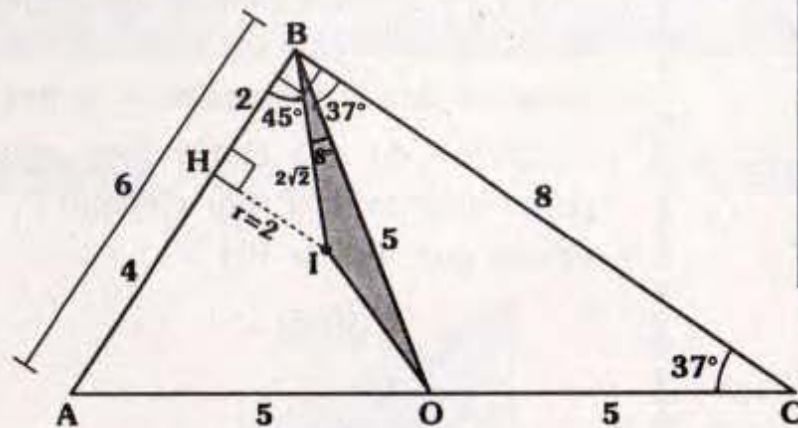
Por razón de áreas:  $S_{\triangle BMD} = S$  y  $S_{\triangle ABC} = 2S$

$$\Rightarrow 2S = 8m^2$$

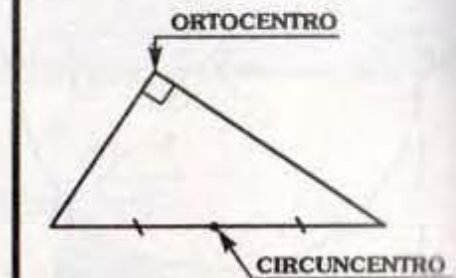
$$\therefore S = 4m^2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 6**



**Recordar**



Nos piden  $S_{\Delta OIB}$

- Notamos que  $m\angle IBO = 8^\circ$
  - Por teorema de la Poncelet:  $6 + 8 = 10 + 2r \Rightarrow r = 2$
  - $\Delta IHB$ :  $IB = 2\sqrt{2}$
  - Por fórmula trigonométrica:  $S_{\Delta OIB} = \frac{(2\sqrt{2})(5)}{2} \underbrace{\frac{\sin 8^\circ}{\frac{1}{5\sqrt{2}}}}_1$
- $\therefore S_{\Delta OIB} = 1$

**Clave III**

**RESOLUCIÓN N° 7**

Nos piden  $S_{\Delta AMP}$

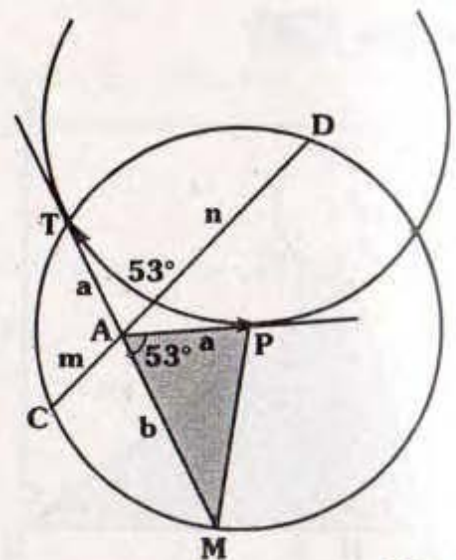
Dato:  $mn = 20$  y  $m\widehat{TP} = 53^\circ$

Por teorema:  $m\angle MAP = m\widehat{TP}$  y  $AT = AP$

Por t. de las cuerdas:  $ab = mn = 20$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMP} = \frac{ab}{2} \sin 53^\circ = \frac{20}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

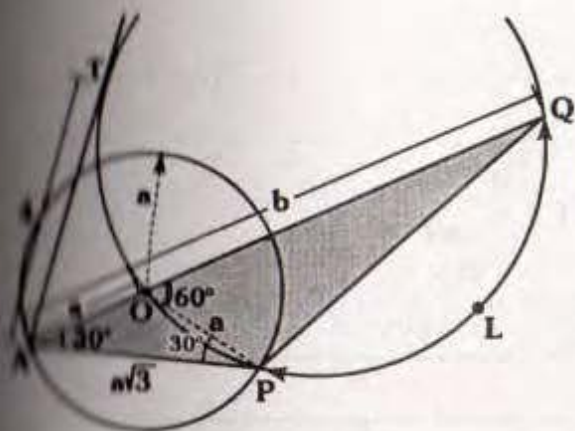
$$\therefore S_{\Delta AMP} = 8$$



**Clave A**



**RESOLUCIÓN N° 8**



Nos piden:  $S_{\Delta APQ}$

Por ángulo inscrito:  $m\angle QOP = 60^\circ$

$$\Rightarrow m\angle OAP = 30^\circ$$

En  $\Delta AOP$ :  $AO = OP = a$  y  $AP = a\sqrt{3}$

Por teorema de la tangente:

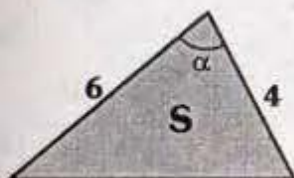
$$ab = 4^2 = 16$$

$$S_{\Delta APQ} = \frac{a\sqrt{3}b}{2} \sin 30^\circ$$

$$\therefore S_{\Delta APQ} = 4\sqrt{3}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 9**



Nos piden  $S_{\text{máxima}}$

• Por fórmula trigonométrica:

$$S = \frac{(6)(4)}{2} \cdot \sin \alpha$$

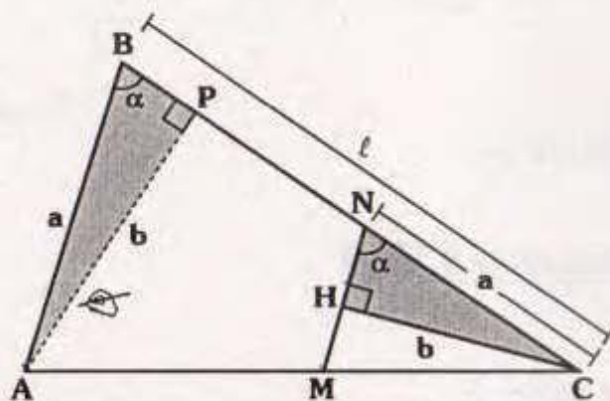
• Como el área debe ser máxima entonces, " $\sin \alpha$ " es máximo, es decir:

$$\sin \alpha = 1$$

$$\therefore S = 12$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 10**



Nos piden:  $S_{\Delta ABC}$

• Datos  $AB = NC$ ;  $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$  y  $b\ell = 10$

• Trazamos la altura  $\overline{AP}$  del  $\Delta ABC$

•  $\angle APB \cong \angle CHN \Rightarrow AP = HC = b$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\ell b}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 5$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 11**

- Nos piden  $S_{\triangle ABC}$
- En el  $\triangle ABC$ , se traza la mediana BM entonces:

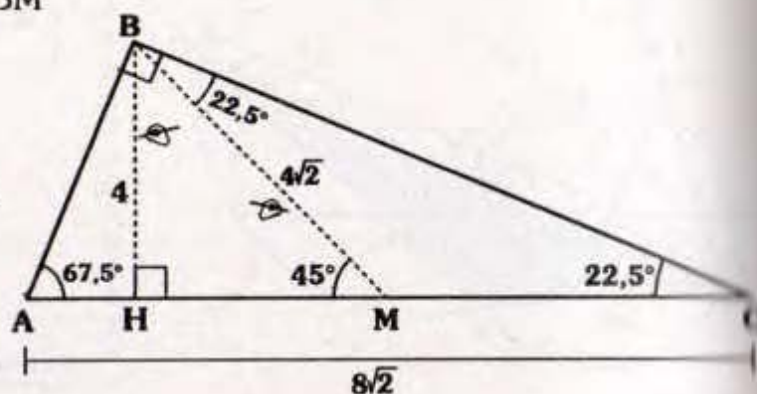
$$BM = MC = MA = 4\sqrt{2}$$

- Se traza la altura BH del  $\triangle ABC$ .
- En el  $\triangle BHM$  notable de  $45^\circ$

$$\Rightarrow BH = 4$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{(8\sqrt{2})(4)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{2}$$



**Clave** II

**RESOLUCIÓN N° 12**

Nos piden S

- Por propiedad de polígonos, su ángulo exterior mide  $60^\circ$ , entonces:

$\triangle MBA$ ,  $\triangle CND$ ,  $\triangle FEL$  y  $\triangle MNL$

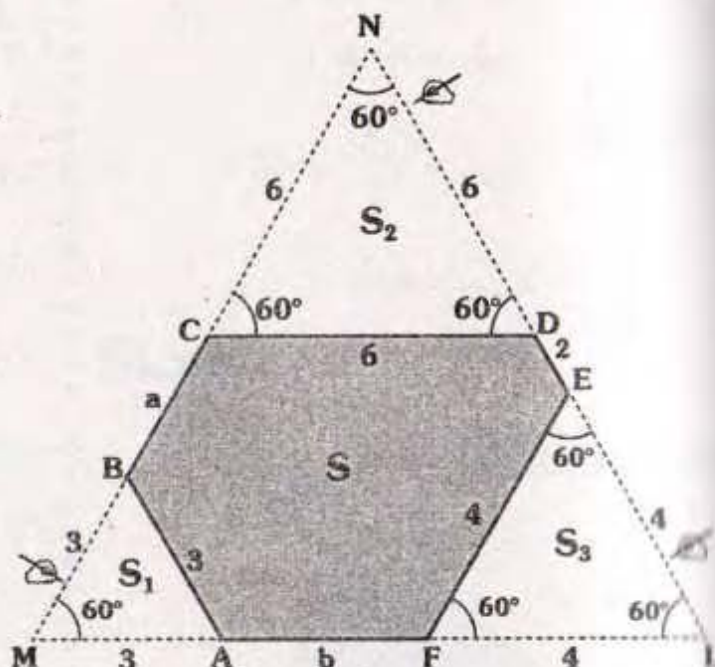
son equiláteros.

- Como  $NL = 12 \Rightarrow a = 3$  y  $b = 5$

$$S = S_{\triangle MNL} - (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\Rightarrow S = 12^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - \left( 3^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 6^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 4^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\therefore S = \frac{83}{4} \sqrt{3}$$



**Clave** I



**RESOLUCIÓN N° 13**

Piden  $S_{\Delta MNT}$

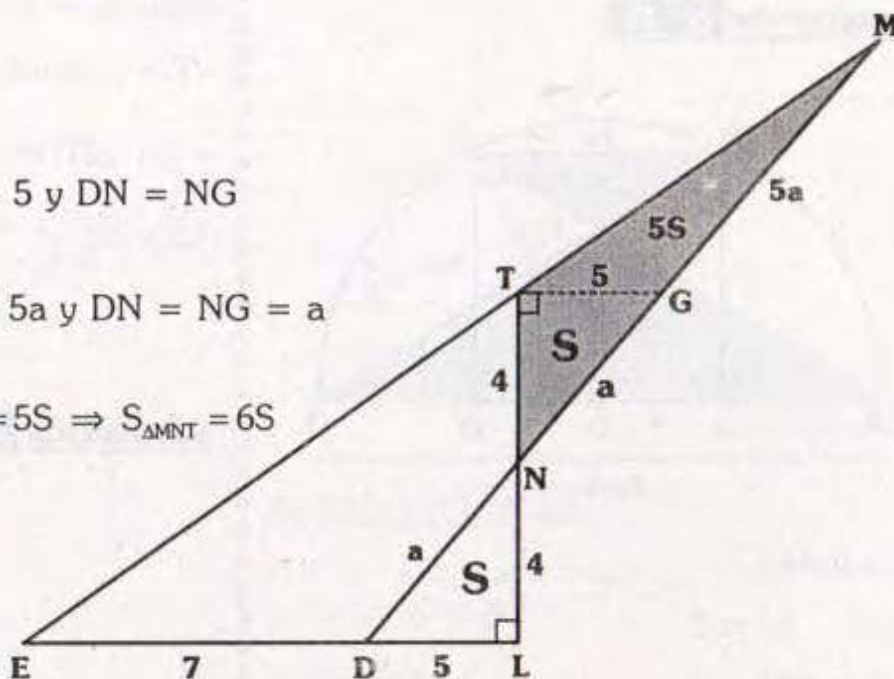
Se traza  $\overline{TG} \parallel \overline{EL} \Rightarrow TG = 5$  y  $DN = NG$

$$\Rightarrow \frac{MG}{MD} = \frac{5}{7} \Rightarrow MG = 5a \text{ y } DN = NG = a$$

Sea  $S_{\Delta TNG} = S \Rightarrow S_{\Delta TGM} = 5S \Rightarrow S_{\Delta MNT} = 6S$

$$S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\therefore S_{\Delta MNT} = 60$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 14**

Nos piden  $S_{\Delta BRM}$

Dato  $S_{\Delta ABR} = 10$  y  $AM = MC$

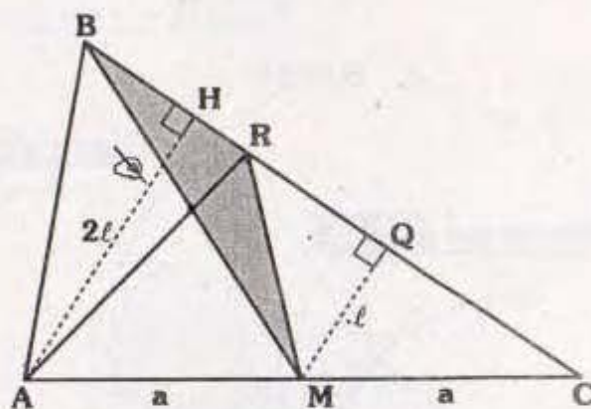
Como las regiones triangulares BRM y ABR tienen igual base, entonces la razón de áreas es la razón de alturas.

En  $\Delta AHC$ , por base media:

$$AH = 2(MQ)$$

Entonces: 
$$\frac{S_{BRM}}{S_{ABR}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{BRM} = 5$$



**Clave B**



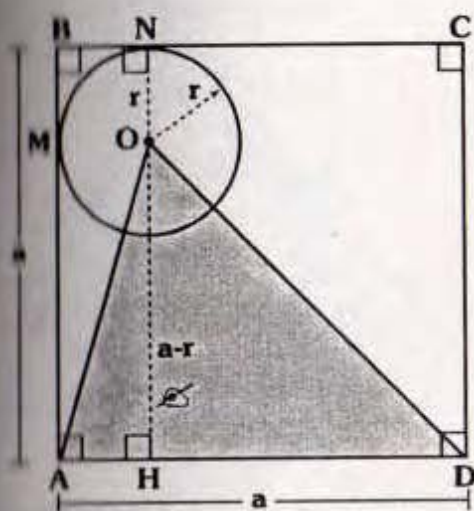


$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S_{\Delta CGK} = \sqrt{3}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 18**



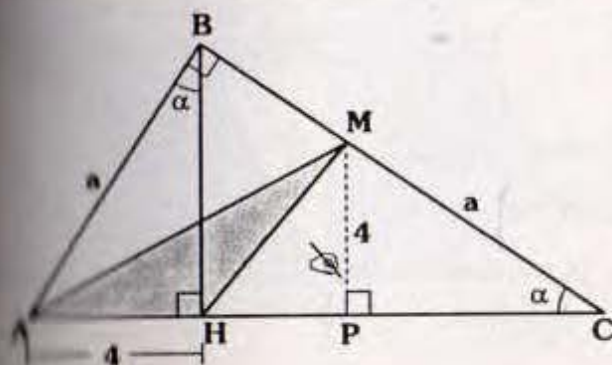
Nos piden  $S_{\Delta AOD}$

Se nota que ABNH es rectángulo, entonces  $OH = a - r$

$$\therefore S_{\Delta AOD} = \frac{a(a-r)}{2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 19**



Nos piden  $S_{\Delta AMH}$

Se traza  $\overline{MP} \perp \overline{HC}$

$$\Rightarrow \angle BHA \cong \angle CPM \Rightarrow MP = 4$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMH} = \frac{(4)(4)}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta AMH} = 8$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 20**

Sea "p" el semiperímetro y "r" su inradio del mismo triángulo.

Nos piden: r

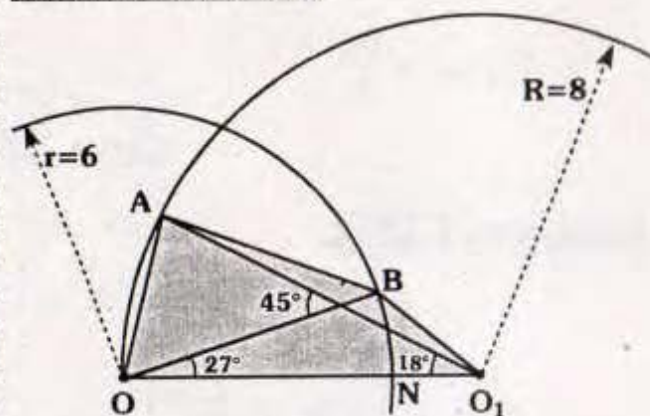
$$\text{Dato: } S = 3(2p)$$

$$\text{Sabemos: } S = pr \Rightarrow pr = 6p$$

$$\therefore r = 6$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 21**



Nos piden  $S_{\Delta OABO_1}$

Como tenemos OB y  $AO_1$  (diagonales del cuadrilátero) optemos por la fórmula general.

Como  $m\widehat{BN} = 27^\circ$  y  $m\widehat{AO} = 18^\circ$

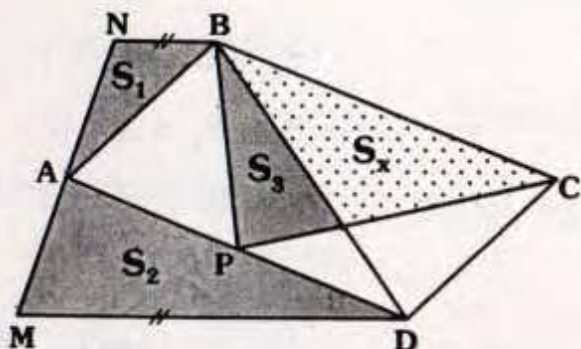
$$\Rightarrow m\angle BON = 27^\circ \text{ y } m\angle AO_1O = 18^\circ$$







**RESOLUCIÓN N° 28**



Nos piden la relación entre  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_x$

• Como  $\overline{MD} \parallel \overline{NB}$  y  $MA = AN$ , entonces

$$S_{\triangle ABD} = \frac{S_{\triangle MNBD}}{2} = S_1 + S_2$$

• ABCD es paralelogramo, entonces:

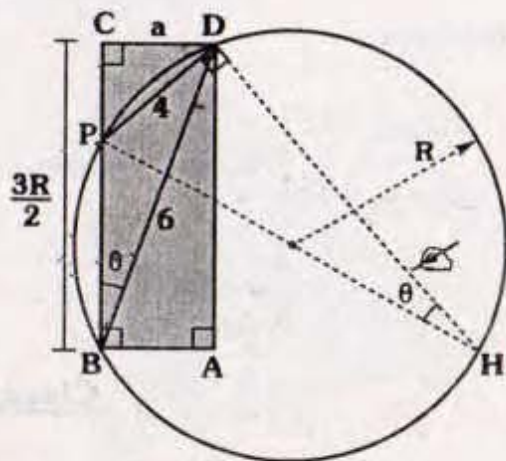
$$S_{\triangle ABD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2} = S_{\triangle PBC} = S_3 + S_x$$

$$\Rightarrow S_3 + S_x = S_1 + S_2$$

$$\therefore S_x = S_1 + S_2 - S_3$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 29**



• Sea  $S_x$  el área de la región ABCD

$$S_x = a \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3}{2}aR \quad \dots (I)$$

$$\bullet \triangle ABCD \sim \triangle HDP$$

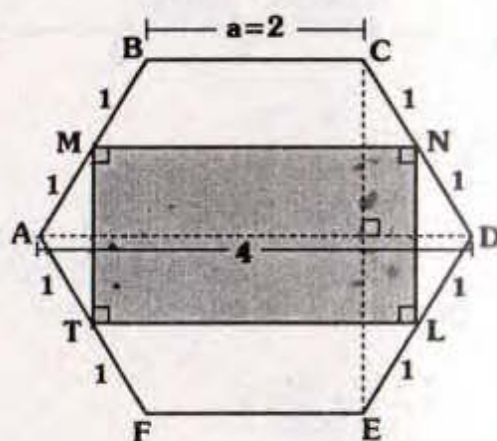
$$\Rightarrow \frac{4}{2R} = \frac{a}{6} \Rightarrow aR = 12$$

$$\bullet \text{ En (I): } S_x = \frac{3}{2}(12)$$

$$\therefore S_x = 18$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 30**



Nos piden  $S_{\square MNLT}$

$$\text{Dato: } S_{OABCDEF} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3 \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

Como ABCDEF es regular, entonces

$$CE = 2\sqrt{3}, AD = 4 \text{ y } \overline{AD} \perp \overline{CE}$$

• Luego MNLT es rectángulo.



Por base media:

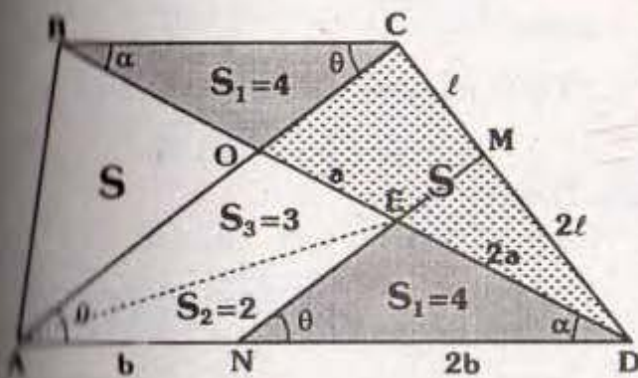
$$MN = \frac{AD + BC}{2} \Rightarrow MN = 3$$

$$NL = \frac{CE}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\square MNLT} = 3\sqrt{3}$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 31



Nos piden  $S_{\triangle ABCD}$

Dato  $S_1 = 4$  y  $MD = 2(MC)$

Por teorema de Tales:

$$DE = 2(EO) \text{ y } ND = 2(NA)$$

Luego por razón de áreas

$$S_2 = 2 \text{ y } S_3 = 3 \Rightarrow S_{\triangle AOD} = 9$$

Por propiedad de trapecio:

$$S_{\triangle ABOC} = S_{\triangle ADOC} = S$$

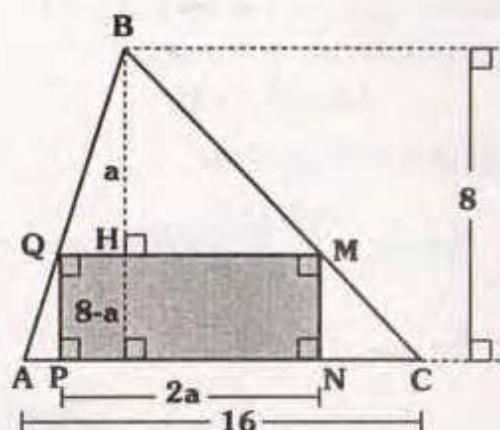
$$S^2 = S_{\triangle ABOC} \cdot S_{\triangle ADOC}$$

$$\Rightarrow S = 6$$

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = 25$$

**Clave E**

### RESOLUCIÓN N° 32



Nos piden QM

Dato  $S_{(PQMN)} = 32$

Como  $\triangle ABC \sim \triangle QBM \Rightarrow QM = 2(BH)$

Sea  $BH = a \Rightarrow QM = PN = a$  y

$$QP = 8 - a$$

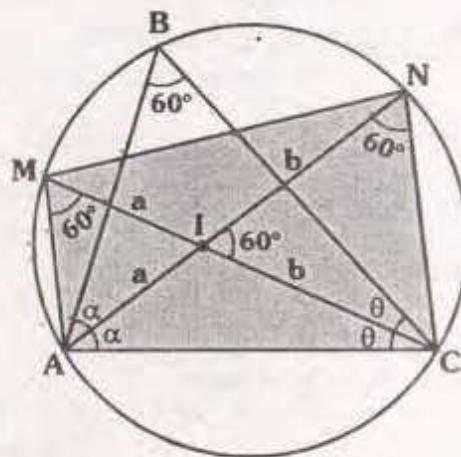
Del dato:

$$2a(8 - a) = 32 \Rightarrow a = 4$$

$$\therefore QM = 8$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 33



Piden:  $S_{\triangle AMNC}$

Dato:  $a+b = 12$

- Notemos que los triángulos AIM y NIC son equiláteros, entonces:

$$AN = MC = 12$$

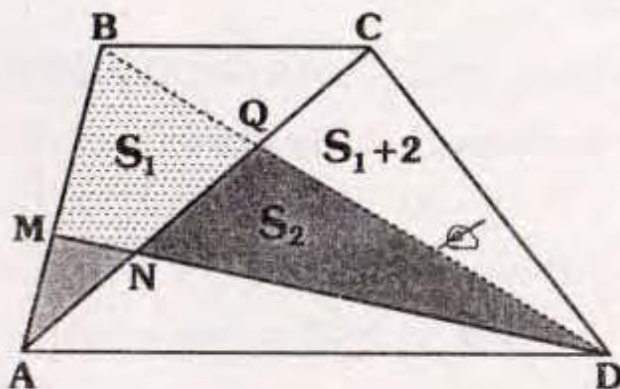
- Por la fórmula general:

$$S_{\triangle AMNC} = \frac{(12)(12)}{2} \sin 60^\circ$$

$$\therefore S_{\triangle AMNC} = 36\sqrt{3}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 34**



Piden  $S_{\triangle MBD}$

Datos  $S_{\triangle AMN} = 2\text{cm}^2$ ;  $S_{\triangle ANCD} = 10\text{cm}^2$  y

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

- Sea  $S_{\triangle BQNM} = S_1$  y  $S_{\triangle ANQD} = S_2$

$$\Rightarrow S_{\triangle MBD} = S_1 + S_2$$

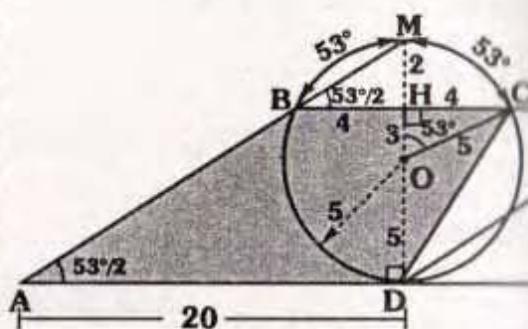
- Como  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow S_{\triangle ABQ} = S_{\triangle CQD} = S_1 + 2$

- Del dato:  $\frac{S_{\triangle ANCD}}{10} = S_1 + S_2 + 2$

$$\therefore S_1 + S_2 = 8\text{cm}^2$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 35**



Nos piden  $S_{\triangle ABCD}$

- Notemos que ABCD es un trapecio, pues  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .

- $\triangle OHC$  notable de  $53^\circ \Rightarrow OH = 3$  y  $HC = 4 \Rightarrow HD = 8$

- Como  $\overline{OM} \perp \overline{BC} \Rightarrow BC = 8$

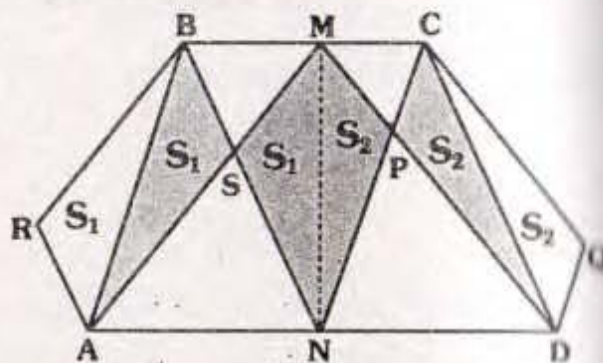
- $\triangle ADM$ : notable de  $\frac{53^\circ}{2} \Rightarrow AD = 20$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABCD} = \left( \frac{20+8}{2} \right) \cdot 8$$

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = 112$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 36**



Piden  $S_{\triangle ARBS} + S_{\triangle PCQD}$



Dato:  $\frac{S_{(\triangle MPN)}}{S_1 + S_2} = 6$

Como  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow S_{(\triangle ABS)} = S_1$  y

$$S_{(\triangle CDP)} = S_2$$

Por propiedad del paralelogramo:

$$S_{(\square ARBS)} = 2S_1$$

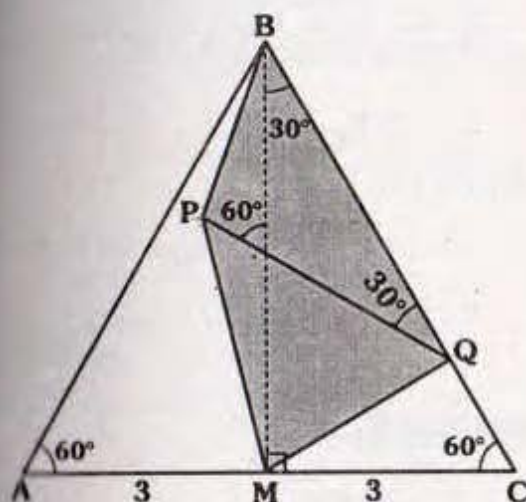
$$S_{(\square PCQD)} = 2S_2$$

$$\Rightarrow S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 2(S_1 + S_2)$$

$$\Rightarrow S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 12$$

Clave **C**

### RESOLUCIÓN N° 37



Nos piden  $S_{\triangle BPMQ}$

Como el  $\triangle ABC$  es equilátero, entonces

$$\overline{BM} \perp \overline{AC}, m\angle CBM = 30^\circ \text{ y } BM = 3\sqrt{3}$$

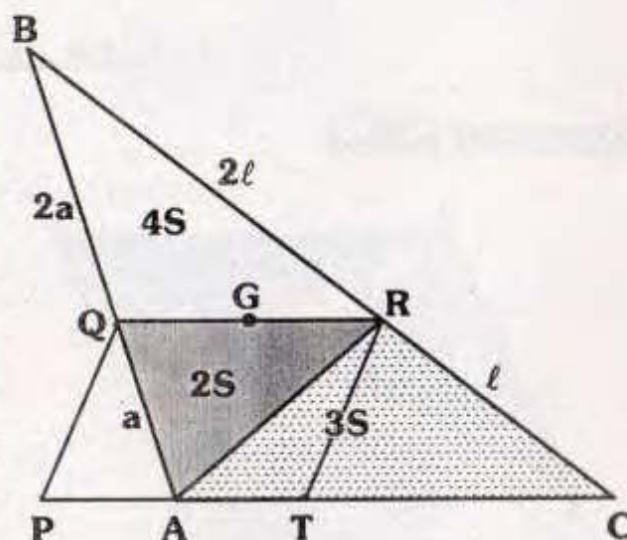
Por fórmula general:

$$S_{\triangle BPMQ} = \frac{(4)(3\sqrt{3})}{2} \sin 60^\circ$$

$$\therefore S_{\triangle BPMQ} = 9$$

Clave **B**

### RESOLUCIÓN N° 38



Piden  $S_{\square PQRT}$

Datos:  $AB=7$ ,  $BC=9$  y  $AC=4$

Como  $PQRT$  es paralelogramo:

$$\Rightarrow S_{\square PQRT} = 2(S_{\triangle AQR})$$

Al ser G baricentro  $\Rightarrow$

$$BQ=2(QA) \text{ y } BR=2(RC)$$

Sea  $S_{\triangle AQR} = 2S \Rightarrow S_{\triangle QRB} = 4S$  y

$$S_{\triangle ARC} = 3S \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 9S$$

Por teorema de Herón:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{10(10-9)(10-7)(10-4)}$$

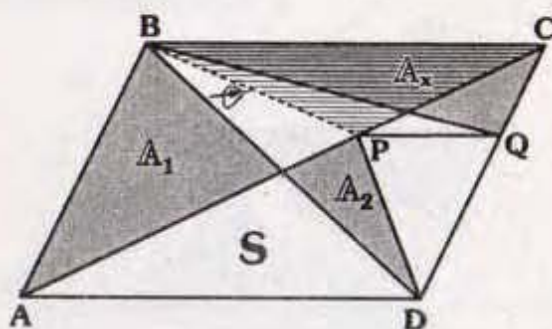
$$9S = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3}\sqrt{5} \Rightarrow S_{\triangle AQR} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$\therefore S_{\square PQRT} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$$

**Clave E**

### RESOLUCIÓN N° 39



Nos piden  $A_x$  en función de  $A_1$  y  $A_2$

• Por propiedad:  $A_1 + S = \frac{S_{\square ABCD}}{2} \dots (I)$

• Como  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \Rightarrow S_{\triangle PBC} = S_{\triangle BQC} = A_x$

• Al ser P un punto interior, entonces:

$$S_{\triangle APD} + S_{\triangle BPC} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\Rightarrow S + A_2 + A_x = \frac{S_{\square ABCD}}{2} \dots (II)$$

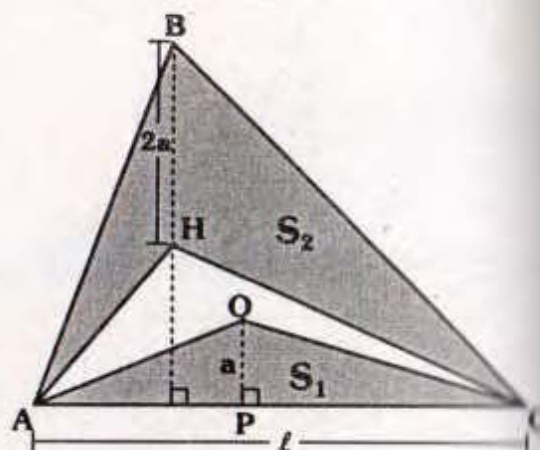
• De (I) y (II):

$$S + A_2 + A_x = A_1 + S$$

$$\therefore A_x = A_1 - A_2$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 40



Nos piden  $\frac{S_2}{S_1}$

• Por propiedad de puntos notables:

$$HB = 2(OP)$$

• Por fórmula general en  $\triangle ABCH$ :

$$S_2 = \frac{l \cdot 2a}{2} \dots (I)$$

• Por fórmula básica en  $\triangle AOC$ :

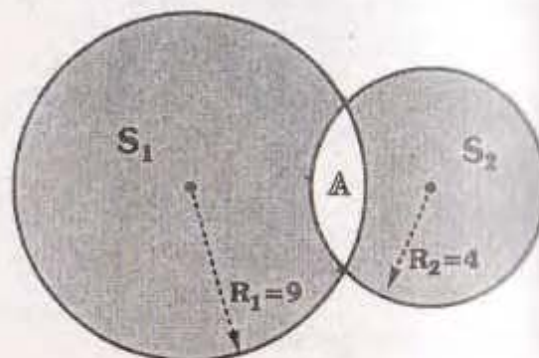
$$S_1 = \frac{al}{2} \dots (II)$$

• De (I) y (II):

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = 2$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 41





Sean  $S_1, S_2$

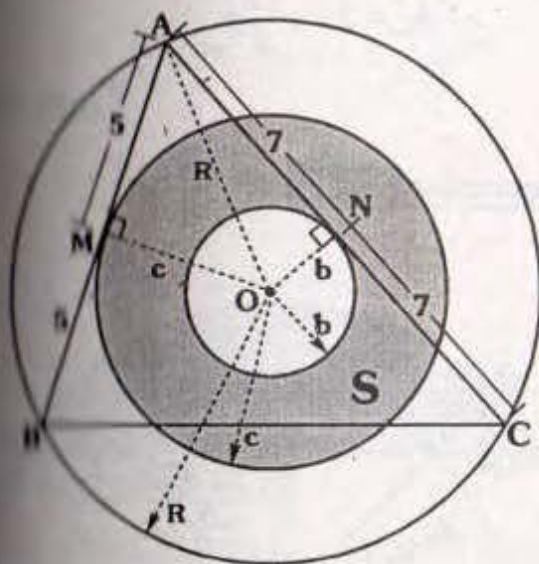
Entonces que  $S_1 + A = \pi R_1^2 = 81\pi$

$$S_2 + A = \pi R_2^2 = 16\pi$$

$$\therefore S_1 - S_2 = 65\pi$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 42**



Sea  $S$  el área de la corona circular.

$$\Rightarrow S = \pi(c^2 - b^2)$$

En  $\triangle OMA$  y  $\triangle ONA$ :

$$c^2 + 5^2 = R^2$$

$$b^2 + 7^2 = R^2$$

$$\Rightarrow c^2 + 5^2 = b^2 + 7^2$$

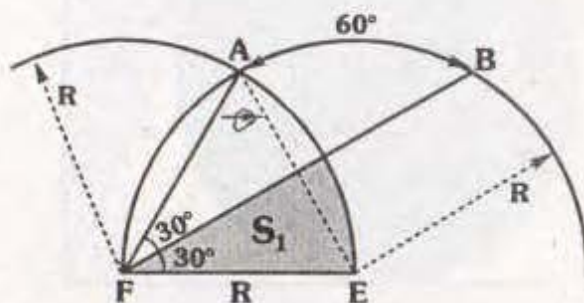
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = 24$$

$$\therefore S = 24\pi$$

**Clave A**

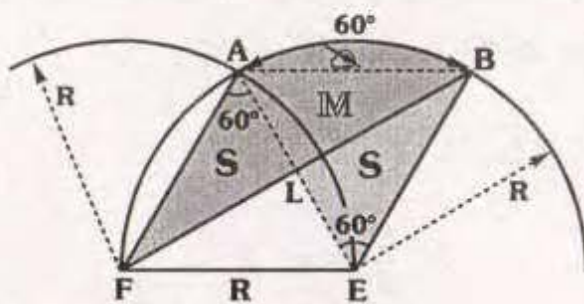
**RESOLUCIÓN N° 43**

Nos piden la razón de áreas de las regiones sombreadas (analicemos por separado)



$\triangle AFE$ : Equilátero

$$\Rightarrow S_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{12} \pi R^2 \quad \dots (\alpha)$$



Sea  $S_2 = S + M$

• Como FAFE es rombo

$$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = S_{\triangle AEB} = S$$

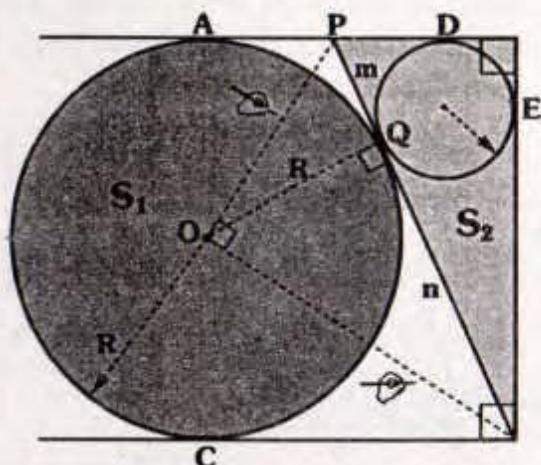
$$\Rightarrow S_2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi R^2 \quad \dots (\beta)$$

• De  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :

$$\frac{S_2}{S_1} = 2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 44**



Nos piden  $\frac{S_1}{S_2}$

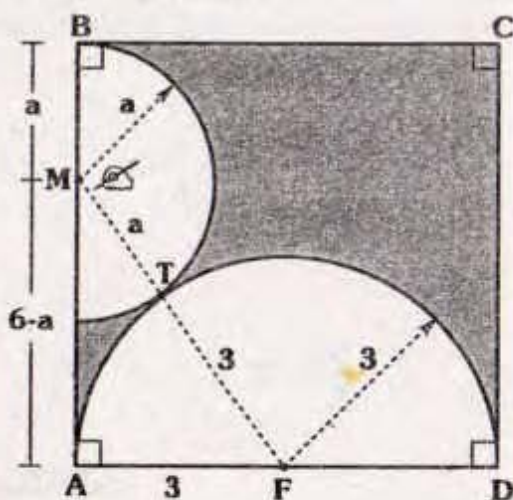
- $S_1 = \pi R^2$
- Sea  $QB = n$  y  $QP = m$ , entonces:  $S_2 = mn$
- En  $\triangle POQ$ :  $mn = R^2$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{mn}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 45**



- Piden el área de la región sombreada
- Es fácil darnos cuenta, que el Área pedida, es una diferencia de áreas de la región cuadrada y los dos semicírculos, para ello; hallemos "a"

• En  $\triangle MAF$ :

$$(a+3)^2 = a^2 + (6-a)^2 \Rightarrow a=2$$

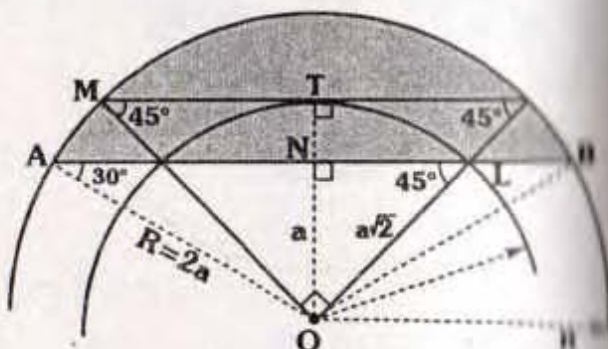
• Sea  $A_x$  el área pedida:

$$\Rightarrow A_x = 6^2 - \frac{\pi 3^2}{2} - \frac{\pi 2^2}{2}$$

$$\therefore A_x = 36 - \frac{13}{2}\pi$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 46**



Sea S el área de la región sombreada (corresponde a un segmento circular)

- $\triangle LNO$ :  $ON = a$  y  $OL = a\sqrt{2}$
- $\triangle MTO$ :  $OT = a\sqrt{2}$  y  $OM = 2a$
- $\triangle ONA$ : notable de  $30^\circ \Rightarrow OA = 2(ON)$
- $S = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOB}$

$$\Rightarrow S = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{Como } R = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore S = \frac{2}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 47**

Nos piden  $S_1 + S_2$

Notemos que las regiones sombreadas son sectores circulares.

$$\Rightarrow S_1 = \frac{72^\circ}{360^\circ}\pi a^2 \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{72^\circ}{360^\circ}\pi b^2$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{5}\pi(a^2 + b^2)$$

En  $\triangle AHB$ :  $a^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2$

$$\therefore S_1 + S_2 = \pi$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 48**

Nos piden la suma de áreas de los sectores circulares, sea  $S$  dicha suma:

$$S = \frac{\alpha_1}{360^\circ}\pi 2^2 + \frac{\alpha_2}{360^\circ}\pi 2^2 + \alpha_3\pi 2^2 + \dots + \frac{\alpha_n}{360^\circ}\pi 2^2$$

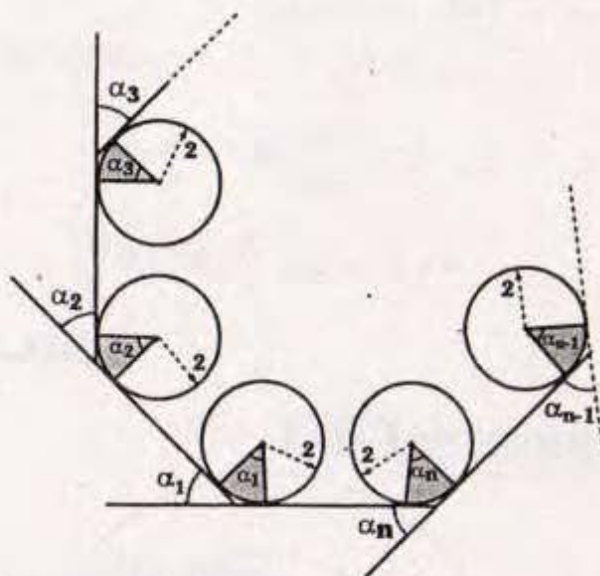
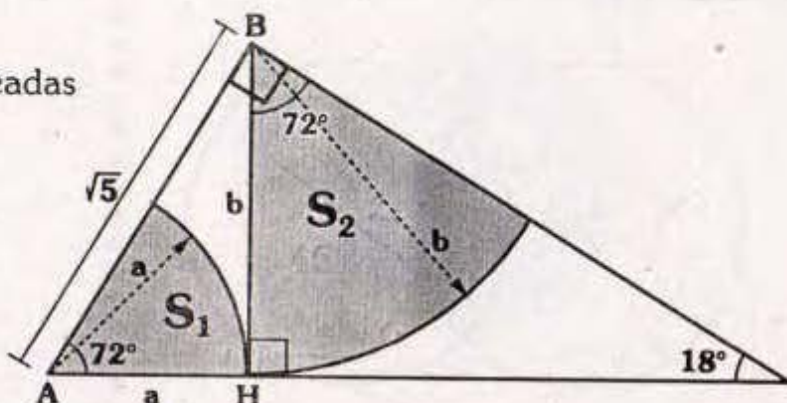
$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{90^\circ}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)$$

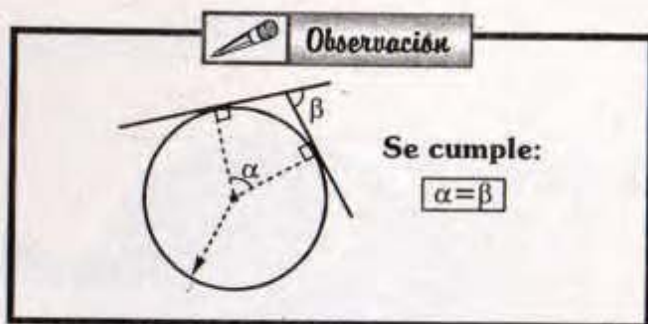
Usando la observación (siguiente página) y que en todo polígono convexo se cumple:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$$

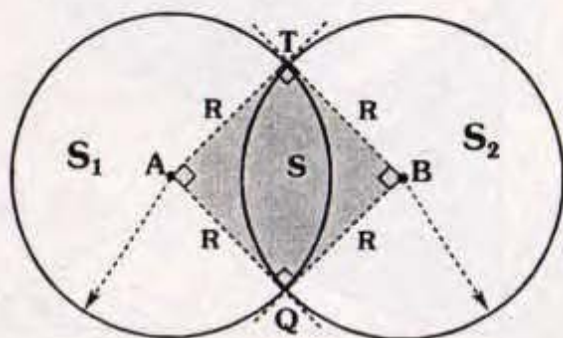
$$\therefore S = 4\pi$$

Clave **C**





**RESOLUCIÓN N° 49**



Nos piden:  $S + S_1 + S_2$

• Como son ortogonales:

$$m\angle ATB = m\angle AQB = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  ATBQ: cuadrado

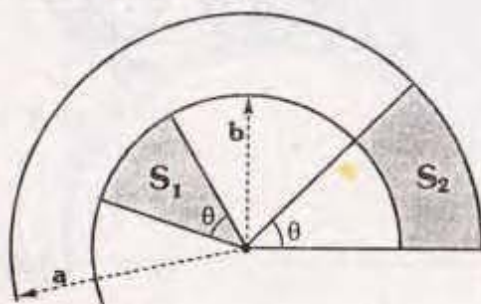
•  $S = R^2$

•  $S_1 = S_2 = \frac{270^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{3}{4} \pi R^2$

$$\therefore S + S_1 + S_2 = \frac{3}{2} \pi R^2 + R^2$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 50**



• Nos piden  $a/b$

• Dato:  $S_1 = S_2$

• Como  $S_1$  es el área del sector circular, entonces:

$$S_1 = \frac{\theta}{360^\circ} \pi b^2$$

•  $S_2$  es el área de un trapecio circular

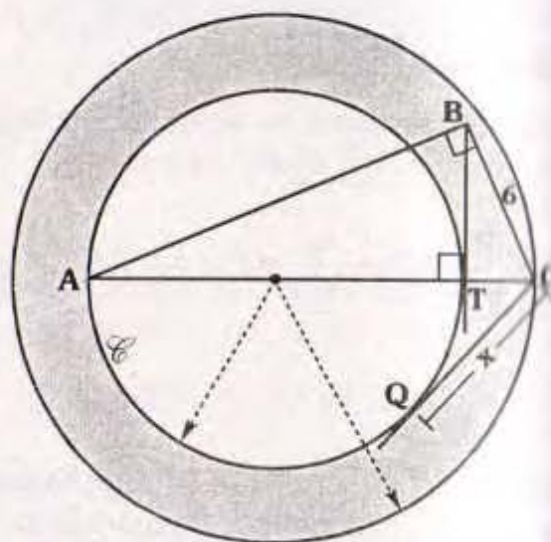
$$S_2 = \frac{\theta}{360^\circ} \pi (a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{360^\circ} \pi b^2 = \frac{\theta}{360^\circ} \pi (a^2 - b^2)$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 51**



• Sea  $A_{cc}$  el área de la corona circular

• Se traza el segmento tangente  $\overline{CQ}$

• Se sabe  $A_{cc} = \pi x^2$



En  $\triangle$ , por teorema de la tangente

$$x^2 = (CT)(CA) \quad \dots(I)$$

En  $\triangle ABC$ : por teorema de relaciones métricas:

$$6^2 = (CT)(CA) \quad \dots(II)$$

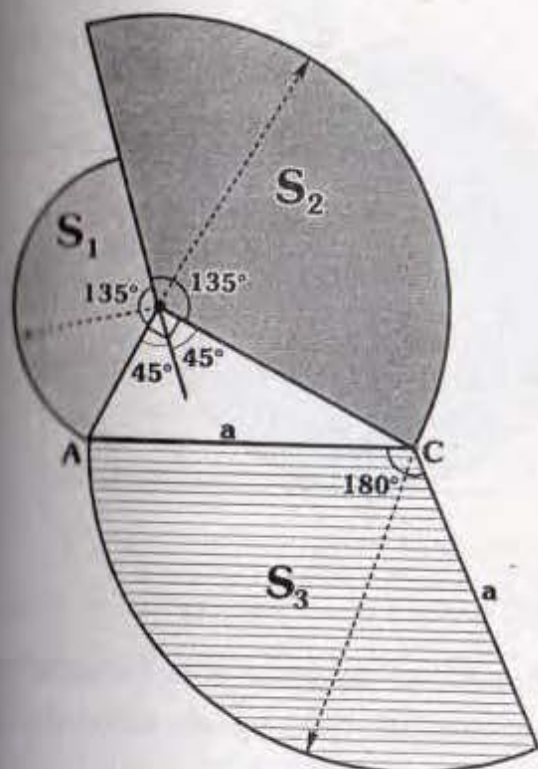
De (I) y (II):  $x=6$

$$\therefore A_{cc} = 36\pi u^2$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 52**

Nos piden  $S_1 + S_2$



Podríamos resolver mediante la suma por separado y el teorema de Pitágoras, pero optemos por el teorema sobre semejanza de áreas (página N°39)

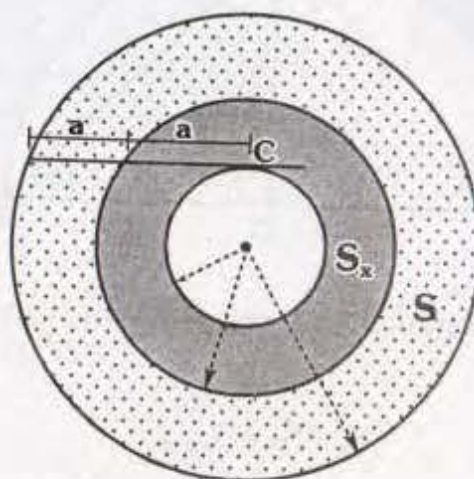
$$S_1 + S_2 = S_3$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi a^2$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{3}{8} \pi a^2$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 53**



Piden  $S_x$  en función de  $S$

• Notemos que  $S_x$  y  $S$  son las áreas de las coronas circulares.

• Por teorema:  $S_x = \pi a^2$

$$S_x + S = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2$$

$$\Rightarrow S_x + S = 4S_x$$

$$\therefore S_x = \frac{S}{3}$$

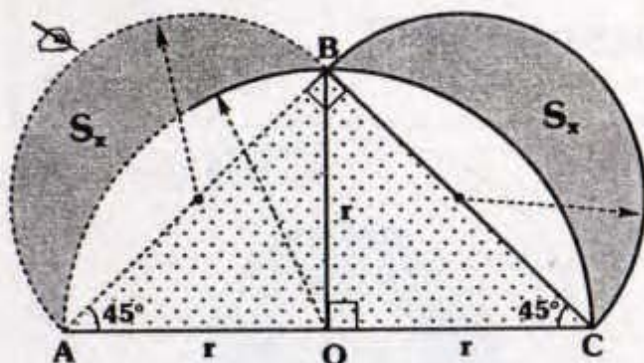
Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 54**

Piden  $S_x$  en función de  $r$ .

• Para su resolución se podría optar por

una diferencia, pero optemos por el teorema sobre las lúnulas de hipócrates, para ellos completemos.



- Las lúnulas son congruentes, entonces:

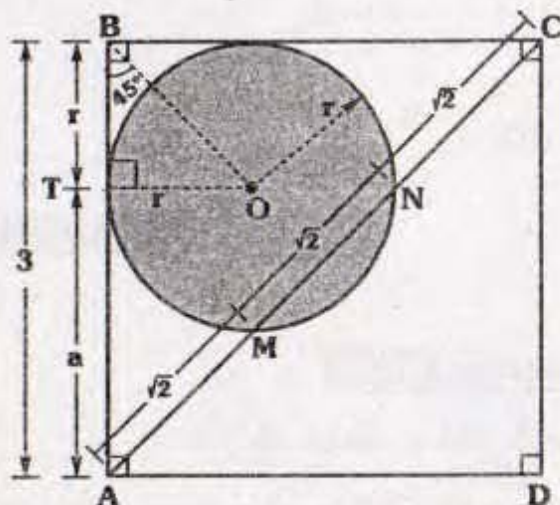
$$S_x + S_x = S_{\triangle AOB}$$

$$2S_x = \frac{(2r)r}{2}$$

$$\therefore S_x = \frac{r^2}{2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 55**



Nos piden  $S_x$ .

- Como  $AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3$

- Sea  $AT = a$ , por teorema de la tangente.

$$a^2 = \sqrt{2}(2\sqrt{2}) \Rightarrow a = 2$$

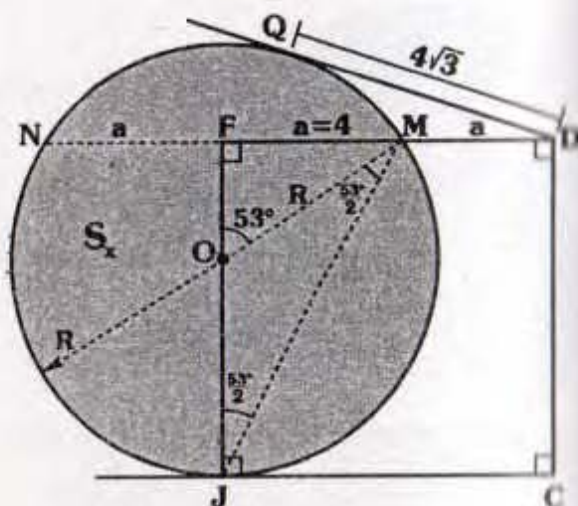
- Como  $a + r = 3 \Rightarrow r = 1$

$$\Rightarrow S_x = \pi R^2$$

$$\therefore S_x = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 56**



Piden  $S_x$ .

- Como  $\overline{JC}$  es tangente a la circunferencia y  $m\angle FJC = 90^\circ \Rightarrow$  el centro  $O$  pertenece a  $\overline{JF} \Rightarrow FM = FN$

- Por teorema de la tangente.

$$(4\sqrt{3})^2 = a(3a) \Rightarrow a = 4$$

- Como  $m\angle MJF = \frac{53^\circ}{2} \Rightarrow m\angle FOM = 53^\circ$

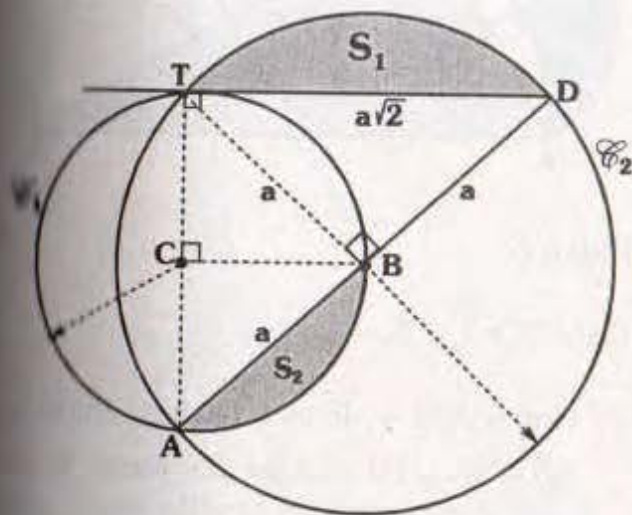


En  $\triangle FOM$ :  $R=5 \Rightarrow S_x = \pi 5^2$

$$\therefore S_x = 25\pi$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 57**



Piden:  $\frac{S_1}{S_2}$

En  $C_2$ , como  $\overline{AD}$  es diámetro  
 $\Rightarrow m\angle ATD = 90^\circ$

En  $C_1$ , como T es punto de tangencia y  $m\angle ATD = 90^\circ \Rightarrow$  el centro de  $C_1$  está en  $\overline{AT}$

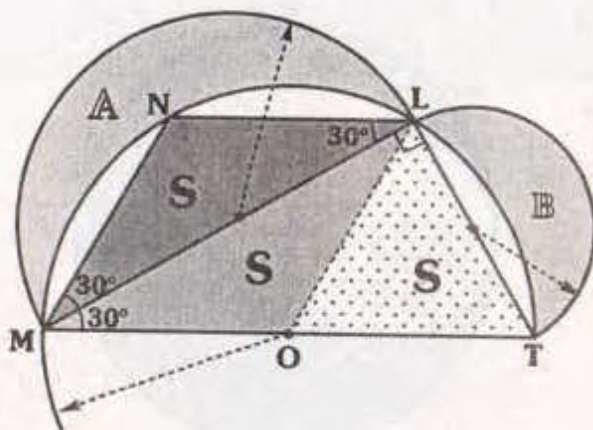
Luego las regiones sombreadas son semejantes; entonces.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{a\sqrt{2}}{a} \right)^2$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 2$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 58**



Sea  $S_{\triangle MNL} = C$

Nos piden:  $\frac{A+B}{S_{(MNL)}}$

• Por teorema de las lúnulas de Hipócrates:

$$A+B = S_{\triangle MNL}$$

• Sea  $S_{\triangle MNL} = S$

$$\Rightarrow S_{\triangle MOL} = S_{\triangle LOT} = S$$

$$\Rightarrow A+B = 2S \text{ y } S_{(MNL)} = 3S$$

$$\therefore \frac{A+B}{S_{(MNL)}} = \frac{2}{3}$$

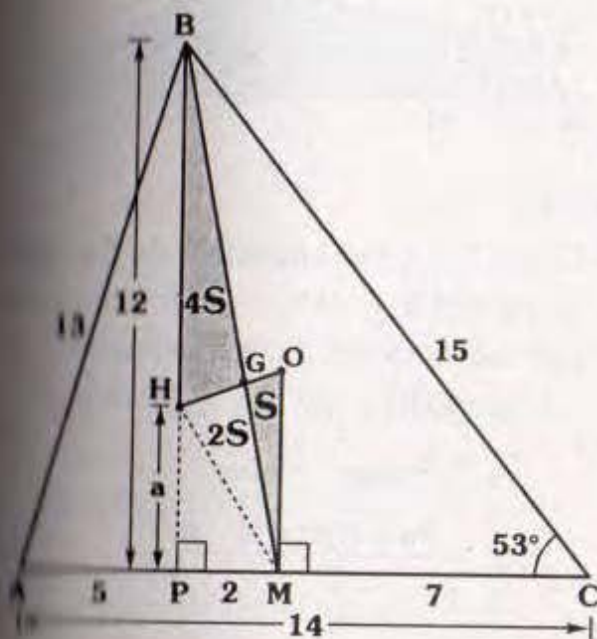
Clave **D**





# Problemas Resueltos

Ciclo **Cepre-Uni**



Buscamos  $S_{\triangle OGM} + S_{\triangle HBG}$

Como  $HG = 2(GO)$  y

$$BG = 2(GM)$$

Sea  $S_{\triangle OGM} = S$  y

$$\Rightarrow S_{\triangle HGM} = 2S$$

$$S_{\triangle HBG} = 4S$$

Por teorema de relaciones métricas:

$$BP = 12$$

Por teorema de semejanza:

$$(PB)(PM) = (AP)(PC)$$

$$\Rightarrow 12a = (5)(9) \Rightarrow a = \frac{15}{4}$$

$$\bullet \text{ Luego: } BH = \frac{33}{4}$$

$$\bullet S_{\triangle HBG} = \frac{(BH)(PM)}{2}$$

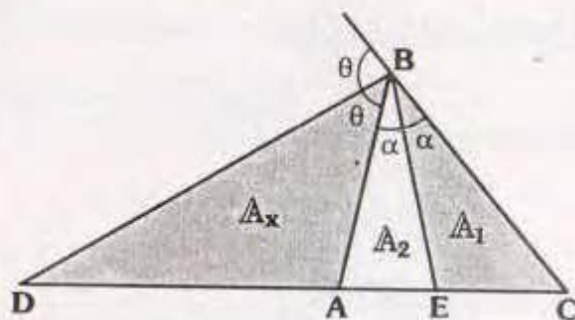
$$6S = \frac{33}{4} \Rightarrow S = \frac{11}{8}$$

Finalmente:

$$S_{\triangle OGM} + S_{\triangle HBG} = 5S = \frac{55}{8}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 62



Piden demostrar:

$$A_x = A_2 \left( \frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} \right)$$

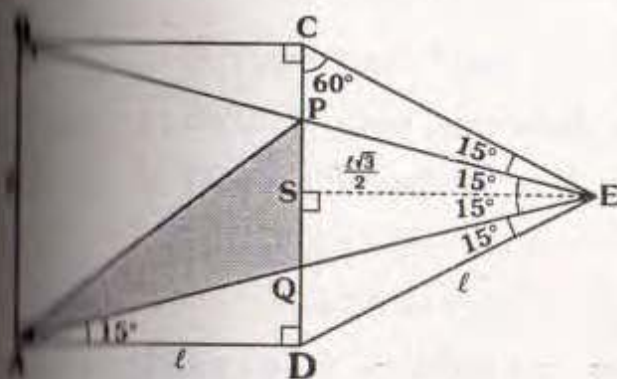
Sabemos que D, A, E y C forman una

cuaterna:

$$\frac{DA}{AE} = \frac{DC}{EC}$$



**RESOLUCIÓN N° 66**



Piden  $S_{\Delta APQ}$

• Notemos que  $AD = DE = CE = l \Rightarrow$  los  $\Delta$ s BCE y ADE son isósceles

• En  $\Delta ESQ$ :  $SE = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

• En  $\Delta SQE$ : de la observación

$$SQ = \frac{l\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow PQ = l\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

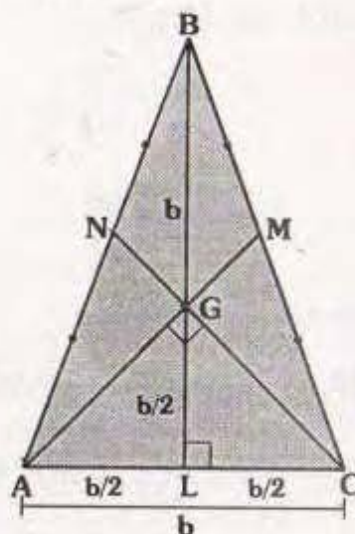
$$S_{\Delta APQ} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$$

$$S_{\Delta APQ} = \frac{l^2}{2}(2\sqrt{3} - 3)$$

**Clave B**



**RESOLUCIÓN N° 67**



Piden  $S_{\Delta ABC}$

• Como G es baricentro, entonces  $\overline{BL}$  es mediana y altura por ser  $AB = BC$

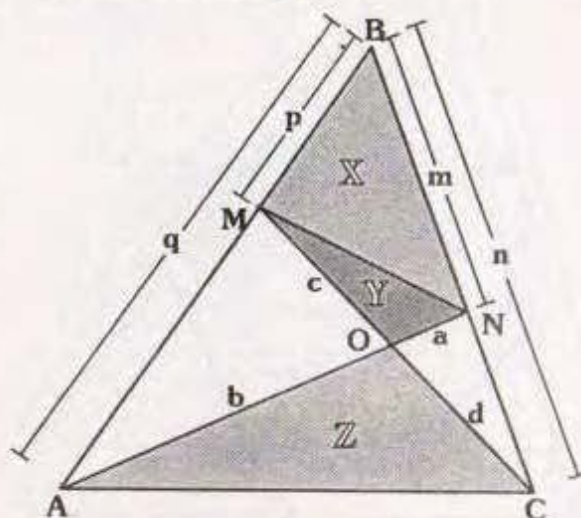
• En  $\Delta AGC$ :  $AL = LC = GL = \frac{b}{2} \Rightarrow BG = b$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}b \left( \frac{3b}{2} \right)$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}b^2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 68**



Sea  $S$  el área de la región triangular  $ABC$

• Por relación de áreas:

$$\frac{S}{X} = \frac{mp}{nq} \quad \dots(I)$$

$$\frac{Z}{Y} = \frac{bd}{ac} \quad \dots(II)$$

• Por teorema de Menelao

- En  $\triangle ANB$ :  $bp(NC) = a(AM)n$

- En  $\triangle MBC$ :  $cq(NC) = d(AM)m$

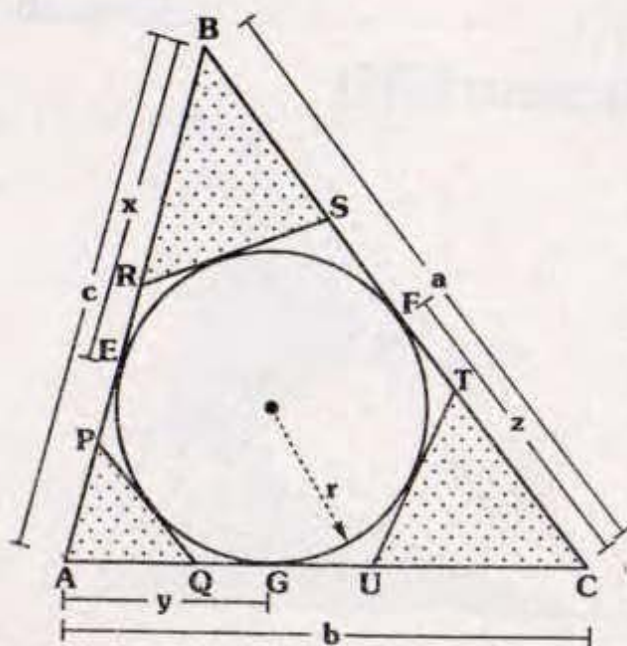
$$\Rightarrow \frac{bp}{cq} = \frac{an}{dm} \Rightarrow \frac{mp}{nq} = \frac{bd}{ac} \quad \dots(III)$$

• De (I), (II) y (III):  $\frac{S}{X} = \frac{Z}{Y}$

$$\therefore S = \frac{XZ}{Y}$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 69**



**178**

Piden  $r$

Dato:  $(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU}) = 336$

$$p_{APQ} + p_{RBS} + p_{TCU} = 21$$

• Sabemos, para el  $\triangle RBS$ :  $x = p_{RBS}$

• Para los  $\triangle$ s  $APQ$  y  $TCU$ :

$$y = p_{APQ}$$

$$z = p_{TCU}$$

$$\Rightarrow xyz = 336 \wedge x + y + z = 21$$

• Para el  $\triangle ABC$ :  $p = x + y + z$

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow pr^2 = \underbrace{(p-a)}_y \underbrace{(p-b)}_x \underbrace{(p-c)}_z$$

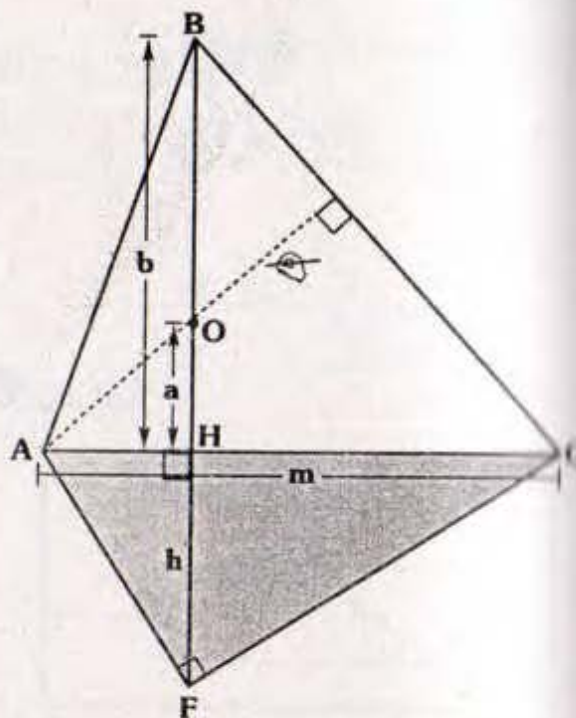
$p$  es el semiperímetro de  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow 21r^2 = 336$$

$$\therefore r = 4$$

**Clave** **A**

**RESOLUCIÓN N° 70**





Nos piden  $S_{\triangle AFC}$

Datos:  $mb=32$  y  $ma=8$

$$S_{\triangle AFC} = \frac{mh}{2}$$

Como O es ortocentro, entonces:

$$(AH)(HC) = ab \quad \dots (I)$$

En el  $\triangle AFC$ :  $h^2 = (AH)(HC) \dots (II)$

De (I) y (II):  $h^2 = ab$

De los datos:  $m^2 \frac{ab}{h^2} = 32 \times 8$

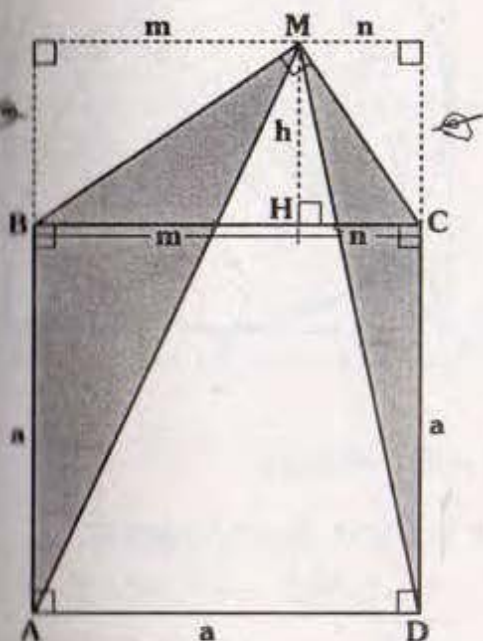
$$\Rightarrow mh = 16$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AFC} = \frac{mh}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle AFC} = 8$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 71**



Piden  $S_{\triangle BMC}$

Datos:  $(S_{\triangle ABM})(S_{\triangle MCD}) = 36$

$$S_{\triangle BMC} = \frac{ah}{2}$$

En el  $\triangle BMC$ :  $h^2 = mn$

Por fórmula básica:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABM} &= \frac{am}{2} \\ S_{\triangle MCD} &= \frac{an}{2} \end{aligned} \right\} (S_{\triangle ABM})(S_{\triangle MCD}) = \frac{a^2 mn}{4} = \frac{a^2 h^2}{4}$$

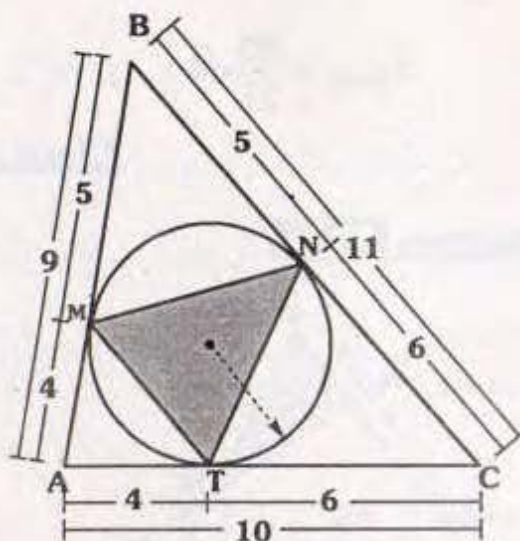
Finalmente:

$$\frac{(S_{\triangle ABM})(S_{\triangle MCD})}{36} = \left( \frac{ah}{2} \right)^2 = (S_{\triangle BMC})^2$$

$$\therefore S_{\triangle BMC} = 6$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 72**



Nos piden  $S_{\triangle MNT}$





En  $\triangle ONM$ :

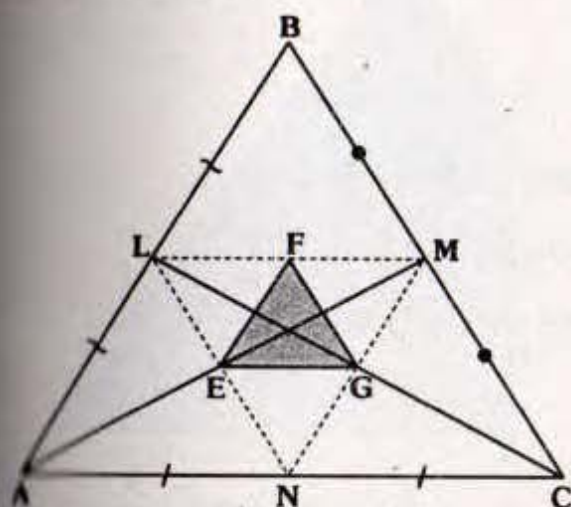
$$h^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{7}$$

$$S_{\triangle AOM} = \frac{(2)(\sqrt{7})}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle AOM} = \sqrt{7}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 75**



Nos piden  $S_{\triangle EFG}$

Dato:  $S_{\triangle ABC} = A$

Como M, L y N son puntos medios, entonces:

$$S_{\triangle MNL} = \frac{A}{4}$$

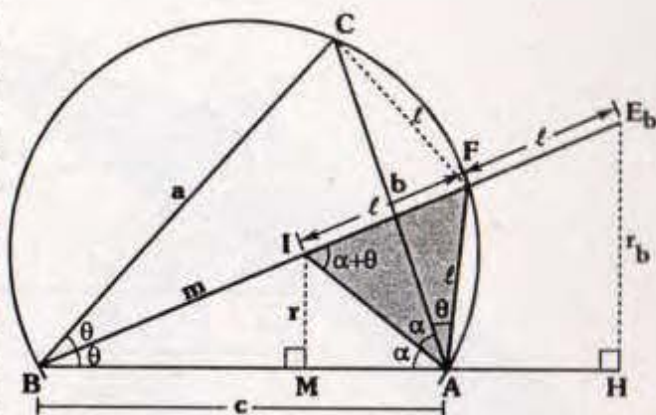
Para el  $\triangle MNL$ , E, F y G son puntos medios entonces:

$$S_{\triangle EFG} = \frac{1}{4} S_{\triangle MNL}$$

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{A}{16}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 76**



Nos piden probar:  $S_{\triangle AIF} = \frac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

• Por relación de áreas:

$$\frac{S_{\triangle AIF}}{S_{\triangle BIA}} = \frac{l}{m} \Rightarrow S_{\triangle AIF} = \frac{l}{m} \cdot \left( \frac{cr}{2} \right) \quad \dots(I)$$

• Por teorema de Ptolomeo:

$$b(\ell + m) = a\ell + c\ell \Rightarrow \frac{\ell + m}{\ell} = \frac{a+c}{b} \quad \dots(II)$$

•  $\triangle BMI \sim \triangle BHE_b$ :

$$\frac{r_b}{r} = \frac{m+2\ell}{m} \Rightarrow \frac{r+r_b}{r} = \frac{2(m+\ell)}{m} \quad \dots(III)$$

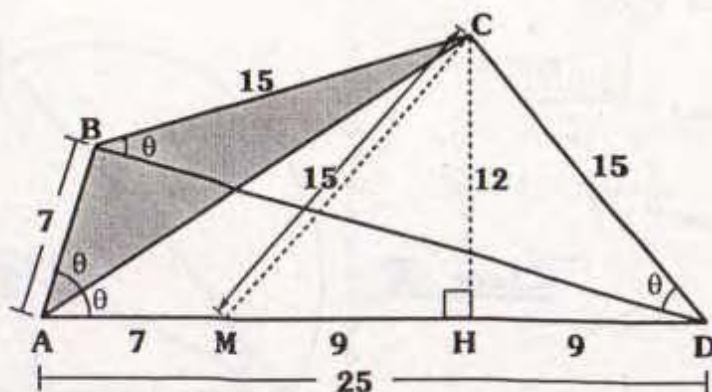
• De (II) y (III):

$$\frac{r+r_b}{r} = \frac{2(a+c)}{b} \cdot \frac{\ell}{m} \Rightarrow \frac{\ell}{m} = \frac{b(r+r_b)}{2r(a+c)} \quad \dots(IV)$$

• De (IV) y (I):

$$S_{\triangle AIF} = \frac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$$

**RESOLUCIÓN N° 77**



Nos piden  $S_{\Delta ABC}$

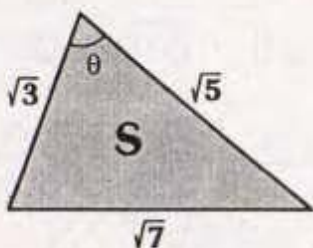
- Se traza  $\overline{CM}$  tal que  $AM=AB=7 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow MC=15$
- $\Delta MCD$ : isósceles, con  $MC=CD=15$  y  $MD=18$
- En  $\Delta MCD$ , se traza la altura  $CH \Rightarrow MH=HD=9 \Rightarrow CH=12$
- Como  $\Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(7)(12)}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 42 \text{ cm}^2$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 78**



Nos piden  $S$

$$\bullet \text{ Usemos: } S = \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{5})}{2} \sin \theta \quad \dots (I)$$

• Por teorema de cosenos:

$$\sqrt{7}^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{5})\cos \theta$$

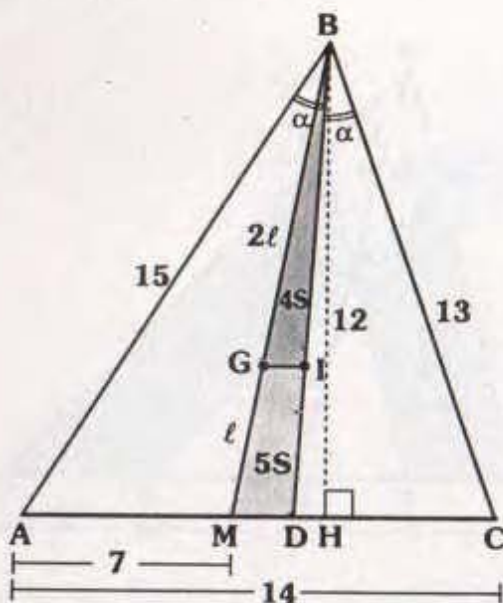
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{15}}$$

$$\bullet \text{ Como } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$$





**RESOLUCIÓN N° 81**



Piden  $S_{\Delta GBI}$

- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{15+13}{14} = 2$$

- Como G es baricentro  $\Rightarrow BG = 2(GM)$

$$\Rightarrow \overline{GI} \parallel \overline{MD} \Rightarrow \Delta GBI \sim \Delta MBD$$

- Por teorema:

$$\frac{S_{\Delta GBI}}{S_{\Delta MBD}} = \left(\frac{2l}{3l}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GBI} = 4S \text{ y } S_{\Delta MBD} = 9S$$

- Por teorema de la bisectriz.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{15}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\underbrace{AD+DC}_{14}} = \frac{15}{15+13}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{2} \Rightarrow MD = \frac{1}{2}$$

$$\bullet S_{\Delta MBD} = 9S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)(12) \Rightarrow S = \frac{1}{3}$$

$$\therefore S_{\Delta GBI} = \frac{4}{3}$$

**Clave** C

**RESOLUCIÓN N° 82**

Sea p el semiperímetro de ABC

Nos piden  $S_{\Delta ABC}$

Datos: inradio : 2;  $AB+BC=18$  y  $AC=6$

$$\bullet p = \frac{AB+BC+AC}{2} = 12$$

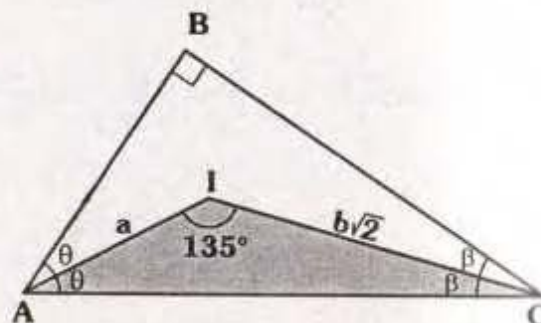
$$\bullet S_{\Delta ABC} = pr$$

↓  
inradio

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 24$$

**Clave** D

**RESOLUCIÓN N° 83**



Piden  $S_{\Delta AIC}$



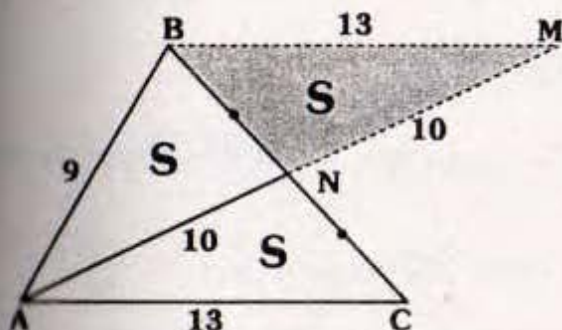
Como I es incentro  $\Rightarrow m\angle AIC = 135^\circ$

$$S_{\Delta AIC} = \frac{ab\sqrt{2}}{2} \sin 135^\circ$$

$$\therefore S_{\Delta AIC} = \frac{ab}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 84**



Nos piden  $S_{\Delta ABC}$

Se prolonga  $\overline{AN}$  hasta M tal que  $NM = 10$

$$\Rightarrow \Delta ANC \cong \Delta MNB \Rightarrow BM = 13$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM}$$

Por teorema de Herón:

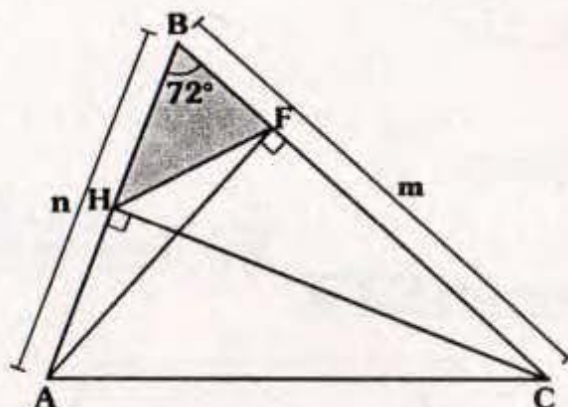
Semiperímetro del  $\Delta ABM$ : 21

$$\Rightarrow S_{\Delta ABM} = \sqrt{21(1)(12)(8)}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 12\sqrt{14}$$

**Clave C**

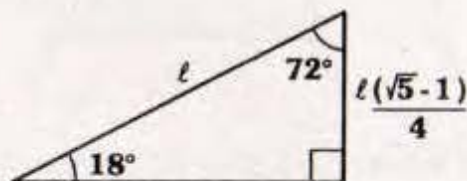
**RESOLUCIÓN N° 85**



$$\text{Dato: } S_{\Delta HBF} = (a - b\sqrt{5})S_{\Delta ABC}$$

Nos piden:  $\frac{a}{b}$

Usemos:



En  $\angle AFB$  y  $\angle CHB$ :

$$BF = \frac{n(\sqrt{5}-1)}{4} \text{ y } BH = \frac{m(\sqrt{5}-1)}{4}$$

Por razón de áreas:

$$\frac{S_{\Delta HBF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(BF)(BH)}{mn} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}$$

Del dato:  $a = \frac{3}{8}$  y  $b = \frac{1}{8}$

$$\therefore \frac{a}{b} = 3$$

**Clave B**

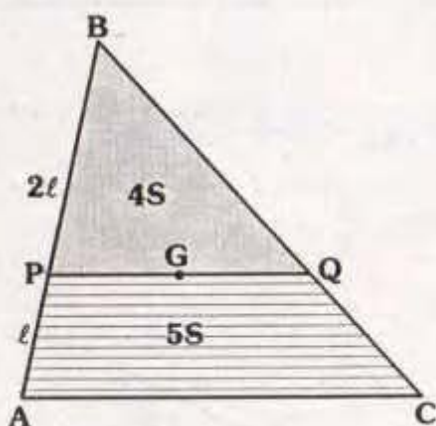
**RESOLUCIÓN N° 86**

Como el inradio es 1, entonces su lado mide  $2\sqrt{3}$ .

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = (2\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 87**



Piden  $S_{\Delta APQC}$

Datos:  $S_{\Delta ABC} = ku^2$

• Como G es baricentro y  $\overline{AC} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow BP = 2(AP)$

•  $\Delta PBQ \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{2l}{3l}\right)^2 = \frac{4}{9}$

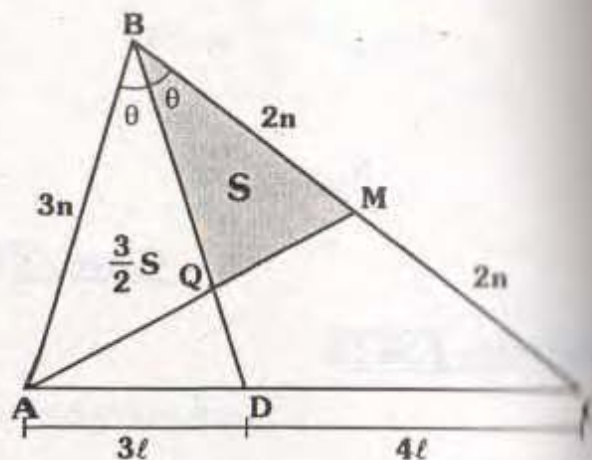
$$\Rightarrow S_{\Delta PBQ} = 4S \text{ y } S_{\Delta APQC} = 5S$$

• Como  $\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{9S} = k \Rightarrow S = \frac{1}{9}k$

$$\therefore S_{\Delta APQC} = \frac{5}{9}k$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 88**



Nos piden  $S_{\Delta ABC}$

Dato:  $S_{\Delta BQM} = S$

• Como  $\overline{BD}$  es bisectriz  $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

• Sea  $BM = MC = 2n \Rightarrow AB = 3n$

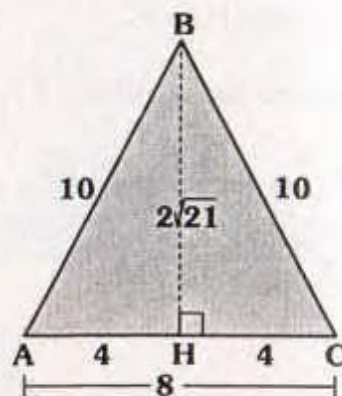
• Por relación de áreas en  $\Delta ABM$ :

$$S_{\Delta ABQ} = \frac{3}{2}S \Rightarrow S_{\Delta ABM} = \frac{5}{2}S$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 5S$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 89**





Nos piden  $S_{\triangle ABC}$

Se podría optar por el teorema de Herón, pero como el  $\triangle ABC$  es isósceles, optemos por la altura  $BH \Rightarrow AH=HC=4$ .

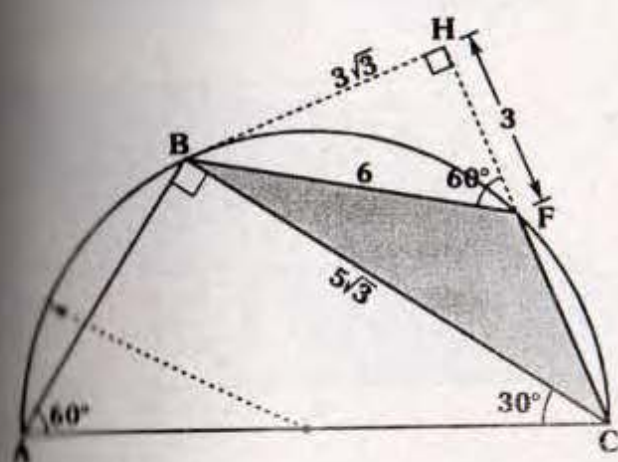
En  $\triangle CHB$ :  $BH=2\sqrt{21}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{(8)2\sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{21}$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 90



Nos piden  $S_{\triangle BFC}$

Se prolonga  $\overline{CF}$  y se traza  $\overline{BH} \perp \overline{CF}$  (H en  $\overline{FC}$ )

$\triangle BHF$ : notable de  $30^\circ$  y  $60^\circ$

$$\Rightarrow BH = 3\sqrt{3} \text{ y } HF = 3$$

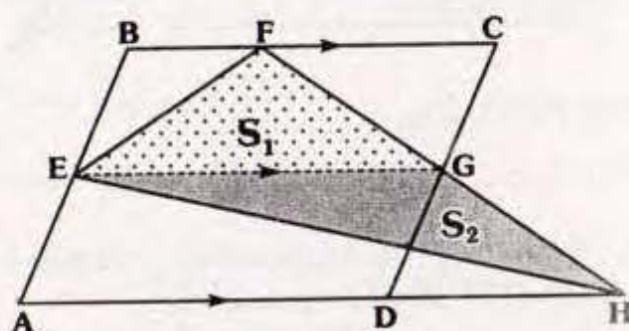
$\triangle BHC$ :  $HC = 4\sqrt{3} \Rightarrow FC = 4\sqrt{3} - 3$

$$S_{\triangle BFC} = \frac{(4\sqrt{3} - 3)3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle BFC} = \frac{9}{2}(4 - \sqrt{3})$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 91



Nos piden  $S_{\triangle EFG}$

Dato:  $S_{\square ABCD} = S$

• Como  $AE=DG \Rightarrow AEGD$  y  $EBCG$  son paralelogramos.

• Sea  $S_1 = S_{\triangle EFG}$  y  $S_2 = S_{\triangle EGH}$

• Por teorema:

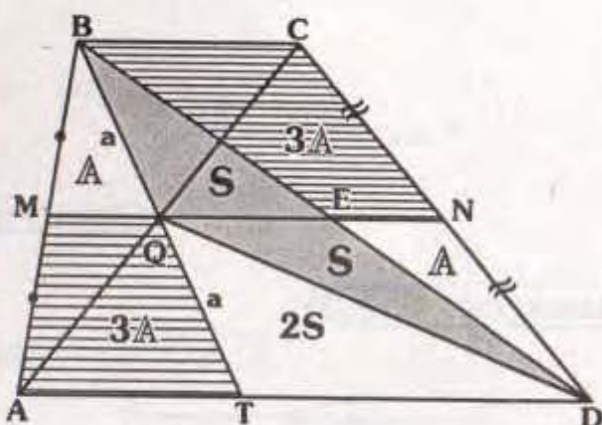
$$S_1 = \frac{S_{\square EBCG}}{2} \text{ y } S_2 = \frac{S_{\square AEGD}}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{S_{\square EBCG} + S_{\square AEGD}}{2} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 92**



Nos piden  $S_{\triangle BDQ}$

Datos:  $S_{\triangle MBQ} = S_2$  y  $S_{\triangle AMND} = S_1$

• Como  $\overline{MN}$  es base media, entonces  $BQ = QT$ ,  $BE = ED$  y  $MQ = EN$ .

• Como consecuencia de lo anterior:

$$S_{\triangle MBQ} = S_{\triangle ANE} = A$$

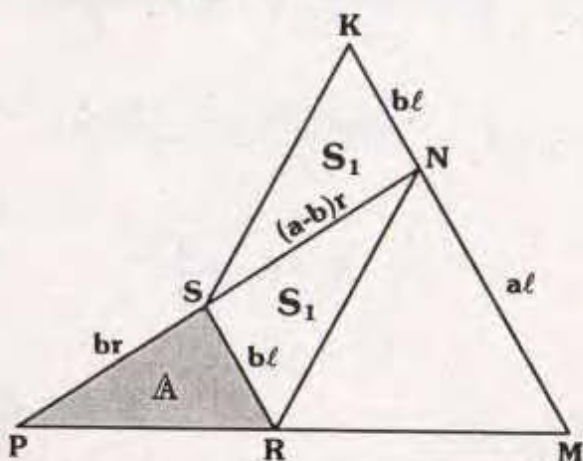
$$\Rightarrow S_{\triangle AMQT} = S_{\triangle BCNE} = 3A$$

$$\begin{cases} S_1 = 4A + 3S \\ S_2 = 4A + S \end{cases} \Rightarrow S_1 - S_2 = \underbrace{2S}_{S_{\triangle BQD}}$$

$$\therefore S_{\triangle BQD} = S_1 - S_2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 93**



Nos piden  $S_{\square RSKN}$

• En  $\square RSKN$ :  $S_{\square RSKN} = 2S_1$

• Como  $\overline{RS} \parallel \overline{MN} \Rightarrow \frac{PS}{PN} = \frac{b}{a}$   
 $\Rightarrow PS = br \wedge SN = (a - b)r$

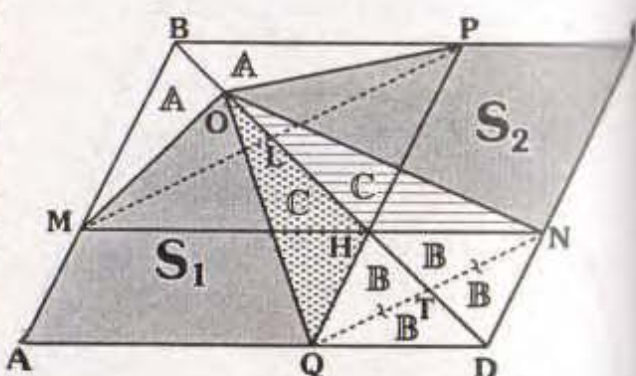
• Por razón de áreas:

$$\frac{S_1}{A} = \frac{a - b}{b} \Rightarrow S_1 = \left( \frac{a - b}{b} \right) A$$

$$\therefore S_{\square RSKN} = \frac{2(a - b)}{b} A$$

**Clave I**

**RESOLUCIÓN N° 94**



Nos piden  $S_2$

Dato:  $S_1 = 17u^2$

• Como BPH y QHND son paralelogramos, entonces:  $ML = LP$  y  $QT = TN$

• Luego:  $S_{\triangle OMB} = S_{\triangle OPB} = A$

$$S_{\triangle OQH} = S_{\triangle ONH} = C$$

• Finalmente:

$$S_1 + A + C + 2B = S_2 + A + C + 2B$$





Nos piden  $S_{\square AMCN}$

•  $S_{\square AMCN} = 20a$

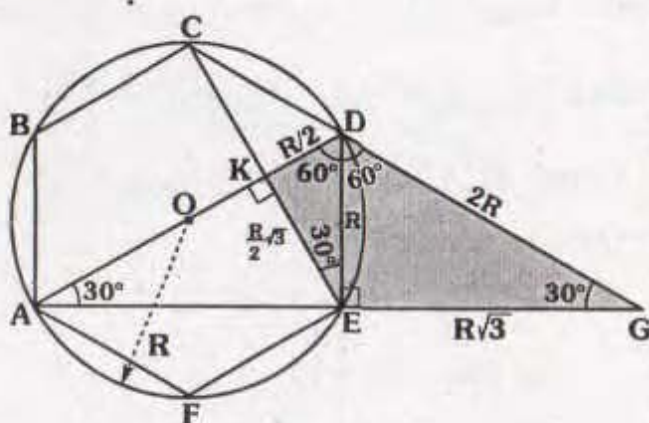
•  $\triangle AHN \sim \triangle ADM$

$$\Rightarrow \frac{20-a}{20} = \frac{\sqrt{a^2-16}}{4} \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore S_{\square AMCN} = 100$$

Clave **A**

### RESOLUCIÓN N° 98



Nos piden  $S_{(EKDG)}$

• Como ABCDEF es un hexágono regular, entonces  $AD = 2R$ ,  $DE = R$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{CE}$  y  $m\angle ADE = m\angle EDG = 60^\circ$

•  $\triangle ADG$ : isósceles

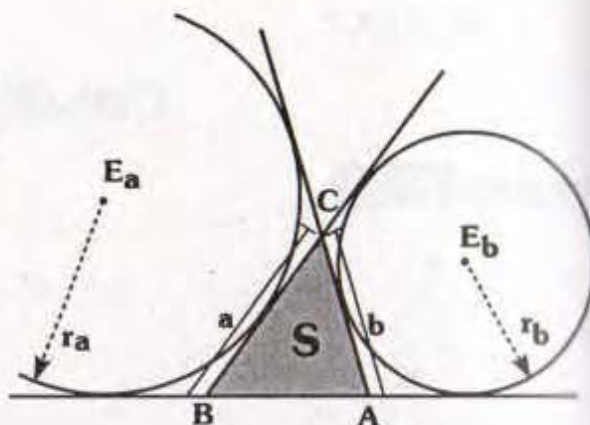
•  $S_{(EKDG)} = S_{\triangle EKD} + S_{\triangle DEG}$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{2} \right) \left( \frac{R}{2} \sqrt{3} \right) + \frac{1}{2} (R)(R\sqrt{3})$$

$$\therefore S_{(EKDG)} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{8}$$

Clave **C**

### RESOLUCIÓN N° 99



Nos piden S en función de a, b,  $r_a$  y  $r_b$

• Sea p el semiperímetro del  $\triangle ABC$

• Entonces:

$$S = r_b(p - b) \Rightarrow \frac{S}{r_b} = p - b \quad \dots(I)$$

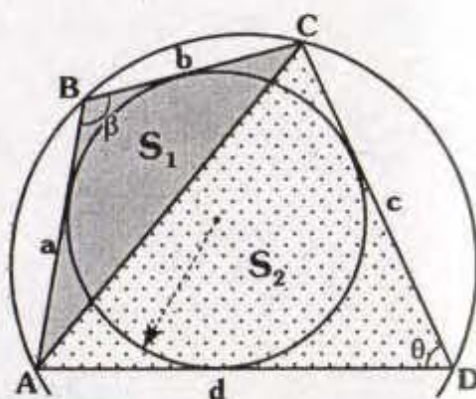
$$S = r_a(p - a) \Rightarrow \frac{S}{r_a} = p - a \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):  $\frac{S}{r_b} - \frac{S}{r_a} = a - b$

$$\therefore S = \frac{r_a r_b (a - b)}{r_a - r_b}$$

Clave **D**

### RESOLUCIÓN N° 100





Sea  $S_1$ : área de ABC

$S_2$ : área de ADC

Nos piden  $S_1$

Como  $\beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{ab}{cd}$

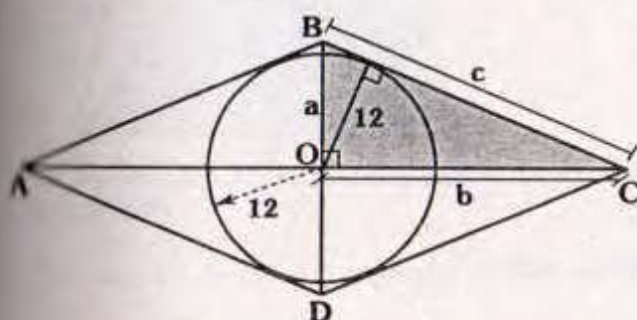
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{ab}{ab + cd}$$

Como  $S_1 + S_2 = \sqrt{abcd}$

$$\therefore S_1 = \frac{ab\sqrt{abcd}}{ab + cd}$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 101



Nos piden  $S_{(ABCD)}$

Dato  $AC + BD = 70$

Como "O" es centro, entonces:  $a + b = 35$

En  $\triangle BOC$ :  $ab = 12c$

También:  $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

$$35^2 = c^2 + 24c$$

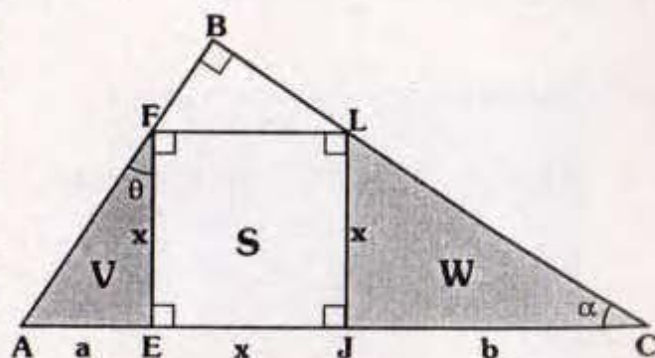
$$25(25 + 24) = c(c + 24) \Rightarrow c = 25$$

$$S_{(ABCD)} = 4S_{\triangle BOC} = 4 \frac{(25)(12)}{2}$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 600$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 102



Nos piden S

$$S = x^2; V = \frac{ax}{2} \text{ y } W = \frac{bx}{2}$$

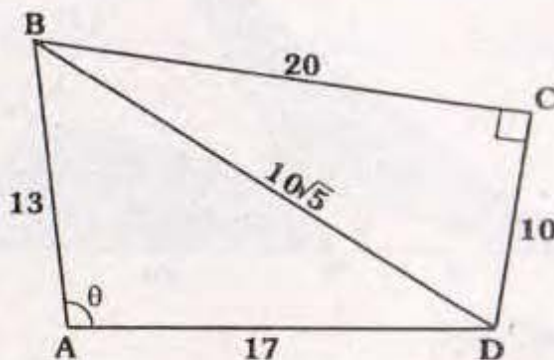
$$\triangle AEF \sim \triangle LJC$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow 4VW = \underbrace{ab \cdot x^2}_{S^2}$$

$$\therefore S = 2\sqrt{VW}$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 103



Nos piden  $S_{(ABCD)}$

$$S_{(ABCD)} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \quad \dots(I)$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{(10)(20)}{2} = 100 \quad \dots(II)$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{(13)(17)}{2} \sin \theta \quad \dots(III)$$

• En  $\triangle ABD$ :

$$(10\sqrt{5})^2 = 13^2 + 17^2 - 2(13)(17)\cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{21}{(13)(17)}$$

• Como

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{220}{(13)(17)}$$

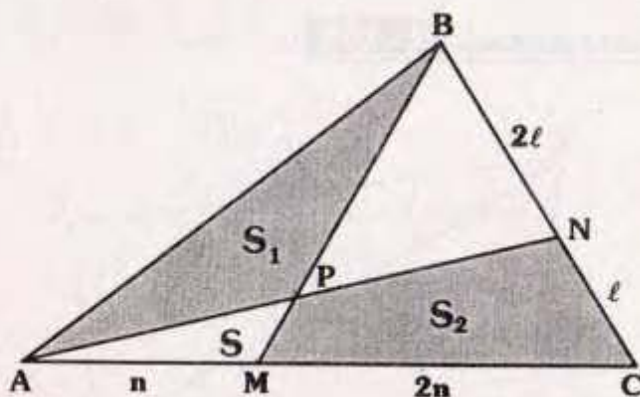
$$\text{• En (III): } S_{\triangle ABD} = 110 \quad \dots(IV)$$

• De (IV), (II) y (I):

$$S_{(ABCD)} = 210$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 104



Nos piden  $S_2$

• Dato  $S_1 = 10$

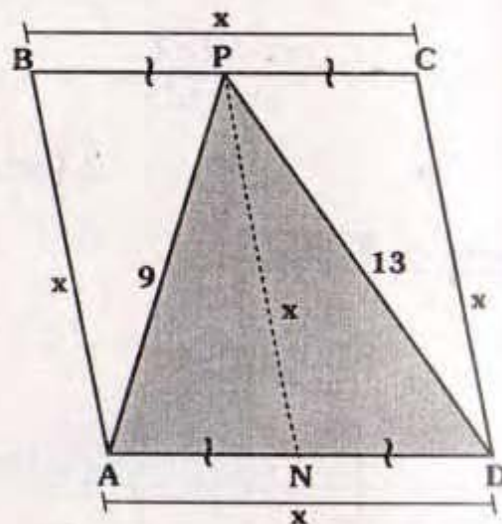
• Del gráfico:

$$\left. \begin{aligned} S_1 + S &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \\ S_2 + S &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \end{aligned} \right\} S_1 = S_2$$

$$\therefore S_2 = 10$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 105



Nos piden  $S_{(ABCD)}$

- Se traza  $\overline{PN} \parallel \overline{CD}$  (N en  $\overline{AD}$ )
- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 10$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\triangle APD} = \sqrt{16(3)(7)(6)}$$

$$S_{\triangle APD} = 12\sqrt{14}$$

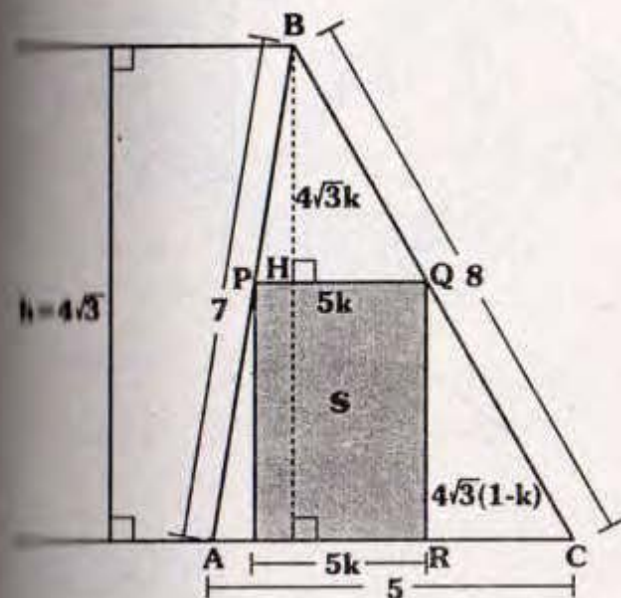


Como  $S_{(ABCD)} = 2(S_{\Delta APD})$

$\therefore S_{(ABCD)} = 24\sqrt{14}$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 106**



Nos piden el área máxima de la región sombreada.

Por teorema del cálculo de la altura:

$$h = \frac{2}{5} \sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = 4\sqrt{3}$$

$\Delta ABC \sim \Delta PBQ$

$\Rightarrow PQ = 5k \text{ y } BH = 4\sqrt{3}k$

Sea S el área de la región sombreada.

$S = 5k \cdot 4\sqrt{3}(1-k) = 20\sqrt{3}(k-k^2)$

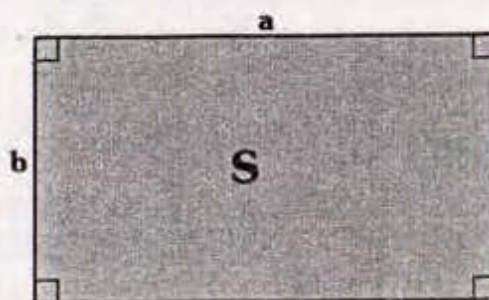
$\Rightarrow S = 20\sqrt{3} \left[ \frac{1}{4} - \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$

Como S es máximo  $\Rightarrow k - \frac{1}{2} = 0$

$\therefore S = 5\sqrt{3}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 107**



Datos  $S = 60$  y  $a \wedge b \in \mathbb{Z}$

Nos piden el perímetro máximo.

Como  $ab=60$ , sin pérdida de generalidad:  $a > b$

Como a y b son enteros analicemos los divisores; así:

|   |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|
| a | 60 | 30 | 20 | 15 | 12 | 10 |
| b | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |

Notemos que el perímetro máximo es para:  $a=60$  y  $b=1$

$\therefore$  Perímetro máximo: **122u**

**Clave A**

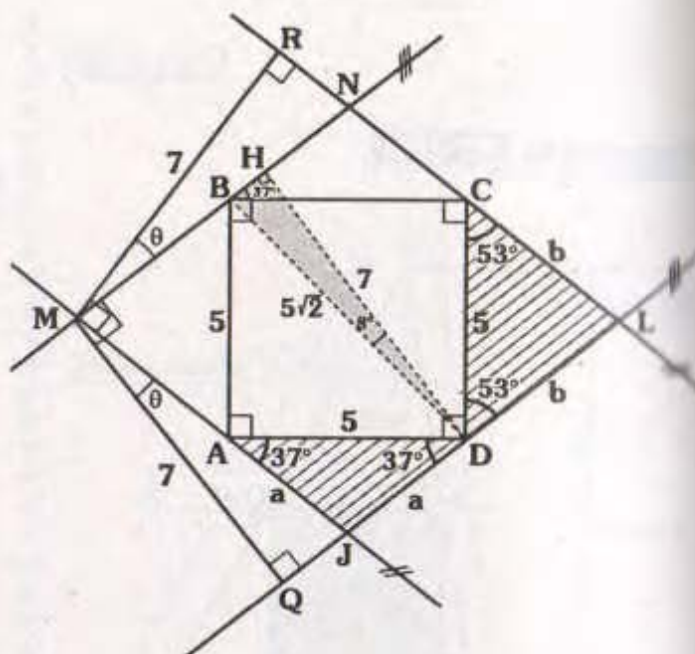
**RESOLUCIÓN N° 108**

Nos piden  $S_{(MNLJ)}$

- $\angle MQJ \cong \angle MRN \Rightarrow MN = MJ$ , es decir  $MNLJ$  es un rombo.
- Se traza  $\overline{DH} \perp \overline{MN} \Rightarrow \angle BHD$  notable de  $8^\circ$
- Si hacemos algo parecido desde "C", al trazar la perpendicular habrán dos posibilidades, si el pie está en  $\overline{AM} \Rightarrow MNLJ$  es cuadrado, si dicho pie está en  $\overline{AJ} \Rightarrow \triangle AJD$ : isósceles
- En  $\triangle AJD$  y  $\triangle DCL$ :

$$a = \frac{25}{8} \text{ y } b = \frac{25}{6} \Rightarrow a + b = \frac{175}{24}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLJ)} = 7 \left( \frac{175}{24} \right) = \frac{1225}{24}$$



**Clave E**

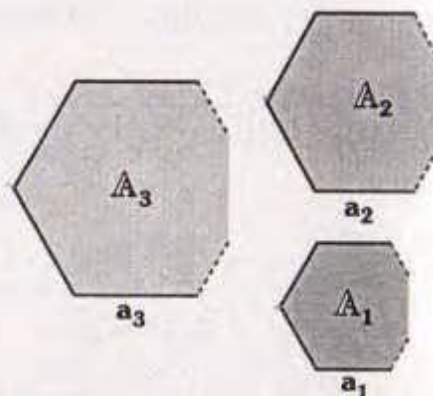
**RESOLUCIÓN N° 109**

Piden  $a_3$

Dato:  $A_3 = A_1 + A_2$

- Como los tres polígonos tienen igual cantidad de lados, entonces son semejantes.
- Por teorema:

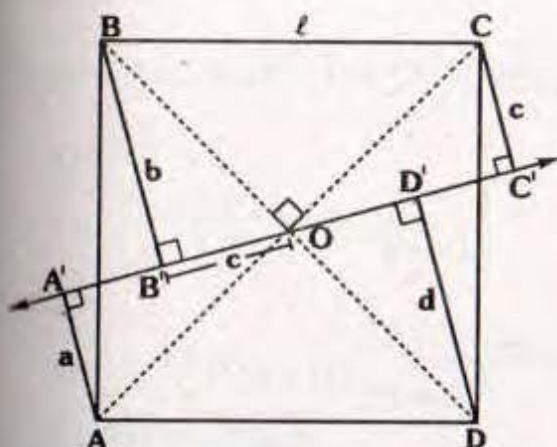
$$\begin{aligned} \frac{A_3}{(a_3)^2} &= \frac{A_2}{(a_2)^2} + \frac{A_1}{(a_1)^2} \\ \Rightarrow \frac{A_3}{(a_3)^2} &= \frac{A_2 + A_1}{(a_2)^2 + (a_1)^2} \\ \therefore a_3 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned}$$



**Clave E**



**RESOLUCIÓN N° 110**



Piden  $S_{(ABCD)}$

Dato:  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$

• Notemos:  $a=c$  y  $b=d$

•  $\angle BB'O \equiv \angle OC'C \Rightarrow OB' = c$   
 $\Rightarrow (OB)^2 = b^2 + c^2$

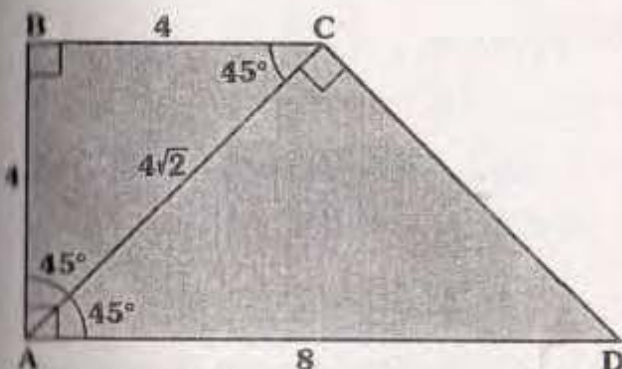
• Del dato:  $b^2 + c^2 = 50$

$$\Rightarrow OB = 5\sqrt{2} \Rightarrow l = 10$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 100$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 111**



Piden  $S_{(ABCD)}$

• Como ABCD es trapecio y  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
 (pues  $m\angle ABC = 90^\circ$  y  $m\angle BCD = 135^\circ$ )

$$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$S_{(ABCD)} = \left( \frac{8+4}{2} \right) \cdot 4$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 24$$

**Clave B**

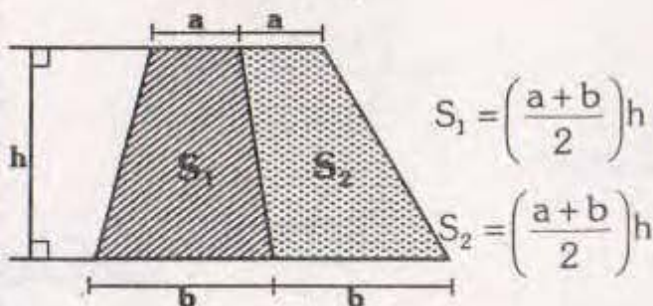
**RESOLUCIÓN N° 112**

**I. Es verdadero**

Estamos considerando por supuesto un cuadrilátero plano, ya fue demostrado en la página N°29.

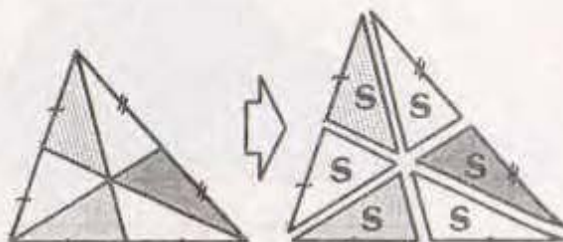
**II. Es verdadero**

Veamos el gráfico:



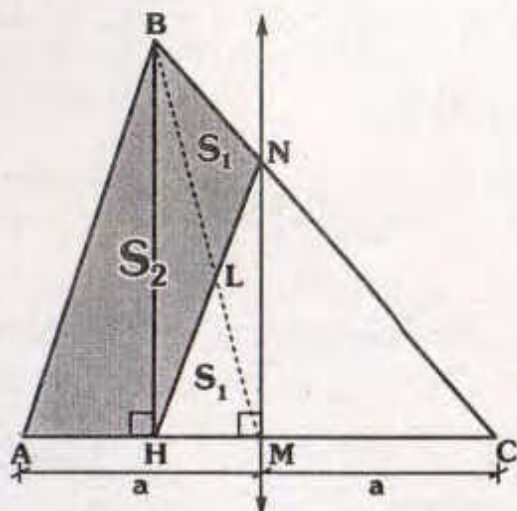
De donde:  $S_1 = S_2$

**III. Es Verdadero**



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 113**



Nos piden:  $S_{\triangle ABNH}$

Dato:  $S_{\triangle ABC} = 18$

• Como  $BH \parallel NM \Rightarrow S_{\triangle HLM} = S_{\triangle BLN} = S_1$

$$S_{\triangle ABNH} = S_1 + S_2$$

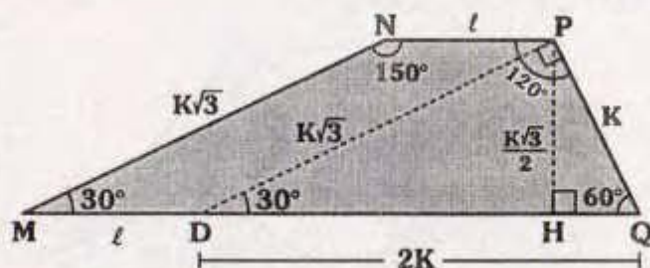
$$= \underbrace{S_1}_{S_{\triangle ABM}} + \underbrace{S_2}_{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABM}}$$

$$= \frac{S_{\triangle ABC}}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABNH} = 9$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 114**



Piden  $S_{\triangle MNPQ}$

• Se traza  $\overline{PD} \parallel \overline{NM} \Rightarrow PD = k\sqrt{3}$

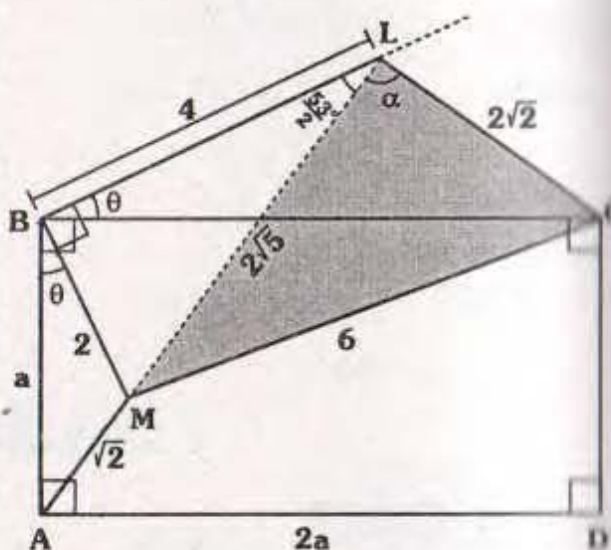
•  $\angle DPQ$ :  $PQ = k$ ,  $DQ = 2k$  y  $PH = \frac{k\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\triangle MNPQ} = \frac{(l + l + 2k) k\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle MNPQ} = (l + k) \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 115**



Piden  $S_{(ABCD)}$

$$S_{(ABCD)} = 2a^2$$

• Se traza exteriormente el  $\triangle BLC$  tal que  $m\angle CBL = m\angle ABM$  y  $BL = 4$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle CBL \Rightarrow LC = 2\sqrt{2}$$

• En  $\triangle MLC$ : Por teorema de cosenos

$$\alpha = 180^\circ - \frac{143^\circ}{2}$$



$$\Rightarrow m\angle BLC = 135^\circ$$

• En  $\triangle BLC$ :

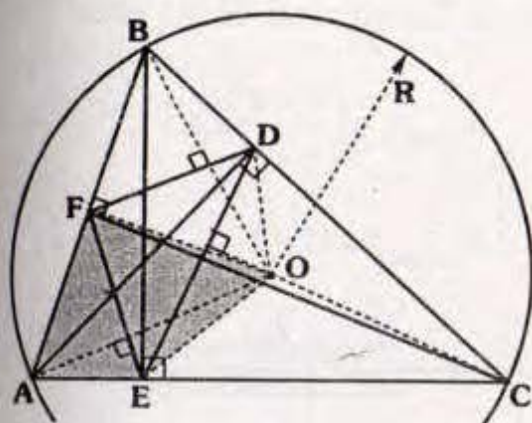
$$(2a)^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(4)(2\sqrt{2})\cos 135^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 = 10$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 20$$

**Clave** C

### RESOLUCIÓN N° 116



$$\text{Sea } p = \frac{EF + FD + DE}{2}$$

Por demostrar:  $S_{\triangle ABC} = pR$

• Por teorema de puntos notables:

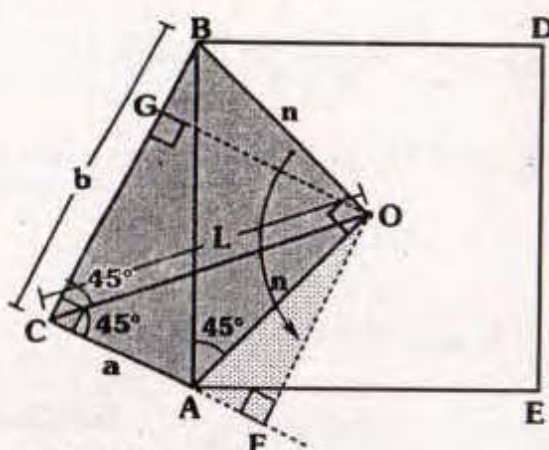
$$\overline{OB} \perp \overline{FD}, \overline{OA} \perp \overline{EF} \text{ y } \overline{OC} \perp \overline{ED}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{(AFOE)} + S_{(OFBD)} + S_{(CDOE)}$$

$$\frac{(EF)R}{2} + \frac{(FD)R}{2} + \frac{(ED)R}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = R \left( \frac{EF + FD + ED}{2} \right)$$

### RESOLUCIÓN N° 117



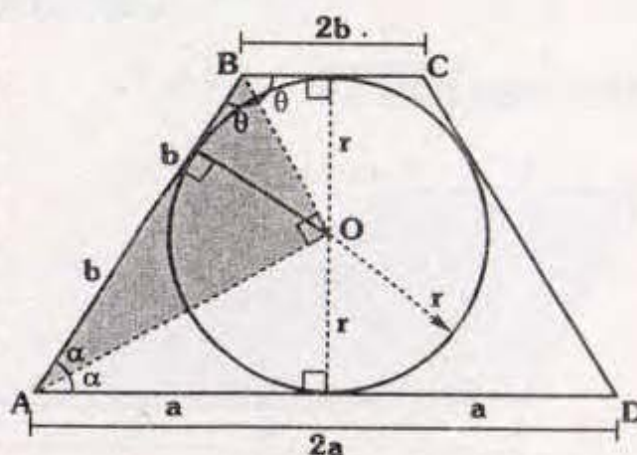
Nos piden  $S_{(ACBO)}$

- Se traza  $\overline{OG} \perp \overline{OB}$  y  $\overline{OF} \perp \overline{CA}$
- Como  $\triangle ACBO$  es inscriptible, entonces:  $\angle OGB \cong \angle AFO$
- Luego  $S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)}$
- Pero  $CGOF$  es un cuadrado cuya diagonal mide  $L$ , entonces:

$$\therefore S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)} = \frac{L^2}{2}$$

**Clave** B

### RESOLUCIÓN N° 118



Piden  $S_{ABCD}$

$$S_{(ABCD)} = \left( \frac{2a+2b}{2} \right) 2r = 2r(a+b)$$

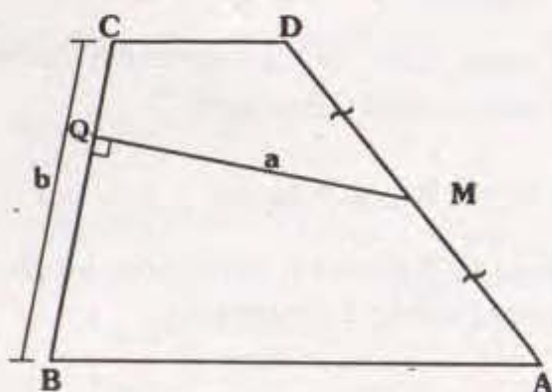
• En  $\triangle AOB$ , por relaciones métricas:

$$r^2 = ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 2\sqrt{ab}(a+b)$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 119**



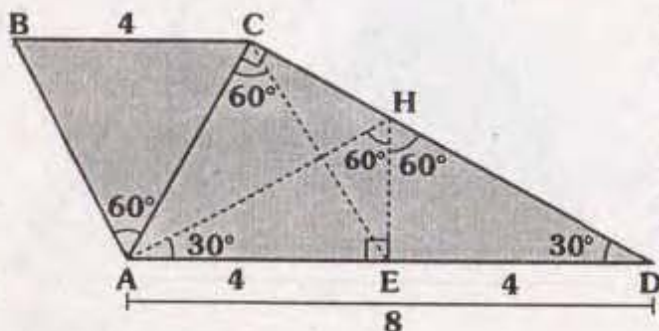
Piden  $S_{\triangle ABCD}$

• Ya fue demostrado (ver pág. N°29 y 30)

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = ab$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 120**



Piden  $S_{\triangle ABCD}$

• Se traza  $\overline{CE} \parallel \overline{BA} \Rightarrow AE = BC = 4$

• Desde E se traza  $\overline{EH} \perp \overline{AD} \Rightarrow$

$$m\angle AHE = m\angle EHD = 60^\circ$$

•  $\triangle ACE$ : inscriptible, entonces:

$$m\angle ACD = 90^\circ$$

• Como  $m\angle CAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  es equilátero, entonces su altura mide  $2\sqrt{3}$

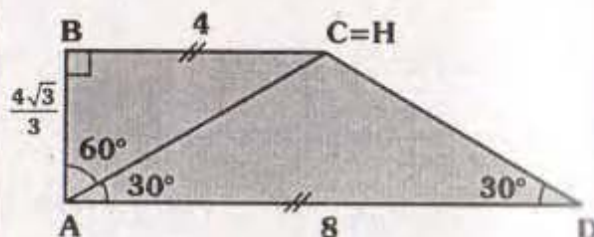
$$S_{\triangle ABCD} = \left( \frac{8+4}{2} \right) 2\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = 12\sqrt{3}$$



**Observación**

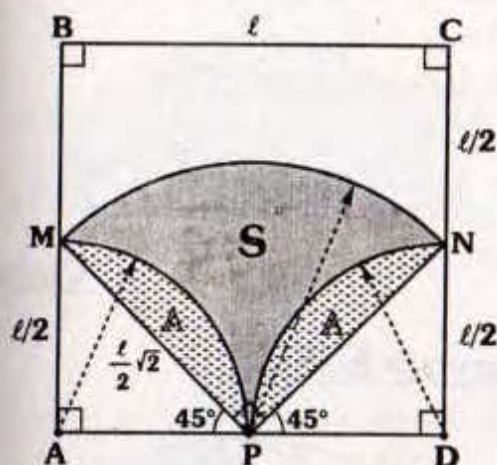
Puede ocurrir:  $H=C$ , el gráfico, quedará así:



$$S_{\triangle ABCD} = \left( \frac{8+4}{2} \right) \frac{4\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

**Clave E**



**RESOLUCIÓN N° 121**

Nos piden S.

• Del gráfico:

$$S + 2A = \frac{1}{4} \pi \left( \frac{l\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi l^2}{8} \quad \dots(I)$$

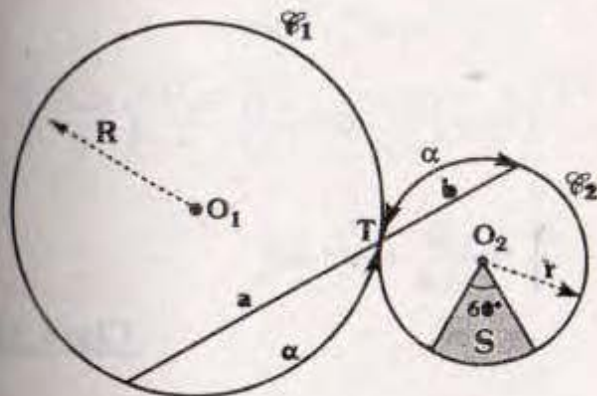
$$A = \frac{1}{4} \pi \left( \frac{l}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2} \right) \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{\pi l^2}{16} - \frac{l^2}{8} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

$$S + 2 \left( \frac{\pi l^2}{16} - \frac{l^2}{8} \right) = \frac{\pi l^2}{8}$$

$$\therefore S = \frac{l^2}{4}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 122**

• Nos piden S

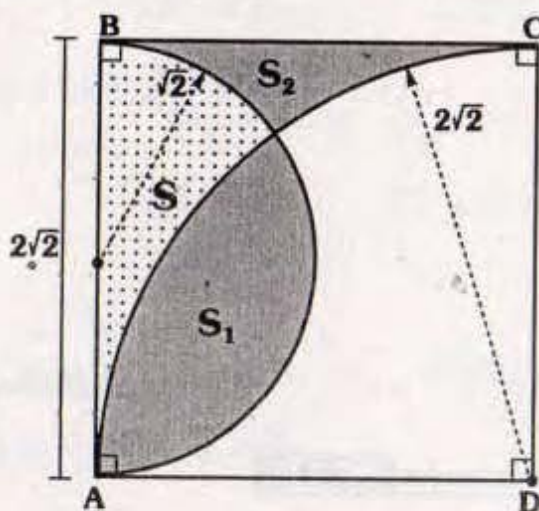
$$S = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{6} \pi r^2 \quad \dots(I)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Como } C_1 \sim C_2 &\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow r = \left( \frac{b}{a} \right) R \quad \dots(II) \end{aligned}$$

• De (I) y (II):

$$\therefore S = \frac{\pi b^2 R^2}{6a^2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 123**

• Nos piden  $S_1 - S_2$

$$S_1 + S = \frac{1}{4} \pi (\sqrt{2})^2 = \pi \quad \dots(I)$$

$$S_2 + S = S_{(ABCD)} - S_D$$

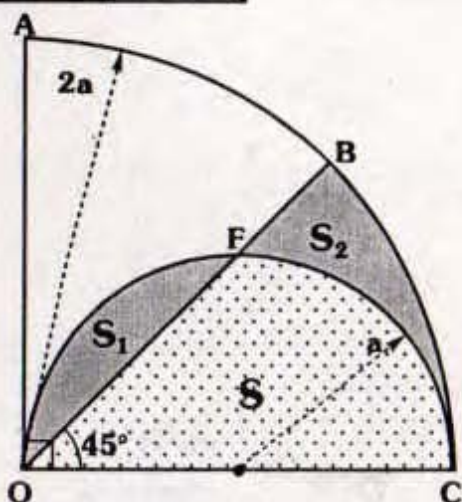
$$S_2 + S = (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4} \pi (2\sqrt{2})^2 = 8 - 2\pi \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

$$\therefore S_1 - S_2 = 3\pi - 8$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 124**



Nos piden  $S_2$

Dato:  $S_1 = 36\text{cm}^2$

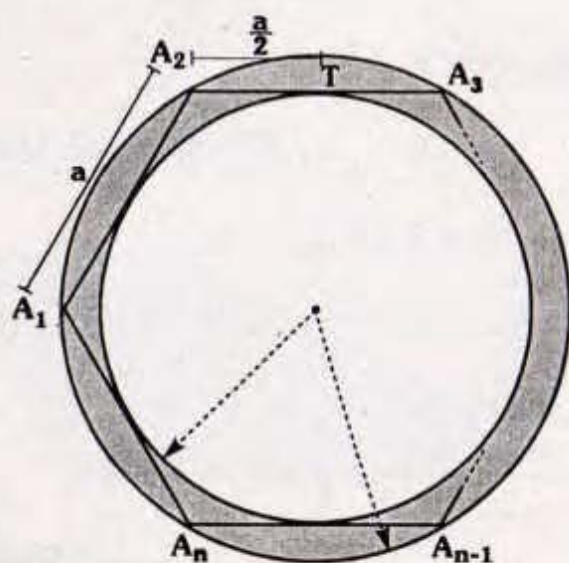
$$S_1 + S = \frac{1}{2} \pi a^2 \quad \dots(I)$$

$$S_2 + S = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi (2a)^2 = \frac{1}{2} \pi a^2 \quad \dots(II)$$

$$\begin{aligned} \text{De (I) y (II): } S_1 + S &= S_2 + S \\ \Rightarrow S_1 &= S_2 \\ \therefore S_2 &= 36\text{cm}^2 \end{aligned}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 125**

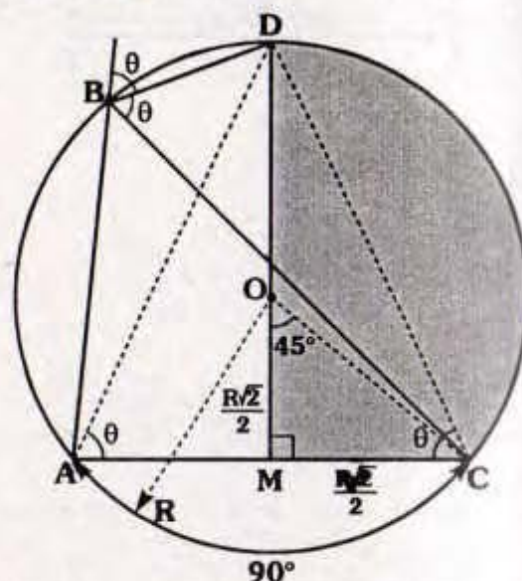


- Sea  $A_1A_2A_3\dots A_n$  el polígono regular.
- Nos piden el área de la corona circular ( $A_{cc}$ ).
- Por teorema (pág. N°38)

$$\therefore A_{cc} = \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 126**



Sea  $S$  el área de la región sombreada.

- Como  $\overline{BD}$  es bisectriz exterior, entonces  $\triangle DAC$  es isósceles, luego  $\overline{DM}$  es mediana y altura y está contenido en la mediatriz  $\Rightarrow O \in \overline{DM}$

$$S = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle OMC}$$

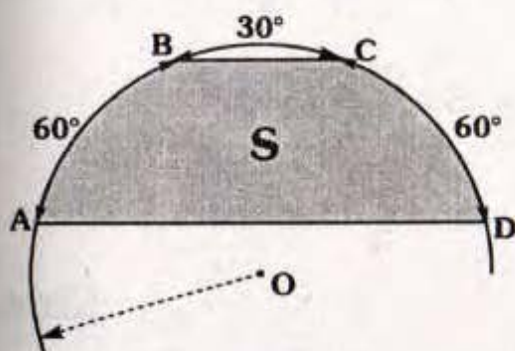
$$S = \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi R^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{R\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore S = \frac{R^2}{8} (3\pi + 2)$$

**Clave C**



**RESOLUCIÓN N° 127**



Nos piden el área de la región sombreada: S.

$$S = S_{\text{sector } AOD} - S_{\text{sector } BOC}$$

$$S_{\text{sector } AOD} = \frac{150^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \sin 150^\circ = \frac{5}{12} \pi R^2 - \frac{R^2}{4} \dots (I)$$

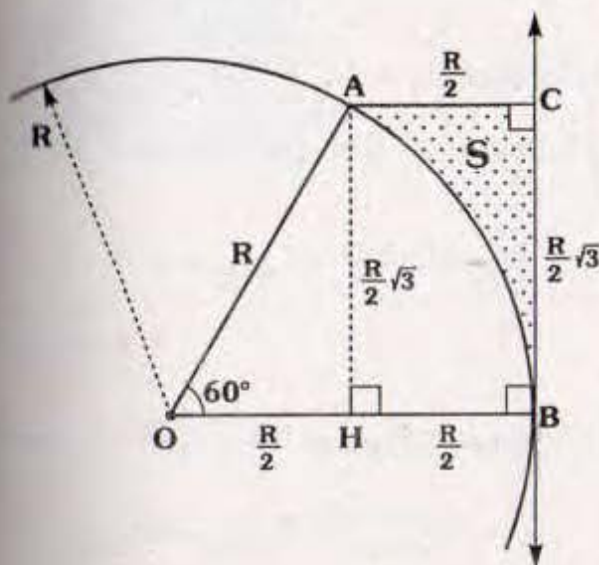
$$S_{\text{sector } BOC} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{12} \pi R^2 - \frac{R^2}{4} \dots (II)$$

De (I) y (II):

$$\therefore S = \frac{1}{3} \pi R^2$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 128**



Nos piden S

$$S = S_{\text{sector } OACB} - S_{\text{triangle } AOB}$$

$$S_{\text{sector } OACB} = \frac{1}{2} \left( R + \frac{R}{2} \right) \cdot \frac{R}{2} \sqrt{3} = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\text{triangle } AOB} = \frac{1}{6} \pi R^2$$

$$\Rightarrow S = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6} \pi R^2$$

$$\therefore S = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$$

**Clave B**

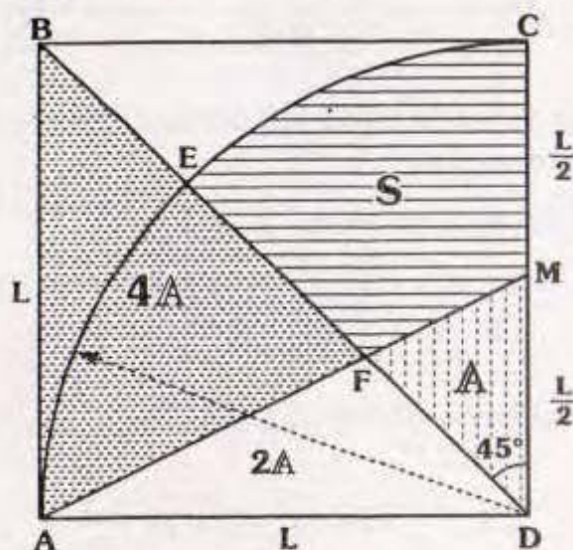
**RESOLUCIÓN N° 129**

Por teorema:

$$A_{\text{corona circular}} = \frac{\pi(2^2)}{4} = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 130**

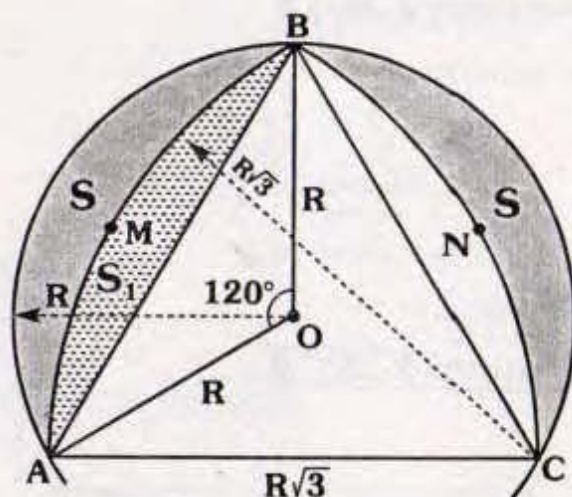


Nos piden S

- $\triangle AFB \sim \triangle MFD \Rightarrow \frac{S_{\triangle DMF}}{S_{\triangle BFA}} = \frac{1}{4}$
  - Como  $6A = \frac{L^2}{2} \Rightarrow S_{\triangle DMF} = \frac{1}{12}L^2$
  - $S = \frac{45^\circ}{360^\circ}\pi L^2 - \frac{1}{12}L^2$
- $$\therefore S = \frac{L^2}{24}(3\pi - 2)$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 131**



Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas: 2S

- Hallemos primero:  $S + S_1$

$$S + S_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Hallemos ahora:  $S_1$

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{3})^2 - (R\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

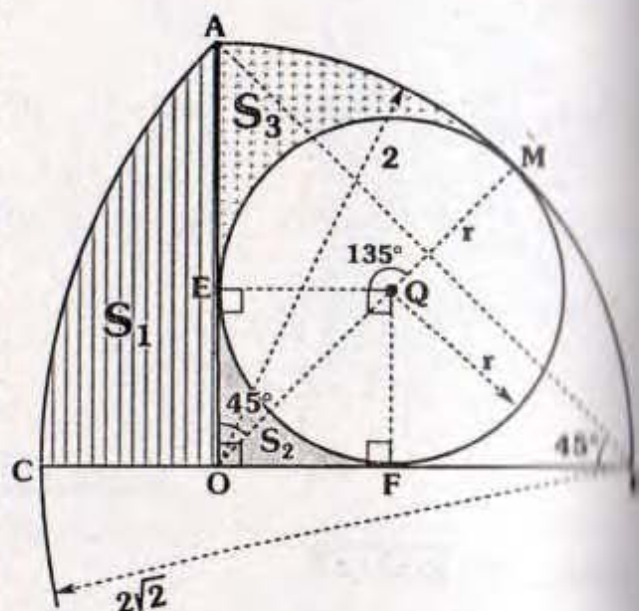
$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

$$\therefore 2S = \frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$$

Clave **II**

**RESOLUCIÓN N° 132**



Nos piden  $S_1 + S_2 + S_3$

- Hallemos el área por separado:

$$S_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ}\pi(2\sqrt{2})^2 - \frac{S_{\triangle AOB}}{2} = \pi - 2 \quad \dots (I)$$

$$S_2 = S_{(EOFQ)} - S_{\triangle EQF} = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \quad \dots (II)$$

$$S_3 = S_{(\triangle AOM)} - S_{\triangle OEQ} - S_{\triangle EQM}$$



$$\Rightarrow S_3 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \pi (2)^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi r^2$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{3}{8} \pi r^2$$

... (III)

Sumando (I), (II) y (III)

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3\pi}{2} - 2 + \frac{r^2}{2} - \frac{5}{8} \pi r^2 \quad \dots (IV)$$

Pero  $r + r\sqrt{2} = 2 \Rightarrow r = 2(\sqrt{2} - 1)$

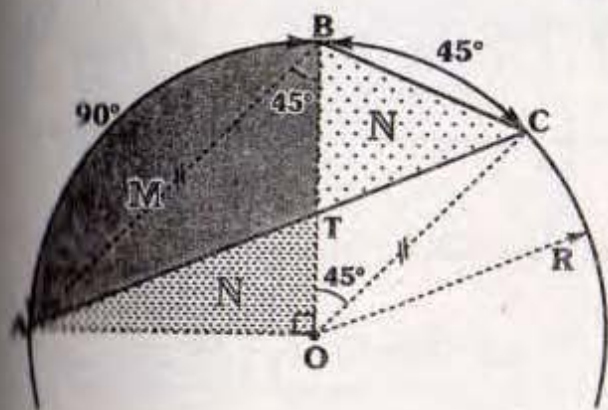
$$\Rightarrow r^2 = 4(3 - 2\sqrt{2})$$

Reemplazando en (IV):

$$S_1 + S_2 + S_3 = (4 + 5\pi\sqrt{2} - 6\pi - 4\sqrt{2}) u^2$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 133**



Piden  $M + N$

Como  $m\widehat{AB} = 90^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 45^\circ \Rightarrow$

$$m\angle BOC = m\angle ABO = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{OC}$$

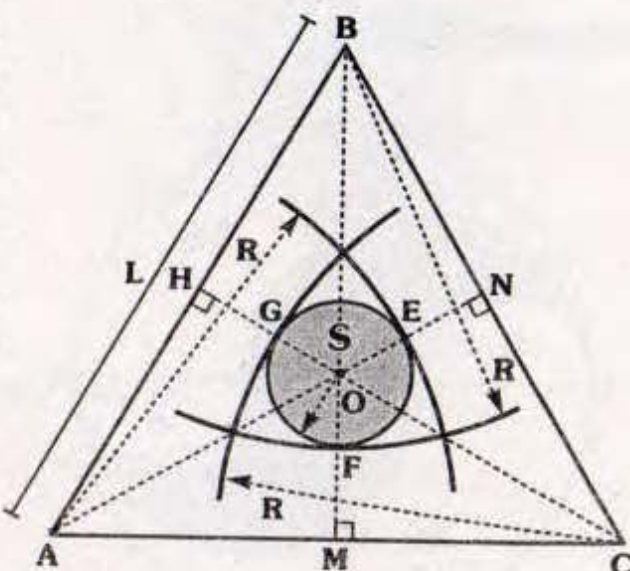
• Por teorema:

$$S_{\triangle BTC} = S_{\triangle AOT} = N$$

$$M + N = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4} \pi R^2$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 134**



Nos piden S

•  $\triangle ABC$ : Equilátero con  $AB = L$

$$\Rightarrow AN = CH = BM = \frac{L}{2} \sqrt{3}$$

• Al trazar los arcos de centros A, B y C de radios  $R = \frac{2}{5} L \sqrt{3}$  cada dos arcos concurren con la altura.

• Como  $OG = OE = OF = \underbrace{R}_{\frac{2}{5} L \sqrt{3}} - \underbrace{AO}_{\frac{L}{3} \sqrt{3}}$

$$\Rightarrow OG = \frac{L}{15}\sqrt{3}$$

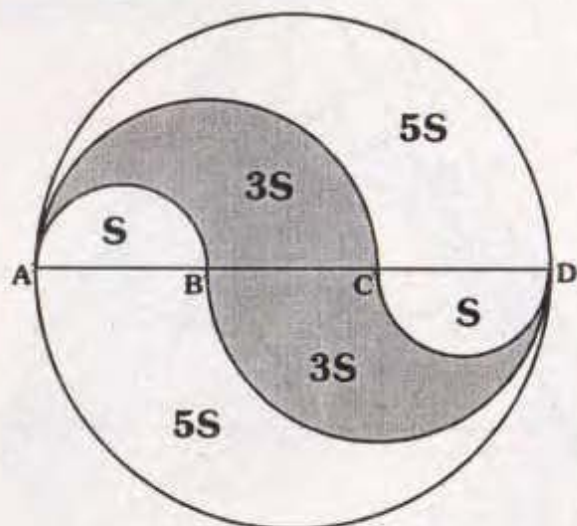
- Nos piden el área del círculo de radio OG

$$\Rightarrow S = \pi \left( \frac{L}{15}\sqrt{3} \right)^2$$

$$\therefore S = \frac{\pi L^2}{75}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 135**



- Sea  $S_x$  el área de la parte sombreada
- $S_y$  el área de la parte no sombreada
- Nos piden  $\frac{S_x}{S_y}$
- Como los semicírculos son semejantes

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AB}}{(AB)^2} = \frac{S_{\triangle AC}}{(AC)^2} = \frac{S_{\triangle AD}}{(AD)^2} = S$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AB} = S ; S_{\triangle AC} = 4S \quad \vee$$

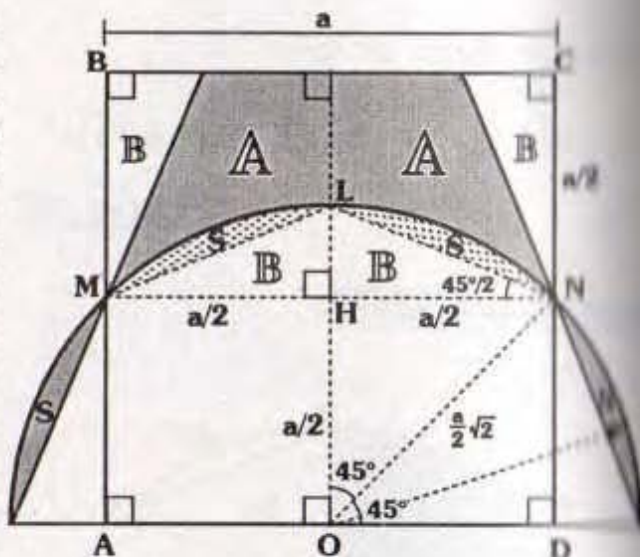
$$S_{\triangle AD} = 9S$$

- Análogamente para la parte inferior
- Luego:  $S_x = 6S$  y  $S_y = 12S$

$$\therefore \frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 136**



Nos piden:  $2(A + S)$

$$2(A + 2B + S) = a \left( \frac{a}{2} \right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow A + S = \frac{a^2}{4} - 2B$$

Como

$$ON = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad OH = \frac{a}{2}$$



$$III = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} (\sqrt{2}-1) = \frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$$

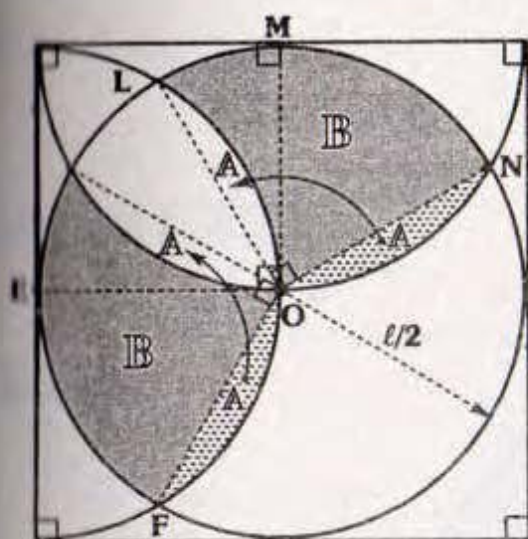
Luego:  $A+S = \frac{a^2}{4} - 2 \frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$

$$\Rightarrow A+S = \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})$$

$$\therefore 2(A+S) = \frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 137**



Nos piden el área de la región sombreada

Notemos que los  $\Delta EOF$  y  $MON$  son equiláteros.

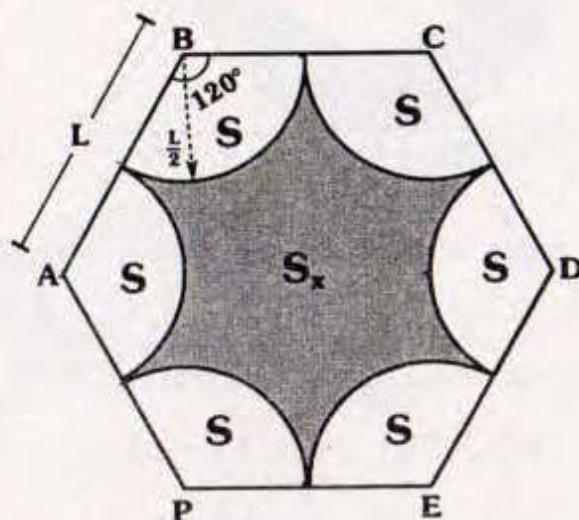
Por traslado de áreas, tenemos:

$$A+B = S_D = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\pi \ell^2}{16}$$

$$\therefore 2(A+B) = \frac{\pi \ell^2}{8}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 138**



Nos piden  $S_x$

• Hallemos  $S_x$  por diferencia:

$$S_x = S_{(ABCDEF)} - 6S$$

$$S_{(ABCDEF)} = 6 \left( L^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{2} L^2 \sqrt{3}$$

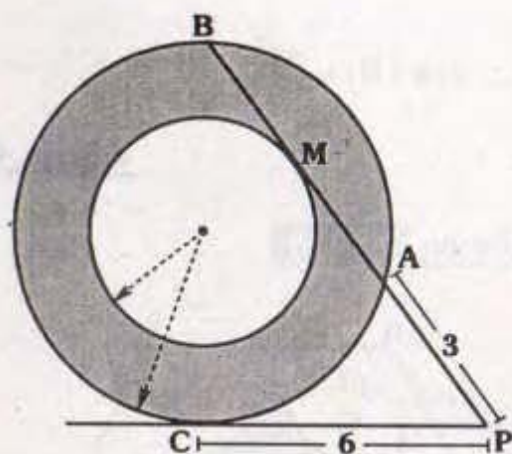
$$S = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \pi L^2$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{3}{2} L^2 \sqrt{3} - 6 \left( \frac{1}{12} \pi L^2 \right)$$

$$\therefore S_x = \frac{L^2}{2} (3\sqrt{3} - \pi)$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 139**



Nos piden el área de la corona circular ( $A_{cc}$ )

- Por teorema de la tangente:

$$6^2 = 3(PB) \Rightarrow PB = 12$$

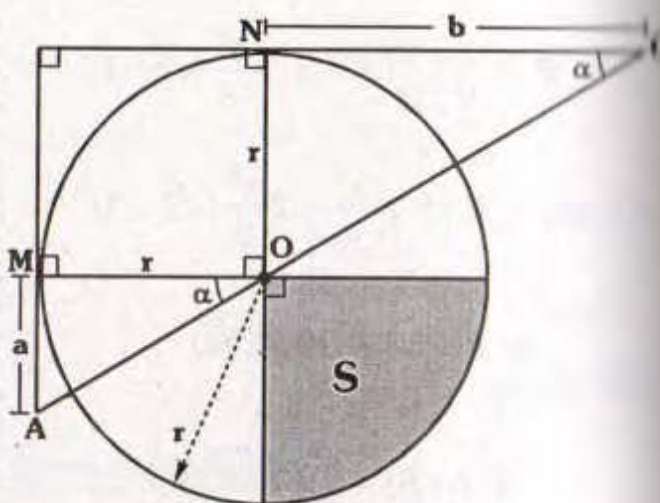
$$\Rightarrow AB = 9$$

- Luego:  $A_{cc} = \pi \frac{(AB)^2}{4}$

$$\therefore A_{cc} = \frac{81}{4} \pi u^2$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 140**



Piden S

- Conocemos que  $S = \frac{1}{4} \pi r^2$

- $\triangle OMA \sim \triangle CNO$

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow r^2 = ab$$

$$\therefore S = \frac{\pi}{4} ab$$

**Clave D**



# Problemas Resueltos

## Ciclo Semestral

### RESOLUCIÓN N° 141

Nos piden la relación entre  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$

Sea el área de la región MNLB:  $S$

Del gráfico:

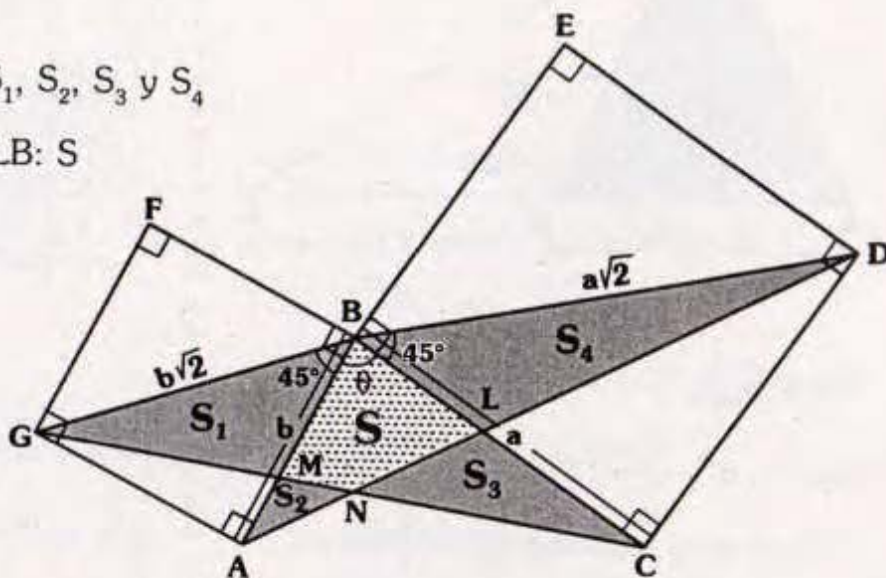
$$S_{\triangle GBC} = \frac{(b\sqrt{2})a}{2} \sin(45^\circ + \theta)$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{b(a\sqrt{2})}{2} \sin(45^\circ + \theta)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle GBC} = S_{\triangle ABD}$$

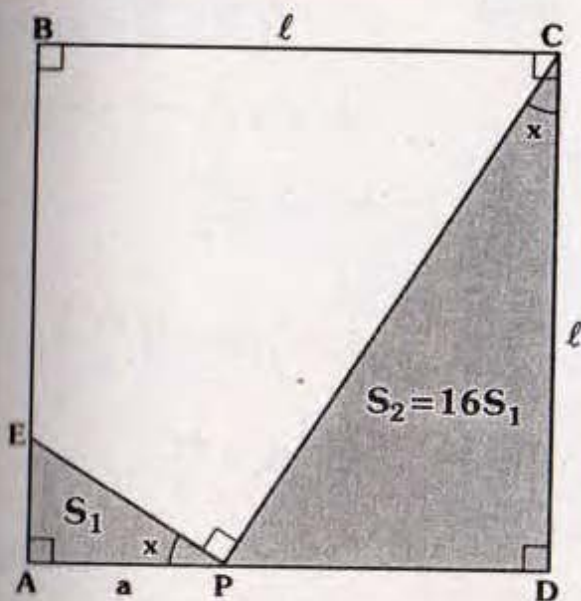
$$\Rightarrow S_1 + S + S_3 = S_2 + S + S_4$$

$$\therefore S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$



**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 142



Nos piden  $x$

• Notemos que:  $\triangle PDC \sim \triangle EAP$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{l}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow l = 4a$$

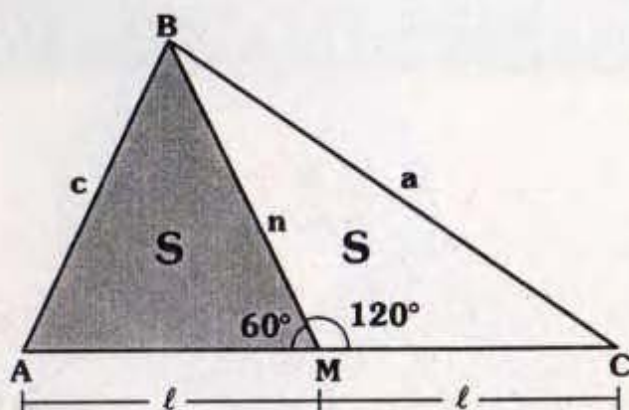
• Luego:  $PD = 3a$

•  $\triangle PDC$ : notable

$$\therefore x = 37^\circ$$

**Clave B**

RESOLUCIÓN N° 143



Piden  $S_{\Delta ABC}$

Dato:  $a^2 - c^2 = 12$

• Usemos el teorema de cosenos en

$$\Delta MBC: a^2 = l^2 + n^2 + \ell n$$

$$\Delta ABM: c^2 = l^2 + n^2 - \ell n$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 - c^2}_{12} = 2\ell n$$

$$\Rightarrow \ell n = 6$$

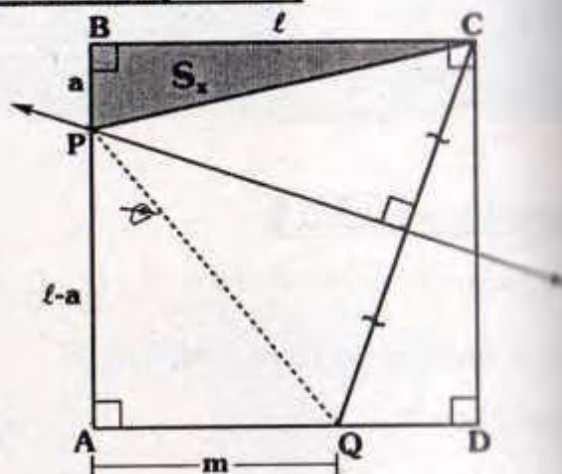
$$\bullet S_{\Delta ABM} = S = \frac{\ell n}{2} \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 144



Nos piden  $S_x$

$$\bullet \text{ En } \Delta PBC: S_x = \frac{a\ell}{2} \quad \dots (I)$$

• Por teorema de la mediatriz:

$$PC = PQ$$

• Por teorema de Pitágoras en:

$$\Delta PBC: a^2 + \ell^2 = (PC)^2$$

$$\Delta PAQ: m^2 + (\ell - a)^2 = (PQ)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + \ell^2 = m^2 + (\ell - a)^2$$

$$\Rightarrow a\ell = \frac{m^2}{2}$$

$$\bullet \text{ En (I): } S_x = \frac{1}{2}(a\ell) = \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{2} \right)$$

$$\therefore S_x = \frac{m^2}{4}$$

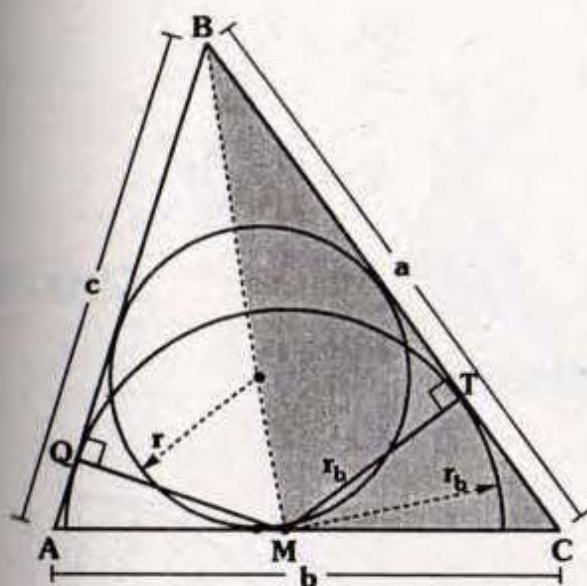
Clave C









**RESOLUCIÓN N° 148**

Sea  $S$  el área de la región  $ABC$

Dato:  $\frac{x}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ ; piden  $x$

$$\Rightarrow S = S_{(\triangle AMB)} + S_{(\triangle MBC)}$$

$$S = \frac{cr_b}{2} + \frac{ar_b}{2} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{a+c}{2S}$$

Análogamente:  $\frac{1}{r_a} = \frac{b+c}{2S}$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{a+b}{2S}$$

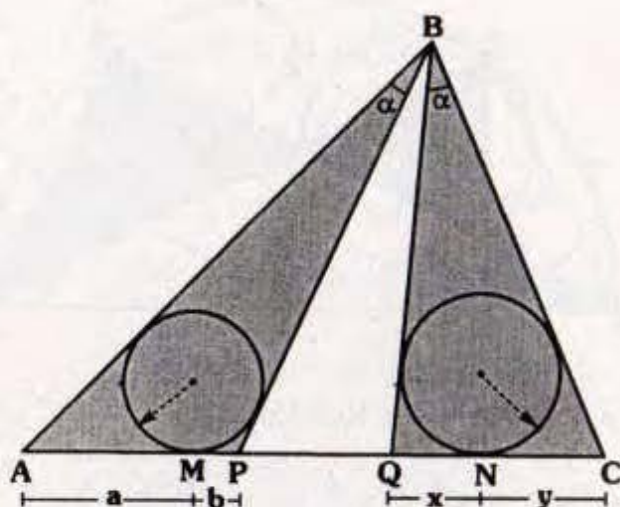
$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2(a+b+c)}{2S} = 2 \frac{p}{S}$$

Pero:  $\frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

Finalmente:  $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{r}$

$$\therefore x = 2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 149**

Por demostrar:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Por teorema (página N°43):

$$S_{\triangle ABP} = (ab) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\triangle BQC} = (xy) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BQC}} = \frac{ab}{xy}$$

Por relación de áreas:

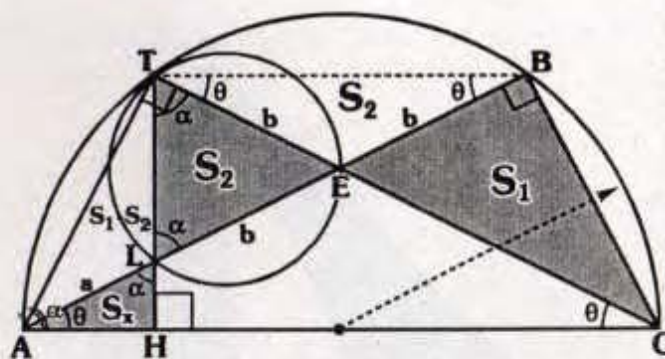
$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BQC}} = \frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{xy} = \frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

**RESOLUCIÓN N° 150**



Nos piden  $S_x$  en función de  $S_1$  y  $S_2$

- Sea  $m\angle BAC = \theta \Rightarrow m\angle BTE = \theta$
- Como:  $m\widehat{TE} = m\widehat{TC}$   
 $\Rightarrow m\angle TLE = m\angle TAC = \alpha$
- Como:  $\alpha + \theta = 90^\circ$   
 $\Rightarrow m\angle ACT = \theta = m\angle ABT$   
 $\Rightarrow \overline{TB} \parallel \overline{AC} \Rightarrow S_{\triangle ATE} = S_{\triangle EBC} = S_1$   
 $\Rightarrow S_{\triangle ALT} = S_1 - S_2$

• Por razón de áreas:

$$\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{a}{b} \quad \dots(I)$$

• Por teorema de semejanza:

$$\frac{S_x}{2S_2} = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2S_x}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \dots(II)$$

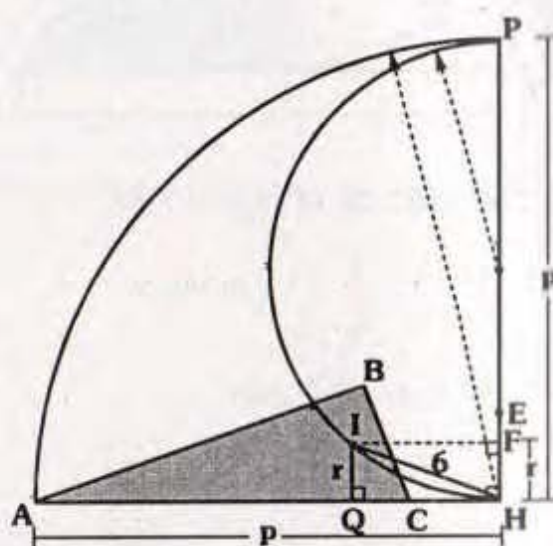
• De (I) y (II):

$$\frac{2S_x}{S_2} = \left(\frac{S_1 - S_2}{S_2}\right)^2$$

$$\therefore S_x = \frac{(S_1 - S_2)^2}{2S_2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 151**



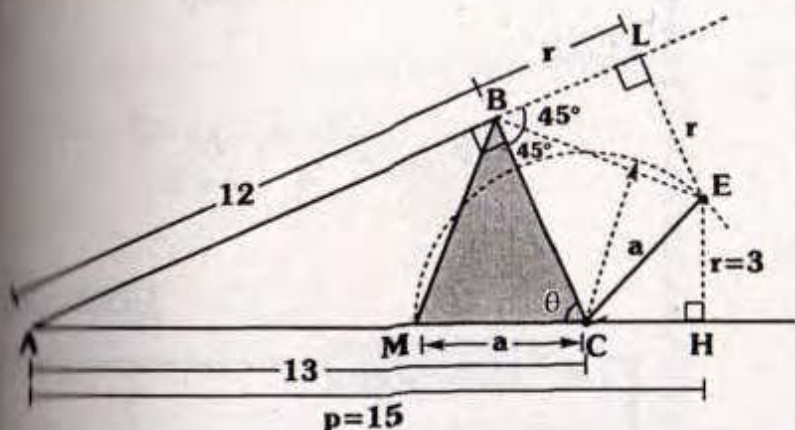
Nos piden  $S_{\triangle ABC}$

- Sabemos que  $AH = HP$  representa el semiperímetro del triángulo ABC
- Se traza  $\overline{IF} \perp \overline{HP}$  (F en  $\overline{HP}$ )  
 $\Rightarrow HF = r$
- En  $\triangle$ :  $6^2 = \frac{rp}{S_{\triangle ABC}}$   
 $\therefore S_{\triangle ABC} = 36$

**Clave A**



**RESOLUCIÓN N° 152**



Nos piden  $S_{\Delta CMB}$

• Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta CMB} = \frac{(a)(5)}{2} \sin \theta \quad \dots (I)$$

• En  $\Delta ABC$ :  $\sin \theta = \frac{12}{13}$

• Por teorema de circunferencia:

$$AL = AH = p = \frac{13 + 12 + 15}{2} = 15 \Rightarrow CH = 2 \text{ y } BL = r = 3$$

• En  $\Delta CHE$ :  $a^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

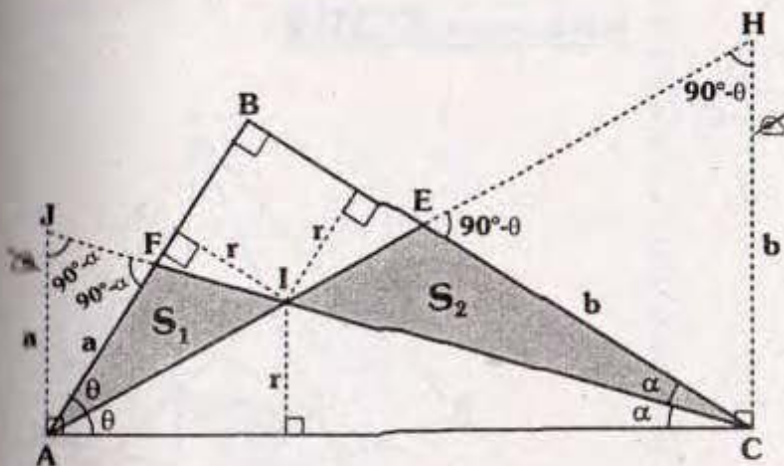
• En (I):

$$S_{\Delta CMB} = \frac{(\sqrt{13})(5)}{2} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\therefore S_{\Delta CMB} = \frac{30}{13} \sqrt{13}$$

**Clave**

**RESOLUCIÓN N° 153**



Nos piden:  $S_1 + S_2$

Sea  $r$  el inradio del triángulo  $ABC$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{r}{2}(a + b) \dots (III)$$

• Se trazan las perpendiculares a  $\overline{AC}$  por  $A$  y  $C$  las cuales cortan a las prolongaciones de  $\overline{CF}$  y  $\overline{AE}$  en  $J$  y  $H$  respectivamente.

- Luego los  $\Delta$ s JAF y ECH son isósceles
- Por teorema de semejanza:

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

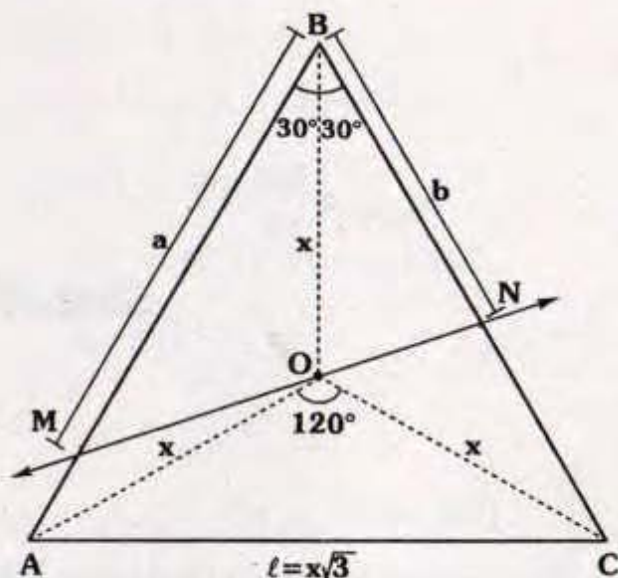
- En (I):

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \frac{ab}{(a+b)} (a+b)$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{ab}{2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 154**



Nos piden  $S_{\Delta ABC}$

- Como es equilátero, entonces:

$$S_{\Delta ABC} = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots(I)$$

- En  $\Delta MBN$ , de la observación:

$$x = \frac{2ab}{a+b} \cos 30^\circ = \frac{ab}{a+b} \sqrt{3}$$

$$\text{• En } \Delta AOC: \ell = x\sqrt{3} = \frac{3ab}{a+b}$$

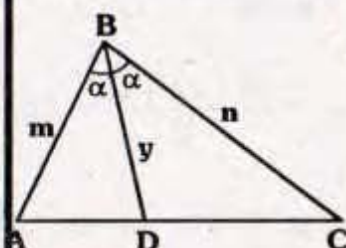
- En (I):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \left( \frac{ab}{a+b} \right)^2$$

**Clave C**



**Observación**



Se cumple:

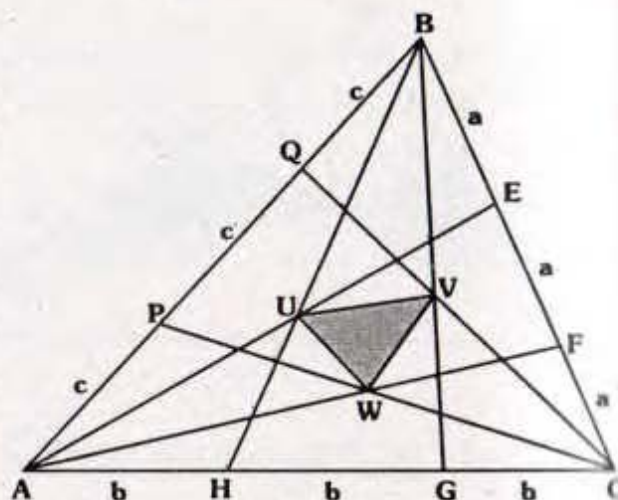
$$y = \frac{2mn}{m+n} \cos \alpha$$

**Prueba:**  $S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC}$

$$\frac{my}{2} \sin \alpha + \frac{ny}{2} \sin \alpha = \frac{mn}{2} \sin 2\alpha$$

$$\therefore y = \frac{2mn}{m+n} \cos \alpha$$

**RESOLUCIÓN N° 155**





Nos piden  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle UVW}}$

- En el  $\triangle ABG$ , usemos el teorema de Menelao ( $\overline{QC}$  es la recta secante)

$$(2c)(BV)b = c(VG)3b$$

$$\Rightarrow \frac{BV}{VG} = \frac{3}{2} \quad \dots(I)$$

- En  $\triangle HBG$ ,  $\overline{AE}$  es la recta secante también por teorema de Menelao:

$$\frac{BU}{UH} = \frac{3}{2} \quad \dots(II)$$

- De (I) y (II):  $\overline{UV} \parallel \overline{HG}$

- Análogamente se prueba:

$$\overline{UW} \parallel \overline{EF} \quad \text{y} \quad \overline{VW} \parallel \overline{PQ}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle UVW$$

- Como  $\triangle UBV \sim \triangle HBG \Rightarrow \frac{UV}{b} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{UV}{AC} = \frac{1}{5}$$

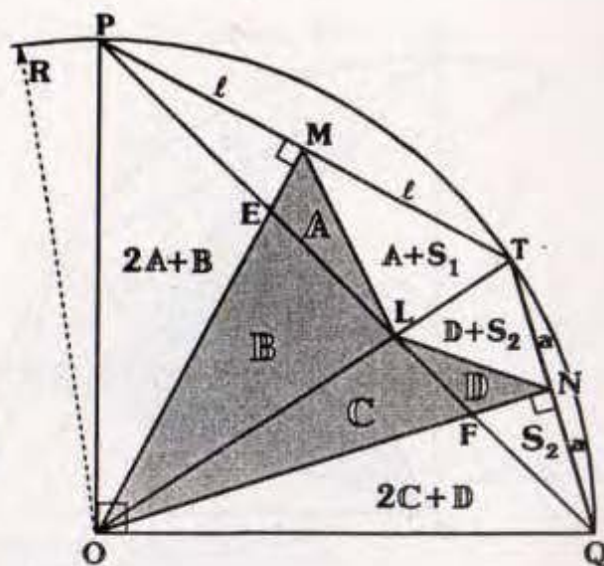
- Por teorema de semejanza de áreas.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle UVW}} = \left(\frac{AC}{UV}\right)^2$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle UVW}} = 25$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 156



Nos piden  $S_{\triangle MLNO}$

- Del gráfico tenemos que M y N son puntos medios de  $\overline{PT}$  y  $\overline{TQ}$  respectivamente.

- Luego:

$$S_{\triangle LMT} = S_{\triangle LMP} = A + S_1$$

$$S_{\triangle LOM} = S_{\triangle LON} \Rightarrow S_{\triangle OEP} = 2A + B$$

$$\text{Análogamente: } S_{\triangle OFQ} = 2C + D$$

- Finalmente:

$$\frac{2A + 2B + 2C + 2D}{2S_{\triangle MLNO}} = \frac{R^2}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle MLNO} = \frac{R^2}{4}$$

**Clave E**





$$S_{\Delta CDM} = \frac{(a)2h}{2} = ah$$

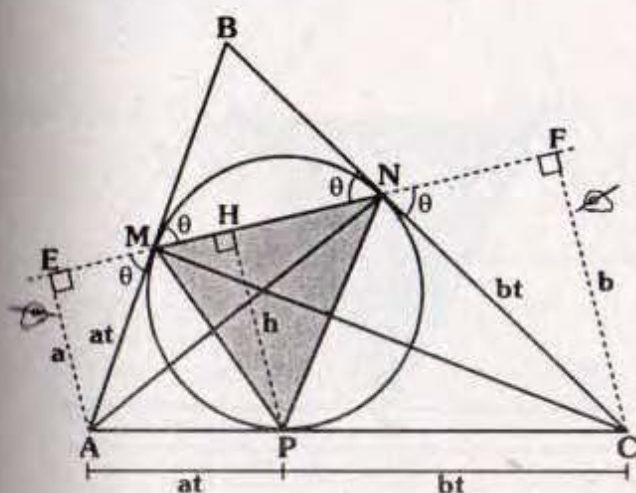
$$\Rightarrow S_{\Delta ADE} = S_{\Delta CDM}$$

$$S_1 + S + S_2 = S_3 + S + S_4$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3 + S_4$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 158**



Piden  $S_{\Delta MNP}$

Dato:  $\frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta MNC}} = \frac{1}{k}$

• Como los tres triángulos (MNP, AMN y MNC) tienen igual base analicemos las alturas.

•  $\angle AEM \sim \angle CFN \Rightarrow AM = at$  y  $CN = bt$

• En el trapecio AEFC:

$$h = \frac{a(bt) + b(at)}{at + bt} = \frac{2ab}{a + b}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

• Usemos la última expresión:

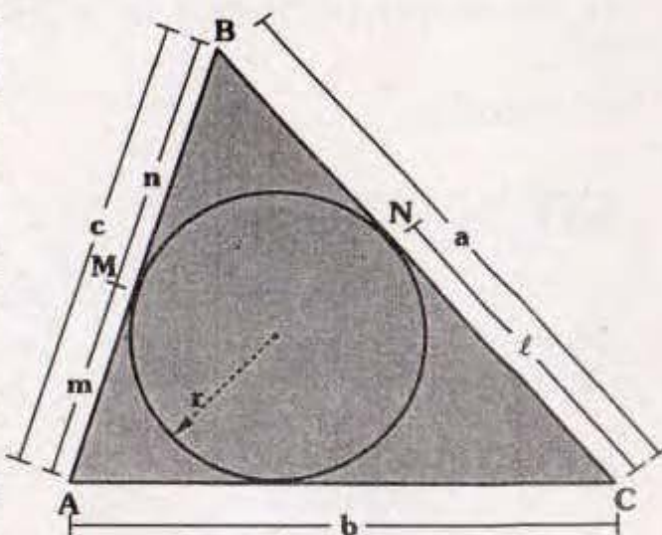
$$\frac{\frac{2}{h(MN)}}{2} = \frac{\frac{1}{a(MN)}}{2} + \frac{\frac{1}{b(MN)}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{S_{\Delta MNP}} = \frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta MNC}}$$

$$\therefore S_{\Delta MNP} = 2k$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 159**



Piden  $r$ .

Dato:  $\frac{1}{mn} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{ml} = \frac{1}{4}$

• Sea  $p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow m = p-a; n = p-b$

y  $l = p-c \Rightarrow p = m + n + l$

• Usando la siguiente expresión del área:

$$S_{\Delta ABC} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow (m+n+\ell)r^2 = mn\ell \Rightarrow \boxed{\frac{1}{mn} + \frac{1}{n\ell} + \frac{1}{m\ell} = \frac{1}{r^2}}$$

$$\therefore r = 2$$

Clave **B**

### RESOLUCIÓN N° 160

Nos piden probar:

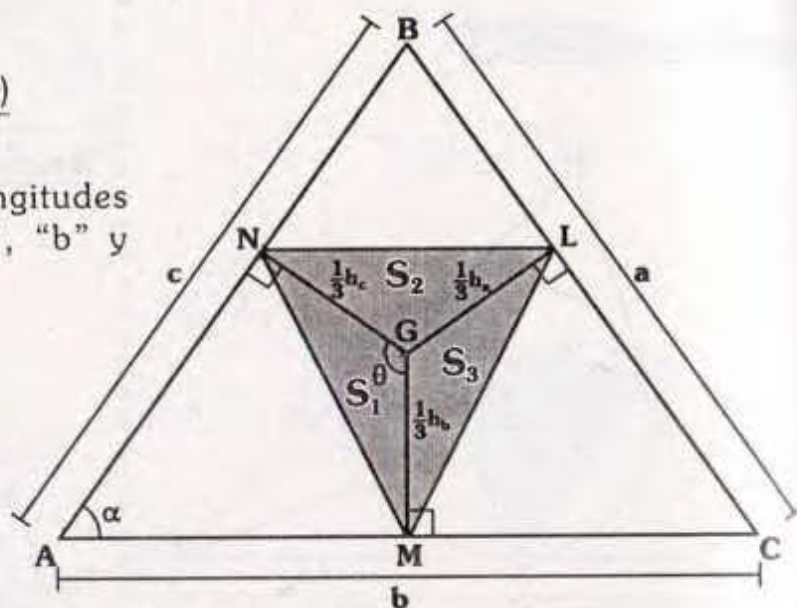
$$S_{\Delta LMN} = \frac{4(S_{\Delta ABC})^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$$

- Sean " $h_a$ ", " $h_b$ " y " $h_c$ " las longitudes de las alturas relativas a " $a$ ", " $b$ " y " $c$ "

- Por teorema:

$$GN = \frac{1}{3}h_c \quad ; \quad GM = \frac{1}{3}h_b \quad y$$

$$GL = \frac{1}{3}h_a$$



- Como  $\alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \frac{S_1}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h_b h_c}{9bc}$

- Análogamente:  $\frac{S_2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h_a h_c}{9ac}$  y  $\frac{S_3}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h_a h_b}{9ab}$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h_b h_c}{9bc} + \frac{h_a h_c}{9ac} + \frac{h_a h_b}{9ab} \Rightarrow \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(h_b)(h_c)}{9b^2c^2} + \frac{(h_a)(h_c)}{9a^2c^2} + \frac{(h_a)(h_b)}{9a^2b^2}$$

- Como:  $2S_{\Delta ABC} = ah_a = bh_b = ch_c$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9b^2c^2} + \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2c^2} + \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2b^2} \therefore S_{\Delta LMN} = \frac{4S_{\Delta ABC}^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$$





**RESOLUCIÓN N° 163**

Consideremos el orden de los vértices: BOHC

Nos piden  $S_{(\triangle BOHC)}$

• Como el circunradio ( $OC=OB$ ) es  $a$ , entonces:

$$BC = a\sqrt{2}$$

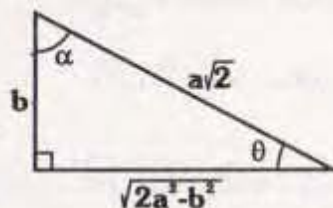
• En  $\triangle BLH$ :  $BH = b\sqrt{2}$

• Por fórmula general:

$$S_{(\triangle BOHC)} = \frac{(b\sqrt{2})(\overline{OC})}{2} \sin \alpha \dots (I)$$

• Como  $m\angle OCA = m\angle HCB = \theta$  y  $\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow m\angle CBA = \alpha$

• En  $\triangle BLC$ :



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2}}$$

• En (I): 
$$S_{(\triangle BOHC)} = \frac{b\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2}}$$

$$\therefore S_{(\triangle BOHC)} = \frac{b\sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 164**

Por demostrar:  $\text{Área}_{(OAEC)} = \text{Área}_{(BFDE)}$

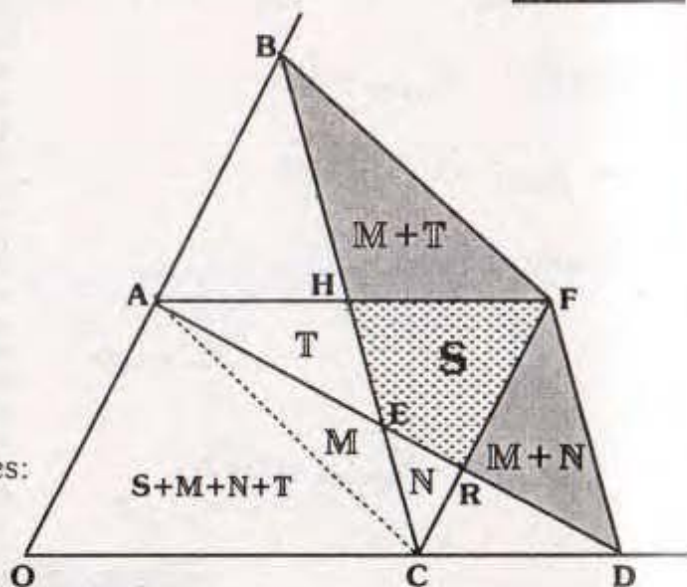
• Como  $\overline{OB} \parallel \overline{CF}$  y  $\overline{OC} \parallel \overline{AF}$ , entonces:

$$- S_{(\triangle ARC)} = S_{(\triangle RFD)} = M + N$$

$$- S_{(\triangle AHC)} = S_{(\triangle BHF)} = M + T$$

• Al ser OAFC un paralelogramo, entonces:

$$- S_{(\triangle OAC)} = S_{(\triangle OFC)} = S + M + N + T$$





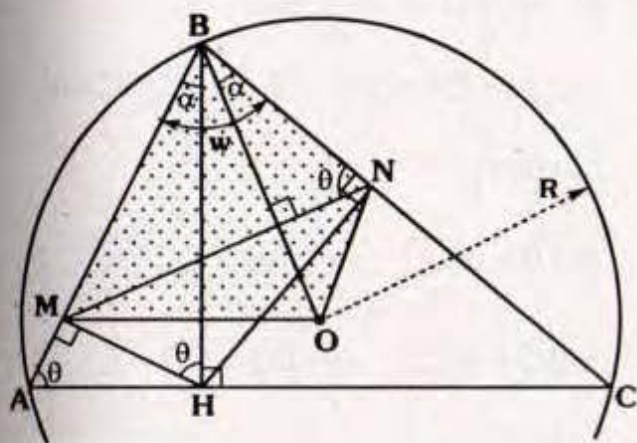
• Luego:

$$\text{Área}_{(OAEC)} = S + 2M + N + T \quad y$$

$$\text{Área}_{(BFDE)} = S + 2M + N + T$$

$$\therefore \text{Área}_{(OAEC)} = \text{Área}_{(BFDE)}$$

### RESOLUCIÓN N° 165



Piden  $S_{(\triangle ONBM)}$

Dato:  $S_{(\triangle ABC)} = S$

• Sea  $m\angle HAM = \theta \Rightarrow m\angle MHB = \theta$

• Como  $\triangle MHN B$  es inscriptible  
 $\Rightarrow m\angle MNB = \theta$

• Debido a que  $\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{MN}$

• Sea  $BH = \ell$ , de la observación:

$$MN = \ell \operatorname{sen} w$$

$$\Rightarrow S_{(\triangle ONBM)} = \frac{(\ell \operatorname{sen} w)R}{2} \quad \dots(I)$$

• Como  $AC = 2R \operatorname{sen} w$

$$\Rightarrow S_{(\triangle ABC)} = \frac{(2R \operatorname{sen} w)\ell}{2} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

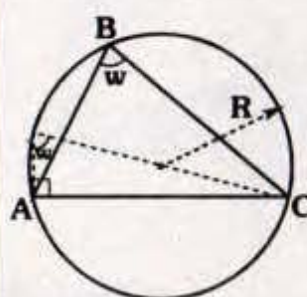
$$\frac{S_{(\triangle ABC)}}{S} = 2S_{(\triangle ONBM)}$$

$$\therefore S_{(\triangle ONBM)} = \frac{S}{2}$$

Clave **A**



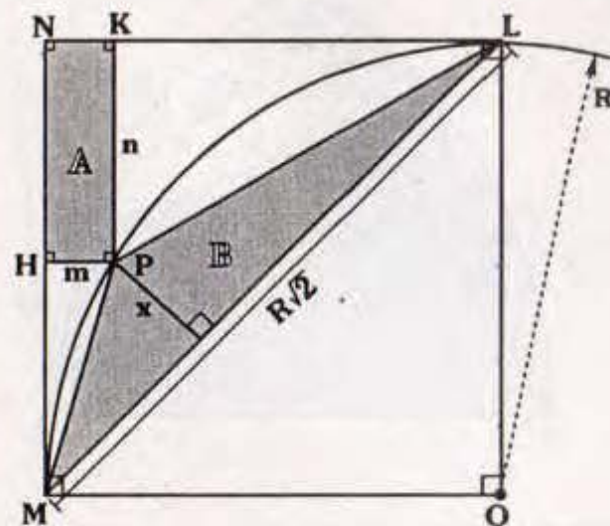
Observación



$$AC = 2R \operatorname{sen} w$$

Como  $\overline{BH}$  es diámetro  
 $MN = (BH) \operatorname{sen} w$

### RESOLUCIÓN N° 166



Nos piden  $R$  en función de  $A$  y  $B$

• Por propiedad de semejanza:

$$x^2 = mn \quad \dots(I)$$

• Tenemos:  $A = mn$  ... (II)

$$B = \frac{(R\sqrt{2})x}{2}$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{R^2}{2} \cdot x^2 \quad \dots (III)$$

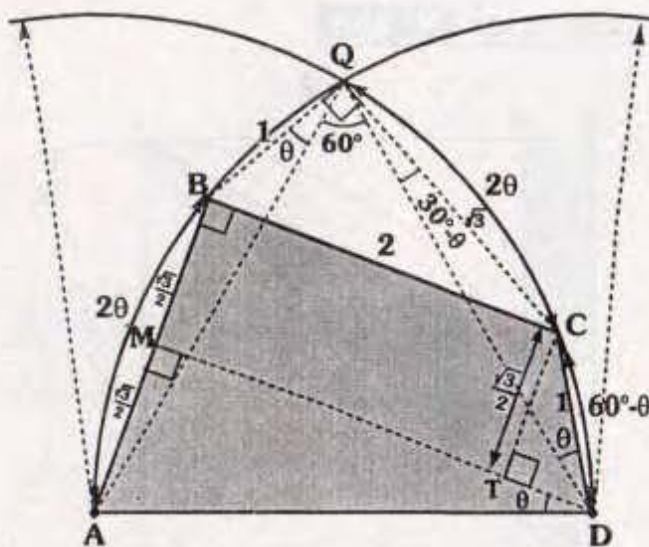
• De (I), (II) y (III):

$$B^2 = \frac{R^2}{2} \cdot A$$

$$\therefore R = \sqrt{\frac{2B^2}{A}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 167**



Nos piden  $S_{\triangle ABCD}$

•  $\triangle AQD$ : equilátero

• Trazamos  $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

$$\Rightarrow m\angle BQA = m\angle ADM = \theta \quad y$$

$$AM = MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Se traza  $\overline{CT} \perp \overline{DM}$

$$\Rightarrow CT = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• El  $\angle CTD$  es notable

$$\Rightarrow m\angle CDT = 60^\circ \Rightarrow m\angle QDC = \theta$$

• Luego:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{QC} \Rightarrow AB = QC = \sqrt{3} \quad y$$

$$m\widehat{BQ} = m\widehat{CD} \Rightarrow BQ = CD = 1$$

• También:

$$m\angle BQC = 90^\circ \Rightarrow BC = 2$$

• Como MBCT es rectángulo  $\Rightarrow MT = 2$

$$MD = MT + TD = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

• Luego:

$$S_{\triangle ABCD} = S_{(MBCD)} + S_{(AMD)}$$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{5}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{5}{2} \right)$$

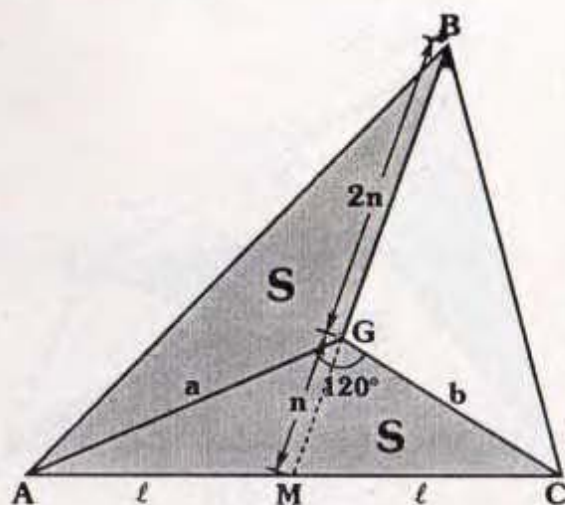
$$\therefore S_{\triangle ABCD} = \frac{7}{4} \sqrt{3}$$

**Clave E**





**RESOLUCIÓN N° 170**



Nos piden  $S_{\triangle ABGC}$

Dato:  $AC^2 - BG^2 = 16$

$$\Rightarrow \ell^2 - n^2 = 4$$

• Como G es baricentro, entonces:

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BGC} = S$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABGC} = 2S$$

• En  $\triangle AGC$ :

$$S = \frac{ab}{2} \sin 120^\circ = ab \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots (\theta)$$

• Por teorema de cosenos, en  $\triangle AGC$ :

$$4\ell^2 = a^2 + b^2 + ab \quad \dots (\alpha)$$

• Por teorema del cálculo de la mediana:

$$a^2 + b^2 = 2n^2 + \frac{(2\ell^2)}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2n^2 + 2\ell^2 \quad \dots (\beta)$$

• De  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :

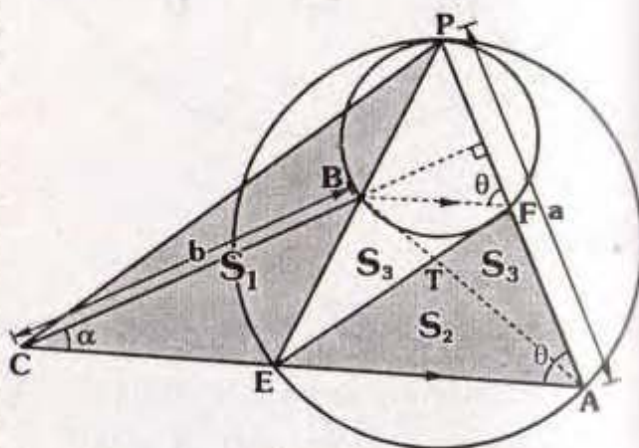
$$2(\ell^2 - n^2) = ab \Rightarrow ab = 8$$

• En  $(\theta)$ :  $S = 2\sqrt{3}$

$$\therefore S_{\triangle ABGC} = 4\sqrt{3}$$

**Clave**  $\Delta$

**RESOLUCIÓN N° 171**



Nos piden  $S_{\triangle CPE} + S_{\triangle EFA}$

• Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{BP} = m\widehat{EP} \Rightarrow \overline{EA} \parallel \overline{BF}$$

• Sea:  $S_{\triangle FTA} = S_3 \Rightarrow S_{\triangle BTE} = S_3$

• Luego:

$$S_{\triangle CPBA} = S_{\triangle CPE} + S_{\triangle EBA} = S_1 + S_2 + S_3 = S_{\triangle CPE} + S_{\triangle EFA}$$

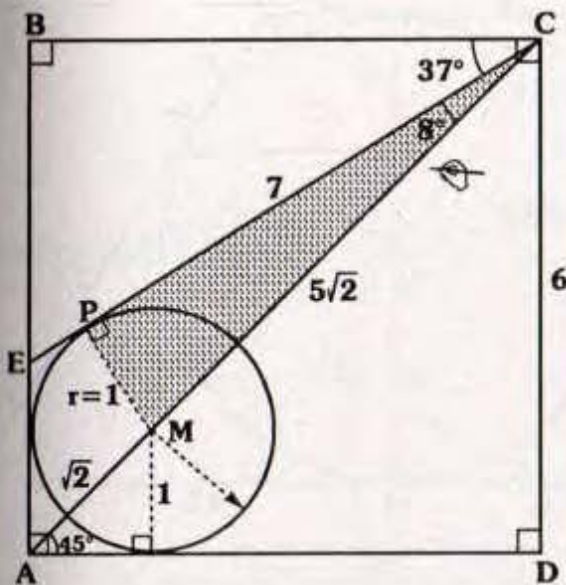
• En (I): Por fórmula general:

$$S_{\triangle CPBA} = \frac{ab}{2}$$

**Clave**  $\square$



**RESOLUCIÓN N° 172**



Nos piden  $S_{(ABCD)}$

- Trazamos la diagonal AC, la cual pasará por M:

$$\text{Como } m\angle BCA = 45^\circ \Rightarrow m\angle ACP = 8^\circ$$

- En  $\triangle MPC$ :

$$\text{Como } PC=7 \Rightarrow MP=1$$

$$\Rightarrow MC=5\sqrt{2} \text{ y } AM=\sqrt{2}$$

- Como  $AC=6\sqrt{2}$

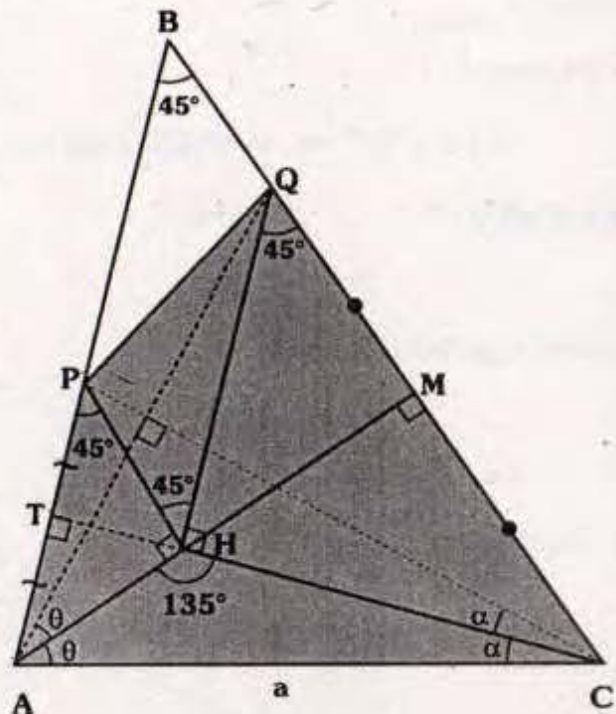
$$\Rightarrow CD=6$$

- Finalmente:

$$S_{(ABCD)} = 36$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 173**



Nos piden  $S_{\triangle APQC}$

- Como PBQH es un paralelogramo, entonces:

$$m\angle HQC = m\angle HPA = 45^\circ \text{ y}$$

$$m\angle QHC = m\angle AHP = 90^\circ$$

- En  $\triangle AHP$  y  $\triangle QHC$ :

$$AT=TP \text{ y } QM=MC$$

$$\Rightarrow AC=CP=AQ=a$$

- Como  $\alpha + \theta = 45^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 90^\circ$ , con ello  $\overline{AQ} \perp \overline{CP}$

- Por fórmula general para APQC:

$$S_{\triangle APQC} = \frac{(AQ)(PC)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle APQC} = \frac{a^2}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 174**

Piden  $S_{(ABCD)}$

• Notemos

$$\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow m\angle AOB = 90^\circ$$

• En  $\triangle AOB$ :  $r^2 = (4)(9)$

$$\Rightarrow r = 6$$

• Análogamente en  $\triangle DOC$ :

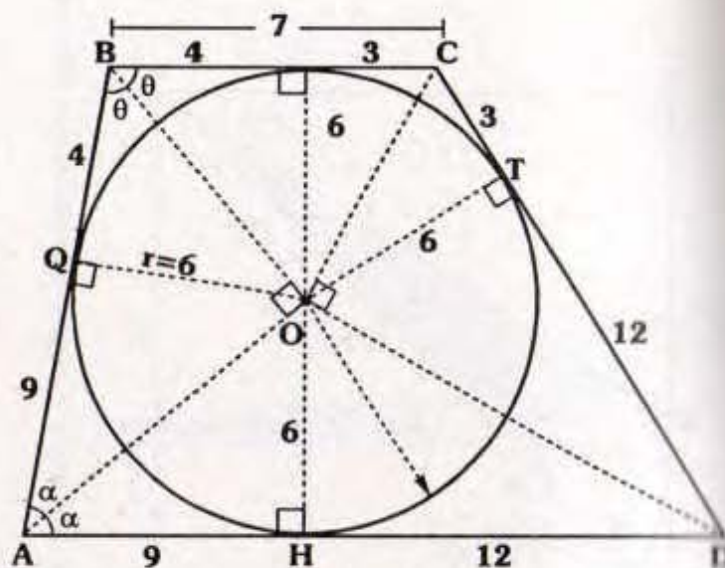
$$6^2 = (3)(TD)$$

$$\Rightarrow TD = 12$$

• Finalmente:

$$S_{(ABCD)} = \left( \frac{21+7}{2} \right) \cdot 12$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 168 \text{ u}^2$$



**Clave**

**RESOLUCIÓN N° 175**

Nos piden el área mínima de la región APBC

• Analizando por partes:

$$S_{APBC} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle PBC}$$

$$\frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$$

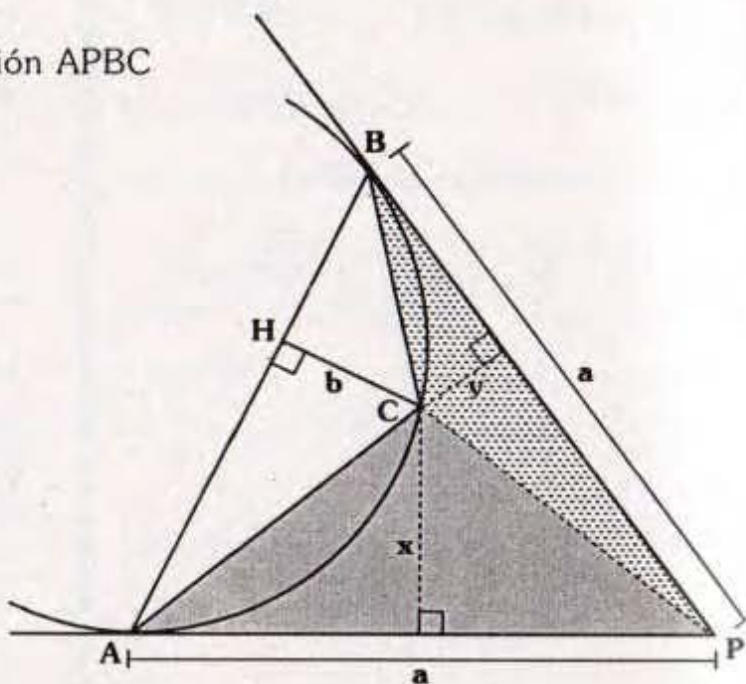
$$\Rightarrow S_{(APBC)} = \frac{a}{2}(x+y)$$

• Por propiedad de semejanza:

$$b^2 = xy$$

• Usando  $M.A. \geq M.G$  para  $x$  e  $y$ :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$



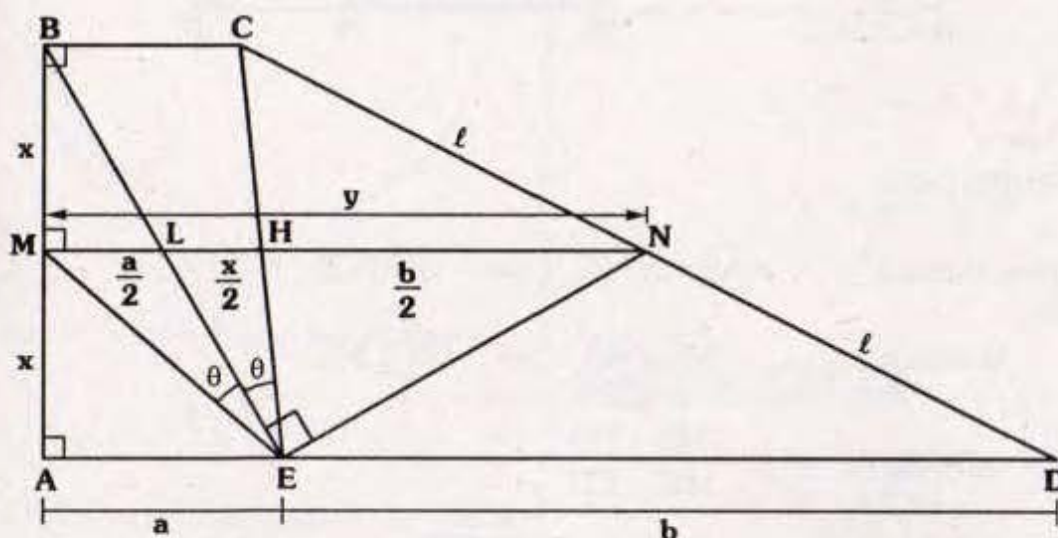


$$\Rightarrow x + y \geq 2b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a}{2}(x + y)}_{S_{(APBC)}} \geq ab$$

∴ El área mínima es : "ab"

**Clave** **A**

**RESOLUCIÓN N° 176**



Nos piden  $S_{\triangle ABCD}$

Dato:  $ab = 16$

• Por propiedad  $S_{\triangle ABCD} = (AB)(MN) = 2xy$

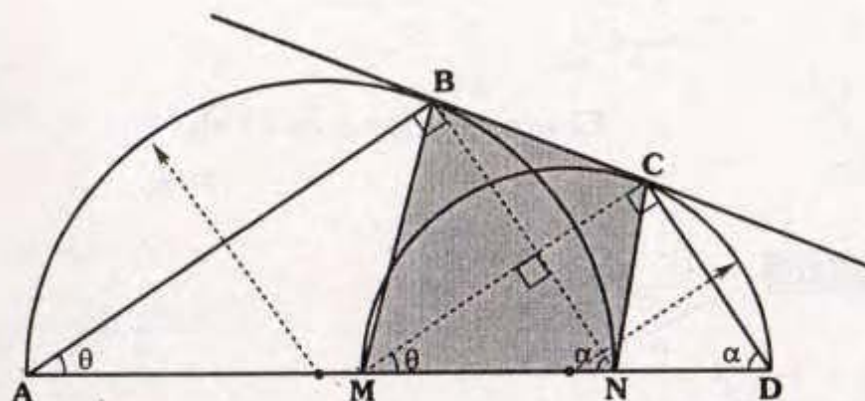
• Notemos que para el  $\triangle MHE$ :  $\overline{EL}$  y  $\overline{EN}$  son bisectrices interior y exterior respectivamente, entonces: M, L, H y N son cuaterna armónica

$$\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{x}{2}y \quad \Rightarrow \quad xy = 8$$

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = 16$$

**Clave** **B**

RESOLUCIÓN N° 177



Piden  $S_{(\square MBCN)}$

Dato:  $(AB)(CD) = 16$

• Por la observación:  $m\widehat{AB} = m\widehat{MC} \Rightarrow \overline{BN} \parallel \overline{CD}$

también:  $\overline{MC} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{BN} \perp \overline{MC}$

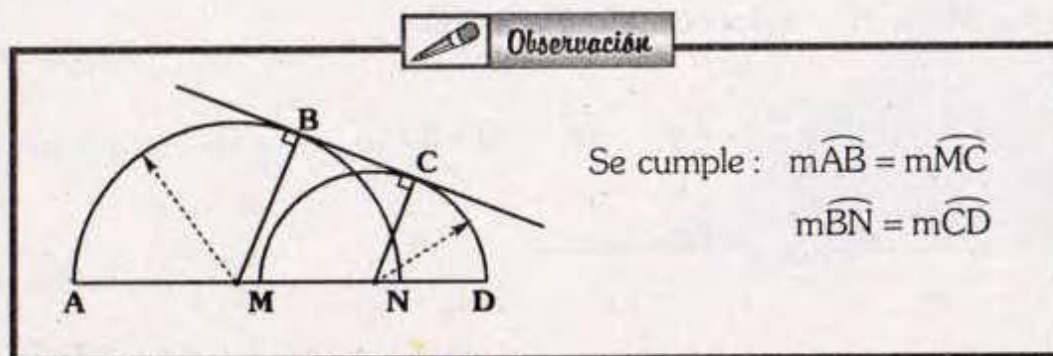
•  $\triangle ABN \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{MC} = \frac{NB}{CD}$   
 $\Rightarrow (AB)(CD) = (MC)(NB)$

• De la fórmula general:

$$S_{(\square MBCN)} = \frac{(MC)(NB)}{2}$$

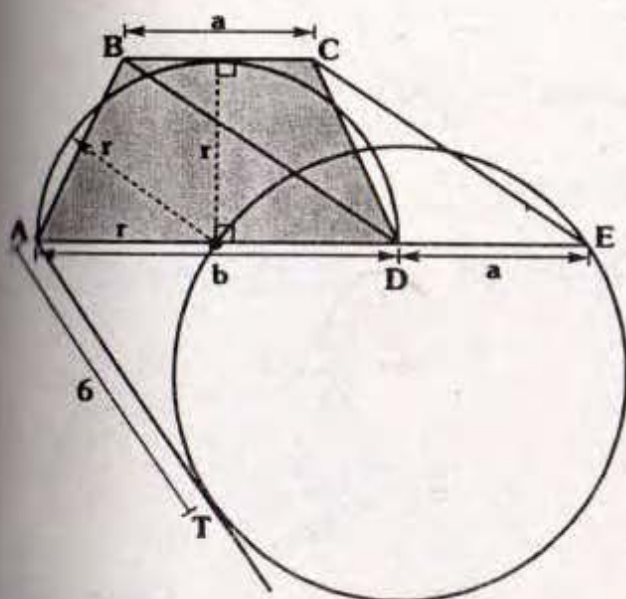
$$\therefore S_{(\square MBCN)} = 8$$

Clave **H**





**RESOLUCIÓN N° 178**



Piden  $S_{(\triangle ABCD)}$

• Como ABCD es un trapecio, entonces:

$$S_{(\triangle ABCD)} = \left( \frac{a+b}{2} \right) r$$

• Al ser DBCD paralelogramo, se tiene  $BC=DE=a$

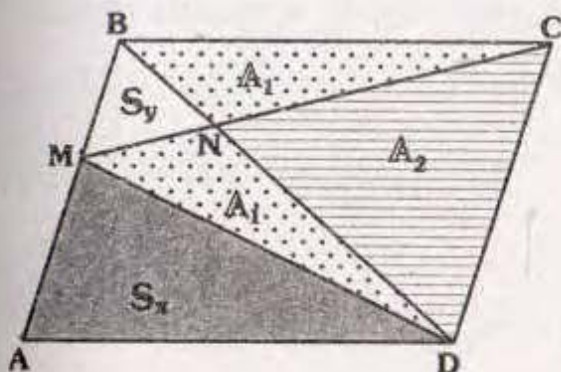
• Por teorema de la tangente:

$$6^2 = r(a+b)$$

$$\therefore S_{(\triangle ABCD)} = 18$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 179**



• Piden  $S_x$  en función de  $A_1$  y  $A_2$

• Como  $\overline{MB} \parallel \overline{DC} \Rightarrow S_{\triangle MND} = A_1$

• Por propiedad:  $(S_y) A_2 = A_1^2$

$$\Rightarrow S_y = \frac{A_1^2}{A_2}$$

• Como  $\overline{BD}$  es diagonal, entonces:

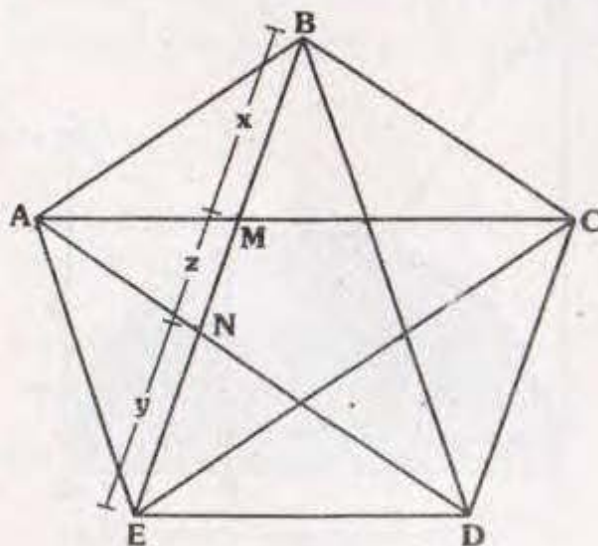
$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$$

$$S_x + A_1 + S_y = A_1 + A_2$$

$$\therefore S_x = \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 180**



Piden  $\frac{x}{y}$

Dato:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle CDE} = S_{\triangle DEA} = S_{\triangle EAB}$$

• Del dato podemos deducir:

- como  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} \Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

- como  $S_{\triangle ACDE} = S_{\triangle ADEA} \Rightarrow \overline{ED} \parallel \overline{AC}$

$S_{\triangle ACDE} = S_{\triangle ABCD} \Rightarrow \overline{DC} \parallel \overline{EB}$

• Luego EMCD y NBCD son paralelogramos

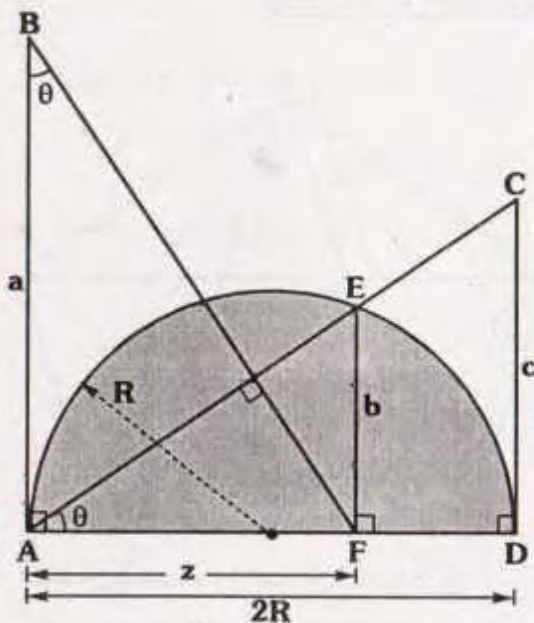
$\Rightarrow EM = CD = NB$

$\Rightarrow y + z = x + z \Rightarrow x = y$

$\therefore \frac{x}{y} = 1$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 181**



Piden  $S_{\triangle}$  en función de a, b y c

•  $S_{\triangle} = \frac{\pi R^2}{2}$

•  $\triangle AFE \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{2R}{c} = \frac{z}{b}$

$\Rightarrow R = \frac{c}{2b} \cdot z \quad \dots(I)$

•  $\triangle BAF \sim \triangle AFE \Rightarrow \frac{z}{a} = \frac{b}{z}$

$\Rightarrow z = \sqrt{ab} \quad \dots(II)$

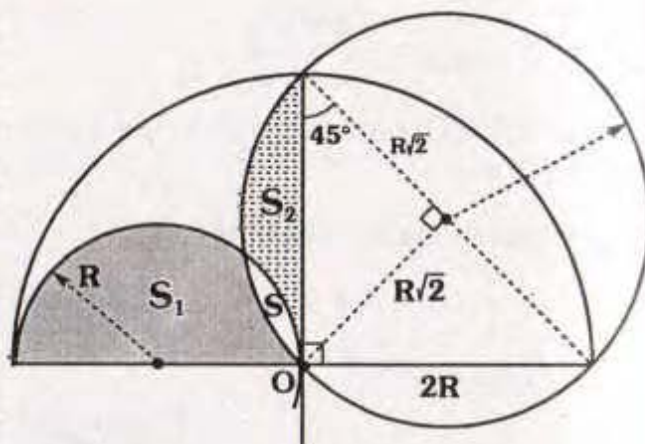
• De (I) y (II):

$R = \frac{c}{2b} \sqrt{ab}$

$\therefore S_{\triangle} = \frac{ac^2}{8b} \pi$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 182**



Nos piden  $S_1 - S_2$

• Notemos:  $S_1 - S_2 = (S_1 + S) - (S_2 + S)$

• Luego:

-  $S_1 + S = \frac{\pi R^2}{2} \quad \dots(I)$

-  $S_2 + S = \frac{1}{4} \pi (R\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} (R\sqrt{2})(R\sqrt{2})$



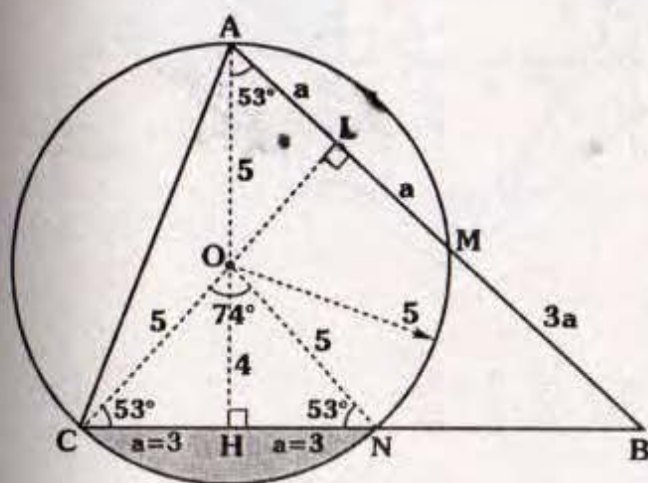
$$\Rightarrow S_2 + S = \frac{\pi R^2}{2} - R^2 \quad \dots (II)$$

• De (I) y (II):

$$S_1 - S_2 = R^2$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 183



Sea  $S_{\Delta}$  el área de la región sombreada

Nos piden  $S_{\Delta}$

Dato:  $3(AM) = 2(BM) \Rightarrow AM = 2a$  y  $MB = 3a$

• Como O es ortocentro del  $\Delta ABC$ , entonces  $\overline{CL}$  y  $\overline{AH}$  son alturas  $\Rightarrow \Delta ABC$ ; isósceles

• Tenemos entonces:  $AL = LM = a$

•  $\angle AHB$ : notable de  $37^\circ$  y  $53^\circ$

$$\Rightarrow m\angle OCN = 53^\circ \text{ y } m\angle CON = 74^\circ$$

• Finalmente:

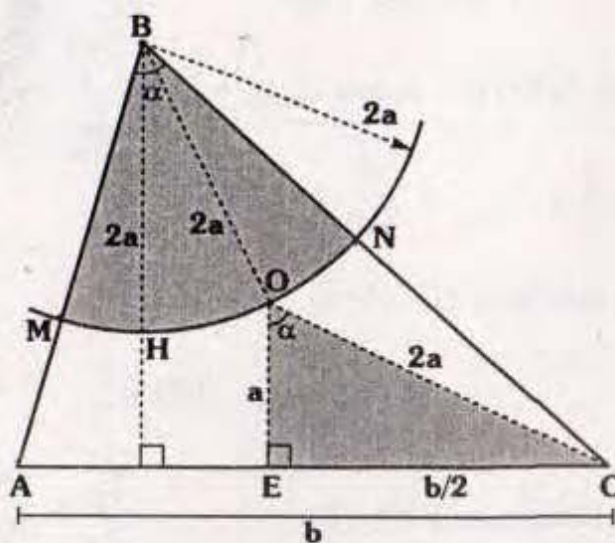
$$S_{\Delta} = S_{\Delta NOC} - S_{\Delta NOC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta} = \frac{74^\circ}{360^\circ} \pi 5^2 - \frac{(6)4}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta} = \frac{185}{36} \pi - 12$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 184



Nos piden  $S_{\Delta MON}$

• Como  $HB = OB$ , al trazar  $\overline{OE} \perp \overline{AC}$  se tendrá:  $HB = 2(OE)$

• Luego el  $\angle OEC$  es notable de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , entonces:  $m\angle EOC = m\angle ABC = 60^\circ$

• En el  $\angle OEC$ :

$$\frac{b}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{\Delta MON} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi (2a)^2$$

$$S_{\Delta MON} = \frac{\pi b^2}{18}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 185**

Sea  $S_1$  el área de la región mixtilínea LECB y  $S_2$  el área de la región triangular CDO.

Nos piden:  $\frac{S_1}{S_2}$

- Como  $m\angle EBC = 135^\circ$   
 $\Rightarrow m\angle EBA = 45^\circ$

$\Rightarrow \overline{EB} \parallel \overline{AC}$ , luego  $S_{\triangle FBC} = S_{\triangle EFA}$

•  $S_1 = S_{\triangle LAB} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi a^2 \dots (I)$

•  $\triangle AOB \cong \triangle COD \Rightarrow OA = OD$

$OH = \frac{a}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \dots (II)$

• Finalmente (I)+(II):  $\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi\theta}{90^\circ}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 186**

Nos piden  $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

- Como  $m\widehat{AC} = m\widehat{AN} \Rightarrow \overline{DC} \parallel \overline{MN}$

$m\widehat{AE} = m\widehat{AB} \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{BG}$

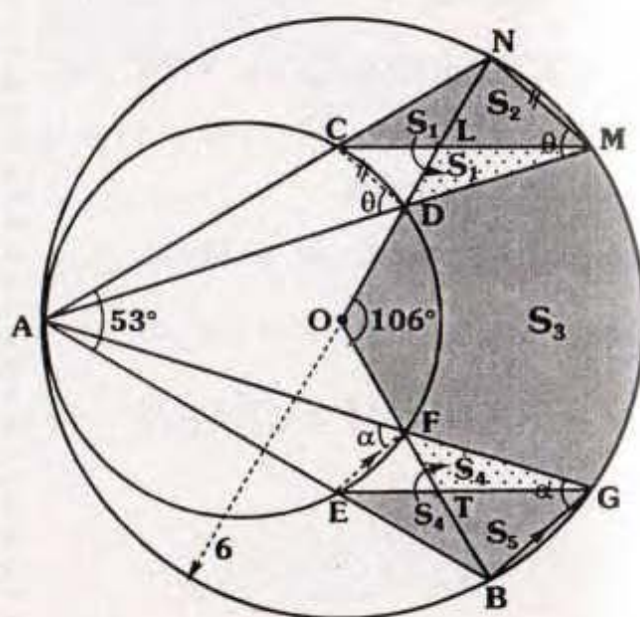
- Por propiedad de áreas:

$S_{\triangle CLN} = S_{\triangle DLM} = S_1$

$S_{\triangle ETB} = S_{\triangle FTG} = S_4$

- Luego:

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S_{\triangle NOB}$





$$\Rightarrow S_{\triangle NOB} = \frac{106^\circ}{360^\circ} \pi 6^2$$

$$\therefore S_{\triangle NOB} = \frac{53}{5} \pi$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 187**

Nos piden  $\frac{S_1}{S_2}$

• Notemos  $(AB)(AC) = (AE)(AD)$

$\Rightarrow \triangle EBCD$  es inscriptible

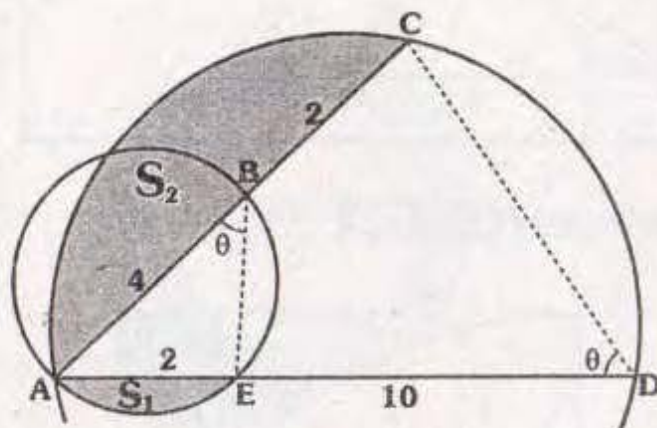
• Luego  $m\angle ABE = m\angle CDA$

• Las regiones sombreadas son semejantes, entonces:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = 9$$

Clave **D**



**RESOLUCIÓN N° 188**

Nos piden el área de la región sombreada

• Optemos hallar el área por partes

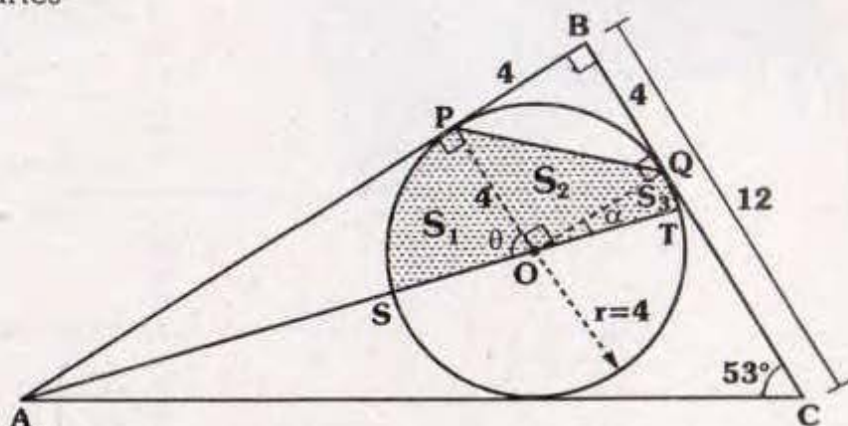
• De la observación:  $r = 4$

• Luego:

$$S_2 = \frac{(4)(4)}{2} = 8$$

$$S_1 + S_3 = S_D = \frac{1}{4} \pi (4)^2 = 4\pi$$

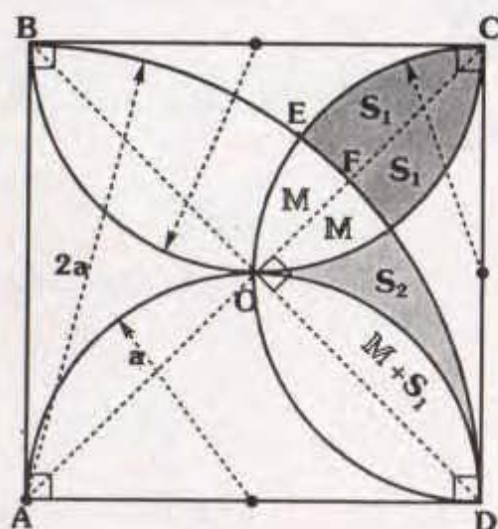
$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 = 4(\pi + 2)$$



Clave **E**



**RESOLUCIÓN N° 189**



Nos piden la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

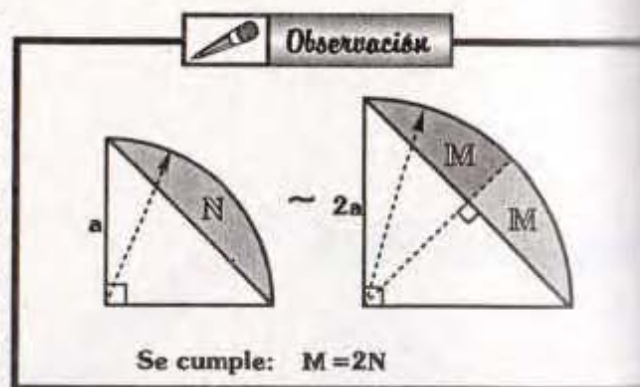
- Notemos que el punto de concurrencias de las tres semicircunferencias es el centro del cuadrado.
- De la observación:

$$2M + S_1 + S_2 = 2(M + S_1)$$

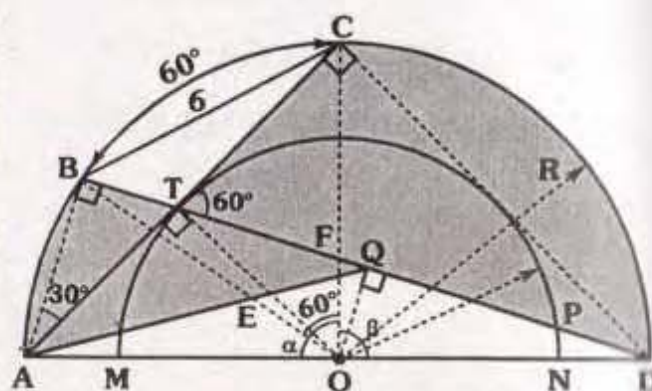
$$\Rightarrow S_2 = S_1$$

$$\therefore \frac{S_2}{2S_1} = \frac{1}{2}$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 190**



Nos piden el área de la región sombreada.

- Como  $m\widehat{TP} = 120^\circ \Rightarrow m\angle CTP = 60^\circ$ ,  
luego  $m\angle BAC = 30^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 60^\circ$
- $\triangle BOC$ : equilátero  $\Rightarrow R=6$
- Como  $\overline{AB} \parallel \overline{OQ}$  y  $\overline{OT} \parallel \overline{DC}$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEO} = S_{\triangle BEQ} \text{ y } S_{\triangle TFC} = S_{\triangle OFD}$$

- El área pedida es:

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{\frac{\alpha}{360^\circ} \pi 6^2} + \frac{S_{\triangle DOC}}{\frac{\beta}{360^\circ} \pi 6^2}$$

- Como  $\alpha + \beta = 120^\circ$

$$\therefore S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC} = 12\pi$$

**Clave C**



**RESOLUCIÓN N° 191**

Sea  $A_{cc}$  el área de la corona circular

Nos piden  $A_{cc}$

• Los  $\angle$ s OSB y OTA son notables de  $37^\circ$  y  $53^\circ$ .

• Hallemos los radios de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ :

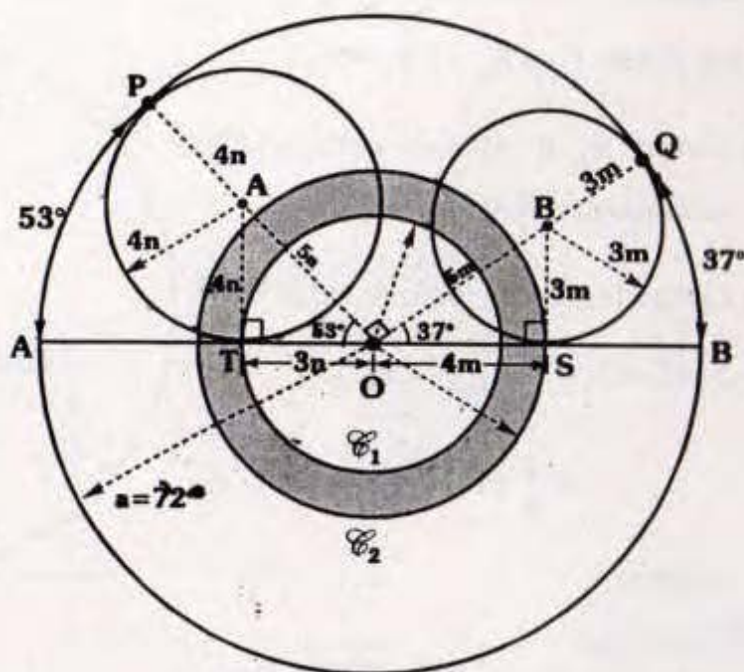
$$9n = 72 \Rightarrow n = 8$$

$$8m = 72 \Rightarrow m = 9$$

$$A_{cc} = \pi(4m)^2 - \pi(3n)^2$$

• Finalmente tenemos:

$$\therefore A_{cc} = 720\pi$$



**Clave** E

**RESOLUCIÓN N° 192**

Nos piden  $S_D$

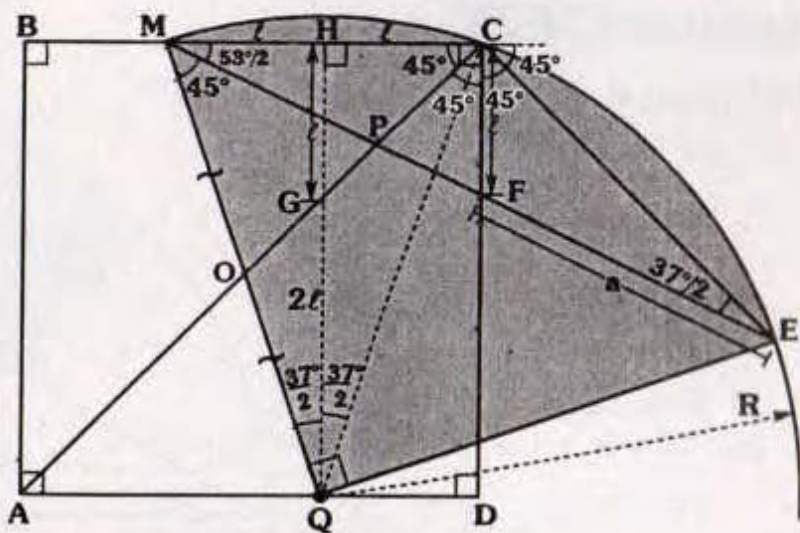
$$\text{Sabemos que } S_D = \frac{1}{4}\pi R^2$$

• En el  $\triangle MQC$ , se traza la altura

$\overline{QH} \Rightarrow G$  es baricentro de dicho triángulo, luego  $QG = 2(GH)$  y como  $m\angle GCH = 45^\circ \Rightarrow \triangle CHQ$  es notable de  $37^\circ/2$

• Como  $m\angle MCE = 135^\circ$

$$\Rightarrow m\angle EMC = 53^\circ/2$$



• En  $\triangle MCF$ , como  $\overline{CE}$  es bisectriz exterior:  $\Rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

$$\therefore S_D = \frac{\pi a^2}{2}$$

**Clave** D

**RESOLUCIÓN N° 193**

Nos piden  $S_1 + S_2 - (A_1 + A_2)$

• Como  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son ortogonales, entonces:  $m\angle ACB = 45^\circ$

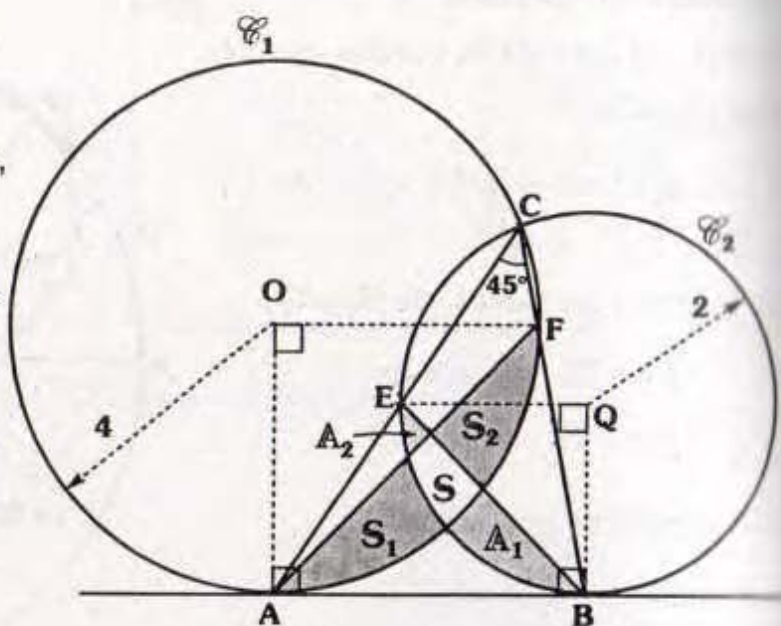
• Luego tenemos:  $m\widehat{AF} = m\widehat{EB} = 90^\circ$

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= S_{\triangle AOF} - S_{\triangle AEF} \\ &= \frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{(4)(4)}{2} = 4\pi - 8 \end{aligned}$$

• También:

$$A_1 + S + A_2 = \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{(2)(2)}{2} = \pi - 2$$

$$\therefore S_1 + S_2 - (A_1 + A_2) = 3(\pi - 2)$$



**Clave** E

**RESOLUCIÓN N° 194**

Nos piden el área de la región sombreada.

• Como

$$m\angle PHQ = m\angle HQO = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{HP} \parallel \overline{OQ} \Rightarrow S_{\triangle HMO} = S_{\triangle MPQ} = S_1$$

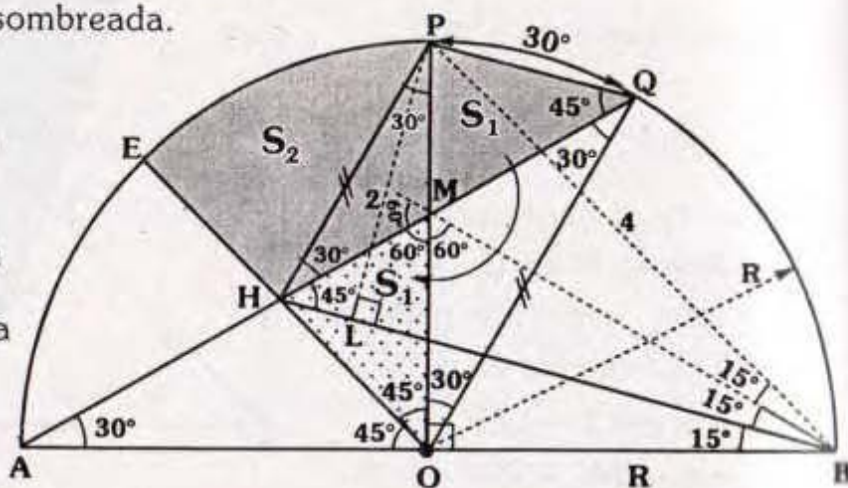
• El área de la región pedida es " $S_1 + S_2$ ", luego:

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle POE}$$

• Notemos que H es excentro del  $\triangle MOB$ , entonces:

$$m\angle OBH = m\angle HBM = 15^\circ$$

• En  $\triangle PLB$ : notable de  $30^\circ$ , entonces:  $PB = 4$





•  $\angle POB$ : notable de  $45^\circ$ :

$$\Rightarrow R\sqrt{2} = 4 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

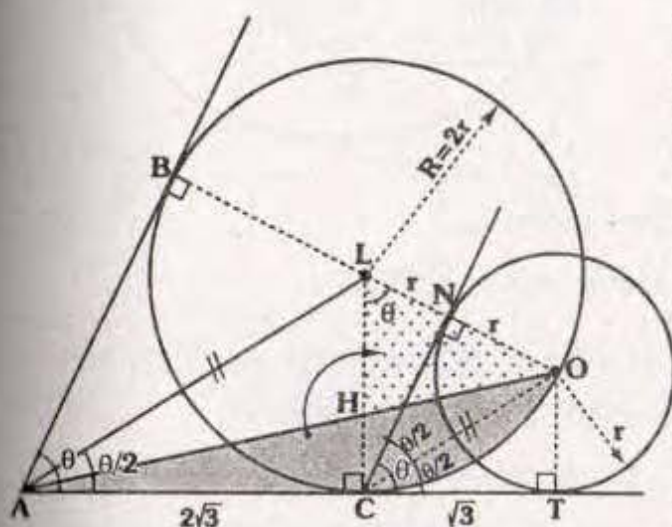
• Finalmente:

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle POE} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \pi (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore S_{\triangle POE} = \pi$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 195**



Nos piden el área de la región sombreada

• Como :

$$m\widehat{BC} = 180^\circ - \theta \text{ y } m\widehat{CO} = \theta \Rightarrow$$

$$m\widehat{BCO} = 180^\circ, \text{ luego } \overline{BO} \text{ es diámetro}$$

$$\bullet m\angle NOC = 90^\circ - \frac{\theta}{2}, \text{ es decir:}$$

$$m\angle ONC = \frac{m\widehat{BC}}{2} \Rightarrow O; N; L \text{ y } B \text{ son}$$

colineales

• Como

$\overline{AL} \parallel \overline{CO} \Rightarrow S_{\triangle AHC} = S_{\triangle HLO}$  el área pedida es  $S_{\triangle CLO}$

$$\bullet \triangle ACL \sim \triangle CTO \Rightarrow R = 2r$$

Luego:

$LN = NO = r \Rightarrow CL = CO \Rightarrow \triangle CLO$  es equilátero  $\Rightarrow \theta = 60^\circ$

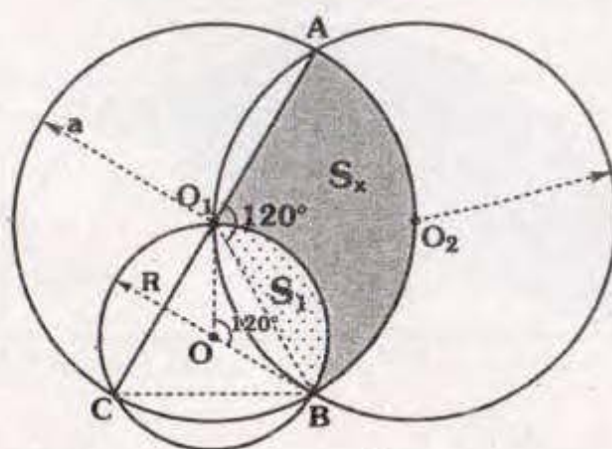
$$\bullet \triangle CTO: \text{ notable de } 30^\circ \Rightarrow r = 1$$

$$S_{\triangle CLO} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi (2)^2$$

$$\therefore S_{\triangle CLO} = \frac{2}{3} \pi$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 196**



Nos piden  $S_x$

$$\text{Dato: } R = 2\sqrt{3}$$

• Notemos primero que:  $\triangle AO_1O_2$ ,  $\triangle O_1O_2B$  y  $\triangle O_1CB$  son equiláteros

$$\bullet \text{ En } \triangle OO_1B: O_1B = R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CB=6 \Rightarrow a=6$$

$$\bullet \quad S_x + S_1 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi 6^2 = 12\pi \quad \dots(I)$$

$$\bullet \quad S_1 = S_{\triangle O,OB} - S_{\triangle OOB}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

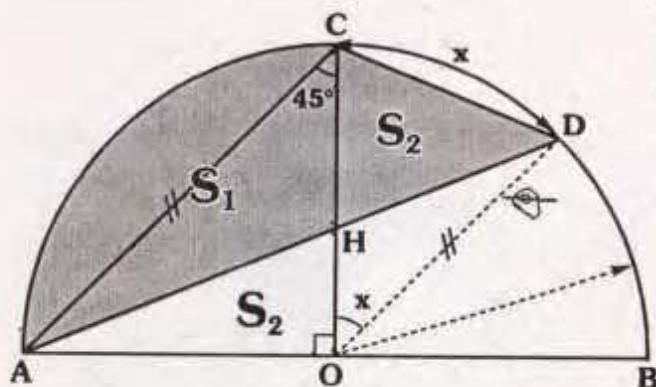
$$\Rightarrow S_1 = 4\pi - 3\sqrt{3} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

$$\therefore S_x = 8\pi + 3\sqrt{3}$$

Clave **C**

### RESOLUCIÓN N° 197



Piden  $m\widehat{CD}$

$$\bullet \text{ Sea } m\widehat{CD} = x \Rightarrow m\angle COD = x$$

• Como el área de la región sombreada es igual a la no sombreada, entonces la parte sombreada es la mitad del área total.

$$\bullet \quad S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{\odot}$$

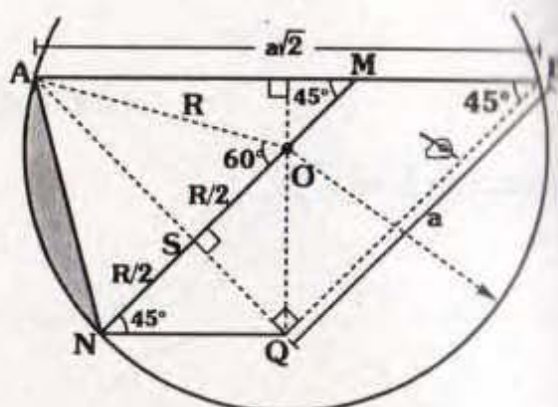
$$\Rightarrow S_{\triangle AOH} = S_{\triangle CHD} = S_2$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{OD}$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave **C**

### RESOLUCIÓN N° 198



Nos piden  $S_{\triangle}$

$$\text{Dato: } AB = \sqrt{2}(BQ)$$

• Se traza  $\overline{BQ} \parallel \overline{MN}$  tal que  $BQ=MN \Rightarrow$  NMBQ es paralelogramo.

• Como  $AB = \sqrt{2}(BQ)$  y

$$m\angle ABQ = 45^\circ \Rightarrow m\angle AQB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AQ} \perp \overline{NM}$$

• Debido a que  $AQ=QB$

$$\Rightarrow \overline{QO} \perp \overline{AB}$$

• En  $\triangle NQO$ :  $NS=SO \Rightarrow$  En el  $\triangle ASO$ :

$$AO=2(OS) \Rightarrow m\angle AOS=60^\circ$$

• Finalmente:

$$S_{\triangle} = S_{\triangle AON} - S_{\triangle AON}$$

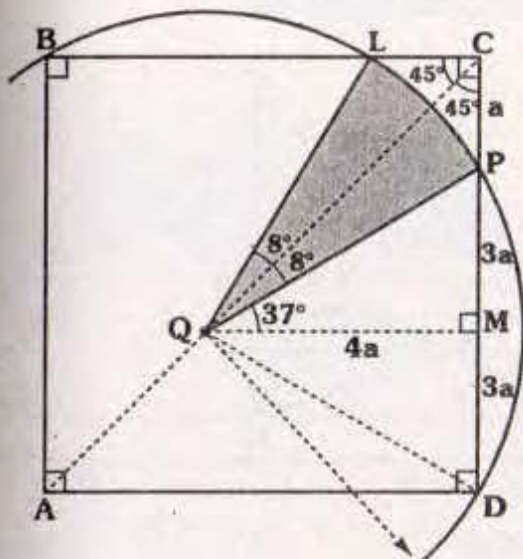
$$S_{\triangle} = \frac{1}{6} \pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\therefore S_{\Delta} = \frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 199**



Nos piden  $\frac{S_{\Delta LQP}}{S_{(ABCD)}}$

Dato:  $PD = 6(CP)$

• Por teorema de la secante:

$(CL)(CB) = (CP)(CD) \Rightarrow CP = CL$ , luego

QLCP: Trapezoide simétrico

• Sea  $CP = a \rightarrow PD = 6a$ , se traza

$\overline{QM} \perp \overline{PD}$  (M en  $\overline{PD}$ )

$\rightarrow PM = MD = a$  y  $QM = MC = 4a$

•  $\angle QMP$  es notable de  $37^\circ$

$\rightarrow m\angle LQP = 16^\circ$

• Luego tenemos:

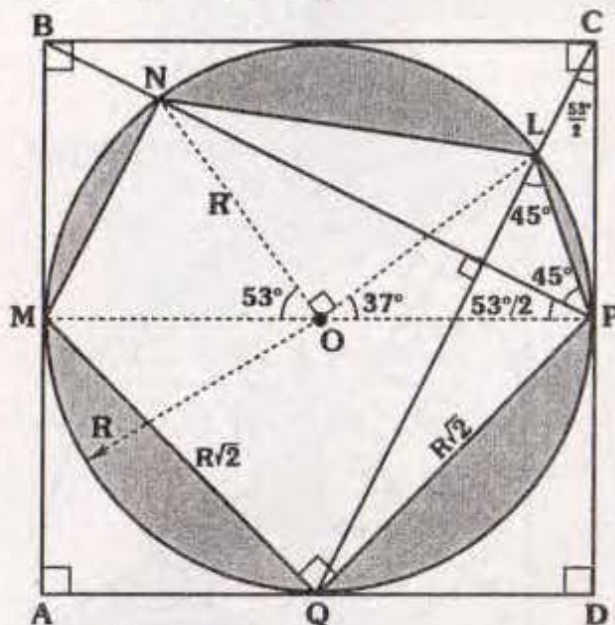
$$S_{\Delta LQP} = \frac{16^\circ}{360^\circ} \pi (5a)^2$$

$$S_{(ABCD)} = (7a)^2$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta LQP}}{S_{(ABCD)}} = \frac{10\pi}{441}$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 200**



Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas, sea S dicha suma.

$$S = \pi R^2 - S_{(MNLQP)} \quad \dots (I)$$

• Hallemos el área de MNLQP

$$S_{(MNLQP)} = S_{(MQP)} + S_{\Delta MON} + S_{\Delta NOL} + S_{\Delta LOP}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLQP)} = R^2 + \frac{R^2}{2} \sin 53^\circ + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \sin 37^\circ$$

$$S_{(MNLQP)} = \frac{11}{10} R^2$$

$$\text{En (I): } S = \pi R^2 - \frac{11}{10} R^2$$

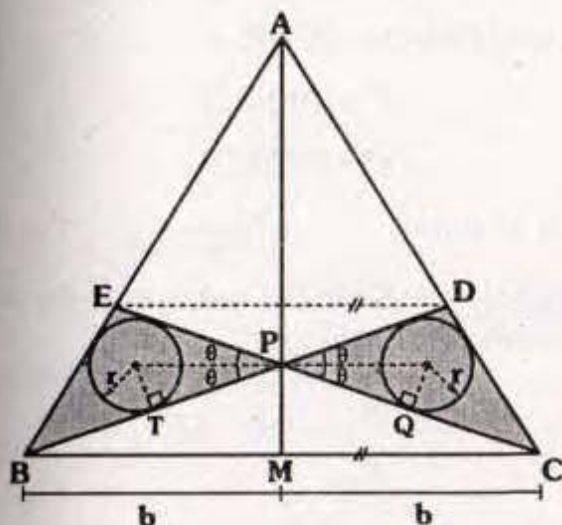
$$\therefore S = \frac{R^2}{10} (10\pi - 11)$$

Clave **B**





**RESOLUCIÓN N° 203**



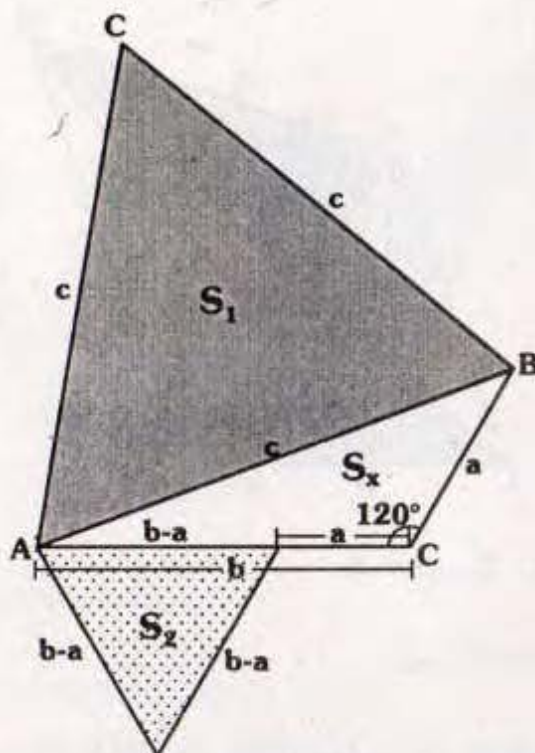
Piden:  $\frac{AB}{AC}$

- Como  $AM=MC$  y notamos las cevianas concurrentes  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CE}$  y  $\overline{AM} \Rightarrow$  por teorema de Ceva:  $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$
- Como  $\overline{ED} \parallel \overline{BC} \Rightarrow S_{\triangle BEP} = S_{\triangle PDC}$
- Debido a que los triángulos BEP y PDC tienen igual inradio, entonces tienen igual semiperímetro (sea " $\ell$ " el semi-perímetro)
- Notemos que  $PT=PQ$   
 $\Rightarrow \ell - BE = \ell - CD \Rightarrow BE = CD$
- Luego BEDC es trapecio isósceles  $\Rightarrow AB=AC$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = 1$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 204**



Datos:  $S_1=31$  y  $S_2=19$

Piden:  $S_x$

$$S_x = \frac{ab}{2} \sin 120^\circ = ab \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1 = c^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{y} \quad S_2 = (b-a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

• En  $\triangle ABC$ , por teorema de cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

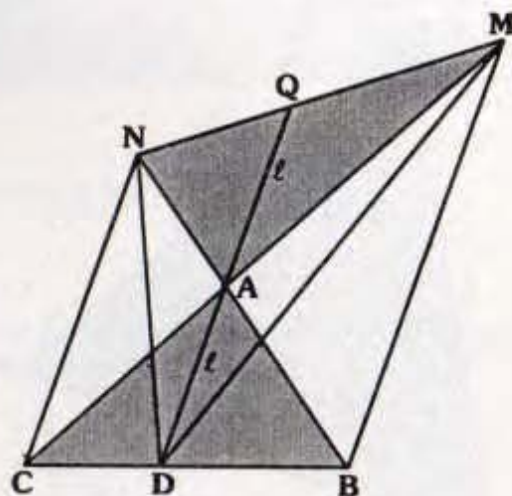
$$\text{• Luego: } S_1 - S_2 = 3(ab) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_1 - S_2 = 3S_x$$

$$\therefore S_x = 4$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 205**



Dato  $S_{(\Delta ABC)} = A$

Piden:  $S_{(\Delta MDN)}$

• Como  $\overline{NC} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{MB} \Rightarrow AD=AQ$

• Como  $DQ = 2(AQ) \Rightarrow S_{(\Delta MDN)} = 2S_{\Delta AMN}$

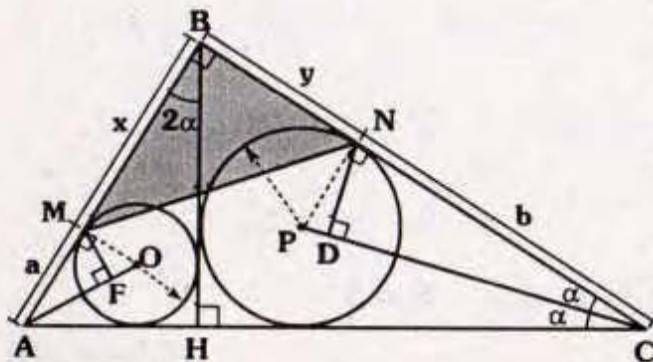
• Debido a que  $\overline{NC} \parallel \overline{BM}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMN}$$

$$\therefore S_{(\Delta MDN)} = 2A$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 206**



• Piden:  $S_{\Delta MBN}$

• Dato:  $(AO)(AF)(PC)(CD) = k$

• En  $\Delta OMA$  y  $\Delta CNP$ :

$$a^2 = (AF)(AO) \quad y$$

$$b^2 = (PC)(CD)$$

• En el dato:  $a^2 b^2 = k \quad \dots (I)$

•  $\Delta AHB \sim \Delta BHC$ , comparando elementos homólogos:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow ab = xy \quad \dots (II)$$

$$S_{\Delta MBN} = \frac{xy}{2}$$

• Usando (I) y (II):

$$S_{\Delta MBN} = \frac{\sqrt{k}}{2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 207**

• Para el  $\Delta ABC$ :

•  $r_a, r_b$  y  $r_c$  son exradios

•  $r$  es inradio

•  $p$ : semiperímetro

• Dato:  $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = 100$

• Nos piden:  $2p$

• Usemos los siguientes teoremas:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S_{\Delta ABC} = pr = \sqrt{r_a r_b r_c} \Rightarrow p^2 r = r_a r_b r_c$$

• En el dato dividiendo entre  $r_a r_b r_c$ , se tie-





[illegible]
$$\therefore S_{\Delta ALC} = \frac{h^2 \operatorname{tg} \theta}{2}$$

**Clave C**

Clave  A

- Como I es incentro, entonces el  $\triangle AIM$  y  $\triangle CIN$  son isósceles.



$$AM=MI=a \text{ y } NC=NI=b$$

$$\Rightarrow MN=k-a-b$$

$$S_{\Delta MNE} = (k-a-b)r_b$$

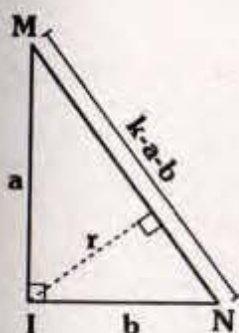
• Por teorema  $r_b - r = AC = k$

$$\Delta MIN: (k-a-b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow k^2 - 2ka - 2kb + 2ab = 0$$

$$\Rightarrow 2k(k-a-b) = k^2 - 2ab \quad \dots(I)$$

•  $\Delta MIN$ :



Por relaciones métricas:

$$ab = r(k-a-b)$$

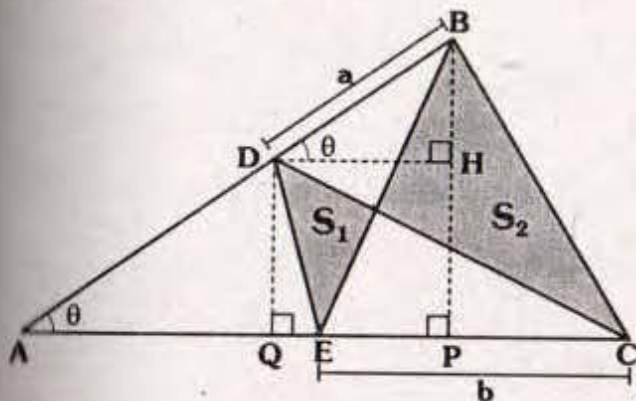
• En (I):  $2(k-a-b) \underbrace{(k+r)}_{r_b} = k^2$

$$\Rightarrow 2S_{\Delta MNE} = k^2$$

$$\therefore S_{\Delta MNE} = \frac{k^2}{2}$$

Clave **C**

### RESOLUCIÓN N° 213



• Nos piden  $S_2 - S_1$

• Notemos que:

$$S_2 - S_1 = \underbrace{S_{\Delta EBC}}_{\frac{b(BP)}{2}} - \underbrace{S_{\Delta EDC}}_{\frac{b(DQ)}{2}}$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = \frac{b}{2} \underbrace{(BP - DQ)}_{BH}$$

• Pero BH en  $\Delta DHB$ :

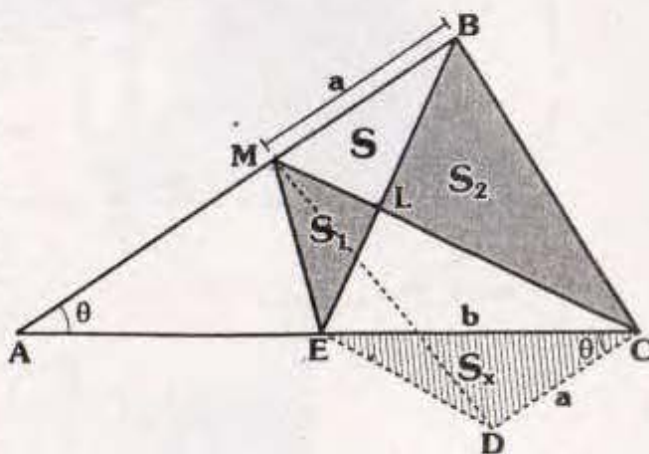
$$BH = a \sin \theta$$

$$\therefore S_2 - S_1 = \frac{ab}{2} \sin \theta$$

Clave **D**



### Otra forma de Resolver



• Sea el área de la región MLB : S

• Se traza  $\overline{CD} \parallel \overline{BM}$ , tal que  $CD=BM$   
 $\Rightarrow$  MBCD es paralelogramo.

$$S_x = S_{\Delta ECD} = \frac{ab \sin \theta}{2}$$







• Por teorema de la tangente:

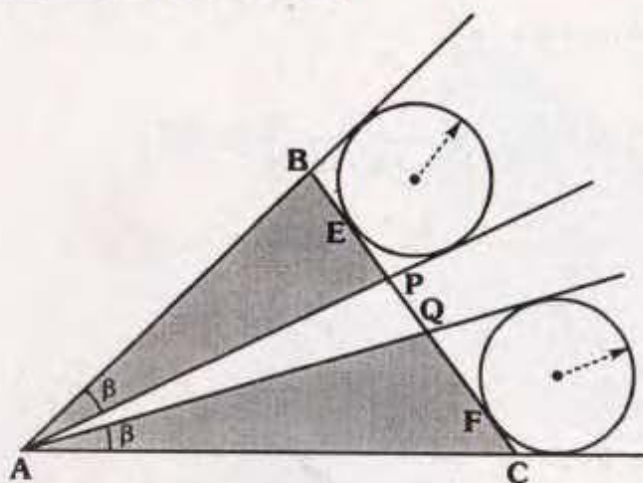
• En  $\triangle CBF$ :  $(BO)^2 = (BE)(BF)$   
 $(BC)^2 = (BE)(BF)$  }  $BC=BD$

• En  $\triangle CBD$ :  $S_{\triangle CBD} = \frac{(10)(10)}{2} \sin 74^\circ$

$\therefore S_{\triangle CBD} = 48$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 216**



Piden  $\frac{1}{QF} + \frac{1}{FC}$

Dato:  $\frac{1}{BE} + \frac{1}{EP} = k$

• Por el teorema ... (página N° 43)

$S_{\triangle AQC} = (QF)(FC) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$

$S_{\triangle ABP} = (BE)(EP) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$

• Por razón de áreas:

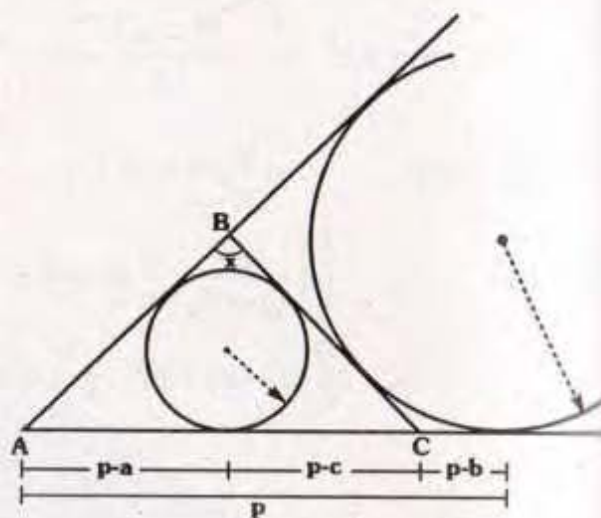
$\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{QC}{BP} = \frac{(QF)(FC)}{(BE)(EP)}$

$\Rightarrow \frac{1}{QF} + \frac{1}{FC} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{EP}$

$\therefore \frac{1}{QF} + \frac{1}{FC} = k$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 217**



Piden x

Por dato:

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} [(p-a)(p-c) + p(p-a)]$

• Por teorema:

$S_{\triangle ABC} = (p-a)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

$S_{\triangle ABC} = p(p-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

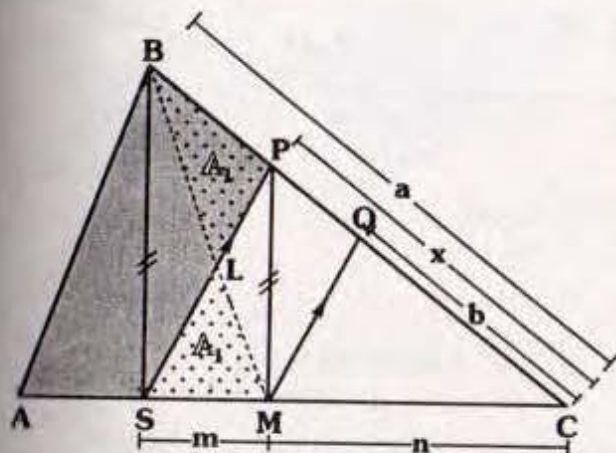
• Reemplazando en el dato:

$1 = \frac{1}{4} \left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right]$   
 $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$



$$1 = \frac{1}{2\sin x} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 218**

Piden  $x$  en función de " $a$ " y " $b$ "

$$\text{Dato: } S_{\triangle ABPS} = S_{\triangle SPC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{2}$$

• Como  $AM = MC$ , entonces:

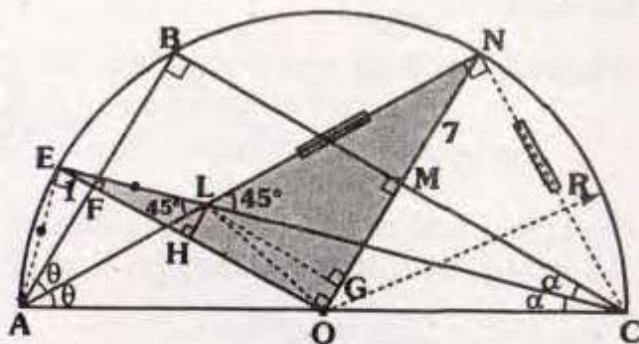
$$S_{\triangle ABM} = \frac{S_{\triangle ABC}}{2}$$

$$\text{• Luego: } S_{\triangle ASLM} = S_{\triangle ABLP} \Rightarrow \overline{SB} \parallel \overline{MP}$$

• Por teorema de Tales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{b} &= \frac{m+n}{n} \\ \frac{a}{x} &= \frac{m+n}{n} \end{aligned} \right\} \frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 219**

Nos piden  $S_{\triangle EONL}$

• Hallemos el área pedida así:

$$S_{\triangle EONL} = S_{\triangle EOL} + S_{\triangle EOL} \quad \dots (I)$$

• Notemos  $BM = MC = OF = R - 1$  y  $OM = R - 7$

$$\text{• En } \triangle OMC: R^2 = (R - 1)^2 + (R - 7)^2$$

$$\Rightarrow R = 13$$

$$\text{• En } \triangle LGN \cong \triangle NMC \Rightarrow LG = 7$$

$$\text{• En } \triangle AFE \cong \triangle EHL \Rightarrow LH = 1$$

• Finalmente:

$$S_{\triangle EOLN} = \frac{(R)(LG)}{2}$$

$$S_{\triangle EOL} = \frac{(R)(LH)}{2}$$

• En (I):

$$S_{\triangle EONL} = \frac{13(7)}{2} + \frac{13(1)}{2}$$

$$S_{\triangle EONL} = 52$$

Clave **B**

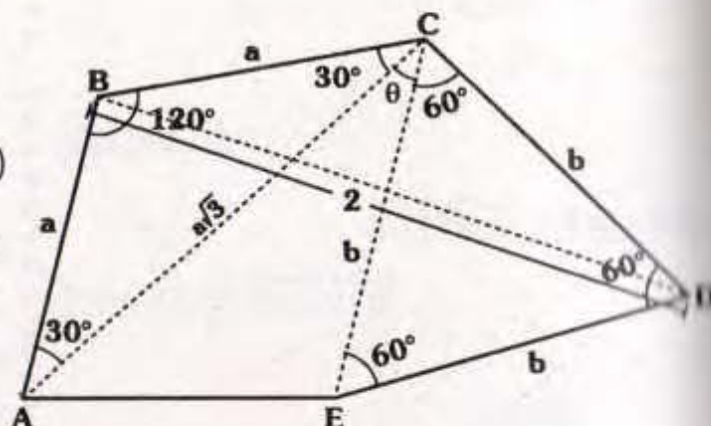
**RESOLUCIÓN N° 220**

Nos piden  $S_{\triangle ABCDE}$

- Hallemos el área que nos piden, así:

$$S_{\triangle ABCDE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle ECD} \dots (I)$$

- Notemos que el  $\triangle ECD$  es equilátero y el triángulo  $ABC$  es isósceles, donde  $m\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$



- $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ;  $S_{\triangle ECD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$  y  $S_{\triangle ACE} = \frac{ab\sqrt{3}}{2} \sin\theta$

- En  $\triangle BCD$ , por teorema de cosenos:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(90^\circ + \theta) = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \sin\theta = 4 \dots (II)$$

- En (I):  $S_{\triangle ABCDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{2} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + b^2 + 2ab \sin\theta)$

$$\therefore S_{\triangle ABCDE} = \sqrt{3}$$

**Clave** I

**RESOLUCIÓN N° 221**

Nos piden  $S_{\triangle EACF}$

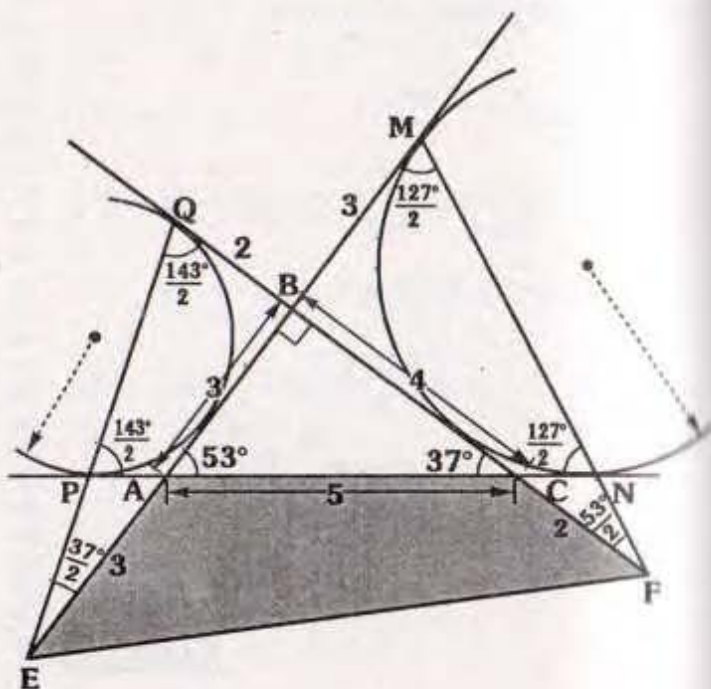
- Por teorema:

$$CQ = AM = \frac{3+4+5}{2} = 6$$

$$\Rightarrow BQ = 2 \text{ y } BM = 3$$

- $\angle EBQ$ : notable de  $37^\circ/2 \Rightarrow EA = 3$
- $\angle FBM$ : notable de  $53^\circ/2 \Rightarrow FC = 2$
- Finalmente:

$$S_{\triangle EACF} = S_{\triangle EBF} - S_{\triangle ABC}$$



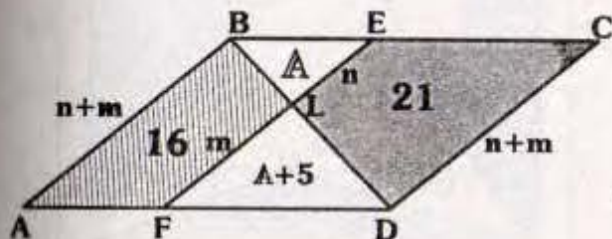


$$S_{\triangle EACF} = \frac{(6)(6)}{2} - \frac{(3)(4)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle EACF} = 12$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 222**



Piden  $S_{\square ABCD}$

• Como  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC}$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD} = 2(21 + A)$$

•  $\triangle BLE \sim \triangle BDE$

$$\Rightarrow \frac{A}{21 + A} = \frac{n^2}{(m + n)^2} \quad \dots(I)$$

•  $\triangle FLD \sim \triangle ABD$

$$\Rightarrow \frac{A + 5}{21 + A} = \frac{n^2}{(m + n)^2} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

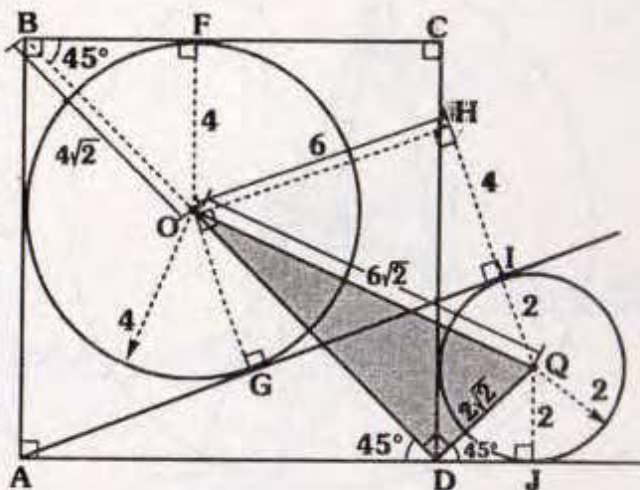
$$\sqrt{\frac{A}{21 + A}} + \sqrt{\frac{A + 5}{21 + A}} = 1$$

$$\Rightarrow A = 4$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = 50$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 223**



Piden  $S_{(ABCD)}$

• En  $\triangle BFO$ :  $OB = 4\sqrt{2}$

• En  $\triangle DJQ$ :  $DQ = 2\sqrt{2}$

• Notemos que OGIH es rectángulo

• En  $\triangle OHQ$ :  $OQ = 6\sqrt{2}$

• En  $\triangle ODQ$ :  $OD = 8$

$$\Rightarrow BD = 8 + 4\sqrt{2}$$

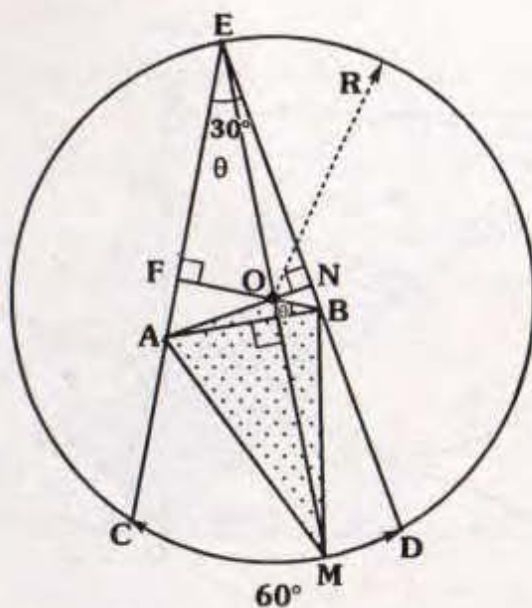
• Finalmente:

$$S_{(ABCD)} = \frac{(BD)^2}{2}$$

$$\therefore S_{(ABCD)} = 16(3 + 2\sqrt{2})$$

**Clave B**

RESOLUCIÓN N° 224



Nos piden:  $S_{\triangle AOBM}$

- Como O es ortocentro del  $\triangle AEB$

$$\Rightarrow \overline{EO} \perp \overline{AB}$$

$$\bullet S_{\triangle AOBM} = \frac{(3)(R)}{2} \sin 90^\circ = \frac{3}{2}R \quad \dots(I)$$

- $\angle OFE \sim \angle AFB$ :

$$\frac{R}{3} = \frac{EF}{FB} \quad \dots(II)$$

$$\bullet \text{ En } \triangle ANE: \frac{EF}{FB} = \sqrt{3}$$

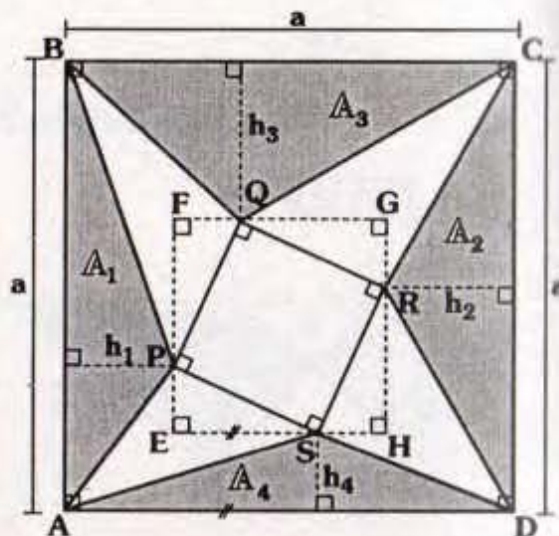
$$\bullet \text{ En (II): } R = 3\sqrt{3}$$

- En (I):

$$\therefore S_{\triangle AOBM} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 225



Analizando por partes:

- Se traza EFGH tal que  $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$

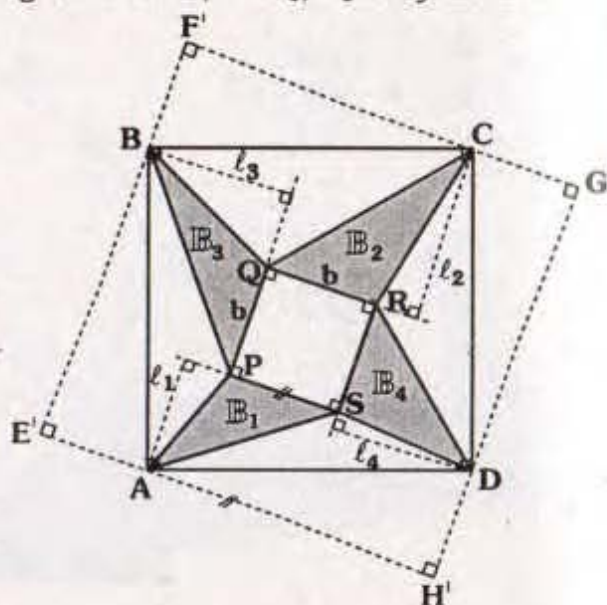
- Notemos que EFGH es un cuadrado

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = h_3 + h_4$$

$$\Rightarrow \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{ah_3}{2} + \frac{ah_4}{2}$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = A_3 + A_4$$

- Ahora analicemos las áreas de las regiones APS, PBQ, QCR y DRS.





• Se traza  $E'F'G'H'$  tal que  $\overline{E'F'} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow$   
 $E'F'G'H'$  es cuadrado

$$\Rightarrow \ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4$$

$$\frac{b\ell_1}{2} + \frac{b\ell_2}{2} = \frac{b\ell_3}{2} + \frac{b\ell_4}{2}$$

$$\Rightarrow B_1 + B_2 = B_3 + B_4$$

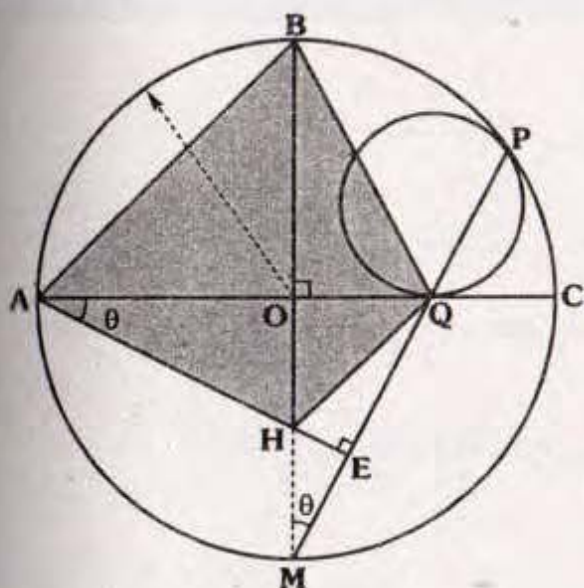
• Finalmente:

$$\text{como } S_1 = A_1 + B_1 ; S_2 = A_2 + B_2 ;$$

$$S_3 = A_3 + B_3 \text{ y } S_4 = A_4 + B_4$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3 + S_4$$

### RESOLUCIÓN N° 226



Nos piden  $S_{\triangle ABQH}$

Dato  $AQ = a$

• Por teorema de circunferencia la prolongación de  $\overline{PQ}$  corta a la circunferencia en M tal que  $m\widehat{AM} = m\widehat{MC} \Rightarrow$  la pro-

longación de  $\overline{OH}$  llega a M.

$$\triangle AOH \cong \triangle MOQ \Rightarrow OH = OQ$$

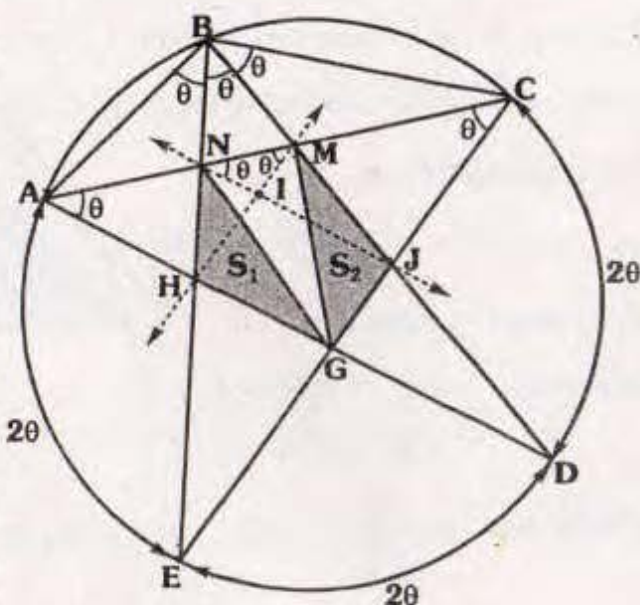
$$\text{• Luego } AQ = BH = a$$

$$S_{\triangle ABQH} = \frac{(AQ)(BH)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABQH} = \frac{a^2}{2}$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 227



$$\text{Piden: } \frac{S_1}{S_2}$$

• Por ángulo inscrito:

$$m\angle GAC = m\angle ACE = \theta$$

• Notemos también:

$\triangle ABMH$  y  $\triangle NBCJ$ : inscriptibles

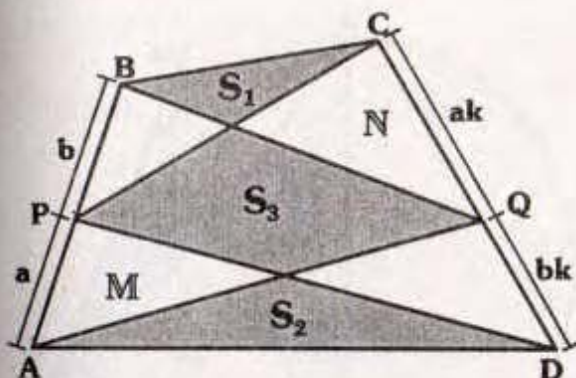
$$\Rightarrow m\angle AMH = \theta = m\angle CNJ$$

• Notemos ahora:  $\overline{HM} \parallel \overline{EC}$  y  $\overline{NJ} \parallel \overline{AD}$

$\Rightarrow HIJG$  es paralelogramo





**RESOLUCIÓN N° 229**

Por demostrar:  $S_1 + S_2 = S_3$

• El dato se puede escribir así:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{a}{b}$$

• Si analizamos APCQ con respecto al total:

$$S_{\triangle APCQ} = \frac{a}{a+b} \cdot S_{\triangle ABCD} \dots (I)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle PBC} + S_{\triangle AQD} = \frac{b}{a+b} \cdot S_{\triangle ABCD}$$

• También:

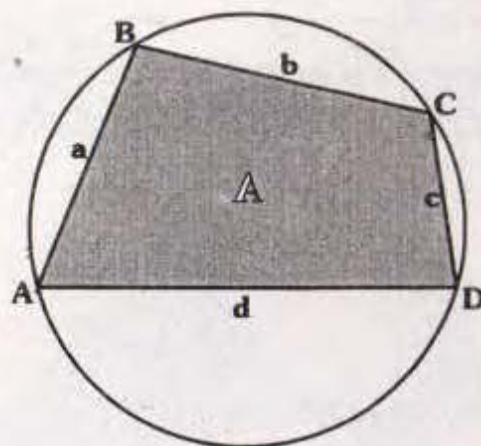
$$S_{\triangle BQDP} = \frac{b}{a+b} S_{\triangle ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCQ} + S_{\triangle APD} = \frac{a}{a+b} \dots (II)$$

• De (I) y (II):

$$M + S_3 + N = S_1 + N + M + S_2$$

$$\therefore S_3 = S_1 + S_2$$

**RESOLUCIÓN N° 230**

En el gráfico,  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Por demostrar:  $4A \leq p^2$

• Como:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Usemos:  $MG \leq MA$

para:

$$(p-a); (p-b); (p-c) \text{ y } (p-d)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} \leq \frac{2p}{4}$$

$$\therefore 4A \leq p^2$$

Analizando por partes:

- $$m\angle HLA = \alpha \Rightarrow \overline{LA} \parallel \overline{EO}$$

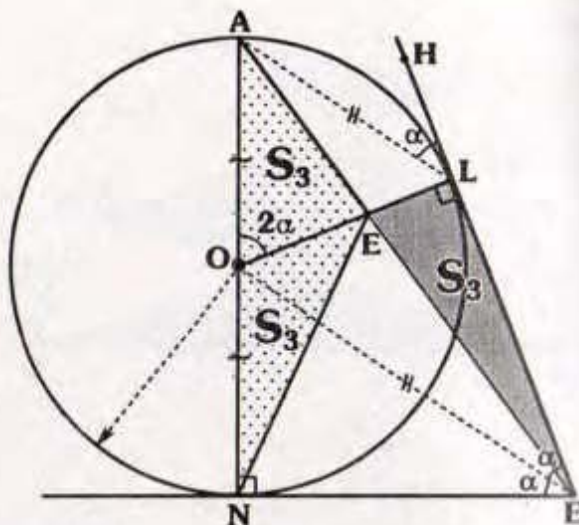
$$\Rightarrow S_{\Delta EOA} = S_3$$

- Como  $AO=ON \Rightarrow S_{\triangle OEA} = S_{\triangle OEN} = S_3$

$$\Rightarrow S_{AAEN} = 2S_3$$

- Análogamente para la otra parte:

$$\therefore S_1 = 2(S_2 + S_3)$$



**Clave B**

Nos piden  $S_{\triangle QMNL}$ .

- Por teorema  $MN=QL=2\sqrt{ab}$
- Se traza la tangente común interior:

$$\Rightarrow ME=EN=ET=TI=\sqrt{ab}$$

- Usando:  $S_{\triangle QMNL} = (QL)(EJ)$

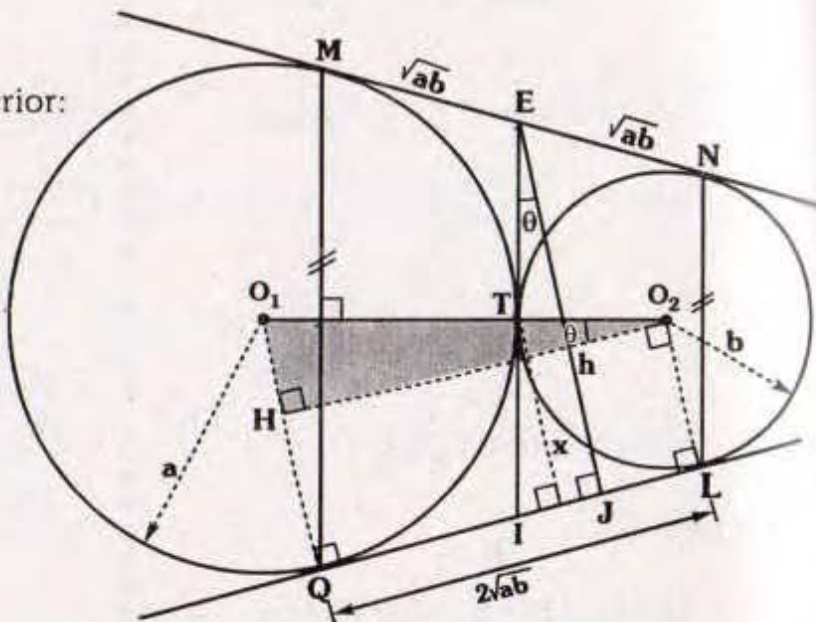
$$S_{\triangle QMNL} = (2\sqrt{ab})h$$

- Por propiedad en  $\triangle QO_1O_2L$ :

$$x = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow h = \frac{4ab}{a+b}$$

- Finalmente

$$S_{\triangle QMNL} = \frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$$



**Clave E**



**RESOLUCIÓN N° 233**

Nos piden la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.

• Notemos:  $\overline{PR} \parallel \overline{SN}$  y  $\overline{QS} \parallel \overline{RM}$

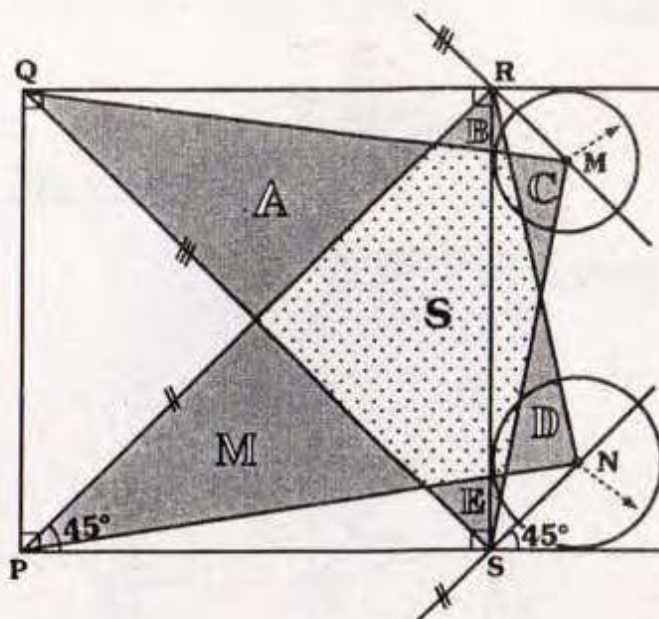
$$\Rightarrow S_{\Delta PRN} = S_{\Delta PSR} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$$

También:  $S_{\Delta QMS} = S_{\Delta QRS} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$

• Luego:  $S_{\Delta PRN} = S_{\Delta QMS}$

$$\Rightarrow M + S + B + D = A + C + E + S$$

$$\therefore A + C + E = M + B + D$$



**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 234**

Nos piden  $S_{\Delta EFBC}$

• Como  $m\widehat{AM} = m\widehat{CD}$

$$\Rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{AM}$$

Luego:

$$m\angle BFA = m\angle EBC = m\angle CFD$$

$$\Rightarrow \Delta EFBC: \text{inscriptible}$$

• Notemos:

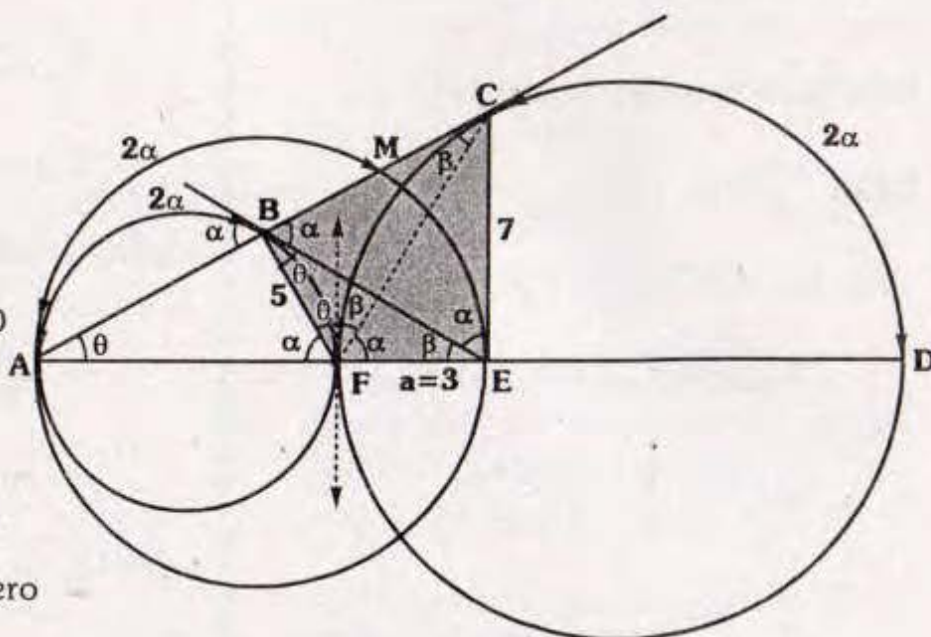
$$m\angle BFA = m\angle BFC = m\angle CFE$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \Delta EBC \text{ equilátero}$$

• En  $\Delta BFE$ :  $a = 3$

• Para el área, podría ser por partes, pero optemos por:

$$S_{\Delta EFBC} = \sqrt{(p-3)(p-5)(p-7)(p-7)}$$

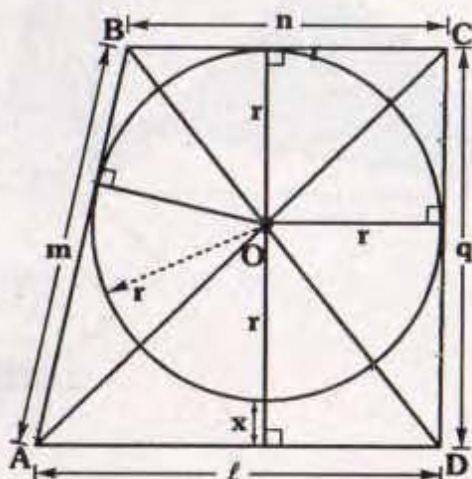


Como  $p = \frac{3+5+7+7}{2} = 11$

$\therefore S_{\triangle EFC} = 16\sqrt{3}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 235**



Piden  $x$  en función de  $a$  y  $r$ .

Dato:  $\frac{mq}{n\ell} = a$

• Por teorema:

$(S_{\triangle AOB})(S_{\triangle COD}) = (S_{\triangle BOC})(S_{\triangle AOD})$

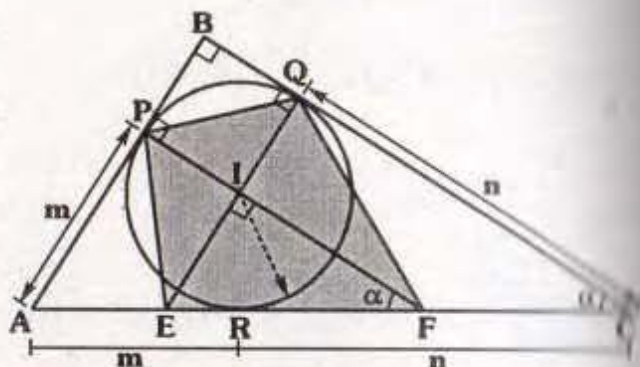
$\Rightarrow \frac{mr}{2} \cdot \frac{qr}{2} = \frac{nr}{2} \cdot \frac{\ell(r+x)}{2}$

$\Rightarrow \frac{mq}{\underbrace{n\ell}_a} = \frac{r+x}{r}$

$\therefore x = r(a - 1)$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 236**



Nos piden  $\frac{S_{\triangle EPQF}}{S_{\triangle ABC}}$

• Notemos que  $\overline{EQ} \perp \overline{PF}$

•  $S_{\triangle EPQF} = \frac{(EQ)(PF)}{2} \quad \dots(I)$

•  $S_{\triangle ABC} = mn \quad \dots(II)$

•  $\triangle EQC \sim \triangle APF$

$\Rightarrow \frac{m}{PF} = \frac{EQ}{n}$

$\Rightarrow mn = (PF)(EQ) \quad \dots(III)$

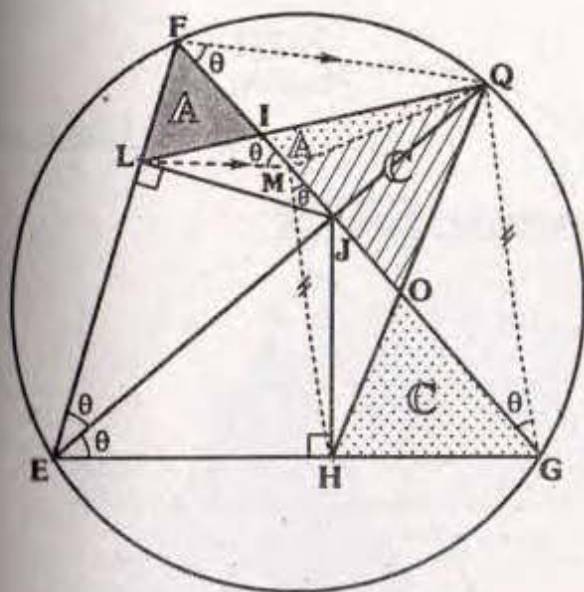
• De (I), (II) y (III):

$\frac{S_{\triangle EPQF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}$

**Clave B**



**RESOLUCIÓN N° 237**



Nos piden demostrar  $S_{\Delta IOQ} = A + C$

• Se traza  $\overline{LM} \parallel \overline{FQ}$ , con M en  $\overline{FG}$   
 $\Rightarrow S_{\Delta IMQ} = A$

• Como  $m\angle LMF = m\angle MFQ = \theta \Rightarrow \Delta ELMJ$   
 es inscriptible y también el  $\Delta ELJH$  lo  
 es  $\Rightarrow$  los puntos E, L, M, J y H son  
 concíclicos  $\Rightarrow m\angle HMJ = \theta$

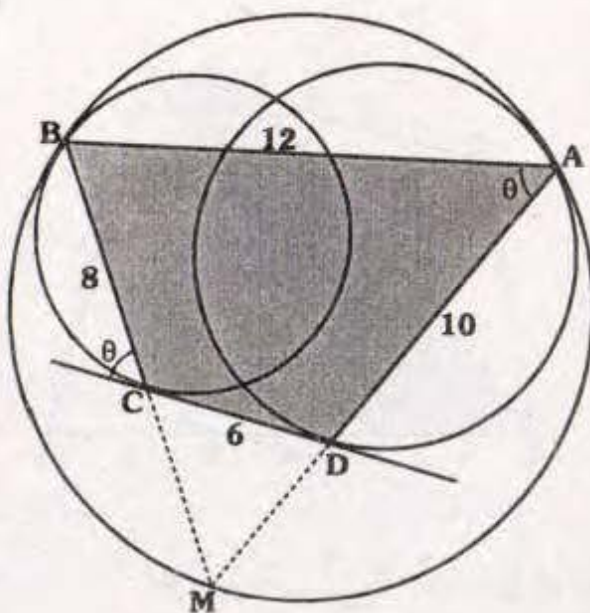
$$\Rightarrow \overline{MH} \parallel \overline{QG}$$

• Como  $\overline{MH} \parallel \overline{QG}$

$$\Rightarrow S_{\Delta OMQ} = C$$

$$\therefore S_{\Delta IOQ} = A + C$$

**RESOLUCIÓN N° 238**



Nos piden  $S_{\Delta ABCD}$

• Por teorema de circunferencia, al pro-  
 longar  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$ , intersecará al arco  
 EF en su punto medio.

• Como  $m\widehat{BC} = m\widehat{BM}$

$$\Rightarrow m\angle ECB = m\angle BAD$$

$$\Rightarrow \Delta ABCD \text{ es inscriptible}$$

• Como el  $\Delta ABCD$  también es circuns-  
 critible, por teorema de Pitot:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AD = 10$$

• Concluimos que el  $\Delta ABCD$  es  
 bicéntrico, entonces:

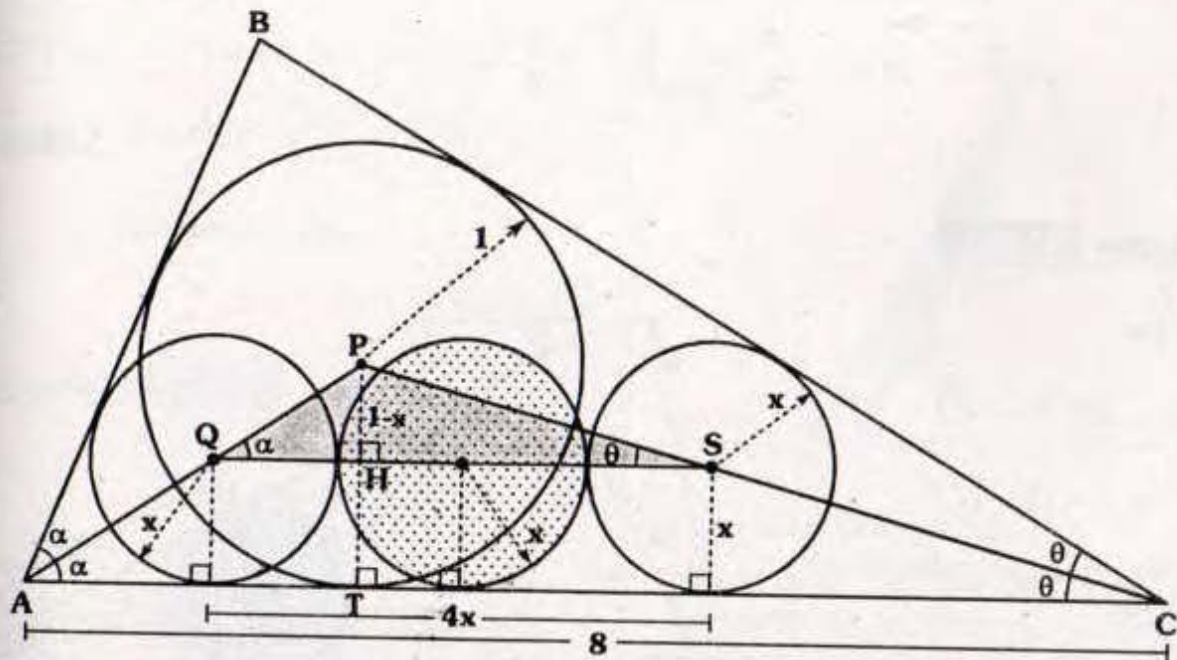
$$S_{\Delta ABCD} = \sqrt{(6)(8)(10)(12)}$$

$$S_{\Delta ABCD} = 24\sqrt{10}$$

**Clave A**





**RESOLUCIÓN N° 241**

Nos piden  $A_{\bullet} = \pi x^2$

• Notemos  $\triangle APC \sim \triangle QPS$ , comparando elementos homólogos:

$$\frac{QS}{AC} = \frac{PH}{PT} \Rightarrow \frac{4x}{8} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore A_{\bullet} = \frac{4}{9}\pi$$

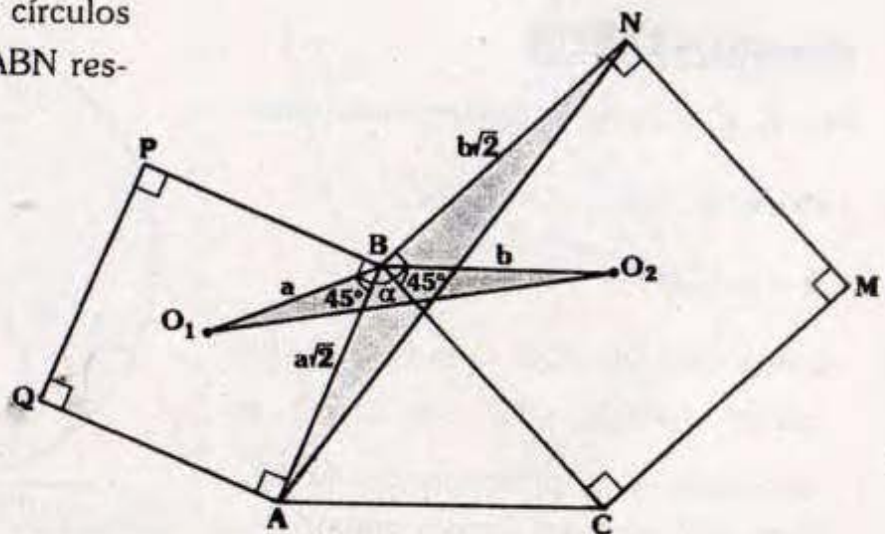
**Clave E****RESOLUCIÓN N° 242**

• Sean  $A_1$  y  $A_2$  las áreas de los círculos inscritos en los  $\triangle O_1BO_2$  y  $\triangle ABN$  respectivamente.

• Nos piden:  $\frac{A_1}{A_2}$

• Notemos:  $\triangle O_1BO_2 \sim \triangle ABN$ ,

con razón de semejanza  $\frac{1}{\sqrt{2}}$



• Por teorema:

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Clave **II**

### RESOLUCIÓN N° 243

Piden  $A_\bullet$

• Dato:  $a = 7 + 4\sqrt{3}$

$$\Rightarrow a = (2 + \sqrt{3})^2$$

• Por teorema de relaciones métricas:

$$BH = 2\sqrt{ar}$$

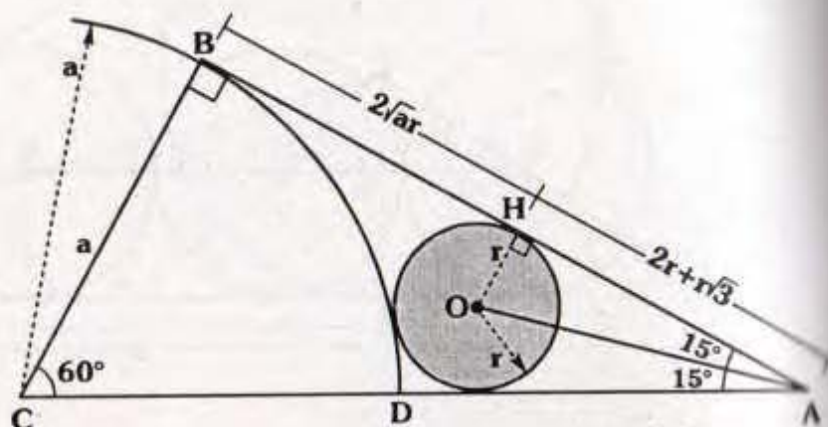
• En  $\triangle OHA$ :  $HA = 2r + r\sqrt{3}$

• Como  $AB = a\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{ar} = a\sqrt{3} - r(2 + \sqrt{3})$

$$2(2 + \sqrt{3})\sqrt{r} = (2 + \sqrt{3})^2 \sqrt{3} - r(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow r + 2\sqrt{r} = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow r = 3$$

$$\therefore A_\bullet = 9\pi$$



Clave **A**

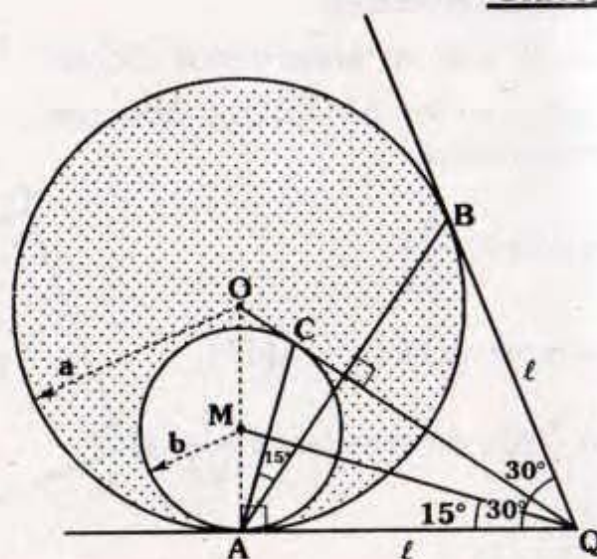
### RESOLUCIÓN N° 244

Sea  $A$  el área de la región sombreada.

• Piden  $A$ ; Dato:  $\ell = 3 + 2\sqrt{3}$

$$A = \pi(a^2 - b^2)$$

• Como  $QA = QC = QB \Rightarrow m\angle CQB = 30^\circ$   
luego  $m\angle AQC = 30^\circ$ , el  $\triangle ABQ$  es  
equilátero  $\Rightarrow$  la prolongación de  $\overline{QC}$   
llega al centro del círculo mayor.





•  $\triangle OAQ$ : notable de  $30^\circ \Rightarrow a = 2 + \sqrt{3}$

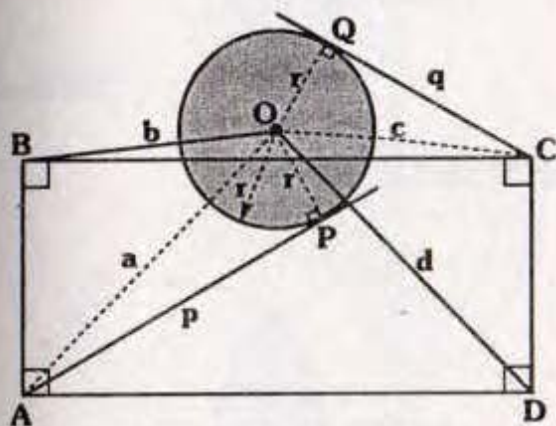
•  $\triangle MAQ$ : notable de  $15^\circ \Rightarrow b = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow A = \pi[(2 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2]$$

$$\therefore A = 4\pi(1 + \sqrt{3})$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 245



Piden  $A_\bullet$

Dato:

$$b^2 + d^2 - p^2 - q^2 = 8$$

• Por teorema de Marlen:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2$$

• En el dato:

$$\underbrace{a^2 - p^2}_{r^2} + \underbrace{c^2 - q^2}_{r^2} = 8$$

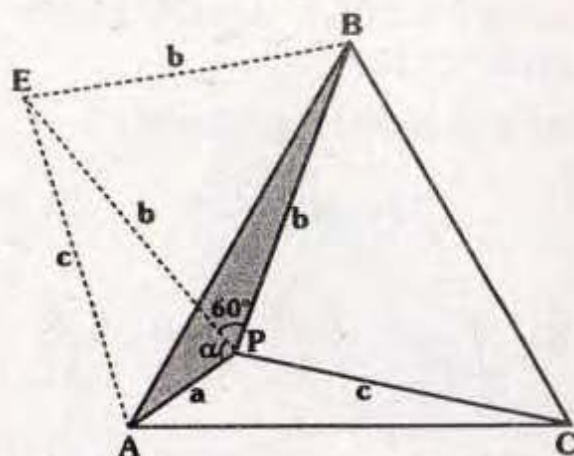
$$\Rightarrow r^2 = 4$$

• Finalmente:

$$\therefore A_\bullet = 4\pi$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 246



Analicemos por partes:

• Nos indican que con "a", "b" y "c" debe formarse un triángulo no acutángulo, es decir:

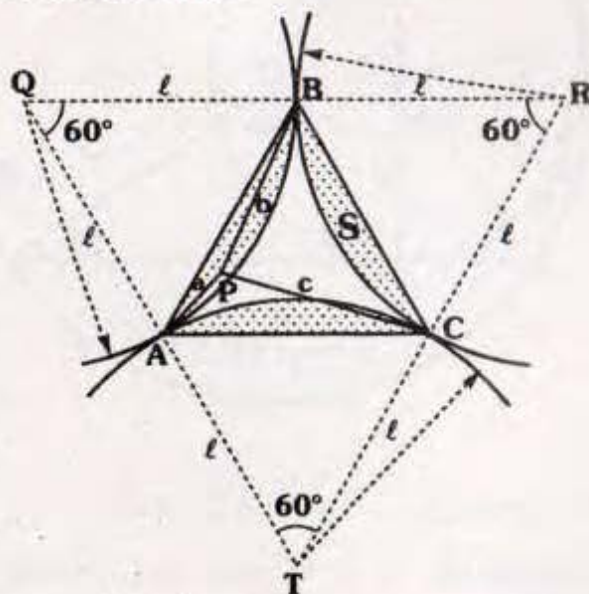
$$a^2 \geq b^2 + c^2, b^2 \geq a^2 + c^2 \text{ ó } c^2 \geq b^2 + a^2$$

• Se traza el  $\triangle PEB$  equilátero, entonces:

$$\triangle EBA \cong \triangle PBC \Rightarrow EA = c$$

• En  $\triangle AEP$ : si  $c^2 \geq b^2 + a^2 \Rightarrow \alpha \geq 90^\circ$

• Es decir  $m\angle APB \geq 150^\circ$ , análogamente para cada lado, los puntos "P" se encontrarán en las regiones sombreadas a continuación.



• Las regiones favorables, serán donde:

$$m\angle APB \geq 150^\circ; \quad m\angle APC \geq 150^\circ \quad \text{ó} \\ m\angle BPC \geq 150^\circ$$

• Sea  $p$  la probabilidad pedida:

$$\Rightarrow p = \frac{3S}{S_{\Delta ABC}} \quad \dots(I)$$

$$S = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \ell^2 - \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6} \pi \ell^2 - \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

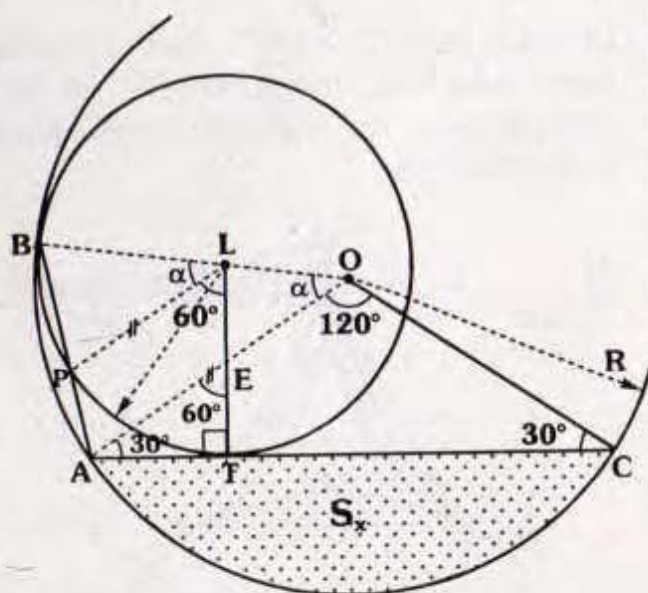
• En (I):

$$p = \frac{1}{\left(\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}\right)} \cdot 3 \left( \frac{1}{6} \pi \ell^2 - \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{3}}{3} (2\pi - 3\sqrt{3})$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 247



Nos piden  $S_x$ . Dato  $AC = 2\sqrt{3}$

• Como O, L y B son colineales y

$$m\widehat{BP} = m\widehat{BA} \Rightarrow \overline{PL} \parallel \overline{AO}, \\ \text{luego } m\angle AET = 60^\circ$$

$$S_x = S_{\Delta AOC} - S_{\Delta AOC}$$

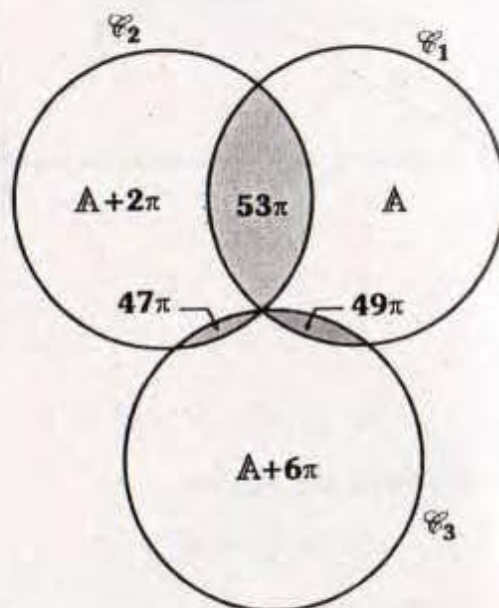
$$S_x = \frac{1}{3} \pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{• Como } AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = 2$$

$$\therefore S_x = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 248



Sea  $r$  el radio de los círculos congruentes se ha graficado de acuerdo a las condiciones

$$\text{• Como } \underbrace{A(B \cup C)} = 823\pi$$

$$3A + 157\pi = 823\pi$$

$$\Rightarrow A = 222\pi$$

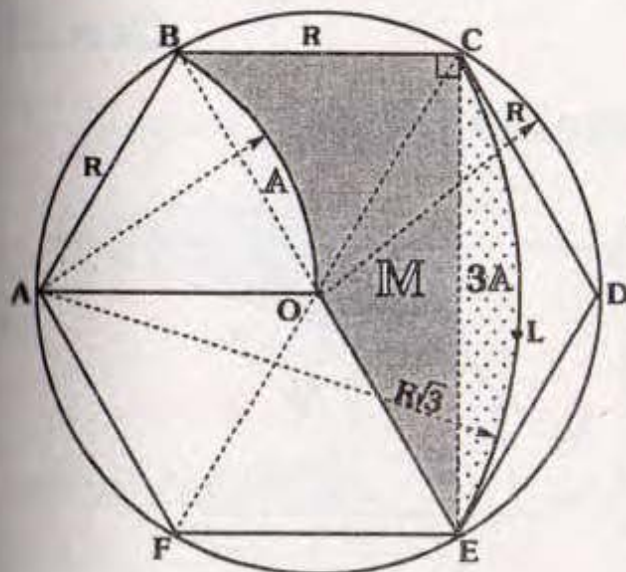


Luego  $\frac{A_{(81)}}{\pi r^2} = 324\pi$

$\therefore r = 18$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 249**



Nos piden:  $3A + M$

• Notemos que los arcos OB y CE son semejantes cuya razón de semejanza es de 1 a  $\sqrt{3}$ .

• La razón de áreas de los segmentos circulares es de 1 a 3.

•  $S_{\triangle BCE} = A + M = R^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

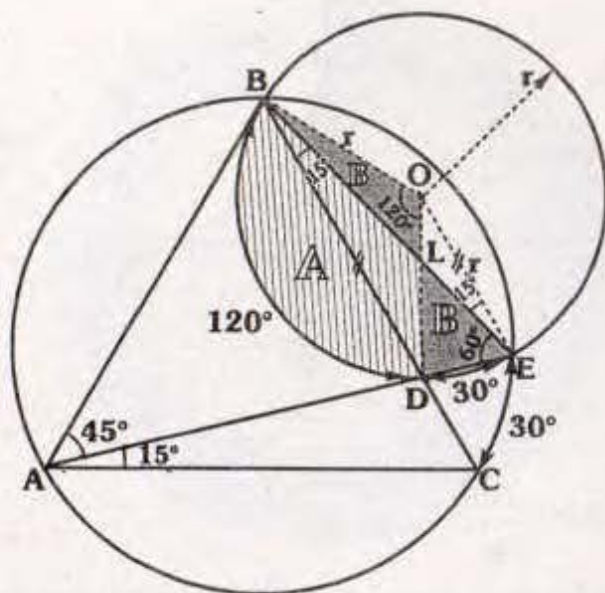
•  $A = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOB}$

$A = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

• Finalmente:  $3A + M = \frac{1}{3}\pi R^2$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 250**



Nos piden  $A + B$

• Notamos que  $m\angle CBE = 15^\circ$  y

$m\angle DEB = 60^\circ$

$\Rightarrow m\widehat{BDE} = 150^\circ \Rightarrow m\angle BOE = 150^\circ$

• También:  $\overline{BD} \parallel \overline{OE}$

$\Rightarrow S_{\triangle ALDE} = S_{\triangle BOL} = B$

• Como  $m\widehat{DE} = 30^\circ \Rightarrow \overline{DE} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow r = 2$

•  $A + B = S_{\triangle BOD} = \frac{120^\circ}{360^\circ}\pi 2^2$

$\therefore A + B = \frac{4}{3}\pi$

Clave **A**





**RESOLUCIÓN N° 254**

Sea  $A_{cc}$  el área de la corona circular.

• Usemos la siguiente expresión

$$A_{cc} = \pi ab$$

• Como  $\overline{ED} \parallel \overline{GH}$

$$\Rightarrow m\angle EDG = m\angle DGH = \alpha \text{ y}$$

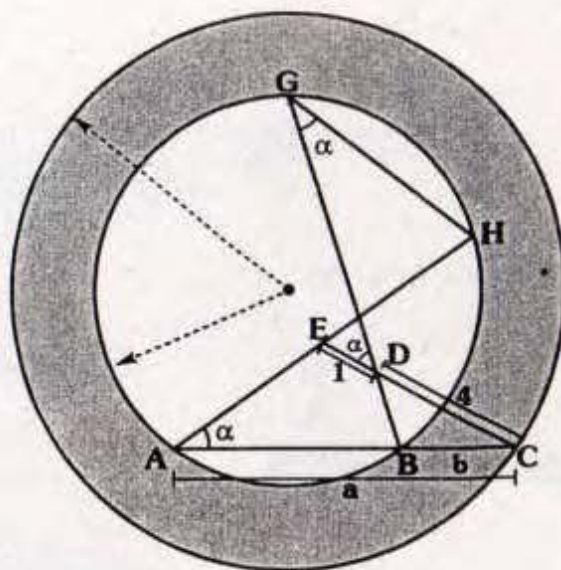
$$m\angle EAB = \alpha$$

$\Rightarrow \triangle AEDB$  es inscriptible

• Por t. de la secante en  $\triangle AEOB$ :

$$ab = (4)(5)$$

$$\therefore A_{cc} = 20\pi$$



**Clave** C

**RESOLUCIÓN N° 255**

Sea  $S_x$  el área de la región sombreada.

• Como  $m\angle ADC = m\angle OBC$

$\Rightarrow \triangle ODCB$  es inscriptible

$\Rightarrow m\angle DCB = 90^\circ$

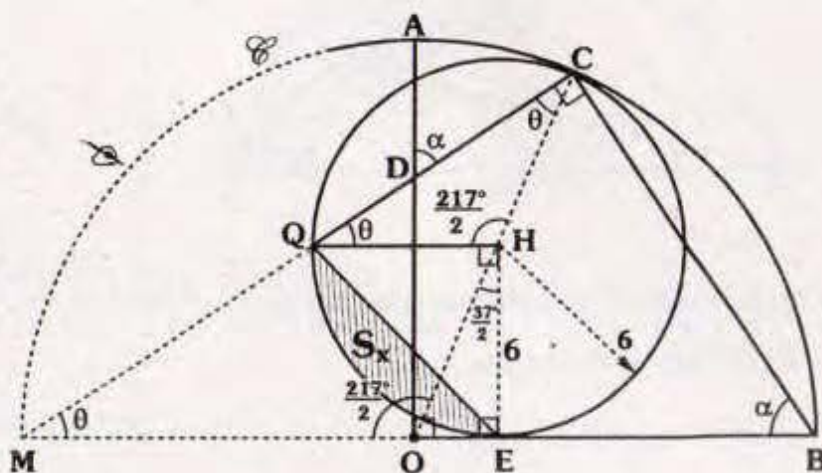
• La prolongación de  $\overline{CQ}$  y la prolongación de  $\overline{BO}$  se cortan en M, ( $M \in \mathcal{C}$ )

• Notemos que:

$$\overline{QH} \parallel \overline{MO} \Rightarrow m\angle QHE = 90^\circ$$

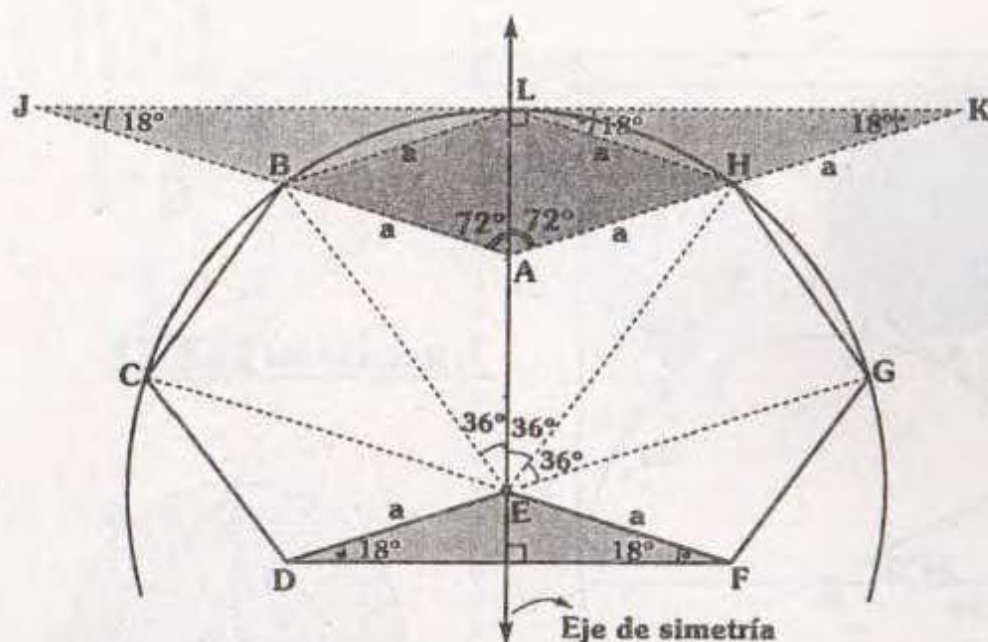
• Como  $m\widehat{QC} = m\widehat{MC} \Rightarrow m\angle MOC = \frac{217^\circ}{2}$

$$\Rightarrow m\angle OHE = \frac{37^\circ}{2} \Rightarrow HE = 6$$







**RESOLUCIÓN N° 257**

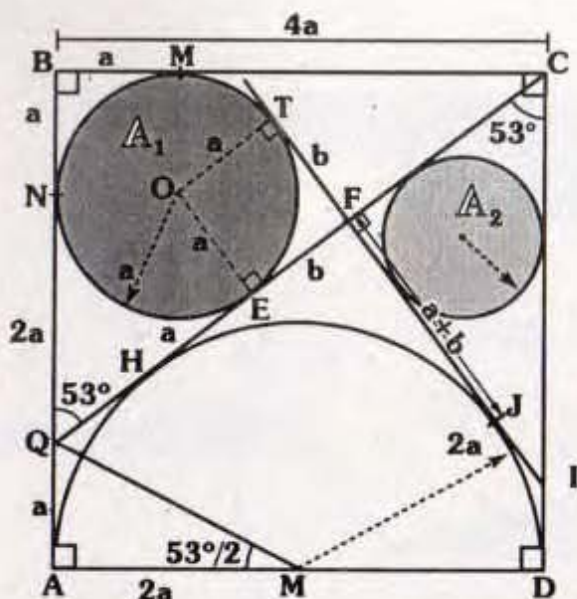
- Como los pentágonos son regulares y todas las diagonales son iguales, los puntos C, B, H y G equidistan de A  $\Rightarrow \triangle CBHG$ : inscriptible.
- Sea  $A_1$  el área del círculo inscrito en el  $\triangle DEF$  y  $A_2$  el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilíneo BLH.
- Nos piden  $\frac{A_1}{A_2}$
- La recta AE es el eje de simetría.
- Se traza la tangente en L, la cual corta a las prolongaciones de AH y AB en K y J, luego  $AH = HL = HK$
- $\triangle JAK \sim \triangle DEF$  cuya razón de semejanza es 2.

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$$

**Clave**

**RESOLUCIÓN N° 258**



Nos piden  $\frac{A_1}{A_2}$

• Por teorema de circunferencia:

$$m\angle QCD = 53^\circ$$

• En  $\triangle QBC$ :

Sea  $BC=4a$ ;  $BQ=3a$  y  $QC=5a \Rightarrow$  el radio de " $A_1$ " es:  $a$ .

• Notemos que  $\triangle QAM$  es notable de

$$53^\circ/2 \Rightarrow AQ=a, \text{ como}$$

$$NB=a \Rightarrow QN=QE=2a$$

• Sea  $FT=b \Rightarrow FH=FJ=a+b$ , como

$$TJ=AN \Rightarrow 2b+a=3a$$

$$\Rightarrow a=b,$$

• Luego:  $OTFE$  es cuadrado  $\Rightarrow FC=2a$

• Como  $\triangle QBC \sim \triangle CFI$  y la razón de semejanza  $3a2$ , entonces la razón de

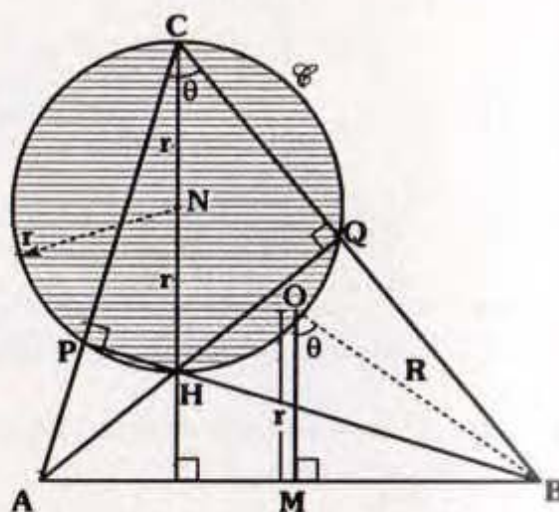
áreas de los círculos inscritos, es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{4}$$

**Clave**  $\Delta$

**RESOLUCIÓN N° 259**



Nos piden  $A_\bullet$

• Sea O el circuncentro del  $\triangle ABC$

• Como el  $\triangle PHQC$  es inscriptible, la circunferencia a que pasa por P, H y Q, también pasa por C.

•  $\overline{HC}$  diámetro de  $\mathcal{C}$

• Por teorema:  $HC = 2(OM)$  y

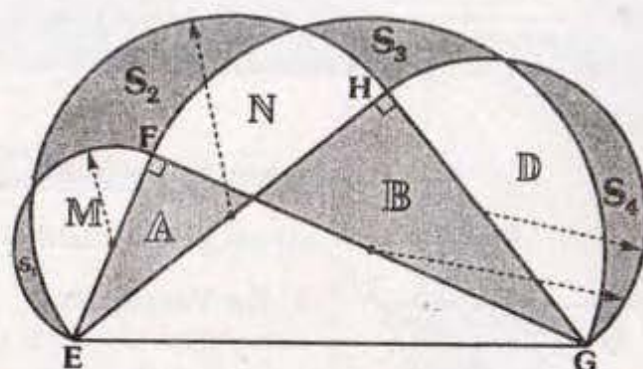
$$m\angle MOB = \theta$$

$$\Rightarrow r = R \cos \theta$$

$$\therefore A_\bullet = \pi R^2 \cos^2 \theta$$

**Clave**  $C$



**RESOLUCIÓN N° 260**

• Sea  $S$  el área del semicírculo de diámetro  $EG$ :

• Por teorema, en:

•  $\triangle EFG$ :  $S = (S_1 + M) + (N + S_3 + B + D)$

•  $\triangle EHG$ :  $S = (A + M + S_2 + N) + D + S_4$

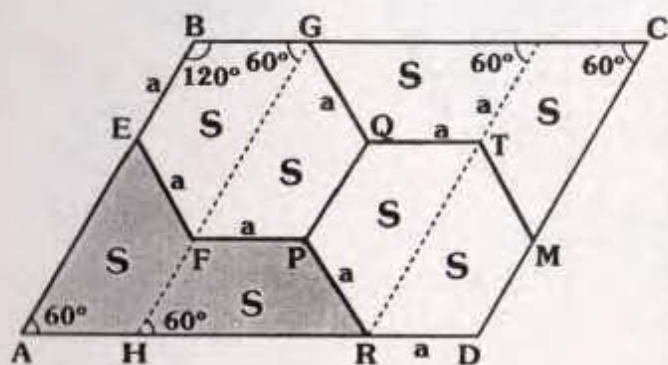
$$\Rightarrow S_1 + \cancel{M} + \cancel{N} + S_3 + B + \cancel{D} = A + \cancel{M} + S_2 + \cancel{N} + \cancel{D} + S_4$$

$$\therefore S_1 + S_3 - S_2 - S_4 = A - B$$

**Clave** **C**



# Ciclo Repaso

**RESOLUCIÓN N° 261**

Sea  $A_s$ , el área de la región sombreada

$$\text{Piden } \frac{A_s}{A_{(ABCD)}}$$

- Notemos que  $\overline{EB} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{DM} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  
análogamente  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow ABCD$  es  
paralelogramo.

- Al trazar las diagonales  $\overline{GF}$  y  $\overline{RT}$  de los hexágonos regulares y prolongarlas, notamos:

$AEFH \cong FGBE \cong HFPR$  y así todas las regiones trapeciales son congruentes.

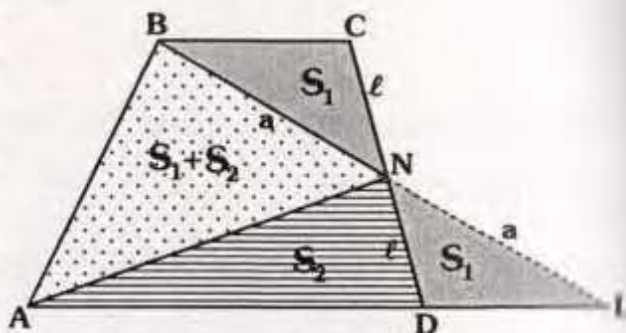
- Luego  $A_s = 2S$  y  $A_{(ABCD)} = 8S$

$$\therefore \frac{A_s}{A_{(ABCD)}} = \frac{1}{4}$$

Clave **B****RESOLUCIÓN N° 262**

Analicemos cada proposición:

**I. Es Verdadera**



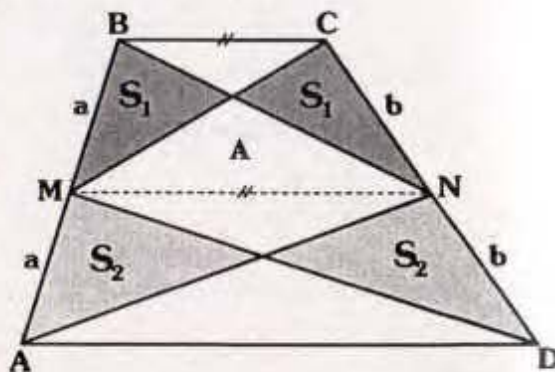
- Como  $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle BNC} + S_{\triangle AND}$  se prolonga  $\overline{BN}$  hasta L tal que  $BN = NL$

$$\Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{DL} \quad \text{y} \quad S_{\Delta NDL} = S_{\Delta BNC}$$

- Como  $BN = NL \Rightarrow S_{\triangle ABN} = S_{\triangle ANL}$   
 $\Rightarrow A, D$  y  $L$ : colineales

- Luego  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  entonces ABCD es trapecio.

**II. Es Verdadera.**





• Como  $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CMD} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = S_{\triangle NMC}$

$$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{BC}$$

• Análogamente:  $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$

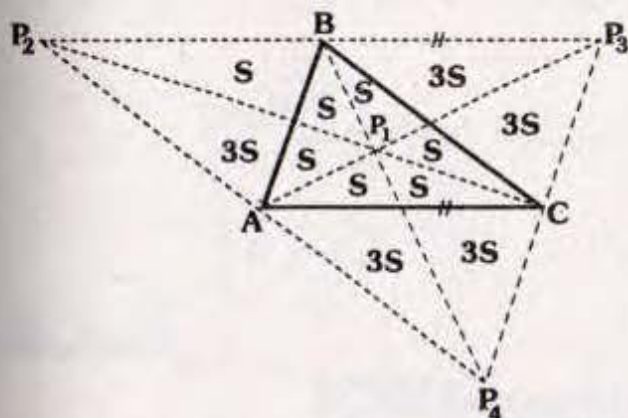
• Finalmente  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , luego ABCD es trapecio.

### III. Es Falsa.

Como condición la cumple todo cuadrilátero convexo, entonces la proposición es falsa.

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 263



- El primer punto que cumple condición es el baricentro ( $P_1$ ) del  $\triangle ABC$
- Los otros puntos los determinamos trazando paralelas de cada vértice al lado opuesto, entonces.

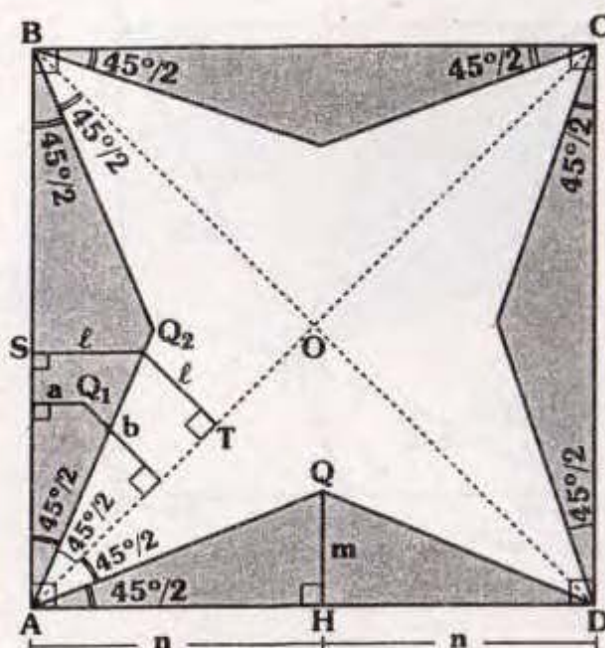
$$S_{\triangle AP_1B} = S_{\triangle P_1BC} = S_{\triangle P_1AC}$$

$$i=1, 2, 3, 4$$

• Existen cuatro puntos con tal condición

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 264



- Sea  $p$  la probabilidad pedida.
- Hallemos la región favorable, para ello se trazan las bisectrices de los ángulos entre la diagonal y un lado.
- Las regiones sombreadas cumplen la condición, por ejemplo para  $Q_1$ :  $a < b$ , para  $Q_2$ :  $Q_2S = Q_2T$
- Luego:

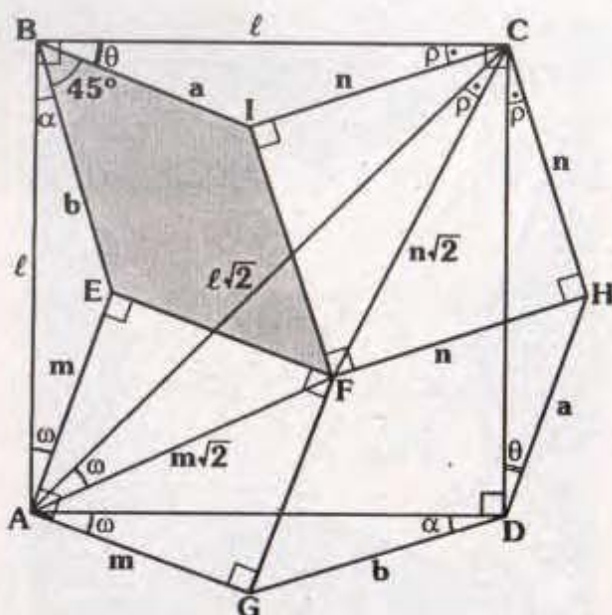
$$p = \frac{4(S_{\triangle AQD})}{S_{\square ABCD}} = \frac{4mn}{4n^2} = \frac{m}{n}$$

$$\triangle AHQ: n = m(\sqrt{2} + 1)$$

$$\therefore p = \sqrt{2} - 1$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 265**



Nos piden  $S_{(EBIF)}$

Dato:  $ab = 10\sqrt{2} \wedge \alpha + \theta = 45^\circ$

• Rápidamente nos damos cuenta:

-  $\triangle GAD \cong \triangle EAB \Rightarrow EB = b \wedge m\angle ABE = \alpha$

-  $\triangle BCI \cong \triangle DCH \Rightarrow IB = a \wedge m\angle IBC = \theta$

$\Rightarrow m\angle EBI = 45^\circ$

•  $\triangle AFC \sim \triangle AEB \Rightarrow b = n$

•  $\triangle AFC \sim \triangle DHC \Rightarrow a = m$

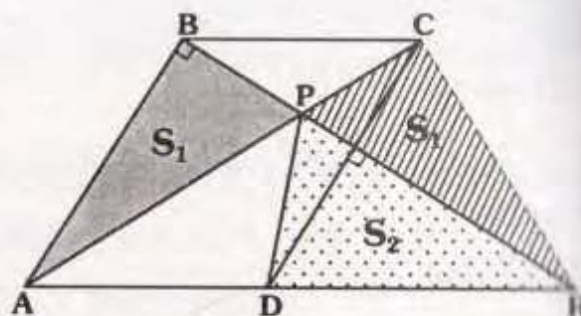
• Luego EBIF es paralelogramo

$\Rightarrow S_{(EBIF)} = ab \sin 45^\circ$

$\therefore S_{(EBIF)} = 10$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 266**



Nos piden  $S_1 + S_2$

Dato:  $(AB)(PR) = k$

• Como  $\overline{AR} \parallel \overline{BC} \Rightarrow S_{\triangle ACPR} = S_{\triangle ABP} = S_1$

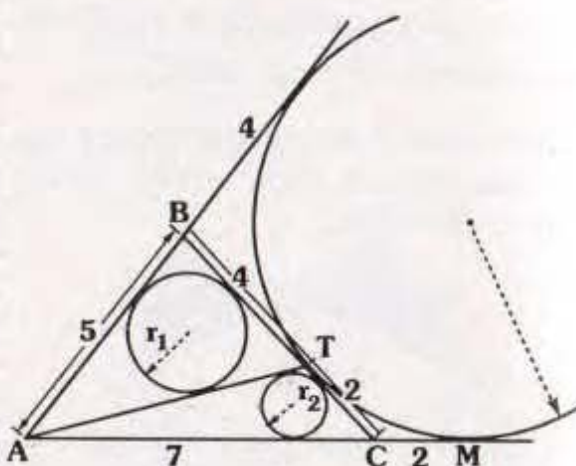
•  $\overline{AB} \parallel \overline{DC} \Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{CD}$

•  $S_{\triangle DPCR} = S_1 + S_2 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PR}}{2}$

$\therefore S_1 + S_2 = \frac{k}{2}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 267**



Nos piden  $\frac{r_1}{r_2}$



• Como  $AB=5$ ;  $BC=6$  y  $AC=7 \Rightarrow BT=4$  y  $TC=2$

• Notamos también:  $\text{Perímetro}_{\Delta ABT} = \text{Perímetro}_{\Delta ATC}$

• Sea  $p$  en semiperímetro de los  $\Delta$ s  $ABT$  y  $ATC$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABT}}{S_{\Delta ATC}} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{pr_1}{pr_2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = 2$$

**Clave** 

### RESOLUCIÓN N° 268

Piden:  $\frac{r_1}{r_2}$

Dato:  $12(AB) = 5(BC)$

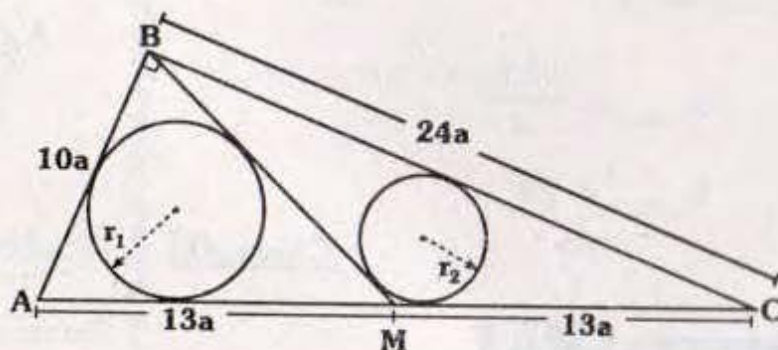
• Convenientemente  $AB=10a$ ;

$$BC=24a \Rightarrow AC=26a$$

• Como  $\overline{BM}$  es mediana

$$\Rightarrow AM=MC=BM=13a$$

• También:



$$S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BMC}$$

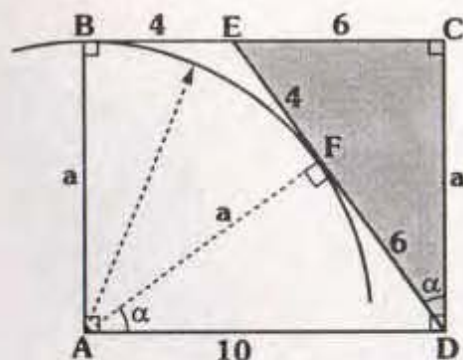
$$P_{\Delta ABM} \cdot r_1 = P_{\Delta BMC} \cdot r_2$$

$$\Rightarrow \frac{(10a+13a+13a)}{2} r_1 = \frac{(24a+13a+13a)}{2} r_2$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{25}{18}$$

**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 269**



Piden  $S_{\triangle ECD}$

•  $\triangle AFD \cong \triangle DCE$

$\Rightarrow AD=10$  y  $EC=6$

• Luego  $\alpha = 37^\circ \Rightarrow a=8$

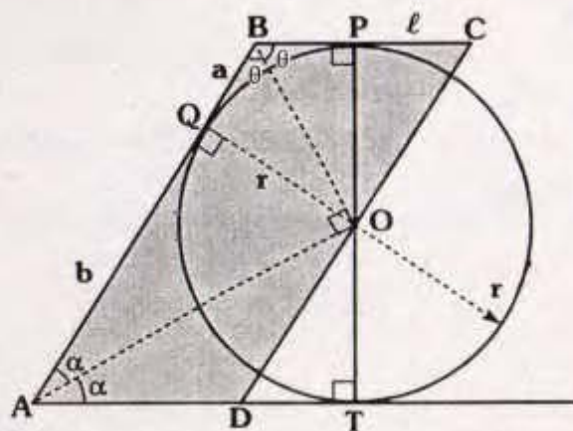
• Finalmente :

$$S_{\triangle ECD} = \frac{(6)(8)}{2}$$

$\therefore S_{\triangle ECD} = 24$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 270**



Nos piden  $S_{ABCD}$

• Como  $\overline{AT} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{PT}$  es diámetro.

• Como  $DT=PC \Rightarrow \triangle DTO \cong \triangle CPO$   
 $\Rightarrow OP=OT \Rightarrow O$  es centro.

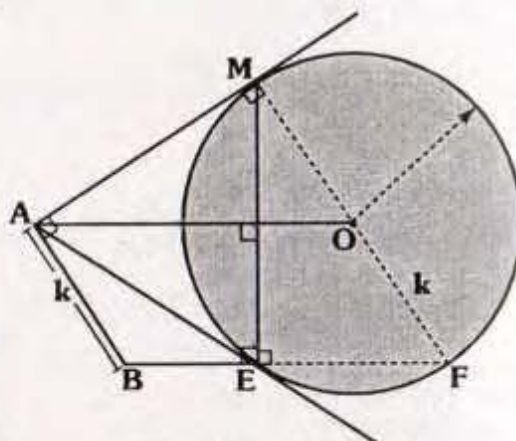
• Notemos que  $m\angle AOB = 90^\circ$

$$\Rightarrow r^2 = ab$$

$\therefore S_{ABCD} = (a+b)\sqrt{ab}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 271**



Piden  $A_\bullet$

• Notemos que al prolongar  $\overline{BE}$  hasta que corte a  $\mathcal{C}$  en F, se tendrá  
 $m\angle MEF = 90^\circ \Rightarrow \overline{MF}$  es diámetro.

• Como  $\overline{AO} \perp \overline{ME} \Rightarrow \overline{AO} \parallel \overline{BF}$  y

$$\overline{AB} \parallel \overline{MF} \Rightarrow ABFO \text{ es}$$

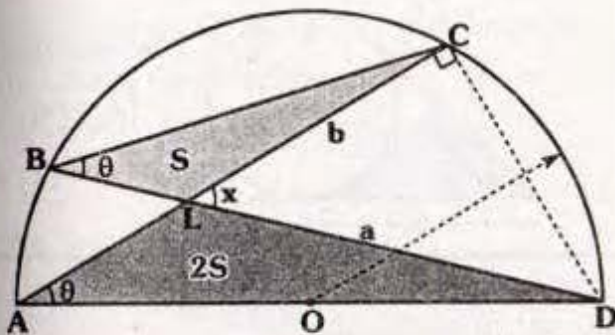
paralelogramo  $\Rightarrow OF=k$

$\therefore A_\bullet = \pi k^2$

**Clave A**



**RESOLUCIÓN N° 272**



Piden x

• Como  $\triangle ALD \sim \triangle BLC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ALD}}{S_{\triangle BLC}} = \left(\frac{LD}{LC}\right)^2$

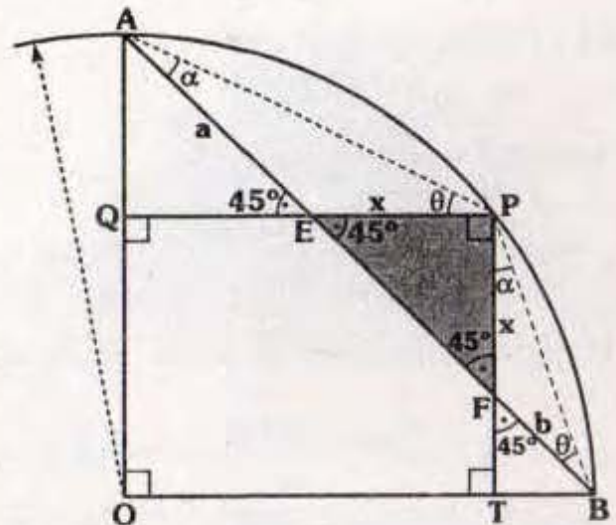
$$\Rightarrow \frac{2S}{S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow a = b\sqrt{2}$$

• En  $\triangle LCD$ :

$$\therefore x = 45^\circ$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 273**



Piden  $S_{\triangle EPF}$

$$S_{\triangle EPF} = \frac{x^2}{2}$$

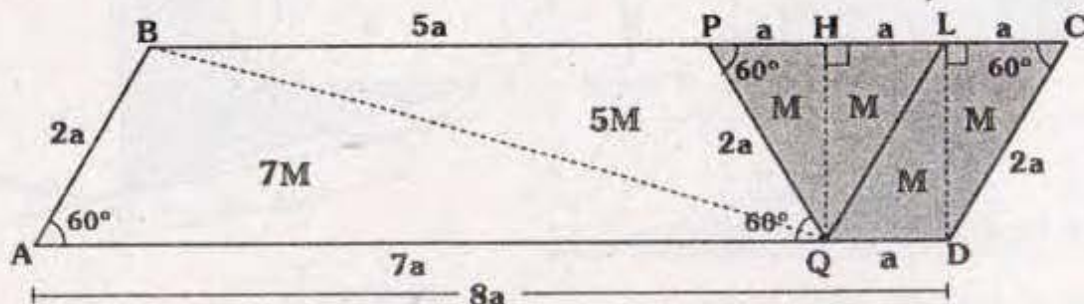
•  $\triangle AEP \sim \triangle PFB \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$

$$\Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore S_{\triangle EPF} = \frac{ab}{2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 274**



Nos piden  $\frac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}}$

• Como  $AD=4(AB) \Rightarrow AB=2a$  y

$$AD=8a$$

• El  $\triangle PCDQ$  es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle AQP = 60^\circ,$$

también es circunscriptible

$$\Rightarrow PC+QD=PQ+CD$$

$$\Rightarrow QD=HL=a$$

• Usando las razones de áreas, tenemos:

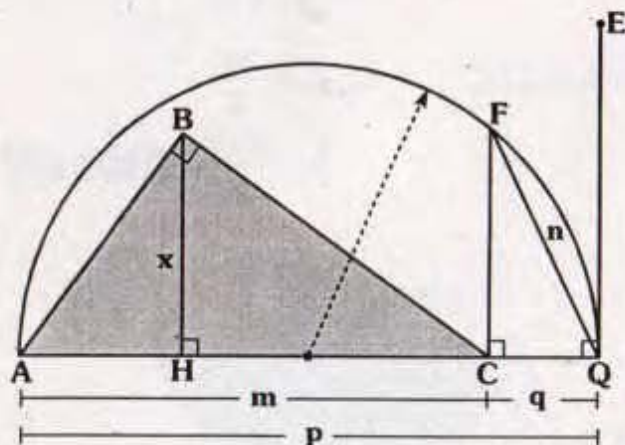
$$S_{(ABCD)} = 16M$$

$$S_{(PCDQ)} = 4M$$

$$\therefore \frac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}} = 4$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 275



Piden  $x$  en función de "m" y "n"

• Hallemos el área de ABC, pues:

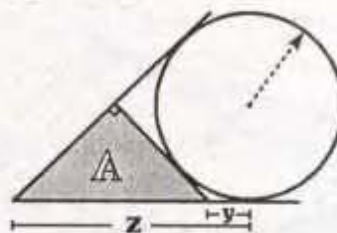
$$S_{\triangle ABC} = \frac{mx}{2} \quad \dots(I)$$

**278**



**Observación**

Recordemos:



Se cumple:

$$A = zy$$

• De la observación:

$$S_{\triangle ABC} = pq \quad \dots(II)$$

• En  $\triangle ABC$ :  $n^2 = pq \quad \dots(III)$

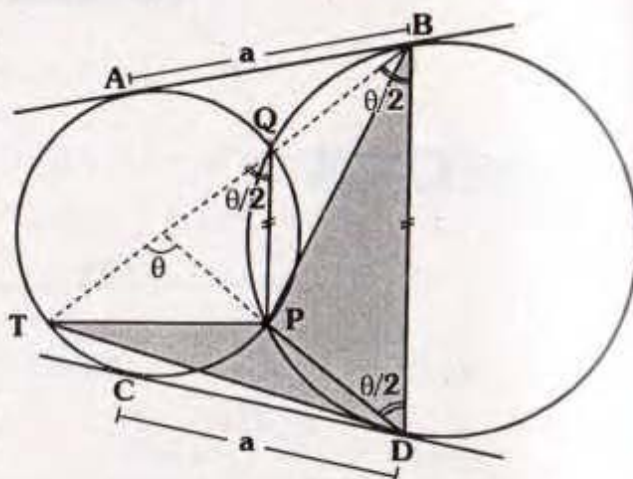
• De (I), (II) y (III):

$$\frac{mx}{2} = n^2$$

$$\therefore x = \frac{2n^2}{m}$$

**Clave I**

### RESOLUCIÓN N° 276



Nos piden  $S_{\triangle TDBP}$

• Por t. de circunferencia:  $CD=AB$ ;

$$\overline{PQ} \parallel \overline{DB}, \quad QB=PD, \quad m\angle TQP = \frac{\theta}{2} \quad y$$



$$m\angle QBD = \frac{\theta}{2}$$

• Concluimos: B, Q y T son colineales

• Por fórmula general:

$$S_{\triangle TDBP} = \frac{(PD)(TB)}{2} \sin \theta$$

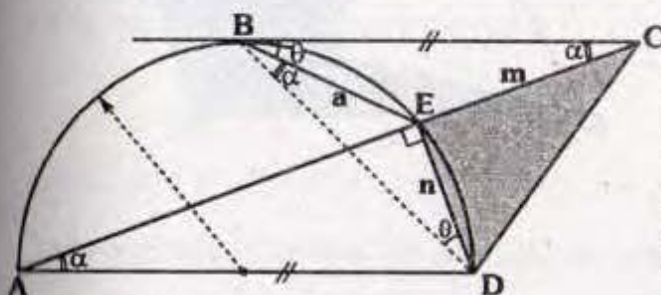
• Por teorema de la tangente:

$$a^2 = \underbrace{(BQ)(BT)}_{PD}$$

$$\therefore S_{\triangle TDBP} = \frac{a^2}{2} \sin \theta$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 277**



Nos piden  $S_{\triangle CED}$

• Como  $m\angle AED = 90^\circ$

$$\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{mn}{2}$$

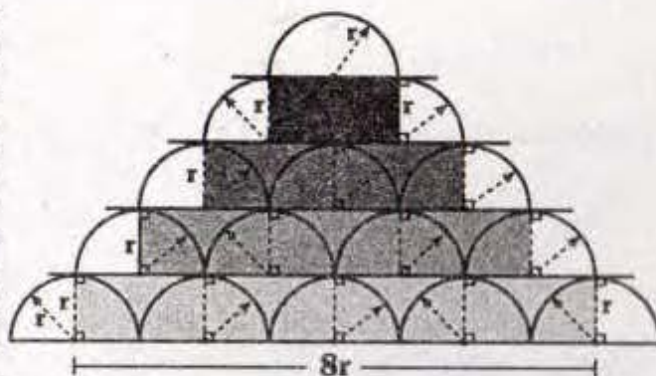
• Notemos  $\triangle BEC \sim \triangle DEB$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{a}{n} \Rightarrow mn = a^2$$

$$\therefore S_{\triangle CED} = \frac{a^2}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 278**



Nos piden el área total :  $A_T$

• La región total la podemos descomponer así:

– cuatro regiones rectangulares; y

– ocho regiones cuadrantales; y

El semicírculo en la parte superior

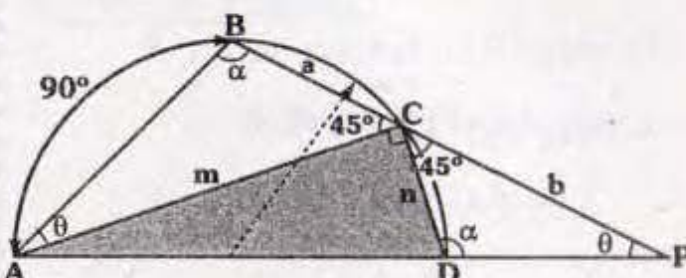
• Luego:

$$A_T = r(8r) + r(6r) + r(4r) + r(2r) + 8\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\therefore A_T = \frac{5}{2}r^2(8+\pi)$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 279**



Nos piden  $S_{\triangle ACD}$

Dato  $ab=k$

• Como  $m\angle ACD = 90^\circ$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{mn}{2}$$

• Notemos  $m\angle ABC = m\angle CDP$  y

$$m\angle ACB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle DCP = 45^\circ$$

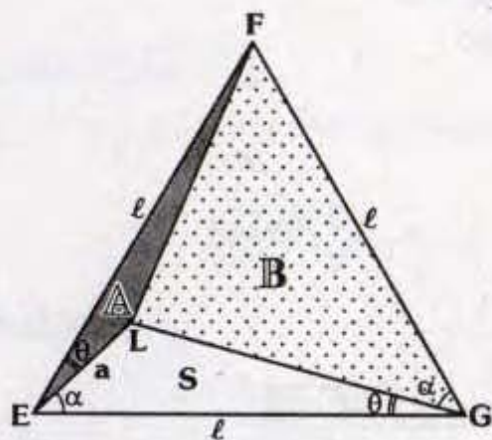
$$\triangle ABC \sim \triangle PDC \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{n}$$

$$\Rightarrow mn = ab$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{k}{2}$$

Clave **B**

### RESOLUCIÓN N° 280



Nos piden S en función de A y B

• Como  $m\angle FEL = m\angle EGL$

$$\Rightarrow m\angle LEG = m\angle LGF$$

$$\left. \begin{aligned} \text{• Luego: } A &= \frac{al}{2} \sin \theta \\ S &= \frac{al}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \frac{A}{S} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \dots (I)$$

• Análogamente:

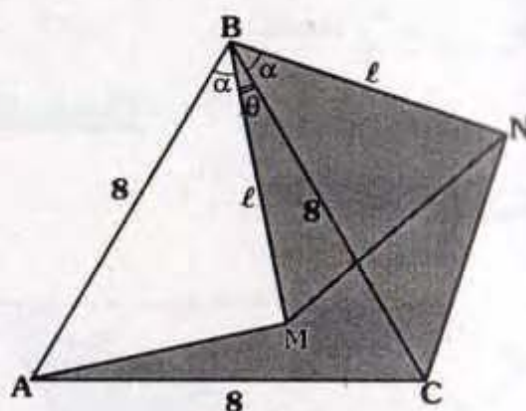
$$\frac{S}{B} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \dots (II)$$

$$\text{• De (I) y (II): } \frac{A}{S} = \frac{S}{B}$$

$$\therefore S = \sqrt{AB}$$

Clave **II**

### RESOLUCIÓN N° 281



Sea  $A_x$  el área de la región sombreada.

• Como  $\triangle ABC$  y  $\triangle MBN$  son equiláteros, entonces:

$$m\angle ABM = m\angle CBN$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CBN (LAL)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBN}$$

$$\text{• Luego: } A_x = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{8^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore A_x = 16\sqrt{3}$$

Clave **A**









• Como  $\triangle BORA$  es inscriptible, entonces

$$m\angle BRO = m\angle ARP = \alpha$$

$$\Rightarrow AR = RN$$

• Por teorema de las cuerdas:

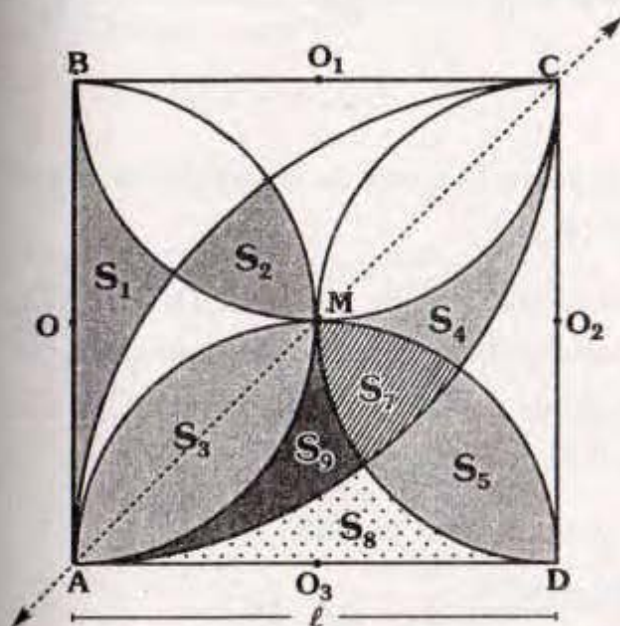
$$ab = (4)(4)$$

• En (I):

$$S_{\triangle ARB} = 8\sin\theta$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 286



Nos piden:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

• Notemos que la recta AC es el eje de simetría y M es centro, entonces:

$$S_2 = S_7 ; S_8 = S_1$$

• Es también claro que las regiones de áreas  $S_9$  y  $S_4$  son congruentes (simétricos respecto de  $\overline{BD}$ )

$$\Rightarrow S_9 = S_4$$

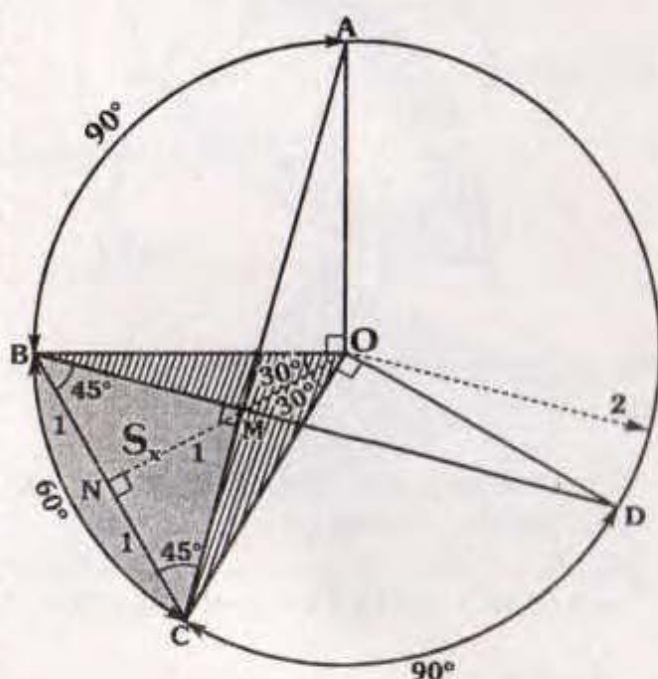
• Luego concluimos:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = A_{\triangle} = \frac{1}{2} \pi \left( \frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{\pi \ell^2}{8}$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 287



Nos piden  $S_x$

• Por ángulo inscrito:

$$m\angle CBD = m\angle BCA = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ : isósceles

$$\left. \begin{array}{l} \angle ONC: \text{notable de } 30^\circ \Rightarrow ON = \sqrt{3} \\ \angle BMC: \text{notable de } 45^\circ \Rightarrow MN = 1 \end{array} \right\} OM = \sqrt{3} - 1$$

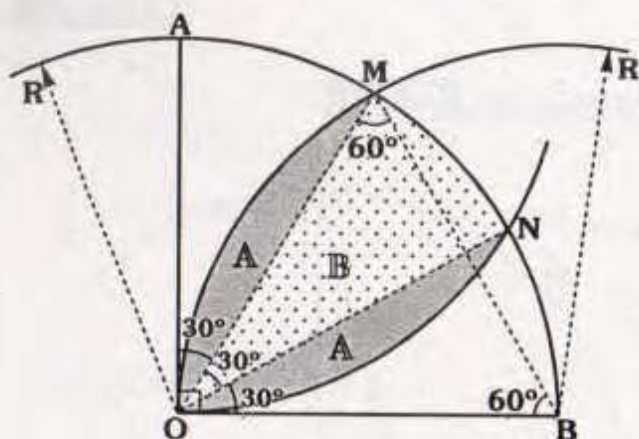
$$S_x = S_{\triangle BOC} - S_{\triangle BOCM}$$

$$S_x = \frac{1}{6}\pi(2)^2 - \frac{(2)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\therefore S_x = \frac{1}{3}(2\pi + 3 - 3\sqrt{3})$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 288**



Nos piden el área de la región sombreada ( $S_x$ )

- Notemos que los  $\Delta$ s OMB y AON son equiláteros, entonces:

$$m\angle AOM = m\angle MON = m\angle NOB = 30^\circ$$

$$S_x = 2A + B$$

- Hallemos por partes:

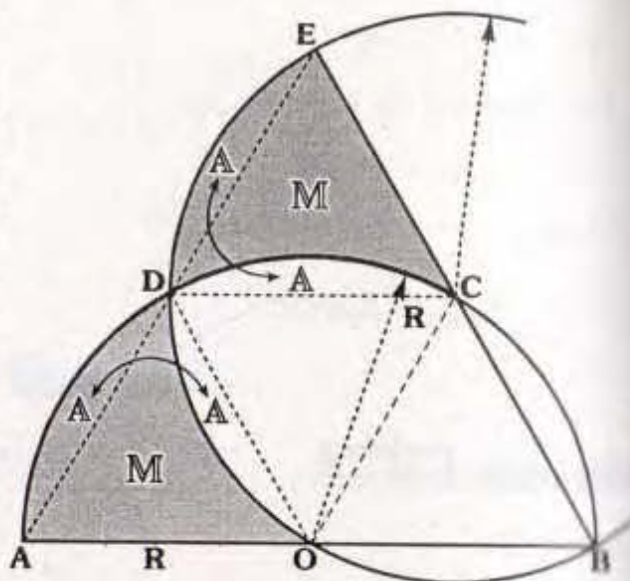
$$B = \frac{1}{12}\pi R^2$$

$$A = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S_x = \frac{R^2}{2} \left( \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \right)$$

Clave **B**

**RESOLUCIÓN N° 289**



Nos piden la suma de áreas de las regiones ( $A_p$ ).

- Notemos que los  $\Delta$ s AOD, DOC y ECD son equiláteros, luego los segmentos circulares cuyas cuerdas son AD, CD, OD y ED son congruentes.

- Luego el área pedida:

$$A_p = 2(A + M)$$

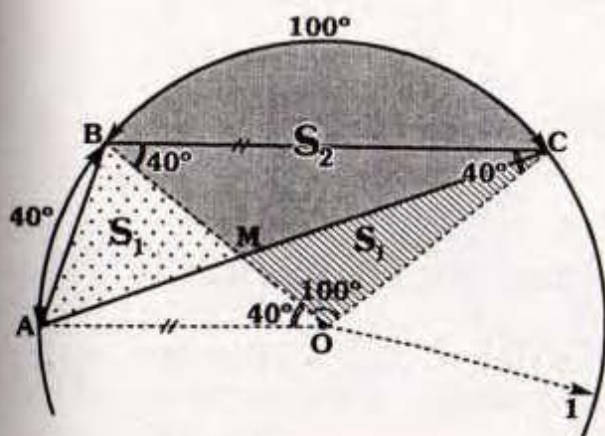
$$A_p = 2 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore A_p = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Clave **A**



**RESOLUCIÓN N° 290**



Nos piden  $S_1 + S_2$

• Notemos :

$$m\angle AOB = m\angle OBC = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AO} \parallel \overline{BC}$$

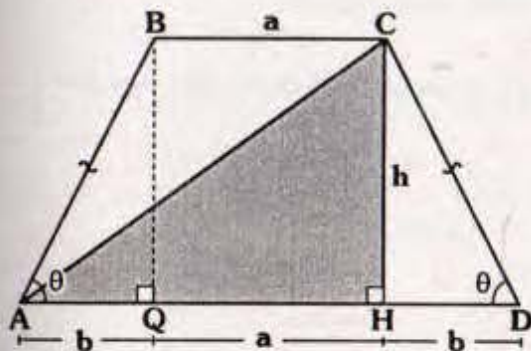
• Luego notemos  $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle OMC} = S_1$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{100^\circ}{360^\circ} \pi (1)^2$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{5}{18} \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 291**



• Nos piden  $S_{\triangle ABCD}$

• Dato  $S_{\triangle ACH} = 12$

• Como ABCD es un trapecio isósceles  $\Rightarrow$   
 $AQ = HD$

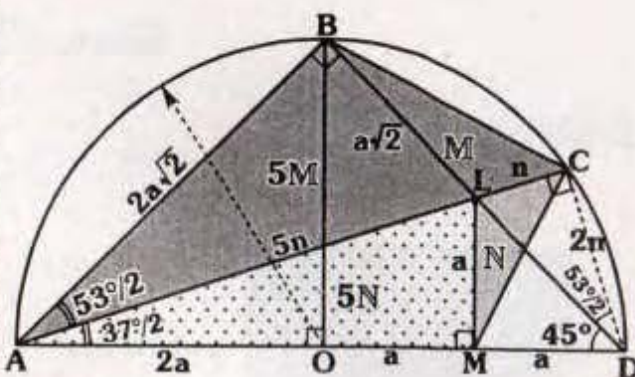
$$S_{\triangle ABCD} = \frac{(2b + a + a)h}{2} = (a + b)h$$

$$S_{\triangle ACH} = \frac{(a + b)h}{2} = 12$$

$$\therefore S_{\triangle ABCD} = 24$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 292**



Nos piden:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MLC}}$

• Notemos:  $m\angle LAM = \frac{37^\circ}{2}$  y

$$m\angle BAL = \frac{53^\circ}{2}$$

•  $\angle LCD$ : notable de  $\frac{53^\circ}{2}$

$$\Rightarrow CD = 2n \text{ y } LC = n$$

•  $\angle ACD$ : notable de  $\frac{37^\circ}{2}$

$$\Rightarrow AC=6n \Rightarrow AL=5n$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MLC}} = \frac{6M}{N}$$

• En el cuadrilátero ABLM:

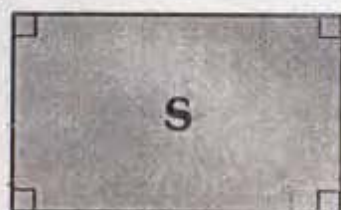
$$\frac{5M}{5N} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{3aa}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MLC}} = 8$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 293**



$$b=10+\text{sen}x$$

$$a=16-\text{sen}x$$

Sea "S" el área de la región rectangular.

Nos piden "S" máximo

• Se sabe que  $S=ab$

**1º método:**

• Usando:  $\underbrace{(a+b)^2}_{26} - (a-b)^2 = 4ab \quad \dots(I)$

• Si queremos  $ab \rightarrow$  máximo, entonces  $(a-b)^2$  debe ser mínimo

• Como  $a-b=6-2\text{sen}x$

debido a que:  $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$

$$\Rightarrow 4 \leq 6-2\text{sen}x \leq 8$$

$$\Rightarrow 16 \leq (6-2\text{sen}x)^2 \leq 64$$

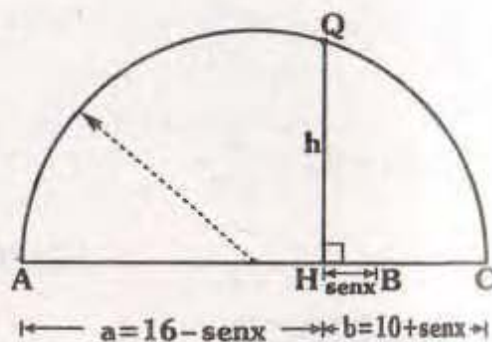
• Luego:  $(a-b)^2$  mínimo es 16

• En (I):  $(26)^2 - 16 = 4ab$

$$\therefore ab = 165$$

**2º método:**

Como se quiere que "ab" sea máximo, usemos relaciones métricas, no perdiendo de vista que  $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ , analicemos desde el siguiente gráfico, sea  $AB=16$  y  $BC=10$



Se sabe que  $h^2=ab$

el "h" máximo es cuando:  $\text{sen}x=1$

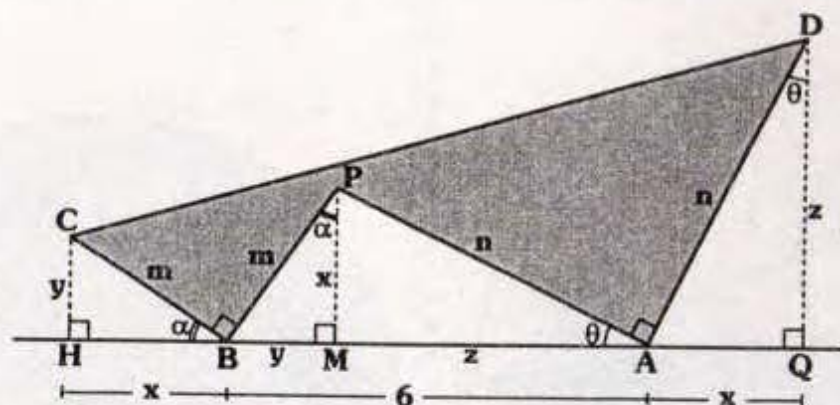
$$\Rightarrow a=15 \quad y \quad b=11$$

$$\Rightarrow ab=(15)(11)$$

$$\therefore S_{\text{máximo}} = 165$$

**Clave III**



**RESOLUCIÓN N° 294**

Sea  $S_x$  el área de la región sombreada.

• Notemos:

•  $\triangle CHB \cong \triangle BMP \Rightarrow CH = BM = y ; HB = MP = x$

•  $\triangle AMP \cong \triangle DQA \Rightarrow MP = AQ = x ; MA = DQ = z$

• Del gráfico:  $y + z = 6$

• Luego:

$$S_x = S_{(CHQD)} - S_{\triangle BHC} - S_{\triangle AQD} - S_{\triangle BPA}$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(y+z)}{2}(6+2x) - \frac{xy}{2} - \frac{6x}{2} - \frac{xz}{2}$$

$$\therefore S_x = 18$$

**Clave** E

**RESOLUCIÓN N° 295**

Nos piden  $S_x$

Dato:  $CG = k$

•  $\triangle CDG: 4(a^2 + b^2) = k^2 \quad \dots(I)$

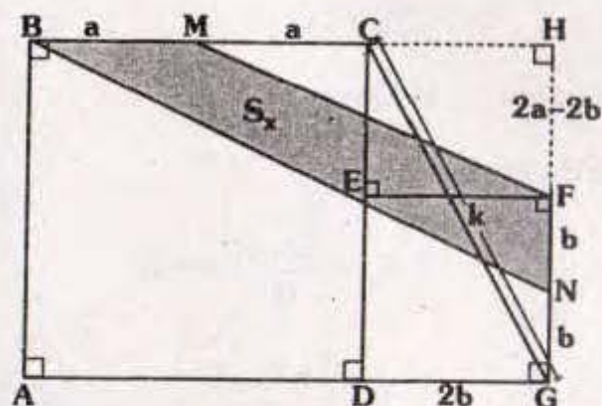
•  $S_x = S_{\triangle BHN} - S_{\triangle MHF}$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(2a+2b)(2a-b)}{2} - \frac{(a+2b)(2a-2b)}{2}$$

$$\Rightarrow S_x = (a+b)(2a-b) - (a-b)(a+2b)$$

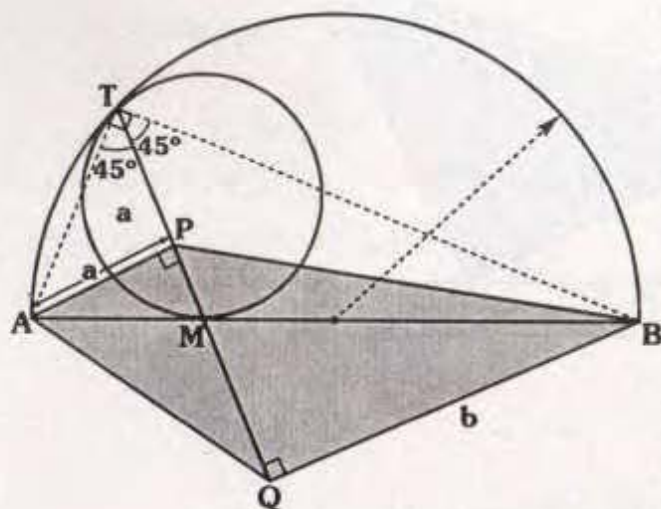
$$S_x = a^2 + b^2$$

$$\therefore S_x = \frac{k^2}{4}$$



**Clave** E

RESOLUCIÓN N° 296



Nos piden el área de la región sombreada ( $S_x$ )

• Notemos que APBQ es un trapecio.

• Por propiedad de circunferencia:

$$m\angle ATM = m\angle MTB = 45^\circ$$

•  $\angle APT$  y  $\angle TQB$ : notable de  $45^\circ$

$$\Rightarrow AP = PT = a \quad y$$

$$QB = TQ = b$$

• Luego  $PQ = b - a$

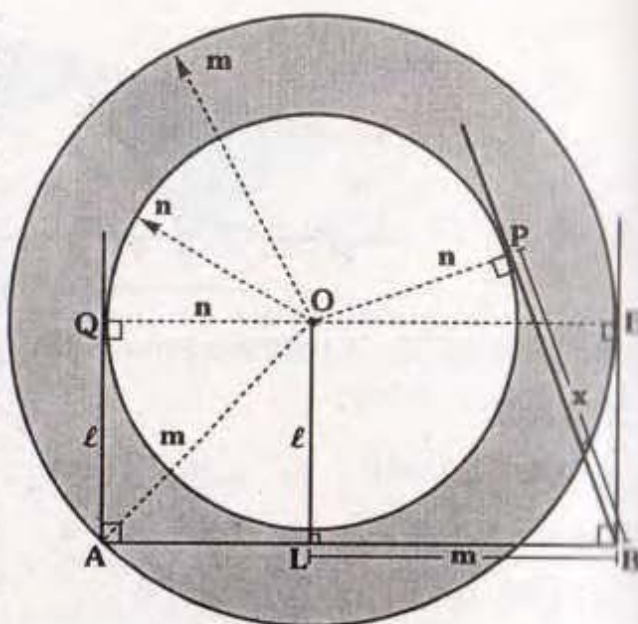
• Finalmente:

$$S_x = \frac{(b+a)}{2}(b-a)$$

$$\therefore S_x = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 297



Nos piden x

Dato:  $A_{\text{(corona circular)}} = \pi a^2$

$$\Rightarrow \pi(m^2 - n^2) = \pi \ell^2 = \pi a^2$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = \ell^2 = a^2$$

• En  $\triangle OLP$ :

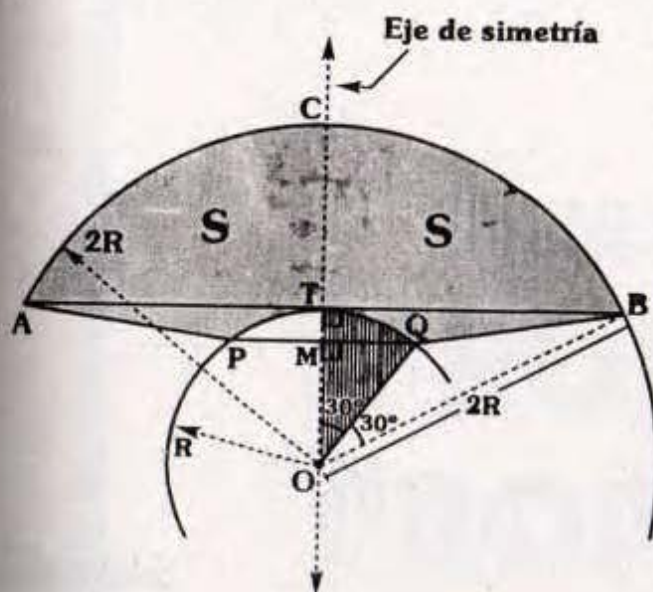
$$x^2 + n^2 = \ell^2 + m^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \ell^2 + \underbrace{m^2 - n^2}_{a^2}$$

$$\therefore x = a\sqrt{2}$$

Clave **D**



**RESOLUCIÓN N° 298**

Nos piden el área de la región sombreada ( $A_T$ )

• Del gráfico:  $A_T = 2S$

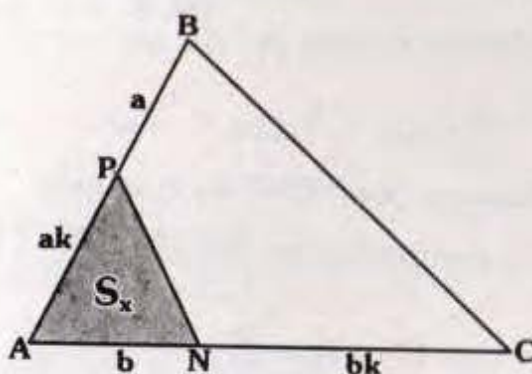
$$S = A_{\triangle BOC} - A_{\triangle TOQ} - A_{\triangle QOB}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{6}\pi(2R)^2 - \frac{1}{12}\pi R^2 - \frac{R \cdot 2R}{2} \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow S = \frac{7}{12}\pi R^2 - \frac{R^2}{2}$$

$$\therefore A_T = \frac{R^2}{6}(7\pi - 6)$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 299**

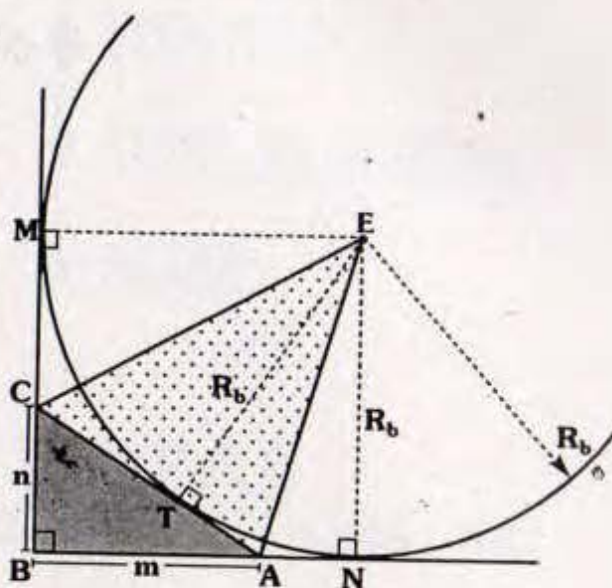
Nos piden  $S_x$

• Por teorema de razón de áreas:

$$\frac{S_x}{S_{\triangle ABC}} = \frac{bak}{a(k+1)b(k+1)}$$

$$\therefore S_x = \frac{k}{(k+1)^2} S$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 300**

Nos piden  $S_{\triangle ABCE}$ ;

Dato  $m+n=a$  y  $AC=b$

• Hallemos el área pedida por partes:

$$S_{\triangle ABCE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle EAC} \quad \dots(I)$$

• Notemos que NBME es cuadrado.

• BN: semiperímetro de ABC (p).

$$\Rightarrow BN = R_b = \frac{m+n+b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$S_{\triangle EAC} = \frac{bR_b}{2} = \frac{b(a+b)}{4} \quad \dots(II)$$

$$S_{\triangle ABC} = R_b(p-b)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{(a+b)}{2} \left( \frac{a+b}{2} - b \right)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \dots(III)$$

• De (II) y (III):

$$S_{\triangle ABCE} = \frac{b(a+b)}{4} + \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$$\therefore S_{\triangle ABCE} = \frac{a(a+b)}{4}$$

**Clave**  $\Delta$





# **Geometría**

## **ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS**

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

**ÁREAS**  
**DE REGIONES PLANAS**



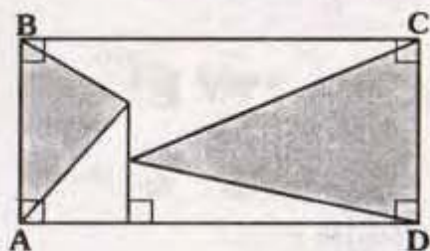
# Problemas Propuestos

Ciclo Anual

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N°1

En el gráfico,  $AB=4$  y  $BC=6$ . Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

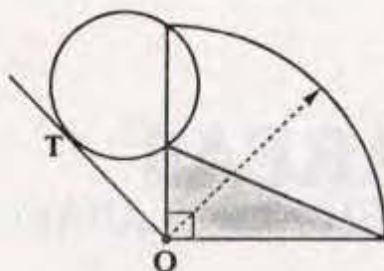


- A) 8                      B) 10                      C) 12  
D) 14                      E) 16

### PROBLEMA N°2

En el gráfico, T es punto de tangencia y  $OT=6$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A) 18  
B) 9  
C) 36  
D) 20  
E) 48



### PROBLEMA N°3

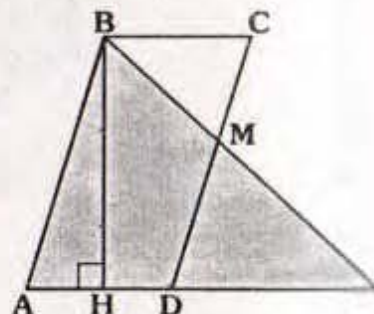
Los lados de un triángulo miden 1, 2 y  $\sqrt{7}$ . Calcule el área de la región triangular.

- A)  $1.5\sqrt{3}$                       B)  $2\sqrt{3}$                       C)  $2\sqrt{7}$   
D)  $3\sqrt{2}$                       E)  $2\sqrt{6}$

### PROBLEMA N°4

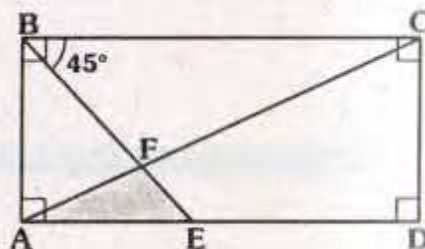
En el gráfico, ABCD es un paralelogramo,  $BH = 4$ ,  $BC = 3$  y  $CM = MD$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A) 12  
B) 14  
C) 15  
D) 16  
E) 18



### PROBLEMA N°5

En el gráfico,  $AB = 3$  y  $BC = 9$ . Calcule el área de la región AFE.





A) 1.25      B) 0.75      C) 1.325

D) 1.125      E) 1.75

**PROBLEMA N°6**

Calcule el área de la región triangular ABC, si la mediatriz de AC interseca a BC en Q, además  $AB=QC=5$  y  $BQ=2$ .

A)  $2\sqrt{6}$       B)  $5\sqrt{6}$       C)  $8\sqrt{6}$ D)  $7\sqrt{6}$       E)  $9\sqrt{6}$ **PROBLEMA N°7**

En el gráfico, el arco AB mide  $90^\circ$  y  $EF=2(ED)$ , calcule el área de la región ABC.

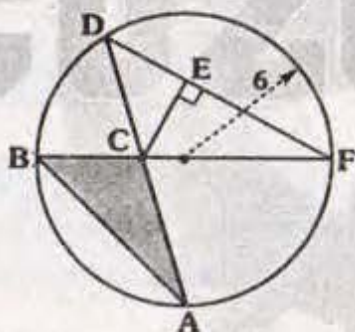
A) 10

B) 12

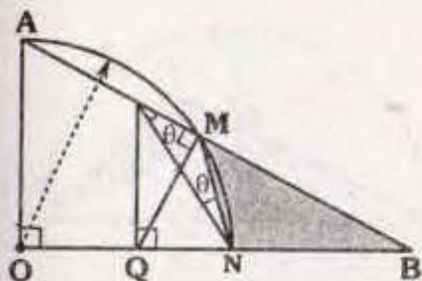
C) 14

D) 16

E) 18

**PROBLEMA N°8**

En el gráfico,  $QM = 6$ . Calcule el área de la región MNB.

A)  $8\sqrt{2}$       B)  $9\sqrt{2}$       C)  $12\sqrt{2}$ D)  $16\sqrt{2}$       E)  $18\sqrt{2}$ **PROBLEMA N°9**

En el triángulo ABC, se cumple que  $m\angle ABC = 120^\circ$ . En  $\overline{AC}$  se ubica P y Q tal que el triángulo PBQ es equilátero (P en  $\overline{AQ}$ ). Si  $(AP)(QC) = 8$ , calcule el área de la región triangular PBQ.

A)  $\sqrt{3}$       B)  $2\sqrt{3}$       C)  $3\sqrt{3}$ D)  $4\sqrt{6}$       E)  $2\sqrt{6}$ **PROBLEMA N°10**

En el triángulo ABC:  $AB=9$ ,  $BC=11$  y  $AC=10$ . Calcule el área de la región triangular AIC, si "I" es el incentro del triángulo ABC.

A) 15      B)  $6\sqrt{2}$       C) 12D)  $10\sqrt{2}$       E)  $8\sqrt{2}$ **PROBLEMA N°11**

En un triángulo PQR, la mediana  $\overline{QM}$  interseca a la ceviana  $\overline{PE}$  en "A". Si  $ER=2EQ$  y el área de la región triangular QAE es 2, calcule el área de la región triangular PQR.

A) 24      B) 22      C) 20      D) 18      E) 16

**PROBLEMA N°12**

La base de un triángulo isósceles mide  $\sqrt{2}$ . Si las medianas relativas a los lados congruentes son perpendiculares, calcule el área de la región triangular.

A) 3      B)  $3/2$       C)  $1/2$ 

D) 2      E) 1



**PROBLEMA N°13**

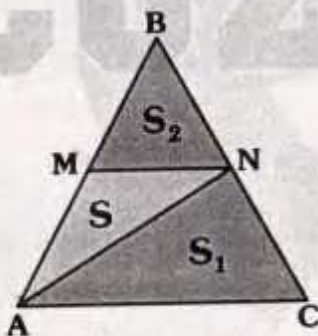
En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH, la bisectriz  $\overline{BE}$  del ángulo ABH y la bisectriz del ángulo ACB se cortan en F, M es punto medio de BC, si las áreas de las regiones ABE y FHM son  $6m^2$  y  $11m^2$  respectivamente. Halle el área de la región ABC.

- A) 50      B) 44      C) 40  
D) 60      E) 55

**PROBLEMA N°14**

Si en la figura  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ , calcule  $\frac{S_1}{S} - \frac{S}{S_2}$ .

- A) 0  
B)  $1/2$   
C)  $1/3$   
D) 1  
E) 2



**PROBLEMA N°15**

El área de la región limitada por un triángulo rectángulo es numéricamente igual a su perímetro. Además el doble de la longitud de un cateto es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. El valor del perímetro de dicho triángulo es:

- A) 20      B) 24      C) 26  
D) 30      E) 36

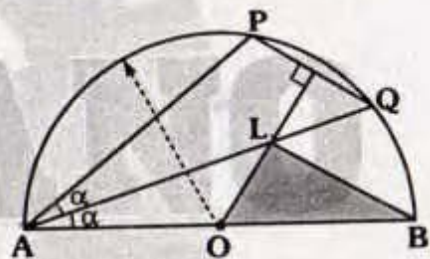
**PROBLEMA N°16**

En un cuadrante AOC de centro O y radio  $2\sqrt{5}$ , se ubican los puntos M y P en  $\overline{OC}$  y  $\widehat{AC}$  respectivamente, de manera que  $OM=MC$  y  $m\angle APM=90^\circ$ . Calcule el área de la región triangular APM.

- A) 3      B) 4      C) 6  
D) 9      E) 12

**PROBLEMA N°17**

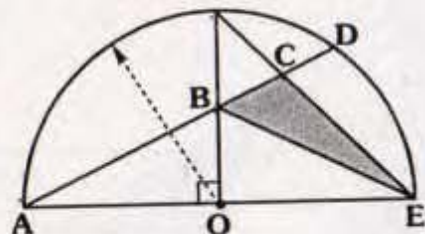
En el gráfico,  $AL=5$  y  $LQ=4$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $15\sqrt{3}/2$       B)  $15\sqrt{5}/2$       C)  $15\sqrt{7}/4$   
D)  $15\sqrt{5}/4$       E)  $15\sqrt{3}/4$

**PROBLEMA N°18**

En la figura,  $(AB)(CD)=16$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 4      B) 6      C) 8  
D) 12      E) 16



**PROBLEMA N°19**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior  $\overline{BD}$ , tal que la  $m\angle ABD = 90^\circ$  y la  $m\angle A = 53^\circ$ . Si  $AC = 20$ , calcule el mayor valor posible del área de la región triangular DBC.

- A) 10    B) 12    C) 20    D) 24    E) 36

**PROBLEMA N°20**

Se tiene un triángulo de áreas "S", al unir los puntos medios de sus lados se forma un triángulo de área " $S_1$ ". En este nuevo triángulo se unen los puntos medios de sus lados y se forma un triángulo de área " $S_2$ ". Si se repite este proceso indefinidamente, calcular:  $S + S_1 + S_2 + \dots$

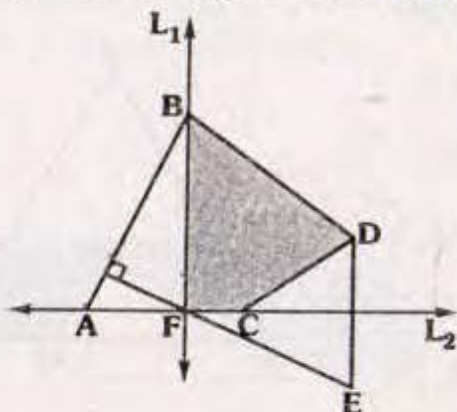
- A)  $2S$     B)  $\frac{4}{3}S$     C)  $\frac{2}{3}S$     D)  $3S$     E)  $\frac{8}{3}S$

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N°21**

En el gráfico,  $\overline{L_1}$  y  $\overline{L_2}$  son mediatrices de  $\overline{AC}$  y  $\overline{DE}$  respectivamente. Si  $(AB)(EF) = 20$ , calcule el área de la región sombreada.

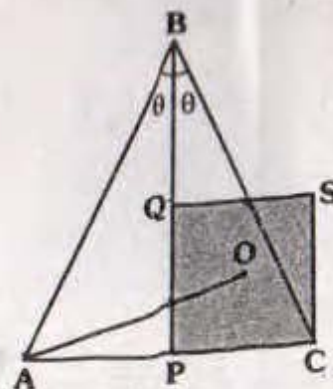
- A) 20  
B) 10  
C) 15  
D) 12  
E) 18



**PROBLEMA N°22**

En el gráfico, PQSC es un cuadrado de centro O. Si  $AO = 2\sqrt{10}$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A) 4  
B) 8  
C) 12  
D) 16  
E) 20



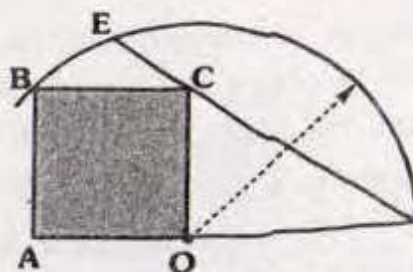
**PROBLEMA N°23**

En un cuadrado ABCD con centro en A y D se trazan los cuadrantes de radios AD, los cuales son secantes en M, si  $AB = 2$ , calcule el área de la región ABMC.

- A) 3    B) 1    C) 2    D)  $\sqrt{3}$     E)  $\sqrt{5}$

**PROBLEMA N°24**

En el gráfico, ABCD y  $CE = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 1    B)  $\sqrt{3}/3$     C) 2  
D)  $\sqrt{2}$     E)  $\sqrt{5}$



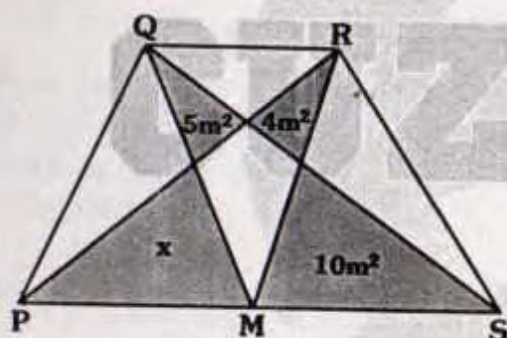
**PROBLEMA N°25**

En un paralelogramo ABCD, se ubica Q y P en AD y BC respectivamente, si el triángulo APQ es equilátero,  $AQ=6$  y  $QD=2$ . Calcule el área de la región paralelogramica.

- A)  $24\sqrt{3}$       B)  $16\sqrt{3}$       C)  $26\sqrt{3}$   
D)  $18\sqrt{3}$       E)  $20\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°26**

En el gráfico,  $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ , calcule X, si M es punto medio de  $\overline{PS}$ .



- A)  $11m^2$       B)  $9m^2$       C)  $16m^2$   
D)  $1m^2$       E)  $25/3m^2$

**PROBLEMA N°27**

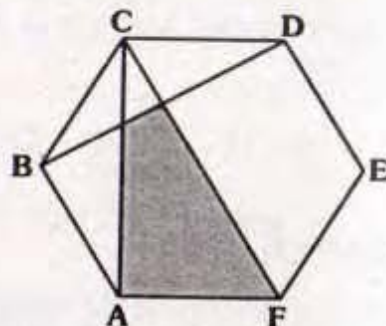
En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BR, se ubica P en AB y Q en  $\overline{BC}$  tal que APQR es un paralelogramo y  $\overline{BR}$  corta a  $\overline{PQ}$  en H. Si  $PH=2$  y  $HQ=8$ . Calcule el área de la región APHR.

- A) 98      B) 96      C) 92  
D) 102      E) 104

**PROBLEMA N°28**

El área de la región hexagonal regular ABCDEF es  $72m^2$ . Calcule el área de la región sombreada.

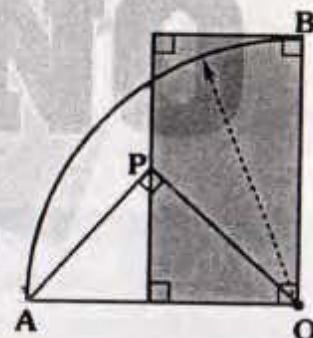
- A)  $20m^2$   
B)  $22m^2$   
C)  $24m^2$   
D)  $18m^2$   
E)  $16m^2$



**PROBLEMA N°29**

Si  $OP=6$ , halle el área de la región sombreada.

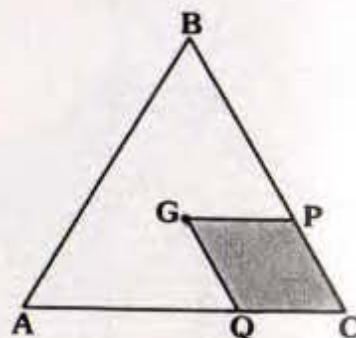
- A) 18  
B) 12  
C) 36  
D) 72  
E) 64



**PROBLEMA N°30**

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y CQGP es un romboide, calcule la razón de áreas de las regiones ABC y CQGP.

- A)  $3/8$   
B)  $9/2$   
C)  $10/3$   
D) 4  
E) 5

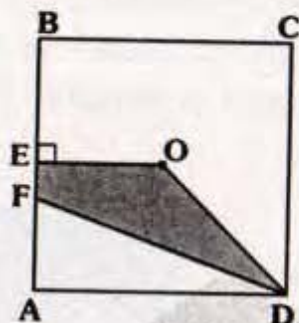




**PROBLEMA N°31**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O y el área de la región sombreada es 7.5 y  $EF=1$ . Calcule el área de la región ABCD.

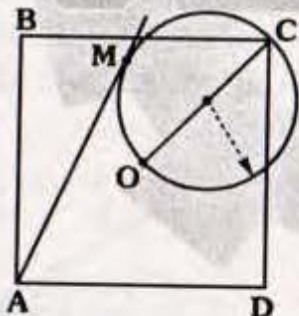
- A) 25
- B) 49
- C) 64
- D) 36
- E) 81



**PROBLEMA N°32**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, M es punto de tangencia y  $AM=4$ , calcule el área de la región cuadrada.

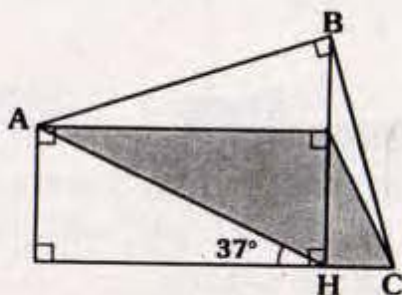
- A) 8
- B) 12
- C) 16
- D) 20
- E) 18



**PROBLEMA N°33**

En el gráfico,  $AB=BC$  y  $CH=2$ . Calcule el área de la región sombreada.

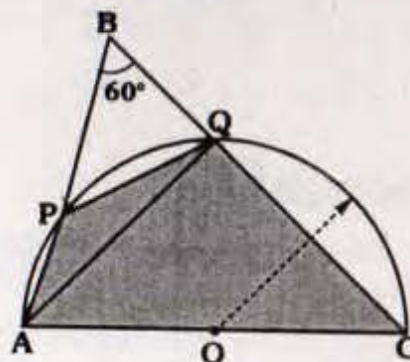
- A) 25
- B) 15
- C) 35
- D) 30
- E) 20



**PROBLEMA N°34**

En el gráfico  $(PB)(AQ)=8$ , calcule el área de la región sombreada.

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D)  $4\sqrt{3}$
- E)  $6\sqrt{3}$



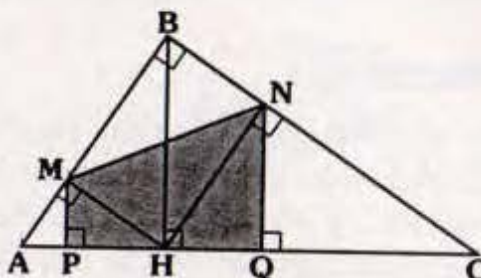
**PROBLEMA N°35**

Se tiene un rectángulo ABCD de centro O, se traza el cuadrante de centro A y radio AB, tal que contiene a O. Si  $AB=2$ , calcule el área de la región rectangular ABCD.

- A) 4
- B) 6
- C)  $2\sqrt{2}$
- D)  $4\sqrt{3}$
- E)  $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°36**

En el gráfico,  $(BH)(PQ)=18$ , calcule el área de la región PMNQ.



- A) 9
- B) 18
- C) 12
- D) 16
- E) 10



**PROBLEMA N°37**

Halle la relación entre el área del cuadrado inscrito en un semicírculo y el área del cuadrado inscrito en el círculo entero.

- A)  $\frac{2}{3}$       B)  $\frac{2}{5}$       C)  $\frac{5}{2}$   
D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\frac{3}{5}$

**PROBLEMA N°38**

Se da un triángulo rectángulo BAC cuyos catetos AB y AC miden 3m y 4m respectivamente. Se traza la altura  $\overline{AH}$  y la circunferencia de diámetro AH que corta a AB en  $B_1$  y AC en  $C_1$ . Por  $B_1$  y  $C_1$  se trazan las tangentes a la circunferencia que cortan a la hipotenusa BC en M y N. Determinar el área del cuadrilátero  $B_1MNC_1$ .

- A)  $1m^2$     B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

**PROBLEMA N°39**

En un trapecio ABCD la base mayor  $AB=20m$ , la base menor  $DC=10m$  y su altura es igual a 12m. Se traza la mediana EF (E en AD y F en BC), que corta a las diagonales AC y BD en P y N respectivamente. Calcule el área del triángulo DPB.

- A)  $10m^2$     B) 20    C) 30    D) 40    E) 50

**PROBLEMA N°40**

Halle el área de la región romboidal ABCD sabiendo que las áreas de las regiones BMC y PMD miden 9 y  $4u^2$  respectivamente siendo "M" la intersección de la diagonal BD y el segmento CP ("P" en  $\overline{AD}$ )

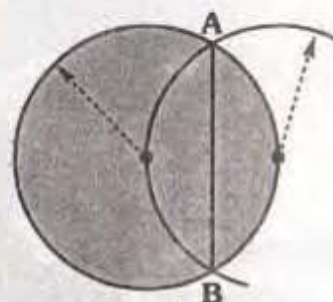
- A)  $18u^2$     B) 20    C) 30    D) 36    E) 28

**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N°41**

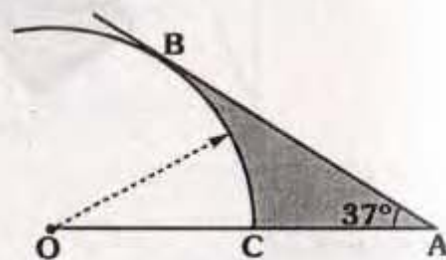
En el gráfico, calcule el área de la región sombreada y  $AB=3\sqrt{3}$ .

- A)  $15\pi$   
B)  $8\pi$   
C)  $6\pi$   
D)  $12\pi$   
E)  $9\pi$



**PROBLEMA N°42**

En el gráfico, B es un punto de tangencia y  $AB+AC=6$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\pi$       B)  $3+\pi$     C)  $13.5-3.7\pi$   
D)  $\frac{27}{8}-3\pi$     E)  $6-1.325\pi$

**PROBLEMA N°43**

En el triángulo ABC (recto en B), se cumple que  $AB=16$  y  $BC=63$ , calcule el área del círculo inscrito.

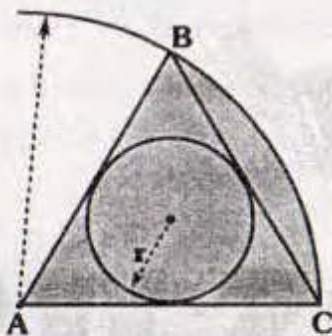


- A)  $49\pi$       B)  $36\pi$       C)  $50\pi$   
D)  $40\pi$       E)  $25\pi$

**PROBLEMA N°44**

En el gráfico, la circunferencia de radio  $r$ , está inscrita en el triángulo ABC, si  $AB=BC$  y  $r=\sqrt{3}$ . Calcule el área de la región sombreada.

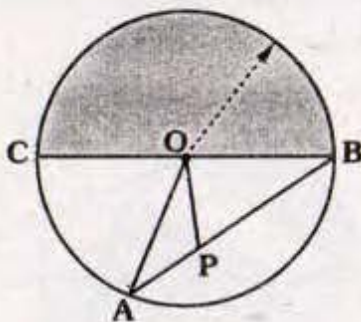
- A)  $2\pi$   
B)  $6\pi$   
C)  $5\pi$   
D)  $4\pi$   
E)  $2.5\pi$



**PROBLEMA N°45**

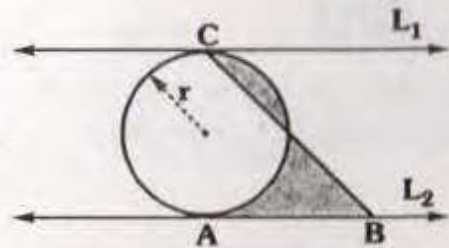
En el gráfico, se cumple que  $m\widehat{AC}=2(m\angle AOP)$  y  $(AP)(AB)=36$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $36\pi$   
B)  $18\pi$   
C)  $50\pi$   
D)  $40\pi$   
E)  $25\pi$



**PROBLEMA N°46**

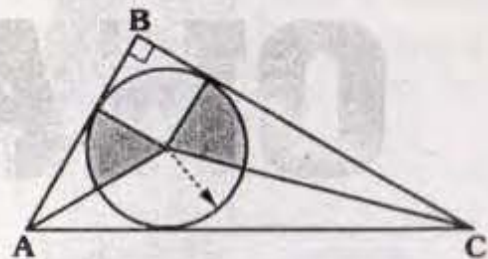
En el gráfico, A y C son puntos de tangencia,  $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$  y las regiones sombreadas son equivalentes, calcule  $AB/r$



- A)  $\pi$       B)  $\pi/2$       C)  $1/\pi$   
D)  $27\pi/8$       E)  $\pi/3$

**PROBLEMA N°47**

En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC, si los catetos miden 5 y 12. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

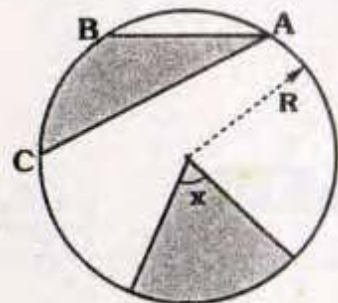


- A)  $\pi$       B)  $\pi/2$       C)  $1.5\pi$   
D)  $2\pi$       E)  $\pi/3$

**PROBLEMA N°48**

En el gráfico,  $AB=R$ ,  $AC=R\sqrt{3}$  y las regiones sombreadas son equivalentes. Calcule  $x$ .

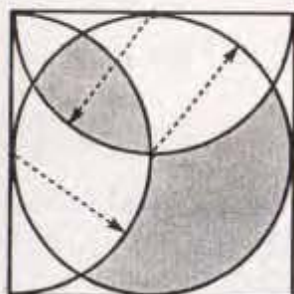
- A)  $60^\circ$   
B)  $90^\circ$   
C)  $120^\circ$   
D)  $75^\circ$   
E)  $53^\circ$



**PROBLEMA N°49**

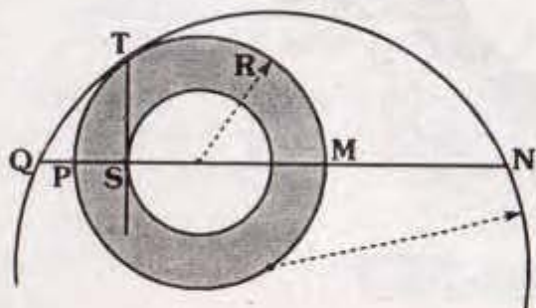
Si el lado del cuadrado mide 4cm, halle el área de la región sombreada.

- A)  $\pi$
- B)  $2\pi$
- C)  $3\pi$
- D)  $\pi/2$
- E)  $3\pi/2$



**PROBLEMA N°50**

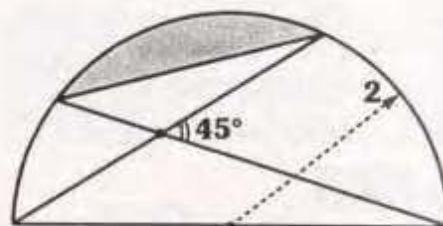
En el gráfico, el área de la corona circular sombreada es de  $12\pi m^2$ , S y T son puntos de tangencia y  $R=4m$ . Calcule MN-QP.



- A) 2m
- B) 4m
- C)  $4(\sqrt{13}-1)m$
- D)  $2(\sqrt{13}-1)m$
- E)  $4\sqrt{13}$

**PROBLEMA N°51**

Calcule el área de la región sombreada.

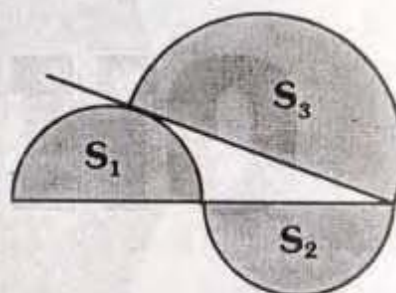


- A)  $(\pi-1)/2$
- B)  $(\pi-2)/2$
- C)  $\pi-2$
- D)  $\pi-1$
- E)  $(\pi-2)/3$

**PROBLEMA N°52**

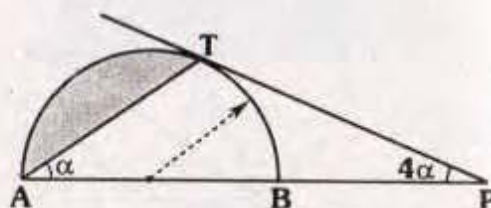
En el gráfico se muestran semicírculos. Si  $S_1=4m^2$  y  $S_2=1m^2$ . Calcule " $S_3$ ".

- A)  $1,5m^2$
- B)  $3m^2$
- C)  $4m^2$
- D)  $6m^2$
- E)  $8m^2$



**PROBLEMA N°53**

Si  $AB=4\sqrt{3}m$ , calcule el área del segmento circular.

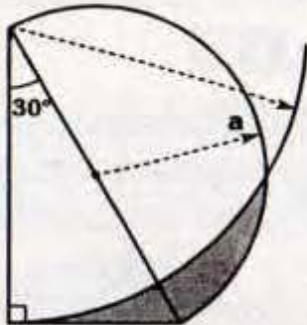


- A)  $(5\pi-3)m^2$
- B)  $(5\pi+5)m^2$
- C)  $(3\pi+5)m^2$
- D)  $(3\pi-5)m^2$
- E)  $6m^2$



**PROBLEMA N°54**

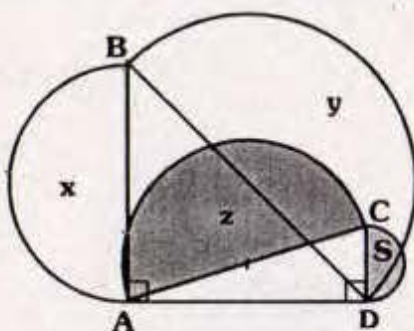
Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-4\pi]$     B)  $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-2\pi]$   
 C)  $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-4\pi]$     D)  $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-2\pi]$   
 E)  $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-5\pi]$

**PROBLEMA N°55**

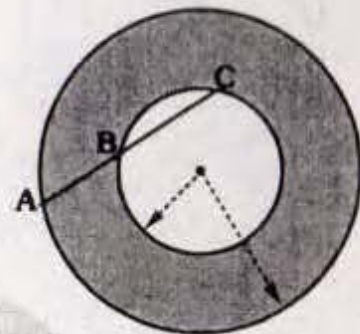
Calcule el valor del área del semicírculo "S", si; las áreas de los demás semicírculos son: x, y, z.



- A)  $z+x-y$     B)  $y-z$     C)  $x-z$   
 D)  $y+x-z$     E)  $y-x$

**PROBLEMA N°56**

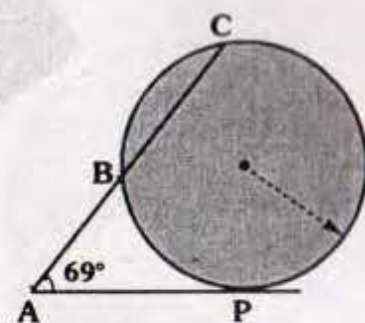
En el gráfico,  $AB=BC=2$ , calcule el área de la región sombreada.



- A)  $4\pi$     B)  $6\pi$     C)  $8\pi$   
 D)  $10\pi$     E)  $12\pi$

**PROBLEMA N°57**

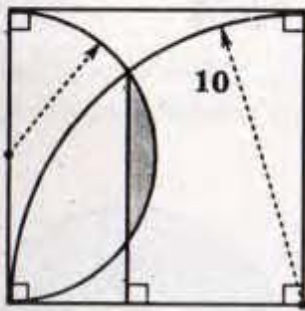
En el gráfico, P es punto de tangencia. Si  $BC = 6u$  y  $m\widehat{PB} = m\widehat{BC}$ . Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $18\pi$     B)  $9\pi$     C)  $12\pi$   
 D)  $36\pi$     E)  $25\pi$

**PROBLEMA N°58**

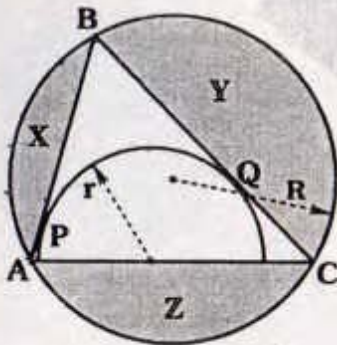
En el gráfico, halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{185\pi}{9} - 12$       B)  $\frac{187\pi}{9} - 12$   
 C)  $\frac{212\pi}{9} - 10$       D)  $\frac{159\pi}{9} - 10$   
 E)  $\frac{135\pi}{37} - 12$

**PROBLEMA N°59**

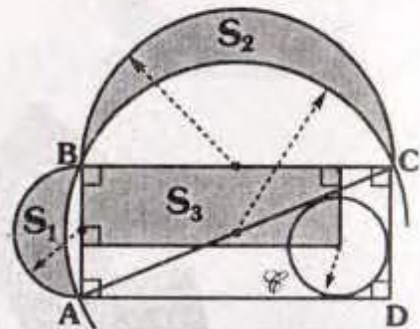
En el gráfico, X, Y y Z son las áreas de las regiones sombreadas. Si  $AB + BC = 10\pi$ ,  $X + Y + Z = 16\pi$  y  $r = 4$ . Calcule R (P y Q son puntos de tangencia)



- A) 3      B) 4      C) 8  
 D) 6      E) 12

**PROBLEMA N°60**

Es la circunferencia inscrita en el triángulo ADC. Indique la relación correcta.



- A)  $2S_3 = S_1 + S_2$   
 B)  $S_3 = S_1 + S_2$   
 C)  $S_3^2 = S_1 S_2$   
 D)  $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$   
 E)  $S_3 = \frac{S_1 + S_2}{4}$







# Problemas Propuestos

Ciclo **Cepre-Uni**

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N°61 3° Seminario

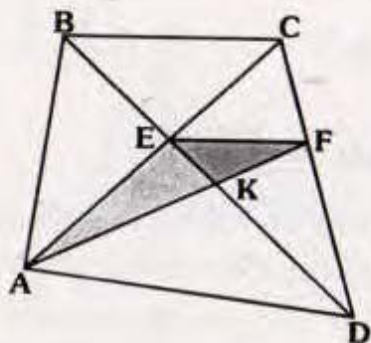
En un triángulo  $ABC$  (recto en  $B$ ). Si  $AB=5u$ ,  $BC=12u$ . Se inscribe una circunferencia tangente a los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  en  $D$ ,  $E$  y  $F$  respectivamente. Halle el área de la región triangular  $DEF$ .

- A)  $\frac{58}{11}$       B)  $\frac{60}{13}$       C)  $\frac{64}{13}$   
D) 5      E) 6

### PROBLEMA N°62 Seminario

En la figura:  $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ,  $AE=3(CE)$ ,  $3(BE)=2(ED)$  y  $A_{(\triangle KEF)}=5u^2$ , calcule  $A_{(\triangle AEK)}$ .

- A) 10  
B) 15  
C) 20  
D) 25  
E) 30



### PROBLEMA N°63

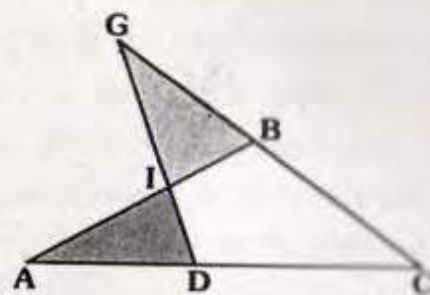
$EBF$  es un triángulo en donde la proyección de  $\overline{EB}$  sobre  $\overline{EF}$  es 4 veces la proyección de  $\overline{BF}$  sobre  $\overline{EF}$ .  $C$  es un punto de  $\overline{EF}$  tal que  $2(EC)=3(CF)$ .  $A$  es un punto en la prolongación de  $\overline{BE}$  tal que  $EB=2(AE)$ . Si el área de  $ABTC$  es  $11u^2$  siendo  $T$  la proyección de  $B$  sobre  $\overline{EF}$ , calcule el área de  $AEC$  en  $u^2$ .

- A) 1      B) 2      C) 3  
D) 4      E) 5

### PROBLEMA N°64

En la figura,  $BC=3(BG)$ ;  $DC=2(AD)$  y  $A_{(\triangle IGB)}=5u^2$ , halle  $A_{(\triangle ADI)}$ .

- A) 5  
B) 8  
C) 10  
D) 13  
E) 15



### PROBLEMA N°65

Calcule el área de una región triangular, si el producto de sus alturas es " $k$ " y el circunradio es  $R$ .



- A)  $\sqrt{\frac{KR}{2}}$  B)  $\frac{\sqrt{KR}}{3}$  C)  $\sqrt[3]{K^2R^2}$   
D)  $\sqrt{2KR}$  E)  $K/R$

**PROBLEMA N°66**

Halle el área de la región triangular ABC determinada en el exterior del cuadrado ACHF, si  $m\angle ABC = 90^\circ$  y  $(S_{\triangle AFB})(S_{\triangle BHC}) = 25$

- A) 5 B) 25 C) 10 D) 15 E) 20

**PROBLEMA N°67**

Hallar el área del triángulo, sabiendo que las longitudes de sus alturas son 12u, 15u y 20u.

- A)  $90u^2$  B)  $120u^2$  C)  $150u^2$   
D)  $180u^2$  E)  $210u^2$

**PROBLEMA N°68**

Dado el triángulo ABC, sobre los lados se construyen los paralelogramos ABDE y BCGF, se prolongan  $\overline{ED}$  y  $\overline{GF}$  hasta que se intersecan en P, la prolongación de  $\overline{PB}$  corta a  $\overline{AC}$  en L y se prolonga  $\overline{BL}$  una longitud  $LR = PB$ , luego por los vértices A y C se trazan paralelas a  $\overline{LR}$ , determinándose el paralelogramo ACQM. ( $AM = LR = CQ$ ).

Demostrar que  $S_{ACQM} = S_{AEDB} + S_{BFGC}$

**PROBLEMA N°69**

Sea  $r_a$  la longitud del radio de la circunferencia exinscrita a un triángulo equilátero ABC. Halle el área de la re-

gión triangular ABC.

- A)  $\frac{r_a^2}{2}$  B)  $\frac{r_a^2\sqrt{3}}{3}$  C)  $r_a^2$   
D)  $r_a^2\sqrt{3}$  E)  $2r_a^2\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°70**

En un triángulo ABC,  $r$  es el radio de la circunferencia inscrita de centro I,  $r_a$  es el radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado BC y centro E. Sean F y Q los puntos de tangencia de las circunferencias con  $\overline{AC}$ ;  $BC = a$ . Halle el área de la región IFQE.

- A)  $\frac{r^2r_a}{a}$  B)  $a(r_a - r)$  C)  $a\sqrt{r_ar}$   
D)  $(r+r_a)\frac{a}{2}$  E)  $\frac{a^2r_a}{r}$

**PROBLEMA N°71**

En un triángulo ABC,  $m\angle B = 135^\circ$ , se traza la altura  $\overline{BH}$ , si  $AH = 1u$  y  $HC = 3u$ . Calcule el área de la región triangular ABC en  $u^2$ .

- A)  $\sqrt{7}$  B)  $\sqrt{7} + 1$  C)  $\sqrt{7} - 1$   
D)  $2\sqrt{7}$  E)  $2(\sqrt{7} - 2)$

**PROBLEMA N°72**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), exteriormente sobre los catetos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  se construyen los triángulos equiláteros ABM y BCN respectivamente.



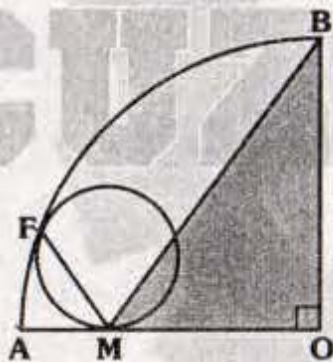
te, si el área de la región triangular ABC es S, entonces el área de la región triangular MBN es:

- A)  $\frac{S}{5}$       B)  $\frac{S}{4}$       C)  $\frac{S}{3}$   
D)  $\frac{S}{2}$       E)  $\frac{S}{8}$

**PROBLEMA N°73**

En la figura AOB es un cuadrante, M y F son puntos de tangencia,  $MF=1u$  y  $BM=2u$ . Calcule el área de la región triangular MOB en  $u^2$ .

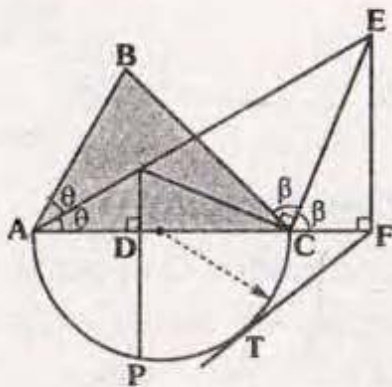
- A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$   
B)  $\sqrt{3}u^2$   
C)  $\sqrt{5}u^2$   
D)  $2u^2$   
E)  $\sqrt{6}u^2$



**PROBLEMA N°74**

En la figura,  $DP=m$ ,  $FT=n$ . Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $n(m+n)$   
B)  $\frac{mn}{2}$   
C)  $2mn$   
D)  $m(m+n)$   
E)  $mn$



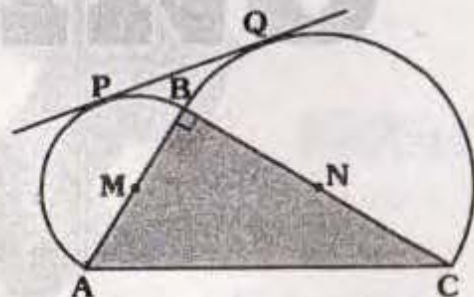
**PROBLEMA N°75**

El perímetro de un triángulo, cuyos lados son números consecutivos, es 21m. Calcular su área.

- A)  $\sqrt{21}m^2$       B)  $\frac{21}{13}\sqrt{15}m^2$   
C)  $\frac{21}{4}\sqrt{15}m^2$       D)  $20m^2$   
E)  $\frac{3}{4}\sqrt{21}m^2$

**PROBLEMA N°76**

M y N son centros; P y Q son puntos de tangencia. Si  $PQ=m$ , halle el área de la región ABC.



- A)  $m^2$       B)  $\frac{m^2}{2}$       C)  $2m^2$   
D)  $4m^2$       E)  $\frac{m^2}{4}$

**PROBLEMA N°77**

En la región del triángulo ABC de  $Su^2$  de área, H y J son los pies de las alturas trazadas desde A y C. Si  $\overline{JK}$  ( $K \in \overline{BC}$ ) es perpendicular a  $\overline{BC}$  y  $CJ=a$ ,  $JK=b$ ; calcule el área de la región BHJ (en  $u^2$ ).

- A)  $\frac{b^2S}{a^2+b^2}$  B)  $\frac{b^2S}{a^2}$  C)  $\frac{a^2S}{b^2}$   
D)  $\frac{a^2S}{a^2+b^2}$  E)  $\frac{\sqrt{a} S}{\sqrt{a+b}}$

**PROBLEMA N°78**

Sea ABC un triángulo equilátero, E el excentro relativo al lado  $\overline{BC}$ ; se trazan:  $\overline{EM} \perp \overline{AC}$ ,  $\overline{MJ} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{JQ} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{JQ} \cap \overline{EM} = \{P\}$ . Halle la relación entre las áreas de las regiones triangulares JMP y ABC.

- A)  $\frac{3}{16}$  B)  $\frac{4}{9}$  C)  $\frac{3}{8}$   
D)  $\frac{1}{6}$  E)  $\frac{1}{4}$

**PROBLEMA N°79**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$  y  $\overline{CQ}$  en P. Las regiones PAQ, PBM y PCN son equivalentes y las regiones PAN, PQB y PMC tienen por áreas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  respectivamente. Halle el área de la región PAQ.

- A)  $\sqrt[3]{S_1 \times S_2 \times S_3}$  B)  $\sqrt[3]{\frac{S_1 \times S_2 \times S_3}{2}}$   
C)  $\sqrt[3]{\frac{S_1 \times S_2 \times S_3}{5}}$  D)  $\sqrt[3]{\frac{S_1 \times S_2 \times S_3}{7}}$   
E)  $\sqrt[3]{\frac{S_1 \times S_2 \times S_3}{11}}$

**PROBLEMA N°80**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas no concurrentes en el interior  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BP}$  y  $\overline{CF}$  tal que:  $PC = nAP$ ,  $AF = nFB$  y  $BQ = nQC$ . Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que determinan las cevianas al intersectarse, dos a dos.

- A)  $\frac{(n-1)^2S}{n^2-n+1}$  B)  $\frac{(n-1)^2S}{n^2+n+1}$   
C)  $\frac{(n+1)^2S}{n^2+n+1}$  D)  $\frac{S}{n+1}$   
E)  $\left(\frac{n-1}{n^4+1}\right)S$

**PROBLEMA N°81**

En un triángulo ABC la relación de las longitudes del exradio y del circunradio es K. Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que se obtiene al unir los puntos de tangencia de la circunferencia ex-inscrita relativa a un lado.

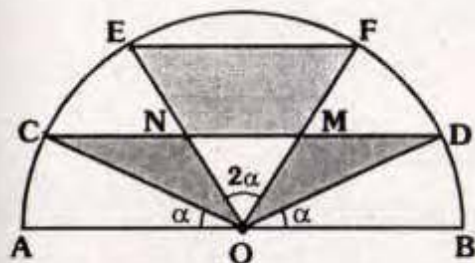
- A)  $\frac{KS}{3}$  B)  $\frac{2KS}{3}$  C)  $\frac{SK}{4}$   
D)  $\frac{SK}{2}$  E)  $\frac{3SK}{2}$

**PROBLEMA N°82**

En el gráfico, O es punto medio del diámetro  $\overline{AB}$  de la semicircunferencia,  $\overline{EF} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{AB}$ . Halle:



$$\frac{\text{Área}_{\text{EFMN}}}{\text{Área}_{(\text{CNO})} + \text{Área}_{(\text{OMD})}}$$



- A) 0,75      B) 1,00      C) 1,25  
D) 1,50      E) 1,75

### PROBLEMA N°83

En un triángulo acutángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F en los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente. Si los segmentos  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  y  $\overline{CD}$  pasan por el centro "O" de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio mide 4.

Calcule:  $\frac{1}{AE} + \frac{1}{BF} + \frac{1}{CD}$

- A) 1/5      B) 1      C) 1/2  
D) 1/3      E) 4/5

### PROBLEMA N°84

En un triángulo ABC recto en B, el área de la región ABC es  $24u^2$ , I es incentro de dicho triángulo, O es circuncentro y  $m\angle AIO = 90^\circ$ . Hallar el área de la región AIO.

- A)  $4u^2$       B)  $5u^2$       C)  $6u^2$   
D)  $8u^2$       E)  $9u^2$

### PROBLEMA N°85

Sea el triángulo ABC cuya región triangular tiene  $50m^2$  de área, cuyo inradio mide 2m y con un circunradio de 5m. Hallar el área de la región triangular MNP (M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita)

- A)  $10m^2$       B)  $8m^2$       C)  $12m^2$   
D)  $15m^2$       E)  $9m^2$

### PROBLEMA N°86

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura  $\overline{BH}$ , las bisectrices interiores  $\overline{AD}$  y  $\overline{CE}$  intersecan a la altura en los puntos M y N, I es incentro. Si  $AB=6u$  y  $BC=8u$ . Hallar el área de la región triangular MNI.

- A)  $\frac{1}{15}u^2$       B)  $\frac{1}{10}u^2$       C)  $\frac{1}{3}u^2$   
D)  $\frac{1}{4}u^2$       E)  $\frac{1}{5}u^2$

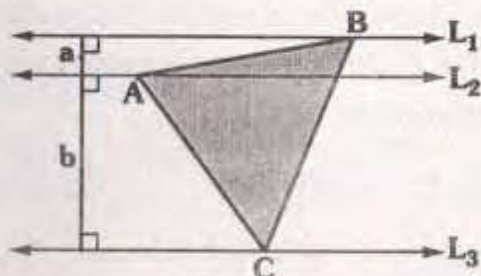
### PROBLEMA N°87

En un triángulo ABC se trazan las cevianas  $\overline{BM}$  y  $\overline{CN}$  que se intersecan en H; hallar el área del triángulo ABC si las áreas de los triángulos BHN, BHC y HMC son  $6m^2$ ,  $12m^2$  y  $8m^2$  respectivamente.

- A)  $36m^2$       B)  $40m^2$       C)  $45m^2$   
D)  $50m^2$       E)  $48m^2$

**PROBLEMA N°88**

En la figura  $\overline{L_1} // \overline{L_2} // \overline{L_3}$ , hallar el área de la región triangular equilátera ABC.



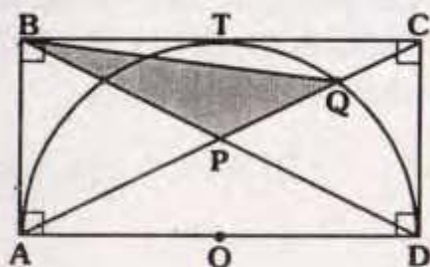
- A)  $(a^2 + b^2 - 3ab)\frac{\sqrt{3}}{3}$  B)  $(a^2 + b^2 + ab)\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 C)  $(a^2 + b^2 + 3ab)\frac{\sqrt{3}}{2}$  D)  $(a^2 + b^2 + ab)$   
 E)  $(a^2 + b^2)\frac{\sqrt{3}}{3}$

**PROBLEMA N°89**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, tal que  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ , las mediatrices de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se cortan en O. Si  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$ , demostrar que ABCD es inscriptible

**PROBLEMA N°90**

Halle el área de la región sombreada si O es centro y  $AB=a$ .



- A)  $5a^2$  B)  $\frac{3a^2}{10}$  C)  $3a^2$   
 D)  $\frac{3}{5}a^2$  E)  $\frac{a^2}{10}$

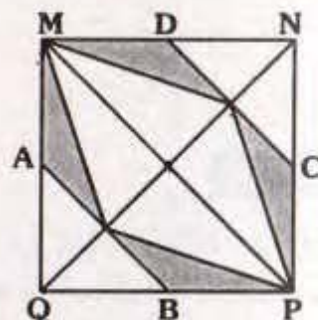
**PROBLEMA N°91**

En un paralelogramo ABCD, se ubica M en  $\overline{BC}$  y N en  $\overline{CD}$  de modo que  $m\angle AMN = 90^\circ$ ,  $MC=3$ ,  $DN=NC$ , y  $AM=MN=4$ . Hallar el área de la región CMN.

- A)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$  B)  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$  C)  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$   
 D)  $\sqrt{5}$  E)  $2\sqrt{5}$

**PROBLEMA N°92**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos medios de los lados del cuadrado MQPN, cuyo lado mide  $\ell$ . Hallar la suma de áreas de las regiones sombreadas.



- A)  $\ell^2/2$  B)  $\ell^2/16$  C)  $\ell^2/4$   
 D)  $\ell^2/5$  E)  $\ell^2/6$



**PROBLEMA N°93**

Dado el pentágono regular ABCDE, su lado mide "a" unidades. Las diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  se intersecan en F. Halle el área de la región cuadrangular AFDE.

- A)  $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$     B)  $a^2\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$   
 C)  $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+10}$     D)  $\frac{a^2}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$   
 E)  $\frac{a^2}{4}\sqrt{\sqrt{5}+1}$

**PROBLEMA N°94**

Las diagonales de un trapezoide miden 26cm y 30cm y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 14cm. Halle el área de la región trapezoidal.

- A) 84cm<sup>2</sup>    B) 168cm<sup>2</sup>    C) 186cm<sup>2</sup>  
 D) 336cm<sup>2</sup>    E) 363cm<sup>2</sup>

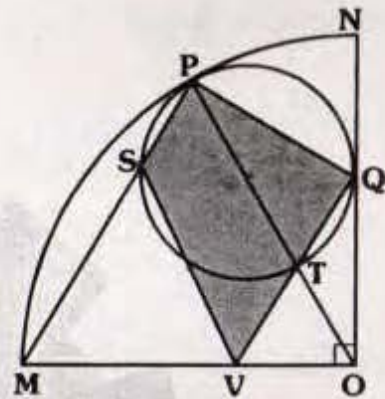
**PROBLEMA N°95**

En un cuadrilátero convexo ABCD,  $AC=m$  y  $BD=n$ . Halle el área de la mayor región que limita el cuadrilátero.

- A)  $\frac{mn}{4}$     B)  $mn$     C)  $\frac{mn}{2}$   
 D)  $2mn$     E)  $m^2 + n^2$

**PROBLEMA N°96**

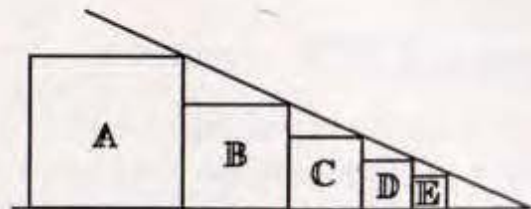
En la figura mostrada se tiene el cuadrante MON, P y Q son puntos de tangencia. Si  $MS=2(SP)$  y r es la longitud del radio de la circunferencia. Halle el área de la región PQVS.



- A)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$     B)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}r^2$     C)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}r^2$   
 D)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$     E)  $\frac{3\sqrt{7}}{2}r^2$

**PROBLEMA N°97**

En la figura mostrada, A, B, C, D y E son las áreas de las regiones cuadradas. Si  $A=27m^2$  y  $E=3m^2$ . Halle  $B+D$



- A)  $12\sqrt{3}m^2$     B)  $30m^2$     C)  $24m^2$   
 D)  $18\sqrt{2}m^2$     E)  $18m^2$



**PROBLEMA N°98 PRÁCTICA CALIFICADA**

Se tiene el rectángulo ABCD, donde  $AB=2L$ ,  $BC=L$ , en  $\overline{AB}$  se ubican los puntos F y E de manera que  $F \in \overline{AE}$ ,  $\overline{FC}$  es perpendicular a  $\overline{DE}$  en Q, si:  $m\angle CDE=30^\circ$ . Calcule el área de la región cuadrangular BCQE.

- A)  $\frac{L^2}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$       B)  $\frac{L^2}{2}\sqrt{3}$   
C)  $\frac{L^2}{2}(2+\sqrt{3})$       D)  $L^2(2-\sqrt{3})$   
E)  $L^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

**PROBLEMA N°99 PRÁCTICA CALIFICADA**

Se tiene el cuadrilátero ABCD donde  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ , en  $\overline{AD}$  se ubican los puntos Q y R de manera que  $Q \in \overline{AR}$ ,  $\overline{CQ} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{BR} \parallel \overline{CD}$  y  $\overline{CQ} \cap \overline{BR} = \{P\}$ . Las áreas de las regiones triangulares BCP y PQR son a y b respectivamente, calcule el área de la región cuadrangular ABPQ.

- A)  $2a + b$       B)  $a + 2b$       C)  $2(a + b)$   
D)  $a+2\sqrt{ab}$       E)  $2\sqrt{ab}$

**PROBLEMA N°100 SEMINARIO**

En un trapecio cuyas bases miden 3m y 1m se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela? (en m)

- A)  $\sqrt{3}$       B) 3      C)  $\sqrt{5}$   
D)  $\sqrt{6}$       E)  $\sqrt{10}$

**PROBLEMA N°101**

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 6u,  $E \in \overline{BC}$ , el área de la región trapezoidal AECD es el doble de la región triangular ABE, entonces la longitud de  $\overline{EC}$  es:

- A)  $\sqrt{2}$       B) 2      C)  $2\sqrt{2}$   
D) 3      E)  $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA N°102**

En un paralelogramo ABCD,  $AD=18\text{dm}$  y su altura BH mide 12dm. Si M y N son los puntos medios de los lados BC y CD respectivamente, entonces el área de la región cuadrangular AMCN (en  $\text{dm}^2$ ) es:

- A) 84      B) 92      C) 96      D) 108      E) 81

**PROBLEMA N°103**

En un cuadrilátero ABCD se ubican M y N puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente, donde  $\overline{AN} \cap \overline{DM} = \{L\}$  y  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{F\}$ , si la suma de áreas de las regiones de los triángulos AML y BMF es  $10\text{m}^2$ , entonces la suma de las áreas de las regiones triangulares DLN y CFN en ( $\text{dm}^2$ ) es:

- A) 7,5      B) 8      C) 9      D) 10      E) 12

**PROBLEMA N°104**

Se tiene el cuadrado ACDE de centro O, B es un punto exterior y relativo a  $\overline{AC}$  tal que  $m\angle ABC=90^\circ$ ,  $BO=6\text{cm}$ . Halle el área de la región limitada por el cuadrilátero ABCO (en  $\text{cm}^2$ )



A) 3    B) 6    C) 9    D) 12    E) 18

**PROBLEMA N°105**

Hallar el área de un trapezio ABCD ( $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ),  $AD > BC$ ,  $MN$  es mediana del trapezio ( $M \in \overline{AB}$ ),  $Q$  es punto medio de  $MN$  y el área de la región cuadrangular no convexa BNAQ es  $40u^2$ .

A)  $100u^2$     B)  $120u^2$     C)  $140u^2$   
D)  $160u^2$     E)  $180u^2$

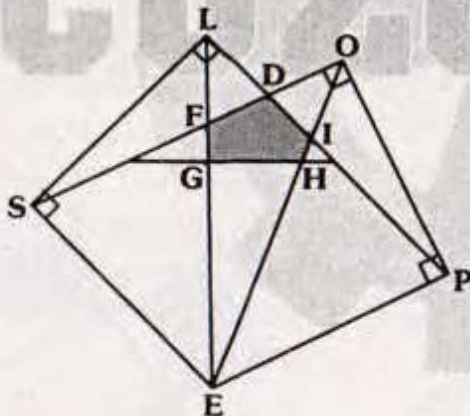
**PROBLEMA N°106**

Hallar el área de la región sombreada, si:

$$\text{Área}_{(\triangle LFS)} = 10u^2, \text{Área}_{(\triangle OIP)} = 20u^2 \quad \text{y}$$

$$\text{Área}_{(\triangle GEH)} = 15u^2$$

A) 10  
B) 15  
C) 17,5  
D) 20  
E) 22,5

**PROBLEMA N°107**

Se tiene una región cuadrada ACHF cuyo lado mide  $L$ , sea  $B$  un punto exterior a la región y relativo a  $\overline{AC}$  tal que el triángulo  $ABC$  es recto en  $B$ .

Si  $\text{Área}_{(\triangle AFB)} \cdot \text{Área}_{(\triangle BHC)} = 25u^2$ . Halle el área de la región triangular  $ABC$ .

A)  $4u^2$     B)  $5u^2$     C)  $6u^2$   
D)  $7u^2$     E)  $8u^2$

**PROBLEMA N°108**

Halle (en  $u^2$ ) el área del trapezoide ABCD, si sus diagonales miden  $6u$  y  $8u$  y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide  $5u$ .

A) 16    B) 20    C) 24  
D) 26    E) 28

**PROBLEMA N°109**

En un cuadrante AOB de centro  $O$ , se inscribe un cuadrado CDEF con  $C$  y  $D$  en  $\overline{AB}$  y  $E$  y  $F$  en  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  respectivamente. Si  $OA = OB = R$ , halle el área del cuadrado.

A)  $\frac{R^2}{3}$     B)  $\frac{R^2}{5}$     C)  $\frac{2R^2}{5}$   
D)  $\frac{3R^2}{5}$     E)  $\frac{2R^2}{3}$

**PROBLEMA N°110**

Calcule el área de la mayor región rectangular inscrita en una circunferencia de radio  $R$ .

A)  $2R^2$     B)  $4R^2$     C)  $2\sqrt{2}R^2$   
D)  $3R^2\sqrt{2}$     E)  $1,5R^2$

**PROBLEMA N°111**

En un cuadrado de lado  $L$  se construyen sobre sus lados interiormente triángulos equiláteros, calcule el área de la región estrellada resultante.



- A)  $(2\sqrt{3}-3)L^2$       B)  $(4\sqrt{3}-3)L^2$   
 C)  $2(2\sqrt{3}-3)L^2$       D)  $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{2}$   
 E)  $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{4}$

**PROBLEMA N°112**

En un paralelogramo ABCD, se traza la mediatriz del lado AB que interseca al lado AD en E, tal que  $m\angle BCE = 2(m\angle ECD)$  y  $2(AE) = CE = 8$ , halle el área de la región ABCD.

- A)  $16\sqrt{3}$       B)  $12\sqrt{3}$       C)  $12\sqrt{2}$   
 D)  $8\sqrt{3}$       E)  $16\sqrt{2}$

**PROBLEMA N°113**

En un cuadrilátero ABCD,  $m\angle ABC = m\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $CD = 1$  y  $m\angle ACD = 2m\angle BAC$ . Halle el área de la región ABCD.

- A)  $\frac{15}{2}\sqrt{6}$       B)  $10\sqrt{7}$       C)  $5\sqrt{7}$   
 D)  $6\sqrt{6}$       E)  $\frac{15}{2}\sqrt{7}$

**PROBLEMA N°114**

En una semicircunferencia de diámetro AD se ubican B y C de modo que  $B \in \widehat{AC}$ . Si  $m\widehat{BC} = 60^\circ$  y  $(AC)(BD) = 12u^2$ . Calcule el área de la región ABCD.

- A)  $2\sqrt{6}$       B)  $2\sqrt{3}$       C)  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$   
 D)  $3\sqrt{6}$       E)  $3\sqrt{3}$

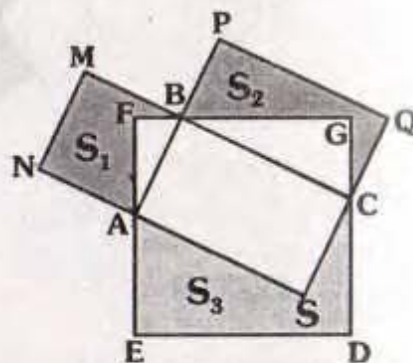
**PROBLEMA N°115**

En un rombo las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden  $12u$  y  $3u$ . Halle el área de la región limitada por dicho rombo.

- A)  $36u^2$       B)  $18u^2$       C)  $82u^2$   
 D)  $45u^2$       E)  $64u^2$

**PROBLEMA N°116**

En la figura, FGDE, ANMB y APQS son regiones cuadradas y  $AF = GC$ . Si  $S_1 + S_2 = 16u^2$ , halle el valor de  $S_3$ .



- A) 16  
 B) 8  
 C) 32  
 D) 24  
 E)  $16\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°117**

Dos regiones rectangulares están inscritas en una misma circunferencia, el 1° tiene una base igual a  $\frac{2}{3}$  del diámetro, el 2° tiene una base igual a  $\frac{3}{4}$  del diámetro.



tro. ¿En que relación se hallan sus áreas?

- A)  $\frac{32}{8}$       B)  $\frac{4\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$       C)  $\frac{8\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$   
 D)  $\frac{32\sqrt{5}}{27\sqrt{7}}$       E)  $\frac{64\sqrt{5}}{49\sqrt{7}}$

**PROBLEMA N°118**

En un paralelogramo ABCD, se traza  $\overline{AC}$  y se ubica M punto medio de  $\overline{AB}$ , sea  $\overline{AC} \cap \overline{MD} = \{Q\}$ . ¿Que porcentaje del área de ABCD es el área del triángulo MCQ?

- A) 1/8      B) 1/6      C) 3/8  
 D) 1/3      E) 1/5

**PROBLEMA N°119**

Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado "a". Sea M punto medio de  $\overline{BC}$ , se dibuja el simétrico del hexágono dado, según el eje que contiene a FM. Hallar el área de la región común a los dos polígonos.

- A)  $6a^2\sqrt{3}$       B)  $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$       C)  $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$   
 D)  $\frac{8}{3}a^2\sqrt{3}$       E)  $\frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°120**

En el rectángulo ABCD, en la prolongación de  $\overline{AD}$  se ubica E, por dicho punto se traza una recta secante que interseca

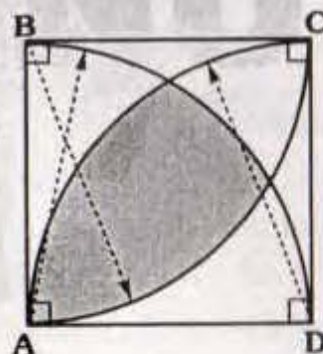
a  $\overline{CD}$  en F y a  $\overline{AB}$  en G. Si las regiones ADFG y BCFG son equivalentes,  $AD = \sqrt{2}(DE)$  y  $AB = \sqrt{2}$ . Calcule AG.

- A)  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$       B)  $\frac{2}{3}$       C) 1  
 D)  $\frac{5}{4}$       E)  $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N°121**

En la figura  $AB=L$ , halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{L^2}{12}(\pi-1)$       B)  $\frac{L^2}{3}$       C)  $\frac{L^2}{4}$   
 D)  $\frac{L^2}{12}(5\pi-6\sqrt{3})$       E)  $\frac{L^2}{6}(\pi-\sqrt{2})$

**PROBLEMA N°122**

En un ángulo están inscritos tres circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Si el área de los círculos menor y



mayor son  $S_1$  y  $S_2$ . Halle el área del círculo intermedio.

- A)  $\sqrt{S_1 S_2}$       B)  $\frac{S_2^2}{S_1}$       C)  $\frac{(S_2)^2}{S_1}$   
D)  $S_1 + S_2$       E)  $S_1 S_2$

**PROBLEMA N°123**

Dos circunferencia congruentes son tangentes exteriores en A, se traza el segmento tangente exterior  $\overline{BC}$ . Si el radio de una circunferencia mide 2m entonces el área de la región triangular mixtilínea ABC es (en  $m^2$ ):

- A)  $6 - \pi$       B)  $8 - 2\pi$       C)  $7 - \pi$   
D)  $\frac{7}{2} - 2\pi$       E)  $9 - 2\pi$

**PROBLEMA N°124**

En una circunferencia cuyo radio mide 5m, se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que:  $m\widehat{AB} = 72^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 54^\circ$ . Calcule el área de la región limitada por  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  y  $\widehat{AC}$  (en  $m^2$ ).

- A)  $2\pi$       B)  $3\pi$       C)  $4\pi$   
D)  $5\pi$       E)  $6\pi$

**PROBLEMA N°125**

En el semicírculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios OC y OD, con  $\overline{OD}$  bisectriz del  $\angle AOC$ . Si los segmentos circulares determinados por  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  tienen por áreas  $A_1$  y  $A_2$ . Calcule el área del sector circular BOC.

- A)  $A_2 - A_1$       B)  $\frac{A_2 + A_1}{2}$       C)  $A_2 - 2A_1$   
D)  $\frac{A_2 - A_1}{2}$       E)  $\frac{2A_1 + A_2}{3}$

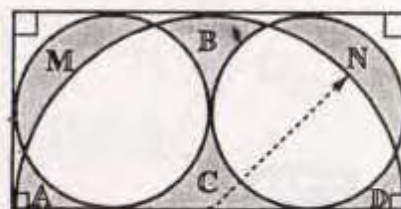
**PROBLEMA N°126**

Sea el sector circular AOB ( $OA = OB = R$ ) cuyo ángulo central mide  $30^\circ$ . Se trazan  $\overline{BD} \perp \overline{OA}$  y  $\overline{AE} \perp \overline{OB}$ . Si  $\overline{BD}$  y  $\overline{AE}$  se intersectan en P, calcule el área de la región del triángulo mixta APB.

- A)  $\frac{R^2}{12}(\pi - 18 + 12\sqrt{3})$       B)  $\frac{R^2}{12}(\pi + 18 - 12\sqrt{3})$   
C)  $\frac{R^2}{12}(\pi + 12 + 6\sqrt{3})$       D)  $\frac{R^2}{12}(\pi + 12 - 6\sqrt{3})$   
E)  $\frac{R^2}{12}(\pi - 12 + 6\sqrt{3})$

**PROBLEMA N°127**

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. Además M, N, A, B, C y D son las áreas de las regiones sombreadas. Entonces  $\frac{M+N}{A+B+C+D}$  es:

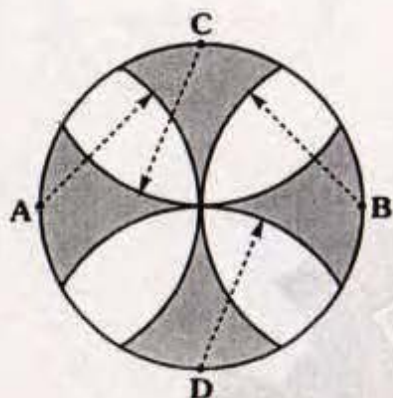


- A)  $1/4$       B)  $1/2$       C)  $1$   
D)  $1/3$       E)  $2$



**PROBLEMA N°128****SEMINARIO**

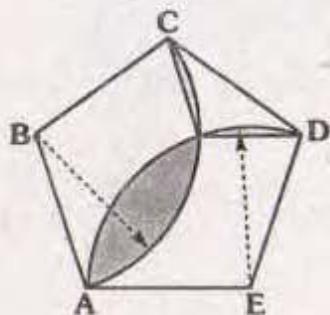
En el siguiente gráfico, se muestra los diámetros AB y CD perpendiculares en F,  $AF=R$ . Hallar el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{2}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$     B)  $\frac{1}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$   
 C)  $\frac{4}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$     D)  $\frac{2}{3}R^2(\sqrt{3}-\pi)$   
 E)  $\frac{2}{3}R^2(2\sqrt{3}-\pi)$

**PROBLEMA N°129**

Dado el pentágono regular ABCDE,  $AB=\ell$ . Entonces el área de la región sombreada será igual a:

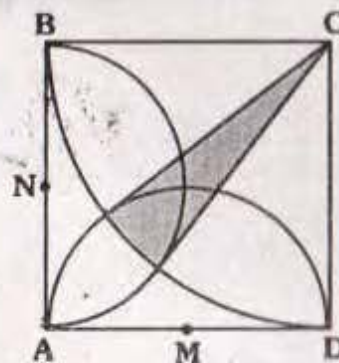


- A)  $\frac{\ell^2}{20}(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}})$   
 B)  $\frac{\ell^2}{20}(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}-5\sqrt{10-2\sqrt{5}})$   
 C)  $\frac{\ell^2}{20}(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}})$   
 D)  $\frac{\ell^2}{20}(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10-2\sqrt{5}})$   
 E)  $\frac{\ell^2}{20}(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}})$

**PROBLEMA N°130**

ABCD es una región cuadrada de  $45u^2$  de áreas, M, N y C son centros de los arcos de circunferencia. Calcule aproximadamente el área de la región sombreada.

- A)  $2\pi u^2$   
 B)  $8\pi u^2$   
 C)  $10\pi u^2$   
 D)  $(4\sqrt{3}-\pi)u^2$   
 E)  $6(\pi-\sqrt{3})u^2$

**PROBLEMA N°131**

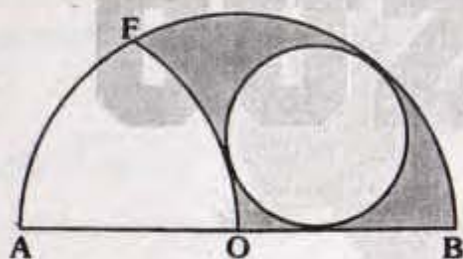
En un círculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios  $\overline{OC}$  y  $\overline{OD}$ , siendo  $\overline{OD}$  la bisectriz del ángulo AOC. Si los segmentos circulares determinados por  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  tienen áreas  $A_1$  y  $A_2$  respecti-

vamente, calcule el área del sector circular BOC.

- A)  $A_2 - A_1$       B)  $2A_2 - A_1$   
 C)  $2(A_2 - A_1)$       D)  $A_2 - 2A_1$   
 E)  $A_2 + A_1$

**PROBLEMA N°132**

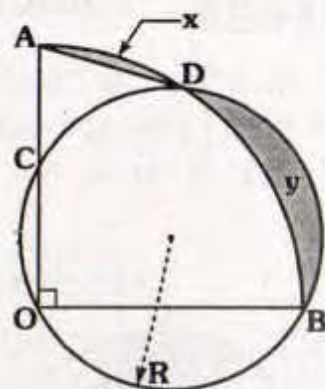
En la figura mostrada se tiene la semicircunferencia de diámetro  $\overline{AB}$  y centro O. El centro del arco  $\widehat{OF}$  es el punto A. Si  $OA=OB=R$ , halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{R^2}{38}(12\sqrt{3} - \pi)$       B)  $\frac{R^2}{38}(10\sqrt{3} - \pi)$   
 C)  $\frac{R^2}{48}(10\sqrt{3} - \pi)$       D)  $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3} - \pi)$   
 E)  $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{2} - \pi)$

**PROBLEMA N°133**

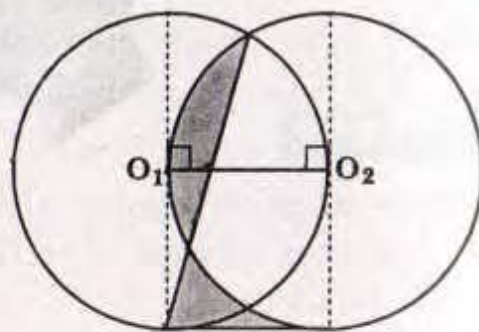
En la figura AOB es un cuadrante, O, B, C y D pertenecen a una circunferencia de radio. Si  $m\widehat{BD} = 45^\circ$ . Hallar  $x + y$



- A)  $\frac{\pi R^2}{2}$       B)  $R^2(\sqrt{2}-1)$       C)  $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$   
 D)  $\frac{R^2}{2}(\pi-1)$       E)  $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3}-1)$

**PROBLEMA N°134**

Si en la figura, el radio de las dos circunferencias mide R entonces el área de la región sombreada es:



- A)  $\frac{R^2}{12}(\pi + \sqrt{3} + 1)$       B)  $\frac{R^2}{12}(2\pi - \sqrt{3} - 3)$   
 C)  $\frac{R^2}{12}(2\pi - \sqrt{3})$       D)  $\frac{R^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 3)$   
 E)  $\frac{R^2}{12}(\pi + 2\sqrt{3} - 3)$



**PROBLEMA N°135**

En la figura mostrada,  $\overline{BC}$  es diámetro.  $\overline{BM}$  es mediana del triángulo  $ABC$ , si  $m\angle CAB = 60^\circ$  y  $AB = \ell$ . Halle el área de la región sombreada.

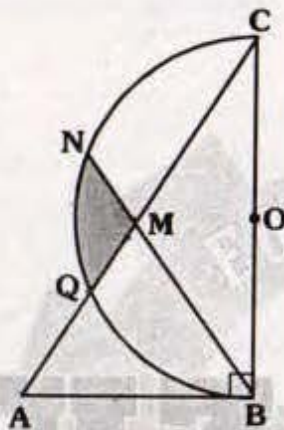
A)  $\frac{\ell^2}{8}(\pi - \sqrt{2})$

B)  $\frac{\ell^2}{8}(\pi - \sqrt{3})$

C)  $\frac{\ell^2}{4}(\pi - \sqrt{3})$

D)  $\frac{\ell^2}{6}(\pi - \sqrt{3})$

E)  $\frac{\ell^2}{8}(\pi - \sqrt{2})$



**PROBLEMA N°136**

En la figura, se muestran dos circunferencias concéntricas de radios  $R$  y  $2R$ . Calcule el área de la región sombreada.

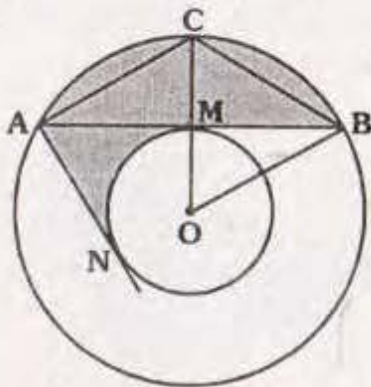
A)  $\frac{3}{2}\pi R^2$

B)  $\frac{\pi R^2}{2}$

C)  $\pi R^2$

D)  $\frac{\pi R^2}{3}$

E)  $\frac{3\pi R^2}{5}$



**PROBLEMA N°137**

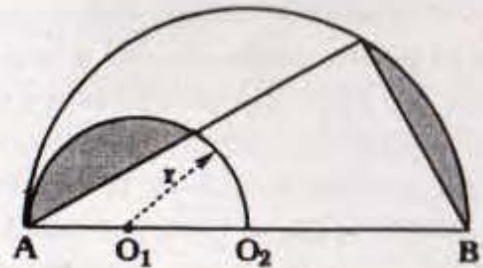
EXAMEN PARCIAL

Si  $O_1$  y  $O_2$  son centros de las semicircunferencias de la figura adjunta. El valor de la suma de áreas sombreadas es:

A)  $r^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$  B)  $r^2\left(\pi - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

C)  $r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$  D)  $r^2\left(\pi + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

E)  $r^2(2\pi + \sqrt{3})u^2$



**PROBLEMA N°138**

En la figura mostrada, la diferencia de las áreas de las regiones  $Z$  e  $Y$  es  $20u^2$ , calcule el área de la región  $X$ .

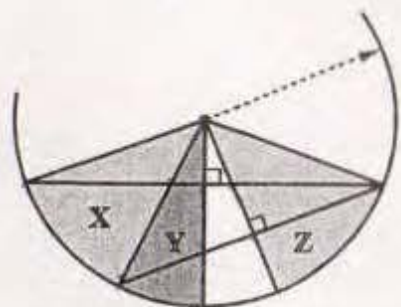
A)  $30u^2$

B)  $35u^2$

C)  $40u^2$

D)  $45u^2$

E)  $50u^2$



**PROBLEMA N°139**

**CUARTO SEMINARIO**

Se tiene un triángulo equilátero ABC cuyo lado mide  $2a$  con centro en B y radio la altura del triángulo se traza un arco que interseca a los lados AB y BC en los puntos E y F respectivamente, luego con centro en el punto medio de AC y radio " $a$ " se traza un arco que interseca a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcular el área de la región limitada por dichos arcos y los lados AB y BC.

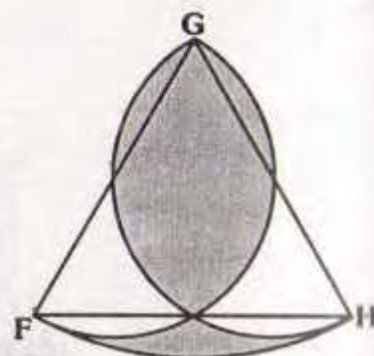
- A)  $\frac{a^2}{6}(\pi - \sqrt{3})$       B)  $\frac{a^2}{6}(5\pi - 3\sqrt{3})$   
 C)  $\frac{a^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$       D)  $\frac{a^2}{6}(4\pi - \sqrt{3})$   
 E)  $\frac{a^2}{6}(3\pi - \sqrt{3})$

**PROBLEMA N°140**

**CUARTO SEMINARIO**

En la figura el triángulo FGH es equilátero  $\overline{FG}$  y  $\overline{GH}$  son diámetros, el arco FH ha sido trazado con centro G. Hallar el área de la región sombreada, si  $FG = a$ .

- A)  $a^2(\pi - \sqrt{3})$   
 B)  $2a^2(\pi - \sqrt{2})$   
 C)  $2a^2(\pi - \sqrt{3})$   
 D)  $\frac{a^2}{4}(\pi - \sqrt{3})$   
 E)  $a^2(\pi - \sqrt{2})$







# Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N°141

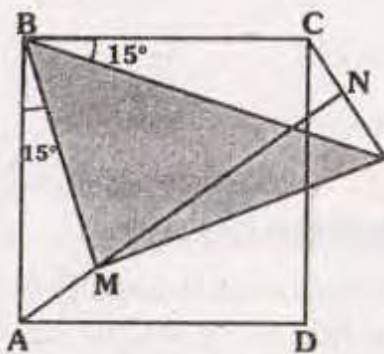
Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P en  $\overline{BC}$ , luego se trazan las alturas BQ y CR en los triángulos ABP y PCD respectivamente, tal que B, Q y R son colineales. M es punto medio de  $\overline{QR}$ , si  $AQ=a$  y  $RD=b$ , calcule el área de la región triangular AMD.

- A)  $\frac{ab}{4}$       B)  $\frac{ab}{2}$       C)  $\frac{a^2+b^2}{4}$   
 D)  $\frac{a^2+b^2}{8}$       E)  $\frac{a^2+b^2}{2}$

### PROBLEMA N°142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y el cuadrilátero MBCN es inscriptible. Si  $AB=8$ , calcule el área de la región sombreada.

- A)  $8\sqrt{3}$   
 B)  $16\sqrt{3}$   
 C) 8  
 D)  $4\sqrt{3}$   
 E) 16



### PROBLEMA N°143

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubican M y N en  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente tal que:  $AM = MC = t$ . Si las regiones MBN y AMNC son equivalentes, calcule el inradio del triángulo ABC.

- A)  $t$       B)  $\frac{t}{2}$       C)  $\frac{t}{3}$   
 D)  $t\sqrt{2}$       E)  $t\frac{\sqrt{2}}{3}$

### PROBLEMA N°144

En el interior de un cuadrado ABCD, se ubica el punto P, tal que  $m\angle APD = 90^\circ$ , si las áreas de las regiones APB y DPC son  $S_1$  y  $S_2$ , calcule el área de la región APD.

- A)  $2\sqrt{S_1S_2}$       B)  $\frac{3}{2}\sqrt{S_1S_2}$       C)  $\sqrt{S_1S_2}$   
 D)  $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2}}$       E)  $\frac{\sqrt{S_1S_2}}{3}$

### PROBLEMA N°145

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que MN determina regiones equivalentes, si  $AM=1$ ,  $MB=2$  y  $BN=3$ ,



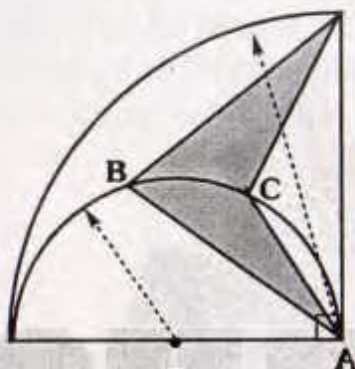
calcule NC.

- A) 0,5      B) 1      C) 1,5  
D) 2      E) 2,5

**PROBLEMA N°146**

Si  $(AB)^2 - (AC)^2 = 200$ , calcule el área de la región sombreada.

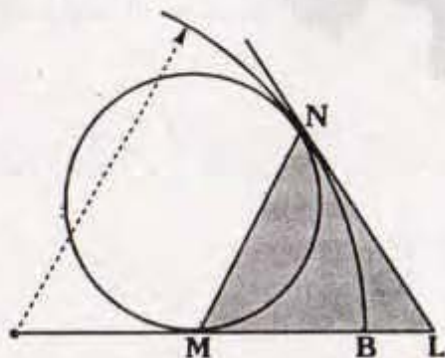
- A) 50  
B) 75  
C) 100  
D) 150  
E) 200



**PROBLEMA N°147**

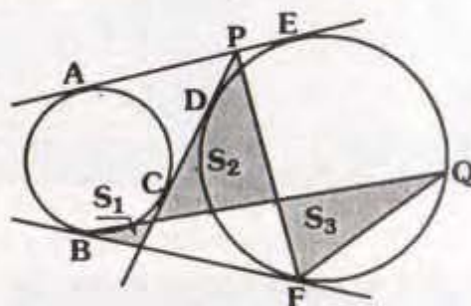
Si M y N son puntos de tangencia,  $MN=4$  y  $m\widehat{NB}=30^\circ$ , calcule el área de MNL.

- A)  $\sqrt{3}$   
B)  $2\sqrt{3}$   
C)  $3\sqrt{3}$   
D)  $4\sqrt{3}$   
E)  $5\sqrt{3}$



**PROBLEMA N°148**

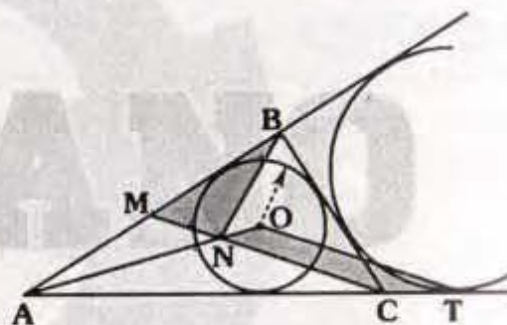
Si A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia,  $m\angle CPF + m\angle BFQ = 180^\circ$ ,  $PF=FQ$  y  $S_1 + S_3 = 8$ , calcule  $S_2$ .



- A) 6      B) 8      C) 10      D) 12      E) 14

**PROBLEMA N°149**

Si  $AM=MB$  y el área de la región NOTC es 8, calcule el área de MNB.



- A) 4      B) 6      C) 8      D) 10      E) 12

**PROBLEMA N°150**

Dado un triángulo ABC, la mediana AM intersecta a las cevianas BD y BE en Q y N respectivamente, si  $AD=DE=EC$ , calcule la razón entre las áreas de las regiones ABC y DQNE.

- A) 50/11      B) 5      C) 60/11  
D) 65/11      E) 70/11

**PROBLEMA N°151**

Se ubican los puntos P, R y Q en los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC



respectivamente, de modo que  $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$  y  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ , si las áreas de las regiones APQ y QRC son 4 y 9 respectivamente, calcule el área de la región PBRQ.

- A) 12                      B) 14                      C) 16  
D) 18                      E) 20

### PROBLEMA N°152

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se trazan la ceviana interior BD; M es punto medio de  $\overline{BC}$ , se traza la altura MH del triángulo MBD, tal que:  $(MH)(AC) = 32u^2$ ;  $m\angle BCA = 40^\circ$ ;  $m\angle DBA = 30^\circ$ . Calcular el área de la región triangular DBM.

- A)  $8u^2$                       B)  $4u^2$                       C)  $16u^2$   
D)  $24u^2$                       E)  $32u^2$

### PROBLEMA N°153

En la región interior de un cuadrado ABCD se ubica el punto P; la paralela a  $\overline{AD}$  trazada por P interseca a  $\overline{AC}$  en Q de modo que:  $AQ = 3(QC)$ ;  $BP = 3u$  y  $m\angle BPA = 90^\circ$ ; calcular el área de la región AQD.

- A)  $27u^2$                       B)  $15u^2$                       C)  $12u^2$   
D)  $26u^2$                       E)  $13,5u^2$

### PROBLEMA N°154

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM, sobre ella se ubica Q y se trazan las perpendiculares  $\overline{QH}$  y  $\overline{QP}$  a los lados

$\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente. Calcule: QP, si  $HQ = 3u$ ,  $AB = 8u$ ,  $BC = 12u$ .

- A)  $3u$                       B)  $2,5u$                       C)  $2u$   
D)  $3,5u$                       E)  $4u$

### PROBLEMA N°155

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se traza la altura BH; tal que la bisectriz trazada por C. Interseca a  $\overline{BH}$  y  $\overline{AB}$  en M y N respectivamente. Calcular el área de la región triangular ABC, si  $MC = 8u$  y  $CN = 10$ .

- A)  $33,75u^2$                       B)  $12u^2$                       C)  $18u^2$   
D)  $24u^2$                       E)  $36u^2$

### PROBLEMA N°156

Dado un triángulo ABC en el cual se trazan la mediana  $\overline{AM}$  y la altura  $\overline{BQ}$  secante en R, desde R se traza la perpendicular  $\overline{RH}$  a  $\overline{AB}$  (H en  $\overline{AB}$ ). Si:  $RQ = 4u$ ,  $AC = 12u$  y  $AB = 8$ . Halle RH.

- A) 6                      B) 5                      C) 9  
D) 4                      E) 10

### PROBLEMA N°157

Se tiene un cuadrado ABCD, de lado a, con diámetro en  $\overline{AD}$  se traza interiormente una semicircunferencia y luego se traza tangente  $\overline{BT}$  a ella, T es punto de tangencia, calcular el área de la región trian-



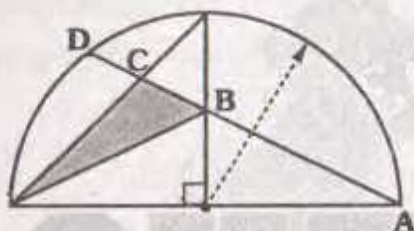
gular CTD en términos de "a".

- A)  $\frac{a^2}{4}$       B)  $\frac{a^2}{3}$       C)  $\frac{a^2}{5}$   
D)  $\frac{a^2}{10}$       E)  $\frac{a^2}{20}$

**PROBLEMA N°158**

Si  $AB = 5$  y  $CD = 2$ , calcule el área de la región sombreada.

- A) 2  
B) 3  
C) 4  
D) 5  
E) 6



**PROBLEMA N°159**

Se tiene una semicircunferencia, de diámetro AB y centro O, luego se traza la circunferencia, de centro  $O_1$ , tangente a  $\overline{AB}$  en A, si la longitud del segmento tangente común es a, calcule el área de la región triangular  $BOO_1$ .

- A)  $\frac{a^2}{4}$       B)  $\frac{a^2}{3}$       C)  $\frac{a^2}{2}$   
D)  $a^2$       E)  $2a^2$

**PROBLEMA N°160**

Dado un cuadrante AOC, de centro O, tomando como diámetro  $\overline{AO}$  se traza interiormente una semicircunferencia, cuyo radio es  $\sqrt{5}$ , luego se ubican los puntos B y D en el cuadrante y en la

semicircunferencia respectivamente, tal que ABCD es un romboide, calcule el área de la región triangular COD.

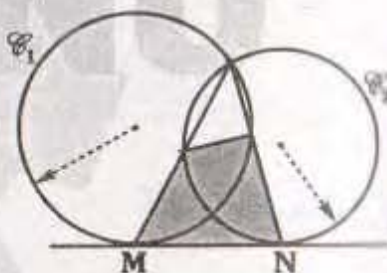
- A) 2      B) 3      C) 4  
D) 5      E) 6

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N°161**

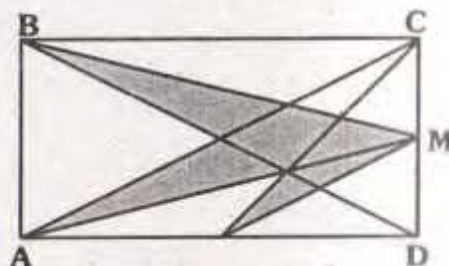
En el gráfico, M y N son puntos de tangencia si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son ortogonales y  $MN=10$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A) 100  
B) 50  
C) 25  
D)  $50\sqrt{2}$   
E)  $25\sqrt{2}$



**PROBLEMA N°162**

En el gráfico,  $CM = MD$  y el área de la región rectangular ABCD es 120. Calcule el área de la región sombreada.



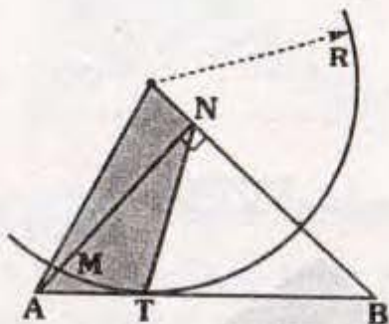
- A) 30      B) 40      C) 50  
D) 35      E) 45



**PROBLEMA N°163**

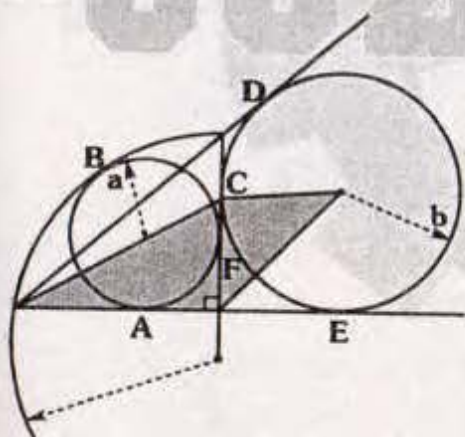
En el gráfico, calcule el área de la región sombreada. Si  $AB=R$ ,  $MN=2(AM)$  y  $AT=\sqrt{5}$  (T es punto de tangencia)

- A) 4,5
- B)  $3\sqrt{5}$
- C)  $\frac{10}{3}$
- D) 3
- E)  $2\sqrt{5}$



**PROBLEMA N°164**

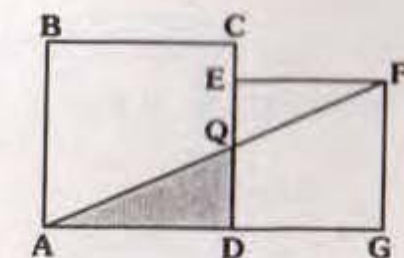
En el gráfico, A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $ab$
- B)  $b^2+a^2$
- C)  $\frac{b^3}{b-a}$
- D)  $\frac{a^3}{b-a}$
- E)  $\frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$

**PROBLEMA N°165**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada, si ABCD y EFGD son cuadrados,  $CQ=a$  y  $FG=b$ .

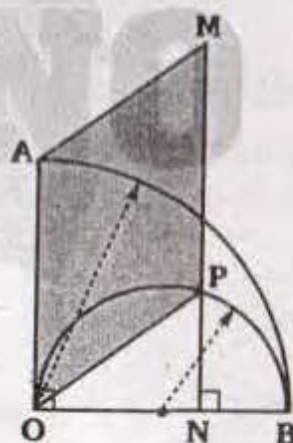


- A)  $ab$
- B)  $\frac{ab}{2}$
- C)  $2ab$
- D)  $ab\sqrt{2}$
- E)  $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA N°166**

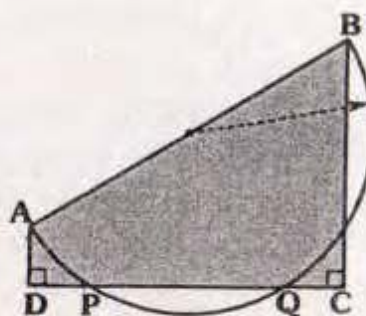
Calcule el área de la región paralelogramática OAMP, si  $OP=a$ .

- A)  $a^2$
- B)  $2a^2$
- C)  $3a^2/2$
- D)  $a^2/4$
- E)  $5a^2/4$



**PROBLEMA N°167**

En el gráfico,  $AD=4$ ,  $DP=5$  y  $PQ=7$ . Calcule el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{323}{7}$       B)  $\frac{323}{2}$       C)  $\frac{315}{4}$   
 D)  $\frac{323}{8}$       E)  $\frac{315}{8}$

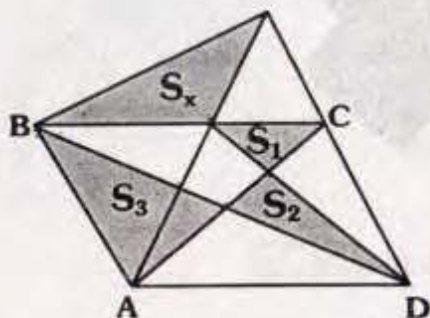
**PROBLEMA N°168**

Se tiene un cuadrilátero ABCD inscriptible y circunscriptible a la vez, tal que  $AB=2$ ,  $BC=1$  y  $CD=4$ . Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero.

- A)  $\sqrt{3}$       B)  $\sqrt{2}$       C)  $\sqrt{10}/3$   
 D)  $\sqrt{6}/2$       E)  $\sqrt{6}$

**PROBLEMA N°169**

En la figura ABCD es un romboide. Si  $S_2 = 8$  y  $S_1 + S_3 = 18$ , calcular  $S_x$ .

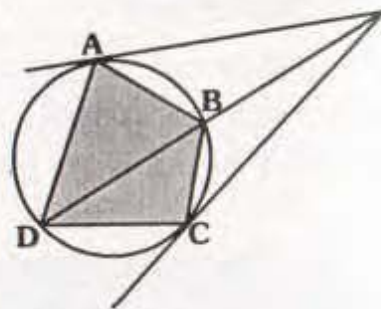


- A) 10      B) 26      C) 20  
 D) 22      E) 16

**PROBLEMA N°170**

En la figura A y C son puntos de tangencia. Si  $AB=6$ ,  $BC=3$  y  $CD=5$ , calcular el área de la región sombreada.

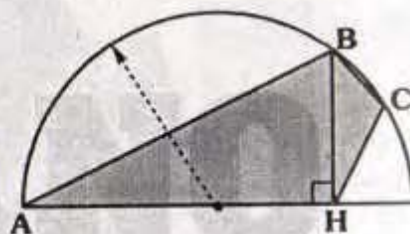
- A)  $5\sqrt{21}$   
 B)  $6\sqrt{21}$   
 C)  $7\sqrt{21}$   
 D)  $4\sqrt{21}$   
 E)  $15\sqrt{6}$



**PROBLEMA N°171**

En la figura  $m\widehat{AB}=150^\circ$  y  $AC=12$ . Calcular el área de la región sombreada.

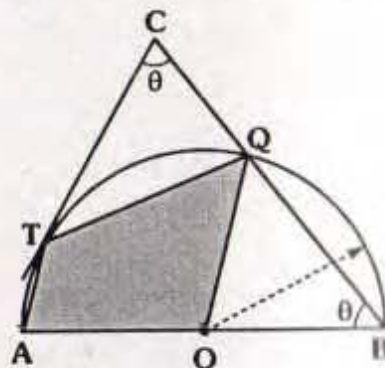
- A) 12  
 B) 16  
 C) 18  
 D) 22  
 E) 24



**PROBLEMA N°172**

Si  $AQ=8$ ; calcule el área de la región sombreada (T punto de tangencia)

- A) 16  
 B) 8  
 C) 4  
 D) 22  
 E) 24



**PROBLEMA N°173**

Siendo ABCD un paralelogramo, calcular la razón entre las áreas de las regiones



AEBD y ECD.

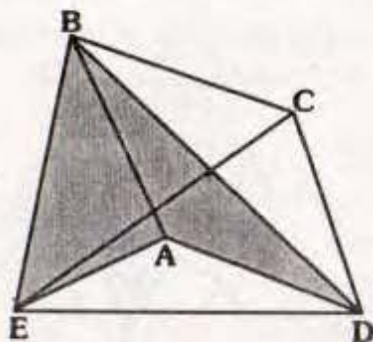
A)  $2/3$

B)  $1/4$

C) 1

D) 2

E)  $3/4$



**PROBLEMA N°174**

Si  $OB=10$  y T es punto de tangencia; calcule el área de la región paralelogramica OQPB.

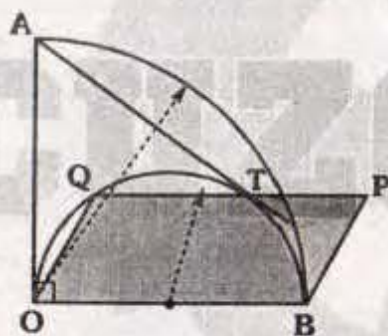
A) 60

B) 40

C) 50

D) 80

E) 20



**PROBLEMA N°175**

Si ABCD es un romboide y  $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$ . Calcule el área de la región ABCD en función a  $S_1$  y  $S_2$ .

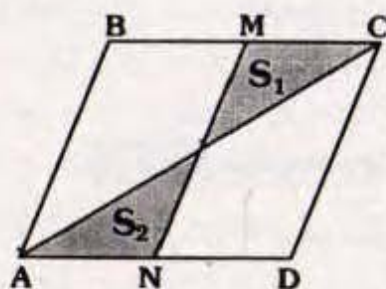
A)  $2(S_1 + S_2)$

B)  $4(S_1 + S_2)$

C)  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

D)  $2(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

E)  $8(S_1 + S_2)$



**PROBLEMA N°176**

Calcule el área de la región sombreada si  $PH = \sqrt{6}$ .

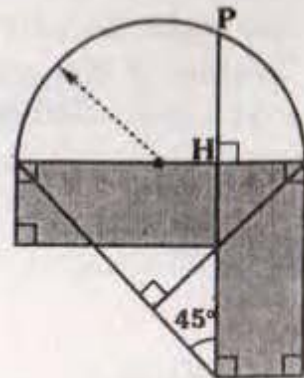
A) 6

B) 18

C) 12

D) 10

E) 24



**PROBLEMA N°177**

En la figura mostrada, ABCD es un paralelogramo,  $\overline{L}$  es mediatriz de  $\overline{AB}$ ,  $AP=6$  y  $PD=4$ . Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

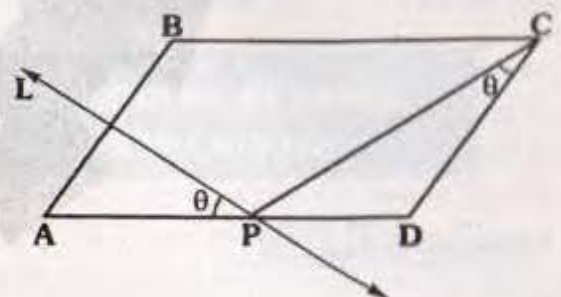
A) 24

B) 64

C) 48

D) 72

E) 60



**PROBLEMA N°178**

En un triángulo ABC se traza la altura  $\overline{BH}$  y la mediatriz de  $\overline{AC}$  la cual interseca a  $\overline{AB}$  en R. Calcule el área de la región cuadrangular RBCH, si el área de la región triangular ABC es 64.

A) 16

B) 32

C) 42

D) 28

E) 48



**PROBLEMA N°179**

En un trapecio rectángulo se traza una recta secante paralela a sus bases determinando dos trapecios parciales circunscriptible. Calcular el área de la región limitada por el trapecio inicial si sus lados no paralelos miden  $a$  y  $b$  ( $a > b$ ).

- A)  $\frac{a(a+b)}{2}$     B)  $\frac{b(a-b)}{2}$     C)  $\frac{ab}{2}$   
D)  $\frac{a^2+b^2}{4}$     E)  $ab$

**PROBLEMA N°180**

Calcule el área de un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia, si las bases miden  $a$  y  $b$ .

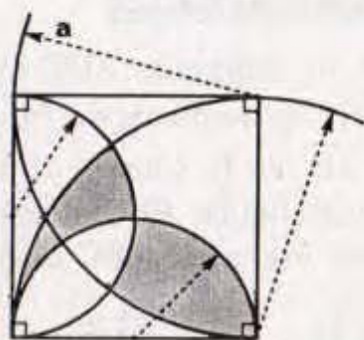
- A)  $ab$     B)  $ab/2$     C)  $(a+b)^2$   
D)  $ab\sqrt{2}$     E)  $ab\sqrt{3}$

**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N°181**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.

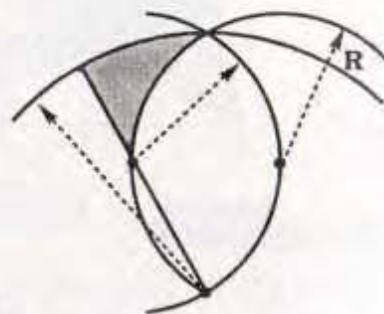
- A)  $a^2(\pi-2)$   
B)  $a^2(4-\pi)$   
C)  $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$   
D)  $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$   
E)  $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$



**PROBLEMA N°182**

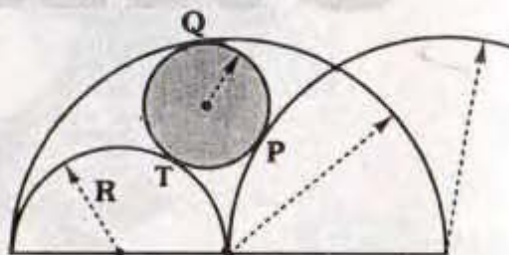
Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada, si  $R = 6u$ .

- A)  $3\pi u^2$   
B)  $6\pi u^2$   
C)  $3\sqrt{3}\pi u^2$   
D)  $4\pi u^2$   
E)  $4\sqrt{3}\pi u^2$



**PROBLEMA N°183**

Según el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área del círculo en función de  $R$ .

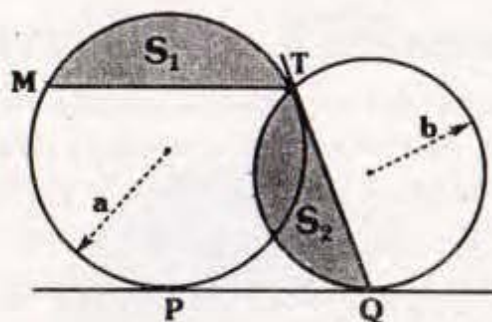


- A)  $\frac{9}{15}\pi R^2$     B)  $\frac{9}{25}\pi R^2$     C)  $\frac{1}{9}\pi R^2$   
D)  $\frac{1}{6}\pi R^2$     E)  $\frac{2}{5}\pi R^2$

**PROBLEMA N°184**

En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si  $m\widehat{MT} = m\widehat{TQ}$ , calcule  $\frac{S_1}{S_2}$ .





- A)  $\frac{a}{b}$       B)  $\frac{a^2}{b^2}$       C)  $\frac{a^2+b^2}{b^2}$   
 D)  $\frac{a^2-b^2}{b^2}$       E)  $\frac{b^2}{a^2}$

**PROBLEMA N°185**

Se tiene una semicircunferencia cuyo diámetro es  $\overline{AD}$ ; en  $\overline{AD}$  se ubican los puntos B y C tal que:  $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$ ; luego se traza  $\overline{BH} \perp \overline{AD}$ ; si  $AD=8$ ; calcular el área de la región limitada por:  $\overline{BH}$ ,  $\overline{HC}$  y  $m\widehat{BC}$ .

- A)  $\frac{8\pi}{3}$       B)  $\frac{7\pi}{3}$       C)  $2\pi$   
 D)  $\frac{9\pi}{4}$       E)  $\frac{7\pi}{5}$

**PROBLEMA N°186**

A distintos lados del diámetro de una circunferencia se traza las cuerdas  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  tal que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ;  $AB=6$ ,  $CD=8$  y  $m\widehat{BD}=90^\circ$ ; calcular el área de la porción de círculo limitada por dichas cuerdas y los arcos AC y BD.

- A)  $\left(\frac{48+25\pi}{2}\right)$       B)  $\left(\frac{46+20\pi}{3}\right)$

C)  $3(2\pi+)$

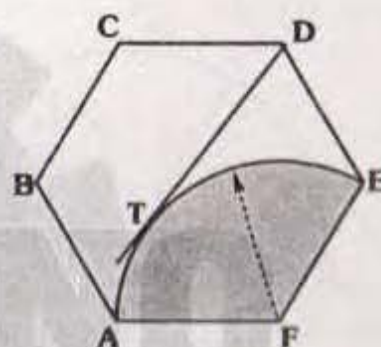
D)  $5(6-\pi)$

E)  $\left(\frac{42+10\pi}{3}\right)$

**PROBLEMA N°187**

Si ABCDEF es un exágono regular;  $DT=6\sqrt{2}$  y T es punto de tangencia; calcular el área de la región sombreada.

- A)  $9\pi$   
 B)  $10\pi$   
 C)  $12\pi$   
 D)  $14\pi$   
 E)  $18\pi$



**PROBLEMA N°188**

Se tienen cuatro círculos no secantes entre ellos y de igual radio; uniendo los centros se obtiene un cuadrilátero irregular convexo; calcular la suma de áreas de las porciones de círculos que se encuentran en el interior del cuadrilátero, si el radio es 1,5.

- A)  $2,25\pi$       B)  $2,75\pi$       C)  $4,30\pi$   
 D)  $3\pi$       E)  $3,25\pi$

**PROBLEMA N°189**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza una circunferencia que pasa por B y por el baricentro "G" del triángulo ABC, dicha circunferencia interseca a

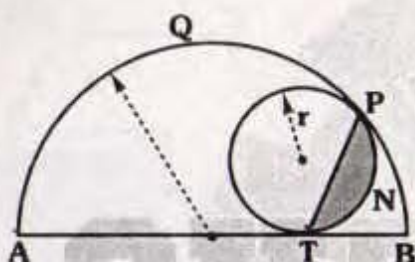


$\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en "M" y "N" respectivamente tal que  $4(BC) = 9(MG)$  y  $AC = 18$ . Calcular el área de la región limitada por la circunferencia.

- A)  $4\pi$  B)  $8\pi$  C)  $16\pi$  D)  $12\pi$  E)  $6\pi$

**PROBLEMA N°190**

Calcule el área de la región sombreada si  $m\widehat{AQP} = m\widehat{TNP}$ ; T y P son puntos de tangencia y  $r=4$ .

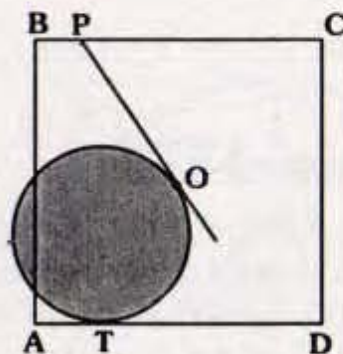


- A)  $(8\pi - 9)$  B)  $(16\pi - 5)$   
C)  $2(3\pi - 2\sqrt{2})$  D)  $3(2\pi - \sqrt{3})$   
E)  $4(3\pi - \sqrt{6})$

**PROBLEMA N°191**

Si ABCD es un cuadrado de centro O;  $PC=7$  y  $BP=1$ , O y T son puntos de tangencia; calcule el área de la región circular sombreada.

- A)  $\frac{25}{4}\pi$   
B)  $24\pi$   
C)  $18\pi$   
D)  $9\pi$   
E)  $\frac{7}{2}\pi$



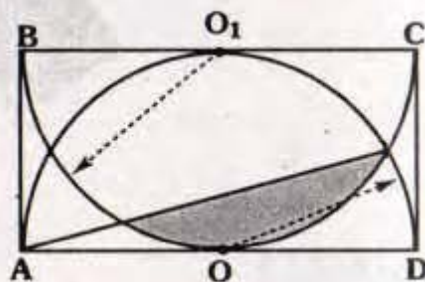
**PROBLEMA N°192**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y se traza una recta tangente en el punto T intersectando a la prolongación de  $\overline{AB}$  en el punto P, tal que  $m\angle TPA = m\angle TAB$  y  $AB=4\text{cm}$ . Calcule el área del segmento circular AT.

- A)  $\frac{1}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$  B)  $\frac{1}{2}(4\pi - \sqrt{3})$   
C)  $\frac{1}{3}(2\pi - \sqrt{3})$  D)  $\frac{1}{2}(4\pi - 3\sqrt{3})$   
E)  $\frac{1}{3}(4\pi - \sqrt{3})$

**PROBLEMA N°193**

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada si:  $CD=R$  ( $O_1$  y  $O_2$  son puntos de tangencia).

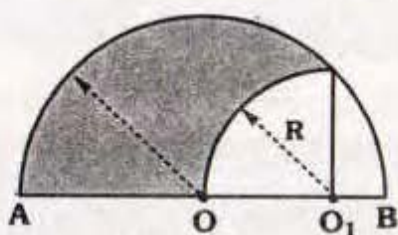


- A)  $\frac{R^2}{4}(\pi + 2)$  B)  $\frac{R^2}{4}\left(\pi - \frac{1}{2}\right)$   
C)  $\frac{R^2}{4}(\pi - 2)$  D)  $\frac{R^2}{4}(\pi - 4)$   
E)  $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$



**PROBLEMA N°194**

Halle el área de la región sombreada.



- A)  $\frac{R^2}{2}(\pi+2)$       B)  $\frac{R^2}{2}(2\pi+1)$   
 C)  $R^2(\pi+1/2)$       D)  $\frac{R^2}{2}(\pi+1)$   
 E)  $\frac{R^2}{2}(\pi+3)$

**PROBLEMA N°195**

Un círculo está inscrito en un triángulo regular. Con centro en uno de sus vértices del triángulo se traza el segundo círculo, cuyo radio es igual a la mitad del lado del triángulo. Que parte del área del triángulo constituye el área de la intersección de los círculos.

- A)  $\frac{5\sqrt{3}\pi-18}{54}$       B)  $\frac{2\sqrt{3}\pi-6}{7}$       C)  $\frac{2}{3}$   
 D)  $\frac{1}{4}$       E)  $\frac{\sqrt{3}\pi-6}{7}$

**PROBLEMA N°196**

Sea ABCDEF un hexágono regular con lado "a" y con su centro en el punto "O". Se ha trazado tres circunferencias: La primera con centro en el punto A, pasa por los puntos C y E; la segunda, con centro en el punto B, pasa por los puntos O

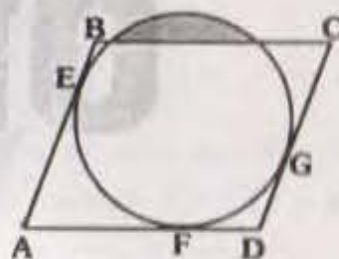
y C; la tercera, con centro en el punto F, pasa por los puntos O y E. Hallar el área de la figura limitada por los tres circunferencias mencionadas situada en el interior del hexágono.

- A)  $\pi^2/2$       B)  $\pi^2/3$       C)  $\pi^2/6$   
 D)  $\pi^2/4$       E)  $\pi^2/8$

**PROBLEMA N°197**

Las alturas del romboide ABCD miden 8 y 6. Calcule el área de la región sombreada (E, F y G son puntos de tangencia)

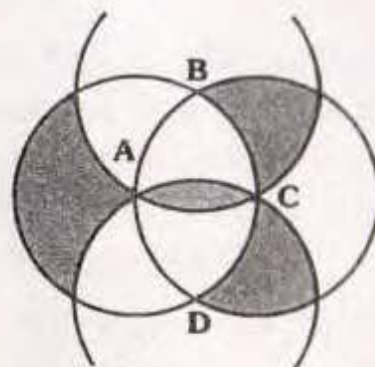
- A)  $(3\pi-5\sqrt{3})/2$   
 B)  $6\pi-2\sqrt{3}$   
 C)  $3\pi-\sqrt{3}$   
 D)  $4(2\pi-\sqrt{3})$   
 E)  $\frac{4}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$



**PROBLEMA N°198**

Hallar el área de la región sombreada que se indica en la figura. Si el radio de los círculos es  $\sqrt{3}$  y A, B, C, D son los centros.

- A)  $\pi$   
 B)  $2\pi$   
 C)  $3\pi$   
 D)  $4\pi$   
 E)  $\pi(\sqrt{6}-2)$



**PROBLEMA N°199**

Dos círculos de igual radio están situados de forma que la distancia entre sus centros es igual al radio. Hallar la razón entre el área de la intersección de los círculos y la de un cuadrado inscrito en ella.

A)  $\frac{(4\pi - 3\sqrt{3})(4 + \sqrt{7})}{27}$

B)  $\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})(4 - \sqrt{7})}{27}$

C)  $\frac{(2\pi + 3\sqrt{3})(2 - \sqrt{7})}{27}$

D)  $\frac{4}{9}(4\pi - 3\sqrt{3})$  E)  $\frac{8}{9}(4\pi - 3\sqrt{3})$

**PROBLEMA N°200**

Un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe otro círculo, en este otro cuadrado y así sucesivamente. Calcule la suma límite de las áreas de todos los círculos.

A)  $4\pi R^2$  B)  $3\pi R^2$  C)  $14\pi R^2$

D)  $5\pi R^2$  E)  $2\pi R^2$

**CUZCANO**







# Problemas Propuestos

Ciclo

Semestral  
Intensivo

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

### PROBLEMA N°201

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD y en el triángulo ADC la ceviana interior DE.

Si  $m\angle ABD = m\angle DEC$ ;  $m\angle DAC = 30^\circ$  y  $m\angle ACB = 7^\circ$ , calcule la razón de áreas de las regiones ABDE y EDC.

- A) 11/25      B) 11/36      C) 7/25  
D) 7/36      E) 11/16

### PROBLEMA N°202

En el gráfico, A, P, T, C, D y E son puntos de tangencia. Si  $AB = BC$  y  $TP = 1$ . Calcule el área de la región triangular ABC.

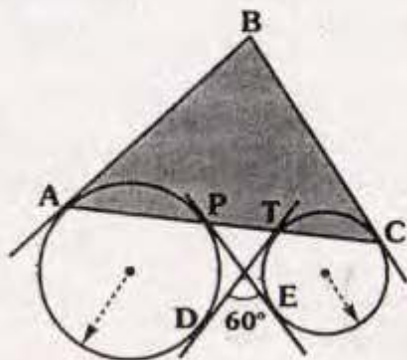
A)  $\frac{49}{4}\sqrt{3}$

B)  $36\sqrt{3}$

C) 36

D) 25

E)  $25\sqrt{3}$



### PROBLEMA N°203

Las circunferencias exinscritas relativas a los lados AB, BC y AC del triángulo ABC de inradio 2 e incentro I, son tangentes a dichos lados en P, Q y R respectivamente. Si  $(S_{\triangle API})(S_{\triangle BIQ})(S_{\triangle CIR}) = 18$ . Halle el área de la región ABC.

- A) 18      B) 9      C)  $9\sqrt{2}$   
D) 16      E) 36

### PROBLEMA N°204

En el triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita, tangente a  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  en P, Q y T respectivamente. Si  $m\angle ABC = 2\alpha$  y la altura BH mide h, calcule la distancia de T hacia  $\overline{PQ}$ .

- A)  $h \sec \alpha$       B)  $2h \sec \alpha$       C)  $h \cos \alpha$   
D)  $2h \cos \alpha$       E)  $h \sec \alpha$

### PROBLEMA N°205

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AD, luego se traza la ceviana interior BF perpendicular a  $\overline{AD}$  en E. Si  $AB = 5$ ,  $AC = 8$  y  $BE = 3$ . Calcule el área de la región triangular BDE.

- A) 18/13      B) 15/13      C) 20/13  
D) 25/13      E) 27/20



**PROBLEMA N°206**

Se tienen tres circunferencias concéntricas, se ubica un punto en cada circunferencia de tal manera que el área de la región triangular cuyos vértices son dichos puntos tenga área máxima. ¿Qué punto notable es el centro para dicho triángulo?

- A) incentro                      B) circuncentro  
C) ortocentro                  D) punto de Fermat  
E) baricentro

**PROBLEMA N°207**

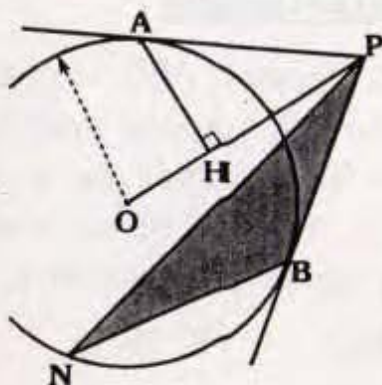
Si los lados de un triángulo rectángulo se encuentran en progresión aritmética de razón K. Calcule el área de la región triangular formada al unir los excentros.

- A)  $20K^2$                       B)  $50K^2$                       C)  $40K^2$   
D)  $30K^2$                       E)  $60K^2$

**PROBLEMA N°208**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia,  $m\widehat{AB} = 2(m\angle NPB)$  y  $(PH)(NP) = 10$ , calcule el área de la región sombreada.

- A) 4  
B) 3  
C) 5  
D) 7,5  
E) 8



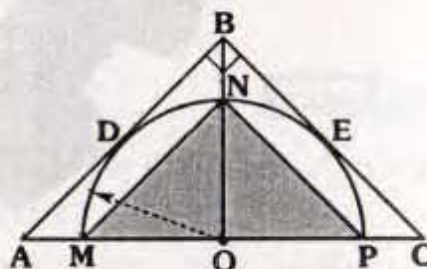
**PROBLEMA N°209**

En un paralelogramo ABCD en  $\overline{AB}$  se ubica el punto M, tal que  $\overline{BD} \cap \overline{MC} = \{N\}$ . Si las áreas de las regiones BCN y NCD son  $A_1$  y  $A_2$  calcular el área de la región triangular MAD en función de  $A_1$  y  $A_2$ .

- A)  $\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2}$                       B)  $\frac{A_2^2 + A_1^2}{A_2}$                       C)  $\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1}$   
D)  $\frac{A_2^2 + A_1^2}{A_1}$                       E)  $\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1}$

**PROBLEMA N°210**

En el gráfico mostrado, O; centro  $AB=a$  y  $BC=b$ . Calcule el área de la región triangular MNP. (D y E son puntos de tangencia).



- A)  $\frac{a^2 + b^2}{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}$                       B)  $\frac{a^2 b^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$   
C)  $\frac{a^2 b^2}{(a+b)\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$                       D)  $\frac{a^2 \cdot b^2}{2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}$   
E)  $\frac{2a^2 b^2}{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}$



**PROBLEMA N° 211**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior BP tal que:  $m\angle ABP = 3(m\angle BAC)$ .

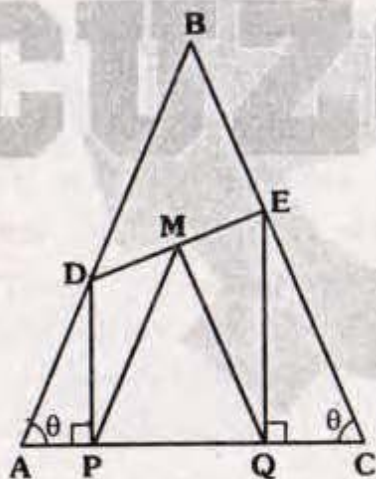
Si  $AC = 3(BP) = 12$ , calcule el área de la región triangular ABC.

- A)  $7\sqrt{3}$       B)  $5\sqrt{6}$       C)  $6\sqrt{5}$   
D)  $9\sqrt{7}$       E)  $6\sqrt{7}$

**PROBLEMA N° 212**

Según el gráfico  $AD = DB = 2(BE)$ ,  $DM = ME$ . Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares ABC y PMQ.

- A)  $\frac{16}{15}$   
B)  $\frac{8}{5}$   
C)  $\frac{4}{5}$   
D)  $\frac{32}{5}$   
E)  $\frac{64}{15}$

**PROBLEMA N° 213**

En la diagonal AC de un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se ubica el punto M, luego se traza  $MH \perp AB$  ( $H \in AB$ ).  $BH = a$  y  $AD = b$ , calcule el área de la región MCD.

- A)  $ab$       B)  $ab\sqrt{3}$       C)  $ab\sqrt{2}$   
D)  $\frac{ab}{4}$       E)  $\frac{ab}{2}$

**PROBLEMA N° 214**

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) en  $\widehat{AB}$  se ubica en M, se prolonga  $\overline{AM}$  y se ubica N, tal que  $m\angle MNB = 90^\circ$ . Si la razón de áreas de las regiones triangulares AOB y MNB es 2,5. Halle  $m\widehat{AM}$ .

- A)  $45^\circ$       B)  $37^\circ$       C)  $53^\circ$   
D)  $60^\circ$       E)  $67,5^\circ$

**PROBLEMA N° 215**

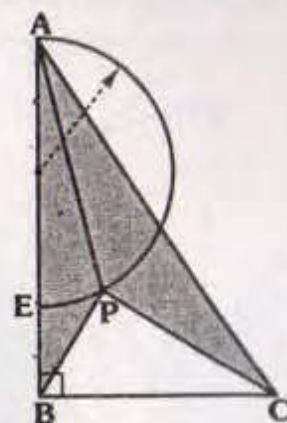
Se tiene el rectángulo ABCD, P en  $\overline{AB}$  y Q en  $\overline{BC}$ . Si:  $S_{(PAD)} = 5$ ;  $S_{(PBQ)} = 3$  y  $S_{(QCD)} = 4$ . Halle  $S_{(PQD)}$ .

- A)  $\sqrt[3]{60}$       B) 8      C)  $\sqrt{21}$   
D)  $2\sqrt{15}$       E) 12

**PROBLEMA N° 216**

En el gráfico,  $AP = \sqrt{2}$  y  $AE = BC$ , calcule el área de la región sombreada.

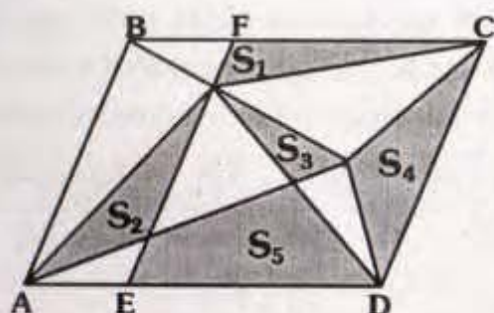
- A) 2  
B)  $2\sqrt{2}$   
C)  $\sqrt{2}$   
D) 1  
E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA N° 217**

En la figura, ABCD es un romboide,  $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  y  $S_5$  son las áreas



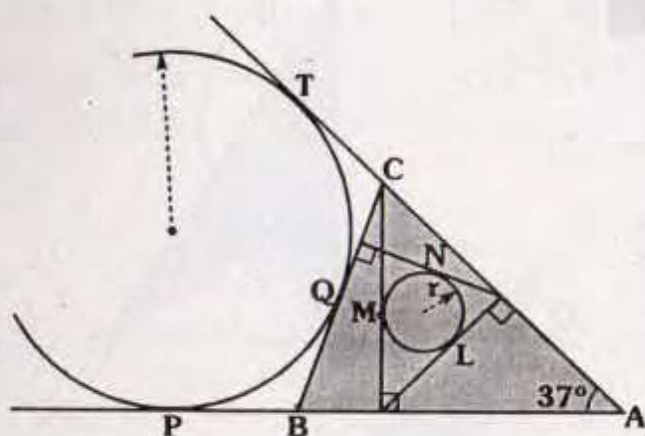
de las regiones sombreadas, halle la relación entre ellas.



- A)  $S_1 + S_5 = S_2 + S_3 + S_4$
- B)  $S_1 + S_2 + S_4 = S_3 + S_5$
- C)  $S_1 + S_2 = S_5 + S_3 - S_4$
- D)  $S_1 + S_3 + S_5 = S_2 + S_4$
- E)  $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5$

**PROBLEMA N° 218**

En la figura, P, Q, T, N, L y M son puntos de tangencia, si  $(PA)r = 36u^2$ , calcule el área de la región ABC.



- A)  $72\mu^2$
- B)  $76\mu^2$
- C)  $75\mu^2$
- D)  $78\mu^2$
- E)  $81\mu^2$

**PROBLEMA N° 219**

En un triángulo rectángulo la circunferencia inscrita es tangente a los catetos en P y Q y a la hipotenusa en M. Calcule la distancia de M a PQ sabiendo que la suma de las inversas de los exradios relativos a los catetos del triángulo mencionado es igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  y el circunradio es  $6\sqrt{2}$ .

- A)  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$
- B) 2
- C)  $\frac{7}{3}$
- D)  $\frac{5}{3}\sqrt{2}$
- E)  $\frac{6}{5}\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 220**

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM, BP y BQ ( $P \in \overline{AQ}$ ),  $\overline{BP}$  y  $\overline{BQ}$  intersecan a  $\overline{AM}$  en T y L respectivamente. Si  $m\angle BAM = 15^\circ$ ,  $m\angle TBL = m\angle BMT$ ,  $AT = 2$  y  $LM = 3$ , calcule el área de la región triangular TBL.

- A)  $1u^2$
- B)  $0,5u^2$
- C)  $2u^2$
- D)  $2,5u^2$
- E)  $3u^2$

**ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES**

**PROBLEMA N° 221**

En el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica M en  $\overline{CD}$  tal que las regiones ABCM y ADM son equivalentes e isoperimétricas. Si  $m\widehat{AD} = 120^\circ$  y  $m\widehat{BC} = 50^\circ$ , halle  $m\widehat{CD}$ .



- A)  $70^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $120^\circ$   
D)  $50^\circ$       E)  $80^\circ$

**PROBLEMA N° 222**

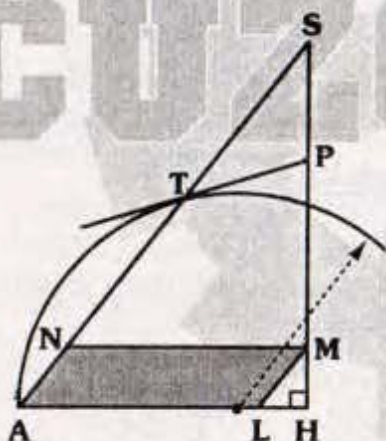
Se tiene el cuadrilátero bicéntrico ABCD, con  $AB=6$ ,  $BC=5$  y  $CD=9$ , calcule el radio de la circunferencia inscrita.

- A) 1    B) 2    C) 3    D)  $2\sqrt{3}$     E)  $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 223**

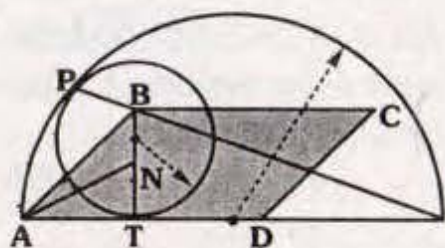
En el gráfico,  $AT=5$ ,  $TS=3$  y  $PM=MH=2$ . Calcule el área de la región romboidal ANML (T es punto de tangencia)

- A)  $\frac{8}{3}\sqrt{7}$   
B)  $8\sqrt{7}$   
C)  $3\sqrt{7}$   
D)  $\frac{3}{8}\sqrt{7}$   
E)  $\frac{8}{3}\sqrt{5}$



**PROBLEMA N° 224**

En el gráfico,  $BN=NT$ ,  $AN=2\sqrt{5}$  y  $TD=2(AT)$ . Halle el área de la región sombreada.

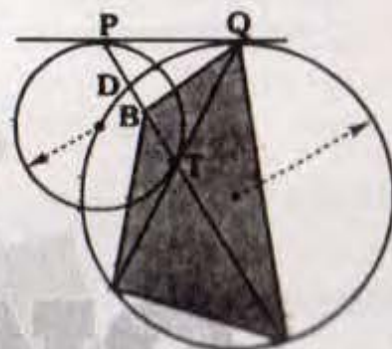


- ❖ A) 48      B) 36      C) 42  
❖ D) 54      E) 40

**PROBLEMA N° 225**

En el gráfico,  $BP=PT=3$  y  $PD=2$ , calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)

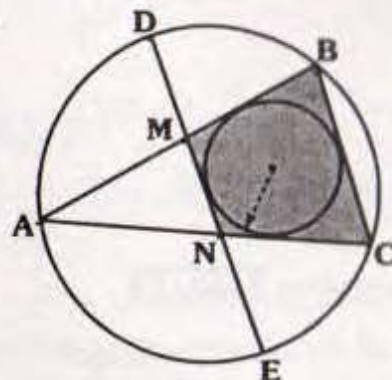
- ❖ A)  $6\sqrt{15}$   
❖ B)  $\frac{63}{5}\sqrt{15}$   
❖ C)  $\frac{63}{2}\sqrt{15}$   
❖ D)  $12\sqrt{15}$   
❖ E)  $9\sqrt{15}$



**PROBLEMA N° 226**

Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero MBCN, si  $m\widehat{EA}=m\widehat{AD}$ ,  $NC=4\text{cm}$ ,  $MN=3\text{cm}$  y el área de la región sombreada es igual a  $6\sqrt{10}\text{cm}^2$ .

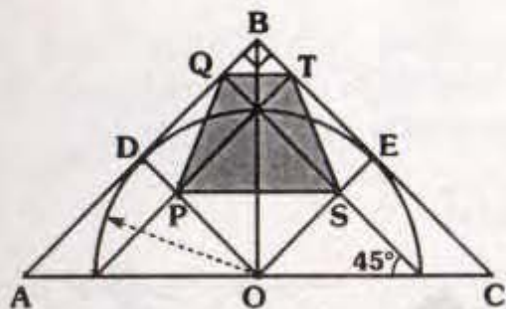
- ❖ A)  $\frac{2}{3}\sqrt{10}\text{cm}$   
❖ B)  $\sqrt{5}\text{cm}$   
❖ C)  $2\sqrt{3}\text{cm}$   
❖ D)  $\frac{3}{4}\sqrt{5}\text{cm}$   
❖ E)  $\frac{2}{3}\sqrt{5}\text{cm}$





**PROBLEMA N° 227**

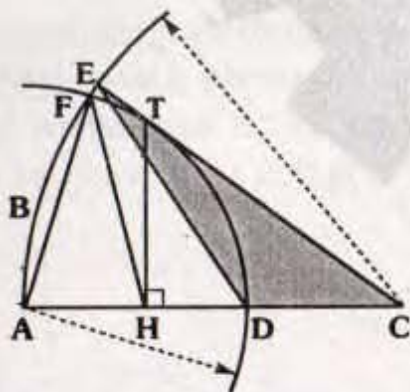
En la figura, calcule el área de la región sombreada, si  $PS=8m$  (D y E son puntos de tangencia)



- A)  $64m^2$       B)  $32\sqrt{2}m^2$       C)  $32m^2$   
D)  $16\sqrt{2}m^2$       E)  $128m^2$

**PROBLEMA N° 228**

En la figura, T es punto de tangencia si:  $m\angle AFH = m\angle AF$ ,  $FH = 6\mu$  y  $AH = 2(HD)$ , calcule el área de la región sombreada.



- A) 9      B)  $9\sqrt{3}$       C)  $9\sqrt{2}$   
D)  $9\sqrt{5}$       E)  $9\sqrt{7}$

**PROBLEMA N° 229**

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, se tiene que  $BC=a$ ,  $AD=b$  y  $AB=h$ . En  $\overline{AB}$  se ubica el punto P tal

que el perímetro de la región triangular CPD es mínimo. Calcule el área de la región triangular CPD.

- A)  $\left(\frac{a+b}{4}\right)h$       B)  $\left(\frac{a+b}{3}\right)h$       C)  $\frac{abh}{a+b}$   
D)  $\frac{h\sqrt{ab}}{2}$       E)  $\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

**PROBLEMA N° 230**

En un rombo ABCD en  $\overline{BC}$  se ubica el punto medio M. Las diagonales del rombo intersectan a  $\overline{AM}$  y  $\overline{MD}$  en N y Q respectivamente. si:  $NQ=5u$  y  $m\angle BAD=74^\circ$ . Calcule el área de la región limitada por el rombo.

- A)  $284u^2$       B)  $216u^2$       C)  $324u^2$   
D)  $356u^2$       E)  $420u^2$

**PROBLEMA N° 231**

Halle el área de una región limitada por un trapecio bicéntrico, cuyas bases miden 4m y 9m.

- A)  $25m^2$       B)  $30m^2$       C)  $39m^2$   
D)  $36m^2$       E)  $24m^2$

**PROBLEMA N° 232**

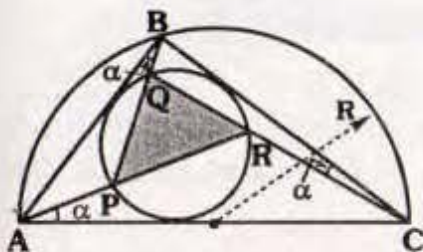
En un trapecio ABCD ( $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ )  $AD=4BC$ , se inscribe un rectángulo PQRS, tal que  $Q \in \overline{AB}$ ,  $R \in \overline{CD}$  y  $\overline{PS} \subset \overline{AD}$  están ubicados en  $\overline{AD}$ . Si  $AQ=2(QB)$ , calcule la razón de áreas de las regiones limitadas por dichos cuadriláteros.

- A)  $8/19$       B)  $7/16$       C)  $8/5$   
D)  $2/3$       E)  $8/15$



**PROBLEMA N° 233**

En el gráfico,  $r$  es inradio del triángulo ABC. Calcule el área de la región PQR.



- A)  $\frac{r^3}{R^2}(2R+r)$       B)  $\frac{R^3}{r^2}(2R-r)$   
 C)  $\frac{R^2}{r}(2R+r)$       D)  $\frac{R^2}{r}(2R-r)$   
 E)  $\frac{r^2}{R}(2R-r)$

**PROBLEMA N° 234**

Se tiene los cuadrados ABCD y MNLP tal que A, D, L y N están sobre una circunferencia de radio  $R$ ,  $\overline{BC} \subset \overline{MP}$ ,  $\overline{AD}$  y  $\overline{NL}$  están en distintos semiplanos respecto de  $\overline{MP}$ . Si  $R = \sqrt{10}$  y  $CD = 2$ , calcule el área de la región MNLP.

- A) 400      B)  $\frac{324}{25}$       C) 100  
 D) 320      E)  $\frac{64}{5}$

**PROBLEMA N° 235**

En el cuadrilátero circunscrito ABCD, se cumple  $m\angle BAQ = 37^\circ$ ,  $m\angle ABC = 90^\circ$ ,  $DC = NQ = 5$  y  $AD + BC = 21$ . N está en  $\overline{AB}$  y Q en  $\overline{AD}$  tal que  $\overline{NQ}$  es tangente

a la circunferencia. Calcule el área de la región pentagonal NBCDQ.

- A) 56      B) 48      C) 40  
 D) 60      E) 50

**PROBLEMA N° 236**

Calcule el área de una región rectangular cuya base y altura son las diagonales de un cuadrilátero del que se conocen " $R$ " radio de la circunferencia circunscrita, " $r$ " radio de la inscrita y " $d$ " distancia de centros.

- A)  $\frac{8R^2r^2}{R^2-d^2}$       B)  $8Rr$       C)  $\frac{4R^2r^2}{R^2-d^2}$   
 D)  $\frac{8R^2r^2}{R^2+d^2}$       E)  $\sqrt{R^2+r^2+d^2}$

**PROBLEMA N° 237**

En un cuadrilátero inscriptible ABCD, se cumple que  $AC = CD$ ,  $m\angle ACD = 90^\circ$ ,  $AB = \ell$  y  $BC = \ell\sqrt{2}$ . Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

- A)  $2\ell^2$       B)  $3\ell^2$       C)  $4\ell^2$   
 D)  $3\sqrt{5}\ell^2$       E)  $\frac{3}{2}\sqrt{5}\ell^2$

**PROBLEMA N° 238**

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si en una región triangular se conocen las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo entonces se puede conocer el área de dicha región.



II. En el plano de la región paralelográfica ABCD se ubica el punto P entonces se cumple:

$$A_{\triangle APD} + A_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} A_{\square ABCD}$$

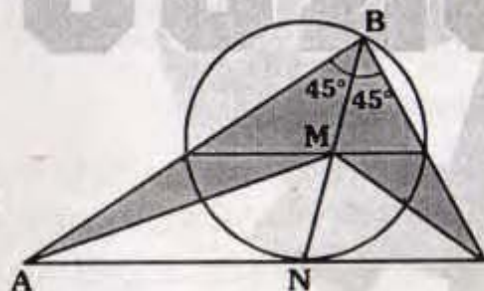
III. Si en un triángulo se conocen el inradio y los exradios relativos a dos de sus lados, se puede conocer el área de la región que limita.

- A) VFV      B) VVF      C) FVV  
D) FVF      E) FFV

**PROBLEMA N° 239**

En el gráfico, N es punto de tangencia. Si  $BM=2$  y  $MN=3$ , calcule el área de la región sombreada.

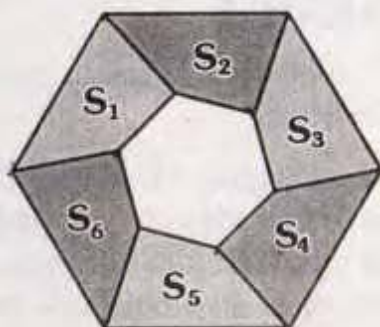
- A) 7,5  
B) 10  
C) 12  
D) 12,5  
E) 15



**PROBLEMA N° 240**

En el gráfico, ABCDEF y LMNPQR son hexágonos regulares. Demostrar que

$$S_1 + S_3 + S_5 = S_2 + S_4 + S_6$$

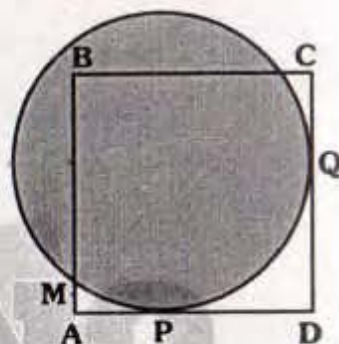


**ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES**

**PROBLEMA N° 241**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si ABCD es un cuadrado,  $AM=2$  y  $MB=7$ . Calcule el área del círculo mostrado.

- A)  $36\pi$   
B)  $9\pi$   
C)  $25\pi$   
D)  $49\pi$   
E)  $\frac{81}{4}\pi$



**PROBLEMA N° 242**

Se tiene el triángulo isósceles ABC donde la base  $\overline{AC}$  mide  $2\sqrt{2}$  y las medianas relativas a los lados de igual longitud son perpendiculares. Calcule el área del segmento circular determinado por  $\overline{AB}$  en el círculo circunscrito al triángulo ABC.

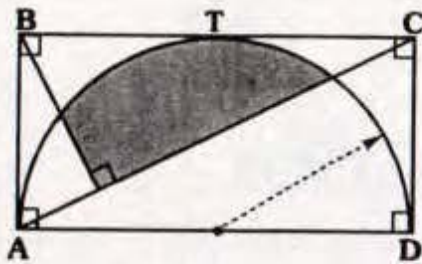
- A)  $\frac{715}{72}\pi - \frac{15}{2}$       B)  $\frac{715}{72}\pi + \frac{15}{2}$   
C)  $\frac{725}{72}\pi - \frac{15}{2}$       D)  $\frac{725}{72}\pi + \frac{15}{2}$   
E)  $\frac{725}{72}\pi - 15$

**PROBLEMA N° 243**

En el gráfico, calcule el área de la región



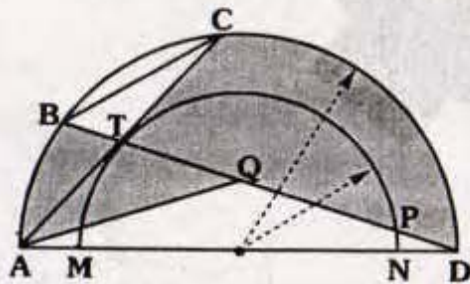
sombreada. Si  $AB = 2\sqrt{5}$  y T es punto de tangencia.



- A)  $\frac{4}{5}\pi + 7$     B)  $\frac{3}{4}\pi + 7$     C)  $\frac{5}{4}\pi + \frac{7}{2}$   
 D)  $\frac{6}{7}\pi + 3$     E)  $\frac{7\pi}{4} + 3$

**PROBLEMA N° 244**

En la figura, T es punto de tangencia,  $TQ = QP$ ,  $BC = 6$  y  $m\widehat{TP} = 120^\circ$ , calcular el área de la región sombreada.



- A)  $6\pi$     B)  $9\pi$     C)  $12\pi$   
 D)  $15\pi$     E)  $18\pi$

**PROBLEMA N° 245**

A, B y C son vértices consecutivos de un hexágono regular. Calcule el área de la región sombreada.

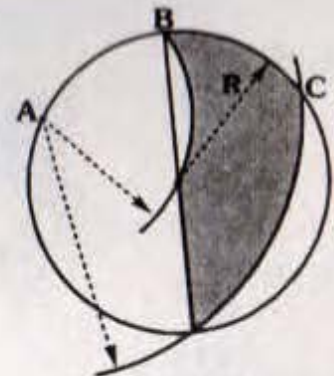
A)  $R^2 \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2}$

B)  $R^2 \frac{(2\pi - \sqrt{2})}{4}$

C)  $\frac{R^2(2\pi - \sqrt{3})}{3}$

D)  $R^2 \frac{(2\pi - \sqrt{2})}{3}$

E)  $R^2 \frac{(2\pi - \sqrt{3})}{4}$



**PROBLEMA N° 246**

El triángulo rectángulo ABC esta inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}$ , cuyo diámetro es  $\overline{AC}$ , si  $AB = 6$  y  $BC = 8$ . Calcule el área del círculo tangente a  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y a  $\mathcal{C}$ .

- A)  $12\pi$     B)  $6\pi$     C)  $4\pi$     D)  $9\pi$     E)  $16\pi$

**PROBLEMA N° 247**

Se tiene el cuadrilátero PRAH circunscrito a una circunferencia de centro O. M y Q son puntos de tangencia con  $\overline{PR}$  y  $\overline{PH}$ , la prolongación de  $\overline{RO}$  corta a  $\overline{QH}$  en B. Si  $HA + HB = 6\sqrt{3}$  y  $m\angle RPQ = m\angle PHA = 60^\circ$ . Calcule el área del sector circular MOQ.

- A)  $3\pi$     B)  $4\pi$     C)  $6\pi$     D)  $8\pi$     E)  $12\pi$

**PROBLEMA N° 248**

En el gráfico,  $m\widehat{BC} + m\widehat{ABD} = 180^\circ$ , calcule el área de la región sombreada.



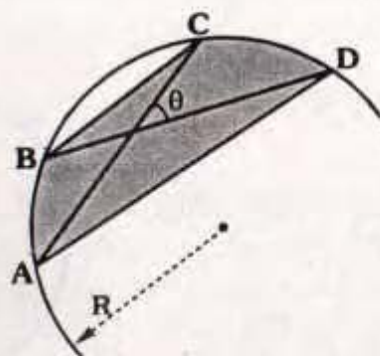
A)  $\pi R^2 \frac{(90^\circ - \theta)}{90^\circ}$

B)  $\pi R^2 \frac{\theta}{180^\circ}$

C)  $\pi R^2 \frac{\theta}{90^\circ}$

D)  $\pi R^2 \frac{\theta}{270^\circ}$

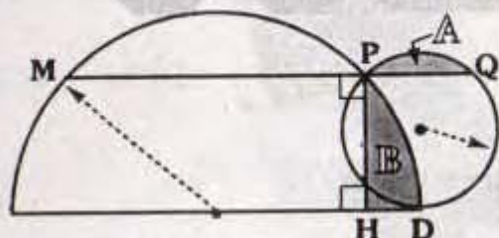
E)  $\pi R^2 \frac{(90^\circ - \theta)}{180^\circ}$



**PROBLEMA N° 249**

En el gráfico, A y B son las áreas de las regiones sombreadas. Si  $B = 2A$ , calcule

$\frac{PQ}{PM}$  (D es punto de tangencia)



A) 1/2

B) 1/3

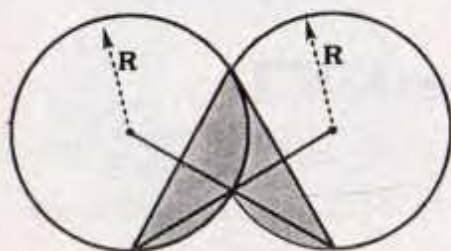
C) 1/4

D) 3/5

E) 2/3

**PROBLEMA N° 250**

Del gráfico, calcule el área de la región sombreada, si el ángulo entre las circunferencias mide  $60^\circ$ .



A)  $\frac{\pi R^2}{2}$

B)  $\frac{\pi R^2}{4}$

C)  $\frac{\pi R^2}{6}$

D)  $\frac{\pi R^2}{3}$

E)  $\frac{\pi R^2}{8}$

**PROBLEMA N° 251**

Dado un romboide ABCD, en la prolongación de  $\overline{AB}$  se ubica el punto E, tal que el cuadrilátero DBCE es inscriptible. Calcule el área del círculo circunscrito a dicho cuadrilátero.

Si:  $m\widehat{CD} = 106^\circ$ ,  $CD = 8u$  y  $AE = ED$ .

A)  $16\pi u^2$

B)  $25\pi u^2$

C)  $36\pi u^2$

D)  $49\pi u^2$

E)  $5\sqrt{2}\pi u^2$

**PROBLEMA N° 252**

Del gráfico, calcule  $A_1 + A_2 - A_3$ ; si  $R = 6\text{cm}$ ;  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  son las áreas de las regiones sombreadas.

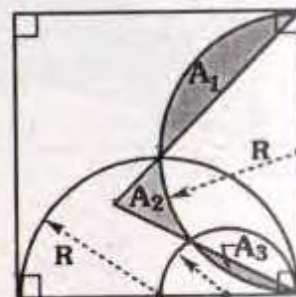
A)  $6\text{cm}^2$

B)  $3\text{cm}^2$

C)  $9\text{cm}^2$

D)  $12\text{cm}^2$

E)  $6\sqrt{2}\text{cm}^2$



**PROBLEMA N° 253**

En la figura mostrada se tiene 3 circunferencias secantes y congruentes de radios 1cm respectivamente. Calcular el área de la región sombreada ( $O$  y  $O_1$  son centros)



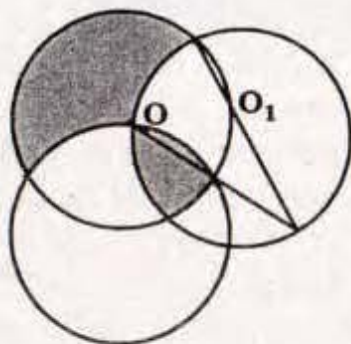
A)  $\pi \text{ cm}^2$

B)  $\frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$

C)  $2\pi \text{ cm}^2$

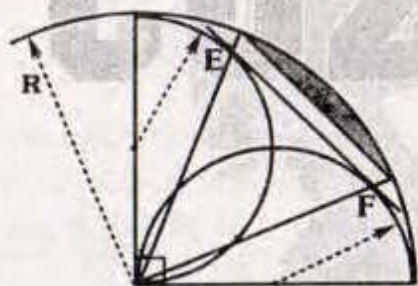
D)  $\frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2$

E)  $\frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$



**PROBLEMA N° 254**

En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Halle el área de la región sombreada, si:



A)  $R^2 \left( \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \right)$

B)  $\frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$

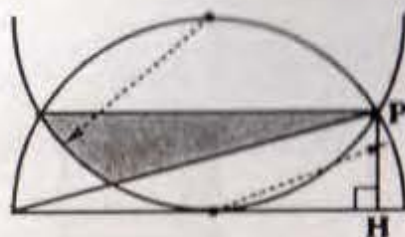
C)  $R^2 \left( \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \right)$

D)  $\frac{R^2}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \right)$

E)  $\frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$

**PROBLEMA N° 255**

En el gráfico, O es punto de tangencia. Si  $PH=2$ , calcule el área de la región sombreada.



A)  $\frac{4}{3}\pi + 8 - 4\sqrt{3}$

B)  $\frac{4}{3}\pi + 8 + 4\sqrt{3}$

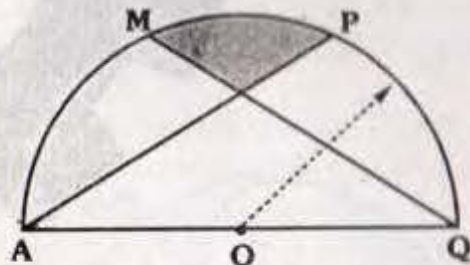
C)  $\frac{4}{3}\pi - 8 - 4\sqrt{3}$

D)  $\frac{4}{3}\pi + 8 - 3\sqrt{3}$

E)  $4\pi + 8 - 3\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 256**

Calcule el área de la superficie sombreada a partir del gráfico, si:  $\widehat{AM} = \widehat{MP} = \widehat{PB}$



A)  $(R/3)(\pi + \sqrt{3})$

B)  $(R^2/6)(\pi + \sqrt{3})$

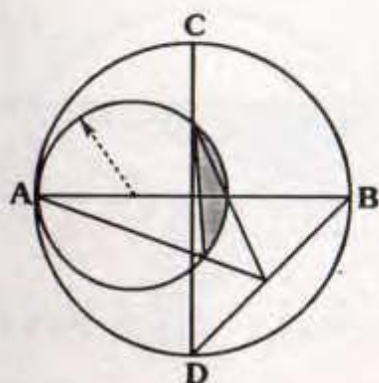
C)  $(R/12)(\pi - \sqrt{3})$

D)  $R(\pi - \sqrt{3})$

E)  $(R^2/6)(\pi - \sqrt{3})$

**PROBLEMA N° 257**

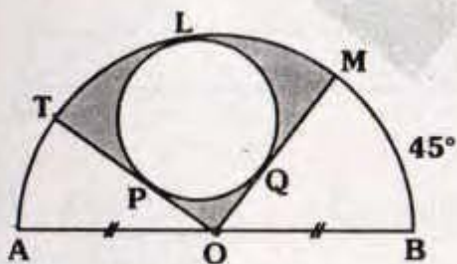
Halle el área de la región sombreada si el radio menor mide 2cm y los diámetros  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son perpendiculares.



- A)  $(\pi-1)\text{cm}^2$       B)  $(\pi-2)\text{cm}^2$   
 C)  $(\pi-3)\text{cm}^2$       D)  $\pi\text{cm}^2$   
 E) N.A.

**PROBLEMA N° 258**

Calcule en forma aproximada el área de la región sombreada, si el radio de la semicircunferencia es de 1m. P, L y Q son puntos de tangencia,  $m\widehat{AT}=29^\circ$  y  $m\widehat{BM}=45^\circ$ .



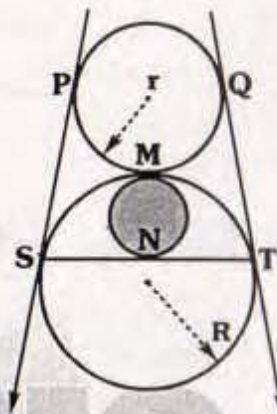
- A)  $0,5\text{m}^2$       B)  $0,4\text{m}^2$       C)  $0,3\text{m}^2$

- D)  $0,2\text{m}^2$       E)  $0,1\text{m}^2$

**PROBLEMA N° 259**

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si las tres circunferencias son tangentes y  $R=6\text{cm}$ ,  $r=3\text{cm}$ . (M, N, Q, S y T son puntos de tangencia)

- A)  $4\pi\text{cm}^2$   
 B)  $3\pi\text{cm}^2$   
 C)  $2\pi\text{cm}^2$   
 D)  $\pi\text{cm}^2$   
 E)  $\pi/2\text{cm}^2$



**PROBLEMA N° 260**

En una circunferencia de diámetro AB se traza una circunferencia que es tangente al diámetro AB y el arco AB en T y N respectivamente. Si:  $AT=2u$  y  $TB=8u$ . Calcule el área del círculo menor.

- A)  $\frac{64\pi}{5}u^2$       B)  $\frac{8\pi}{25}u^2$       C)  $\frac{64\pi}{81}u^2$   
 D)  $\frac{64\pi}{25}u^2$       E)  $\frac{16\pi}{25}u^2$





# Problemas Propuestos

Ciclo

## Repaso

### PROBLEMA N° 261

En la siguientes proposiciones indique el valor de verdad

- I. Si dos regiones triangulares tienen el mismo perímetro entonces sus áreas son iguales.
- II. Si un cuadrado y un triángulo equilátero tienen la misma área entonces el lado mayor es del cuadrado.
- III. Se cumple siempre para dos regiones triangulares a mayor perímetro mayor área.

- A) VFF      B) FFV      C) VFV  
D) FFF      E) FVF

### PROBLEMA N° 262

En un triángulo ABC las alturas se cortan en "O". Si  $(AC)(OB)=42$ . Calcule el área del cuadrilátero ABCO.

- A) 42      B) 21      C) 18  
D) 38      E) 14

### PROBLEMA N° 263

En un triángulo ABC cuyos lados miden 5, 6 y 7. Halle el producto del inradio y el circunradio.

- A)  $32/6$       B)  $37/6$       C)  $35/6$   
D)  $37/2$       E)  $32/5$

### PROBLEMA N° 264

Calcular el área de una región triangular cuyas alturas miden 12, 15 y 20

- A) 300      B) 150      C) 75  
D) 120      E) 90

### PROBLEMA N° 265

Los lados AB, BC y AC de un triángulo, ABC miden 13cm, 14cm y 15cm. Calcular el área de la región triangular AIC, siendo "I" el incentro.

- A) 30      B) 42      C) 15      D) 20      E) 36

### PROBLEMA N° 266

Un triángulo rectángulo ABC está inscrito en una circunferencia. La bisectriz interior BD prolongada corta a la circunferencia en F. Si  $BD=4$  y  $DF=6$ . Hallar el área de la región triangular ABC.

- A) 32      B) 40      C) 20      D) 16      E) 24

### PROBLEMA N° 267

Calcule el área de una región triangular rectangular, sabiendo que el inradio mide 3m y el circunradio 8,5m.

- A)  $28 \text{ m}^2$       B)  $50 \text{ m}^2$       C)  $60 \text{ m}^2$   
D)  $54 \text{ m}^2$       E)  $70 \text{ m}^2$



**PROBLEMA N° 268**

El área de un triángulo ABC es igual a  $36u^2$ . Calcule el área del trapecio que se determina al trazar una paralela a uno de sus lados por el baricentro.

- A)  $16u^2$  B) 20 C) 18 D) 22 E) 36

**PROBLEMA N° 269**

En un triángulo ABC de  $48m^2$  de área se ubica el punto "F" sobre AB de modo que  $AB = 3BF$  y "M" es punto medio de BC. Calcule el área de AFMC.

- A)  $32m^2$  B) 40 C) 16 D) 24 E) 36

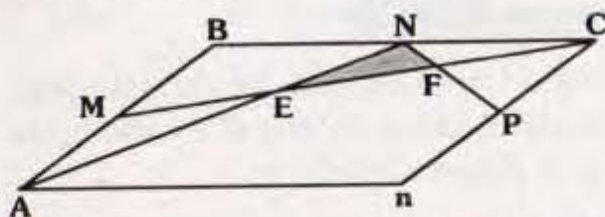
**PROBLEMA N° 270**

En un triángulo rectángulo ABC la circunferencia inscrita determina sobre los catetos AB y BC los puntos "E" y "F" respectivamente. Si  $AE=8$  y  $FC=10$ . Halle el área de la región triangular ABC.

- A)  $40u$  B) 60 C) 50 D) 80 E) 120

**PROBLEMA N° 271**

En el gráfico, ABCD es un romboide,  $AM=MB$ ,  $PC=PD$  y  $BN=NC$ . Si el área de la región sombreada es 24, calcule el área de la región ABCD.



- A) 378 B) 276 C) 476  
D) 867 E) 576

**PROBLEMA N° 272**

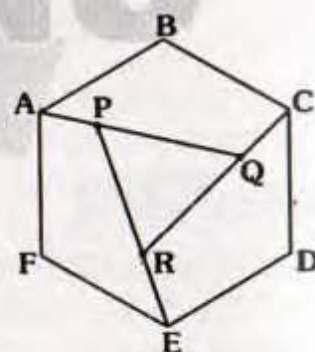
El área de la región triangular determinada por las medianas de un triángulo ABC es 24. Calcule el área de la región ABC.

- A) 28 B) 36 C) 42  
D) 38 E) 32

**PROBLEMA N° 273**

En el gráfico mostrado ABCDEF es un hexágono regular con 2m de lado y el triángulo PQR es equilátero. ¿Cuánto debe medir AP para que las cuatro regiones determinadas sean equivalentes?

- A)  $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$   
B)  $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$   
C)  $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$   
D)  $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$   
E)  $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{2}$



**PROBLEMA N° 274**

Calcule la razón entre las áreas de dos regiones triangulares, sabiendo que los lados de uno de ellos son congruentes a las medianas del otro.

- A) 1 B)  $4/3$  C) 2  
D)  $1/2$  E)  $2/3$



**PROBLEMA N° 275**

El área de la región triangular ABC es  $120\text{m}^2$   $BM=MC$  y  $AE=EF=FC$ . Calcule el área de la región cuadrangular EPQF.

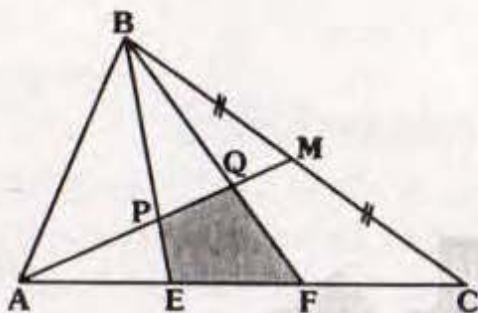
A)  $18\text{m}^2$

B)  $15\text{m}^2$

C)  $20\text{m}^2$

D)  $21\text{m}^2$

E)  $22\text{m}^2$



**PROBLEMA N° 276**

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro "O" en el cual se trazan los diámetros  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BM}$  y  $\overline{CE}$  de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Calcule el área de la región triangular ABC, si las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AMC son  $9\text{m}^2$ ,  $16\text{m}^2$  y  $25\text{m}^2$  respectivamente.

A)  $31\text{m}^2$

B)  $72\text{m}^2$

C)  $144\text{m}^2$

D)  $50\text{m}^2$

E)  $100\text{m}^2$

**PROBLEMA N° 277**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos rectángulos son isoperimétricos, entonces son equivalentes.

II. Si dos regiones poligonales regulares son isoperimétricos, entonces tendrá mayor área el que tiene mayor número de lados.

III. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la altura

relativa a cualquier lado, entonces se conoce su área.

A) FVV

B) FFF

C) VVV

D) VVV

E) FFV

**PROBLEMA N° 278**

Si ABCD es un romboide, hallar el área sombreada si M, N, L y P son puntos medios.  $S_{ABCD}$  es  $12\text{m}^2$

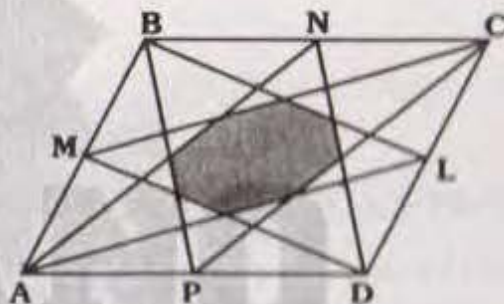
A)  $1\text{m}^2$

B)  $2\text{m}^2$

C)  $3\text{m}^2$

D)  $4\text{m}^2$

E)  $6\text{m}^2$



**PROBLEMA N° 279**

En el gráfico mostrado las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AGC son  $9\text{m}^2$ ,  $16\text{m}^2$  y  $25\text{m}^2$  respectivamente. Calcule el área de la región triangular ABC.

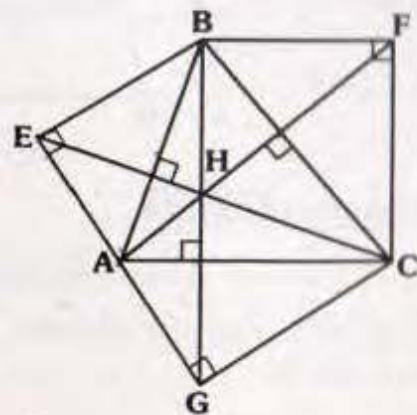
A)  $31\text{m}^2$

B)  $72\text{m}^2$

C)  $144\text{m}^2$

D)  $\sqrt{963}\text{m}^2$

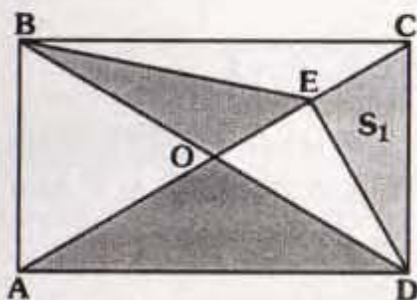
E)  $\sqrt{961}\text{m}^2$





**PROBLEMA N° 280**

En el gráfico calcular  $S_1$ , si las áreas de las regiones triangulares BOE y AOD son  $4\text{m}^2$  y  $9\text{m}^2$  respectivamente.

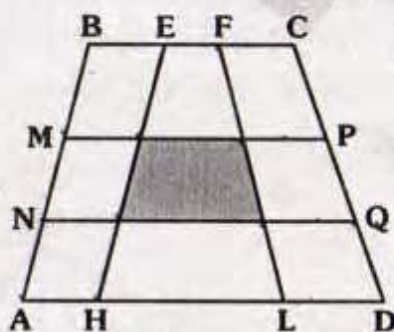


- A)  $5\text{m}^2$       B)  $2\text{m}^2$       C)  $6,5\text{m}^2$   
D)  $4,5\text{m}^2$       E)  $3\text{m}^2$

**PROBLEMA N° 281**

Si el área de la región del trapecio ABCD es  $9\text{m}^2$ . Calcular el área de la región sombreada, siendo:  $AN=NM=MB$ ;  $BE=EF=FC$ ;  $CP=PQ=QD$  y  $AH=HL=LD$ .

- A)  $1\text{m}^2$   
B)  $2\text{m}^2$   
C)  $3\text{m}^2$   
D)  $4\text{m}^2$   
E)  $1,5\text{m}^2$

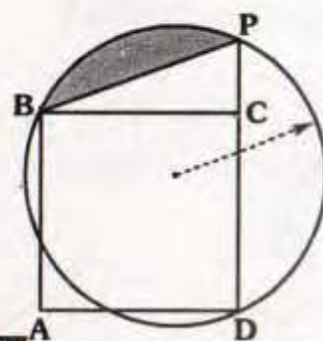


**PROBLEMA N° 282**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y  $BP=4\sqrt{2}$ . Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $4(\pi-1)$

- B)  $4(\pi-\sqrt{2})$   
C)  $8(\pi+1)$   
D)  $4(2\pi+1)$   
E)  $4(\pi-2)$



**PROBLEMA N° 283**

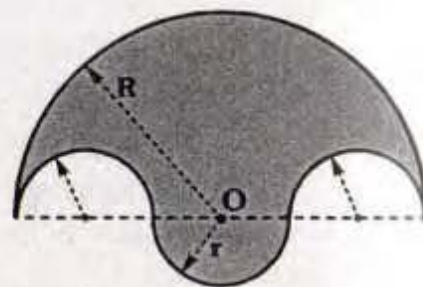
En un triángulo ABC equilátero cuyo lado mide L unidades considerando como diámetro la altura  $\overline{BH}$  se dibuja una circunferencia. Hallar el área de la región común que limitan el triángulo equilátero y la circunferencia.

- A)  $\frac{L^2}{32}(2\pi+3\sqrt{3})$       B)  $\frac{L^2}{16}(2\pi+3\sqrt{3})$   
C)  $\frac{L^2}{48}(2\pi+3\sqrt{3})$       D)  $\frac{L^2}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$   
E)  $\frac{L^2}{18}(2\pi+3\sqrt{3})$

**PROBLEMA N° 284**

Calcule el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{\pi}{4}(R+r)^2$   
B)  $\frac{\pi}{4}(R-r)^2$   
C)  $\frac{\pi}{2}(R+r)^2$   
D)  $\frac{\pi}{2}(R-r)^2$   
E)  $\frac{\pi}{8}(R+r)^2$

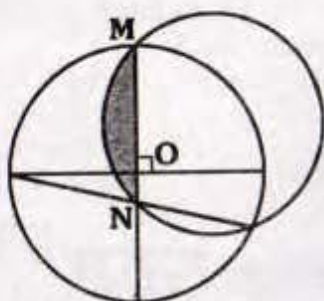




**PROBLEMA N° 285**

Calcule el área de la región sombreada, si:  $MN = 8\sqrt{2}m$ . ("O" es centro)

- A)  $(\pi - 2)m^2$   
 B)  $2(\pi - 2)m^2$   
 C)  $4(\pi - 3)m^2$   
 D)  $16(\pi - 2)m^2$   
 E)  $8(\pi - 2)m^2$



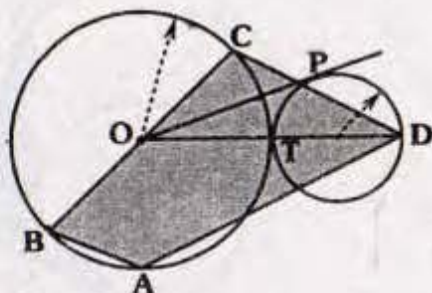
**PROBLEMA N° 286**

En el triángulo acutángulo ABC, la prolongación de la altura  $\overline{BH}$  interseca a la circunferencia circunscrita en P. Si  $m\widehat{BC} = 2(m\widehat{PC})$ ,  $BC = 13$  y  $HC = 15$ . Halle el área del círculo inscrito en el triángulo ABH.

- A)  $\frac{49}{4}\pi$  B)  $25\pi$  C)  $16\pi$  D)  $9\pi$  E)  $81\pi$

**PROBLEMA N° 287**

En el gráfico,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , P y T son puntos de tangencia. Si  $OP = 6$  y  $m\widehat{AB} + m\widehat{CT} = 60^\circ$ , calcule el área de la región sombreada.



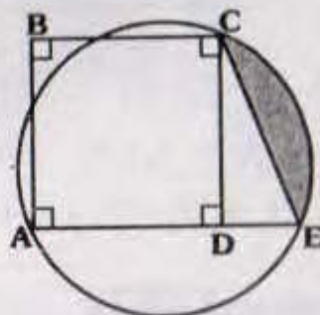
- A)  $20\sqrt{3}$  B)  $18\sqrt{3}$  C)  $15\sqrt{3}$

- D)  $12\sqrt{3}$  E)  $9\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 288**

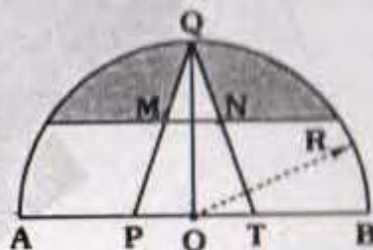
Si: ABCD es cuadrado y  $CE = 4$ , halle el área de la región sombreada.

- A)  $2\pi - 2$   
 B)  $2\pi - 3$   
 C)  $2\pi - 4$   
 D)  $2\pi + 1$   
 E)  $2\pi + 2$



**PROBLEMA N° 289**

Halle el área de la región sombreada, si  $m\widehat{AQ} = m\widehat{QB}$ ,  $\Delta PQT$  es equilátero  $\overline{PM} = \overline{MQ}$  y  $QN = NT$ .

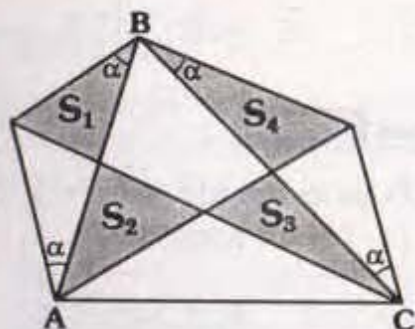


- A)  $\frac{R^2}{3}(\pi - \sqrt{3})$  B)  $\frac{R^2}{4}(\pi - 5)$   
 C)  $\frac{R^2}{3}(\pi - 3\sqrt{2})$  D)  $\frac{R^2}{5}(2\pi - 3)$   
 E)  $\frac{R^2}{3}(\pi - \sqrt{3}/2)$

**PROBLEMA N° 290**

En el gráfico, indique la relación entre  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ , si el triángulo ABC es escaleno.



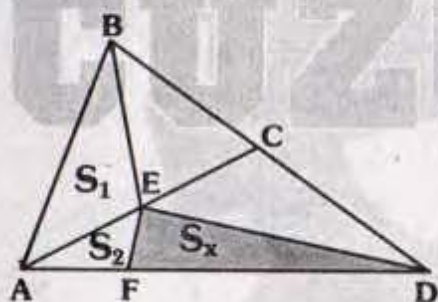


- A)  $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$       B)  $S_1 - S_2 = S_4 - S_3$   
 C)  $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$       D)  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$   
 E)  $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

**PROBLEMA N° 291**

En la siguiente figura:  $3(BC) = 2(CD)$ ,  $S_1 = 12\text{m}^2$  y  $S_2 = 5\text{m}^2$ . Calcule  $S_x$ .

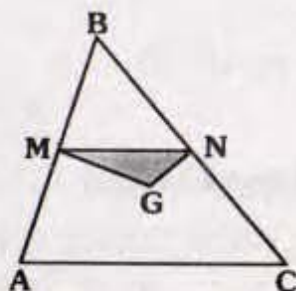
- A) 10  
 B) 11  
 C) 12  
 D) 13  
 E) 7



**PROBLEMA N° 292**

El área de la región triangular ABC es  $24\text{m}^2$ , G es su baricentro,  $AM = MB$  y  $BN = NC$ . Calcule el área de la región triangular MGN.

- A)  $2\text{m}^2$   
 B)  $1\text{m}^2$   
 C)  $0,5\text{m}^2$   
 D)  $4\text{m}^2$   
 E)  $1,5\text{m}^2$



**PROBLEMA N° 293**

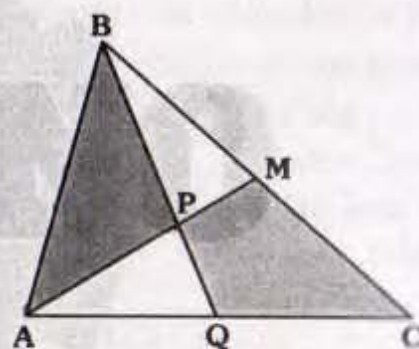
En un trapezio M, N son los puntos medios de las diagonales y P es el punto de corte de los lados no paralelos prolongados. Halle el área de MNP si el área del trapezio es S.

- A)  $S/2$       B)  $2S/4$       C)  $S/4$   
 D)  $S/5$       E) S

**PROBLEMA N° 294**

En la figura, si  $(BM)(AQ) = (MC)(QC)$  halle la relación de las áreas de las regiones ABP y PMCQ.

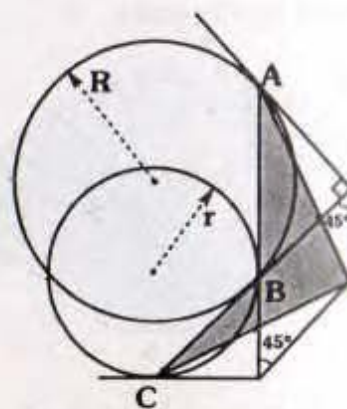
- A)  $13/15$   
 B) 1  
 C)  $13/14$   
 D)  $14/13$   
 E)  $11/13$



**PROBLEMA N° 295**

En la figura A, B, C son puntos de tangencia, calcule el área de la región sombreada.

- A)  $\frac{R^2 + r^2}{2}$   
 B)  $\frac{R^2 - r^2}{2}$   
 C)  $\frac{2R^2 + r^2}{4}$   
 D)  $3R^2 + 2r^2$   
 E)  $\frac{R^2 + r^2}{3}$





**PROBLEMA N° 296**

Se tiene una región hexagonal ABCDEF de área  $60u^2$  y sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, calcule el área de la región triangular ACE

- A)  $10u^2$       B)  $20u^2$       C)  $30u^2$   
D)  $35u^2$       E)  $40u^2$

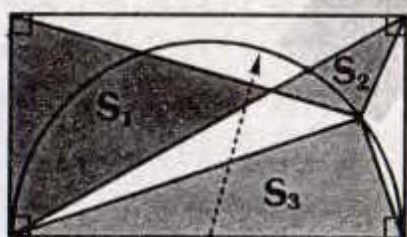
**PROBLEMA N° 297**

En un triángulo ABC,  $AB=6u$ ,  $BC=5u$  y  $AC=7u$  y de excentro E relativo a  $\overline{BC}$ , luego se traza  $\overline{EH} \perp \overline{AC}$  ( $H \in \overline{AC}$ ). Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares EHC y ABE.

- A)  $3/4$       B)  $2/5$       C)  $1/3$   
D)  $1/6$       E)  $2/3$

**PROBLEMA N° 298**

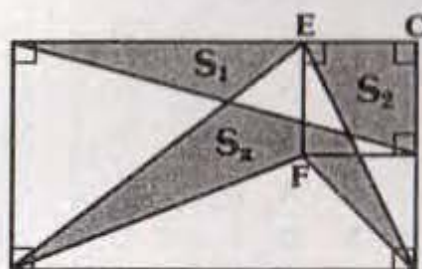
Indique la relación entre  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ .



- A)  $S_1^2 = S_2 S_3$       B)  $S_1 = S_2 + S_3$   
C)  $S_3^2 = S_1 - S_2$       D)  $S_3 = S_1 + S_2$   
E)  $S_3 = S_1 - 2S_2$

**PROBLEMA N° 299**

En el gráfico,  $S_1=4$ ,  $S_2=9$  y  $EC=EF$ . Calcule  $S_x$ .



- A) 13      B) 12      C) 6  
D) 17      E) 11

**PROBLEMA N° 300**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si un lado de una región triangular es un lado de una región rectangular y su área es la mitad de la región rectangular, entonces el vértice opuesto a dicho lado estará ubicado en la recta que contiene al lado opuesto en la región rectangular.  
II. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la longitud de cualquier mediana, entonces se conoce su área.  
III. Si dos segmentos circulares son equivalentes e isoperimétricos entonces los círculos que lo contienen tienen igual radio.

- A) FVV      B) VFF      C) FFF  
D) VVV      E) FVF



# CLAVES DE RESPUESTAS

## ANUAL

|      |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C | 10. D | 19. D | 28. A | 37. B | 46. B | 55. A |
| 2. A | 11. A | 20. B | 29. C | 38. C | 47. C | 56. C |
| 3. A | 12. B | 21. B | 30. B | 39. C | 48. A | 57. E |
| 4. A | 13. A | 22. D | 31. D | 40. C | 49. B | 58. A |
| 5. D | 14. D | 23. D | 32. C | 41. E | 50. B | 59. D |
| 6. D | 15. B | 24. A | 33. D | 42. E | 51. C | 60. B |
| 7. B | 16. C | 25. A | 34. B | 43. A | 52. B |       |
| 8. B | 17. C | 26. A | 35. D | 44. A | 53. A |       |
| 9. B | 18. C | 27. B | 36. A | 45. B | 54. A |       |

## CEPRE-UNI

|       |       |       |        |        |        |        |
|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 61. B | 73. A | 85. A | 97. A  | 109. C | 121. D | 133. C |
| 62. D | 74. E | 86. A | 98. D  | 110. A | 122. A | 134. D |
| 63. C | 75. C | 87. C | 99. D  | 111. A | 123. B | 135. B |
| 64. C | 76. A | 88. B | 100. E | 112. A | 124. D | 136. C |
| 65. A | 77. B | 89. * | 101. B | 113. E | 125. A | 137. B |
| 66. A | 78. A | 90. B | 102. E | 114. E | 126. B | 138. C |
| 67. C | 79. A | 91. B | 103. D | 115. D | 127. C | 139. C |
| 68. * | 80. B | 92. C | 104. E | 116. A | 128. A | 140. D |
| 69. B | 81. D | 93. C | 105. D | 117. D | 129. A |        |
| 70. D | 82. B | 94. D | 106. B | 118. B | 130. A |        |
| 71. E | 83. C | 95. C | 107. B | 119. C | 131. A |        |
| 72. D | 84. B | 96. D | 108. C | 120. C | 132. D |        |

(\*) Demostración



**SEMESTRAL**

|        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 141. C | 150. C | 159. A | 168. C | 177. C | 186. A | 195. A |
| 142. B | 151. A | 160. A | 169. A | 178. B | 187. C | 196. C |
| 143. A | 152. A | 161. B | 170. B | 179. C | 188. A | 197. E |
| 144. C | 153. E | 162. D | 171. C | 180. A | 189. C | 198. B |
| 145. B | 154. C | 163. A | 172. A | 181. C | 190. C | 199. D |
| 146. C | 155. A | 164. C | 173. C | 182. A | 191. A | 200. E |
| 147. D | 156. A | 165. B | 174. B | 183. B | 192. A |        |
| 148. B | 157. C | 166. A | 175. D | 184. B | 193. C |        |
| 149. C | 158. D | 167. B | 176. C | 185. A | 194. D |        |

**SEMESTRAL INTENSIVO**

|        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 201. A | 210. C | 219. C | 228. A | 237. B | 246. E | 255. A |
| 202. A | 211. D | 220. B | 229. C | 238. E | 247. A | 256. E |
| 203. B | 212. E | 221. A | 230. E | 239. D | 248. B | 257. B |
| 204. A | 213. E | 222. D | 231. C | 240. * | 249. E | 258. B |
| 205. A | 214. B | 223. A | 232. E | 241. C | 250. D | 259. A |
| 206. C | 215. B | 224. A | 233. A | 242. A | 251. B | 260. D |
| 207. D | 216. D | 225. E | 234. B | 243. C | 252. B |        |
| 208. C | 217. A | 226. A | 235. A | 244. C | 253. B |        |
| 209. A | 218. C | 227. C | 236. A | 245. E | 254. D |        |

**REPASO**

|        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 261. D | 267. C | 273. A | 279. E | 285. D | 291. E | 297. C |
| 262. B | 268. B | 274. B | 280. A | 286. A | 292. A | 298. B |
| 263. C | 269. B | 275. E | 281. A | 287. B | 293. C | 299. A |
| 264. B | 270. D | 276. D | 282. E | 288. C | 294. B | 300. A |
| 265. A | 271. E | 277. E | 283. A | 289. A | 295. A |        |
| 266. C | 272. E | 278. C | 284. C | 290. B | 296. C |        |

(\*) Demostración