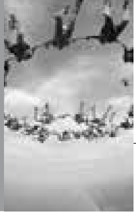


Actividades

1. **¿Por qué introduce la Física el concepto de campo? ¿Qué otros campos de fuerzas utiliza la Física además del campo gravitatorio?**

   La Física introduce el concepto de campo de fuerzas para explicar las interacciones a distancia entre dos cuerpos. Además del campo gravitatorio, se utilizan el campo electrostático y el campo electromagnético, que son objeto de estudio en las Unidades 6 y 7, respectivamente.

2. **El campo gravitatorio creado por dos masas, m_1 y m_2, que podemos considerar puntuales y separadas una distancia d, se anula a $d/3$ de la masa m_1. Cuánto vale la relación entre las masas m_1/m_2?**

   En el punto en donde el campo resultante se anula, se cumple:

   $$\frac{m_1}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = \frac{m_2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2}$$

   De donde se deduce que $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{4}$

3. **La intensidad del campo gravitatorio de la Luna es 1,6 m/s^2. ¿Cuánto pesa en la Luna un individuo que en la Tierra pesa 689 N?**

   La relación entre el peso en la Luna y el peso en la Tierra:

   $$\frac{P_L}{P_T} = \frac{m \cdot g_L}{m \cdot g_T}$$

   De donde $P_L = P_T \dfrac{g_L}{g_T} = 689\ N \cdot \dfrac{1{,}6\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 112\ N$

4. **La intensidad del campo gravitatorio de Marte es 3,7 m/s^2 y su radio es 3,4 · 10^6 m. ¿Cuánto vale la masa de Marte?**

   La intensidad del campo gravitatorio de Marte viene dada por:

   $$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2}\ ;\ \ M_M = \frac{g_M \cdot R_M^2}{G} = \frac{3{,}7 \cdot (3{,}4 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}4 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

5. **De acuerdo con la variación de la gravedad en el interior de la Tierra, si esta estuviera atravesada por un túnel hasta las antípodas, ¿qué movimiento tendría un cuerpo que se dejase caer por dicho túnel? ¿Cuánto tiempo emplearía en ir de uno al otro extremo?**

   Se trata de un movimiento armónico simple. Recuerda que todo m.a.s. viene definido por una fuerza recuperadora que es proporcional al desplazamiento: $F = k\ x$.

   Si llamamos x a la distancia que hay desde el centro de la Tierra hasta la posición del cuerpo en cualquier instante, este estará sometido a una fuerza gravitatoria:

   $$f = m\,g_x = m\,\frac{g_0}{R_T}\,x = k\ x$$

   Esta fuerza, además de armónica, es conservativa. Cuando el cuerpo llega al centro de la Tierra, $x = 0$, la fuerza recuperadora será cero; pero por inercia y debido a la energía cinética, el cuerpo rebasa esa posición. Por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, el cuerpo llegará justamente hasta la otra boca del túnel e iniciará de nuevo el movimiento hacia el centro de la Tierra, repitiéndose indefinidamente. El tiempo que empleará en ir de un extremo a otro será medio periodo.

   Para hallar el periodo de este movimiento, comparamos su constante recuperadora con la constante recuperadora de cualquier m.a.s. en general:

   $$\left.\begin{aligned} k &= \frac{m\,g_0}{R_T} \\ k &= m\,\omega^2 = m\,\frac{4\,\pi^2}{T^2} \end{aligned}\right\}\ \frac{g_0}{R_T} = \frac{4\,\pi^2}{T^2}$$

   De donde se deduce que:

   $$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{s}$$

   El tiempo empleado en ir de un extremo al otro es medio periodo; es decir, $t = 2{,}5 \cdot 10^3$ s.

6. **El potencial gravitatorio a 5 m de distancia de una masa M tiene un valor absoluto de 1,355 · 10^{-8} J/kg. ¿Cuál es el valor de la masa M?**

   El potencial gravitatorio depende de la masa y de la distancia:

   $V = -\dfrac{GM}{d}$. Del enunciado se deduce $\dfrac{GM}{d} = 1{,}355 \cdot 10^{-8}$ J/kg

   $M = -\dfrac{1{,}355 \cdot 10^{-8} \cdot 5}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 1\,000$ kg

Ciencias, tecnología y sociedad

1. **¿Un satélite LEO tiene un periodo de revolución mayor, menor o igual que un satélite MEO? ¿Por qué?**

   Tiene un periodo menor. Porque, de acuerdo con la 3.ª ley de Kepler, el periodo es proporcional al radio de la órbita. El radio de la órbita de un satélite LEO es menor que la de un satélite MEO.

2. **Todo satélite geoestacionario es geosíncrono, ¿pero todo satélite síncrono es estacionario?**

   No. Para que un satélite síncrono sea estacionario su órbita debe estar situada en el plano ecuatorial.

3. **Explica qué condiciones debe cumplir un satélite para que sea geoestacionario y qué ventajas tiene frente a otros satélites.**

   Para que un satélite sea geoestacionario debe cumplir dos condiciones:

   a) Su periodo de revolución coincida con el periodo de revolución de la Tierra: que sea geosíncrono.

   b) Su órbita esté situada en el plano ecuatorial.

   Estos satélites tienen las siguientes ventajas: No necesitan equipos especiales de rastreo. Las antenas se orientan directamente hacia la posición fija que ocupan en el espacio. Bastan tres satélite de este tipo para suministrar imágenes a toda la superficie de la Tierra.

4. **¿Para qué tipo de satélites está destinado principalmente el cementerio de satélites?**

Para satélites de órbitas bajas (LEO) y medias (MEO) principalmente.

5. El Hispasat es uno de los varios satélites que España ha lanzado al espacio. Haz un estudio sobre este satélite: qué función desempeña, qué cobertura tiene, qué tipo de órbita posee, etc. Para ello dispones de mucha información en Internet.

Actividad abierta.

Problemas propuestos

Intensidad del campo gravitatorio

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

***a)* ¿Cuál será el valor de g a una altura igual al radio de la Tierra?**

Datos: R_T = 6 370 km; g_0 = 9,8 m/s^2.

***b)* ¿Cuál será el periodo de un satélite artificial de la Tierra en una órbita circular a dicha altura?**

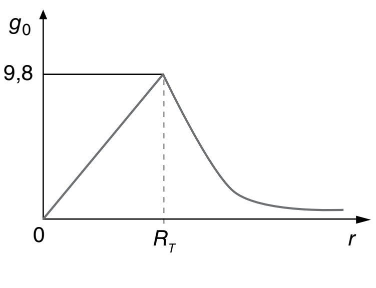
a) $g_h = \dfrac{GM}{(R_T + h)^2} = \dfrac{GM}{(2R_T)^2} = \dfrac{GM}{4R_T^2} = \dfrac{g_o}{4} = \dfrac{9{,}8}{4} = 2{,}45\ \text{m/s}^2$

b) Velocidad orbital a esa altura:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{12{,}74 \cdot 10^6}} = 5{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

$$T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 12{,}74 \cdot 10^6}{5{,}6 \cdot 10^3} = 14{,}287 \cdot 10^3\ s = 4\ h$$

2. Supongamos la Tierra como una esfera perfecta y homogénea de radio R, ¿cuál es la gráfica que mejor representa la variación de la gravedad *(g)* con la distancia al centro de la Tierra? Explica por qué.



El valor de la gravedad es cero en el centro de la Tierra. Aumenta medida que nos alejamos del centro del planeta, alcanzando su valor maximo en la superficie de la Tierra. Disminuye con la altura hasta el infinito, en donde su valor es cero. Por tanto, la gráfica *c)* es la que mejor representa la variación de la gravedad.

3. Indica si la siguiente frase es cierta o falsa y razona la respuesta: «La intensidad en un punto del campo gravitatorio terrestre es tanto mayor cuanto mayor es la masa que se coloque en dicho punto».

La intensidad del campo gravitatorio depende de la masa de la Tierra, de la distancia al centro de la Tierra del punto considerado y de la constante de gravitación, como se deduce de la expresión:

$$g_d = \frac{GM_T}{d^2}$$

Por tanto, la frase indicada es falsa.

4. ¿Cómo varían, con la distancia, la energía potencial gravitatoria y el campo gravitatorio debidos a una masa puntual? ¿Cuál sería el valor de *g* en la superficie de la Tierra si se duplicasen su masa y su radio?

La energía potencial gravitatoria en función de la distancia *d* viene dada por $E_p = -\dfrac{GM_m}{d}$. El valor absoluto disminuye con la distancia; pero al tratarse de una magnitud con valor negativo, su valor real aumenta al aumentar la distancia.

El valor de la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; por tanto, disminuye al aumentar la distancia.

5. Si la densidad de la Tierra fuese tres veces mayor, ¿cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no variara?

Valor de la gravedad en función del radio y de la densidad:

$$g_o = \frac{GM}{R_o^3} = \frac{GV_o\rho_o}{R_o^2} = \frac{G\,\frac{4}{3}\,\pi R_o^3\rho_o}{R_o^2} = \frac{4}{3}\,G\pi R_o\rho_o$$

Nuevo valor de la gravedad:

$$g' = \frac{4}{3}\,G\pi R' \cdot 3\rho_o$$

Si $g_o = g' \Rightarrow R_o = 3R' \Rightarrow R' = \dfrac{1}{3}\,R_o$

6. Si se redujese el volumen de la Tierra a la mitad y perdiera la mitad de su masa, ¿cómo variaría la aceleración de la gravedad?

Si la masa y el volumen se reduce a la mitad, la densidad permanece constante, $\rho_o = \rho'$; pero si cambia de valor:

$$\frac{V_o}{V'} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot R_o^3}{4/3 \cdot \pi \cdot R'^3}\,;\ \frac{2V'}{V'} = \frac{R_o^3}{R'^3}\,;\ R' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,R_o$$

la gravedad, como hemos visto en el ejercicio anterior, depende del radio de la Tierra:

$$g_o = \frac{4}{3}\,\pi G R_o\ ;\ \frac{g'}{g_o} = \frac{R'}{R_o} = \frac{1/\sqrt[3]{2} \cdot R_o}{R_o} \Rightarrow g' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot g_o$$

7. Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. ¿Cuál será el peso de este cuerpo en un planeta cuya masa es 10 veces inferior a la masa de la Tierra pero con igual tamaño que esta?

$$P = mg = \frac{mGM_p}{R_p^2} = \frac{mGM_T}{10 \cdot R_T^2} = \frac{mg}{10} = \frac{10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{10} = 9{,}8\ \text{N}$$

8. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 700 N, aterriza en el planeta Venus, mide de nuevo su peso y observa que después de efectuadas las correcciones correspondientes, pesa 600 N. Considerando que el diámetro de Venus es aproximadamente el mismo que el de la Tierra, calcula la masa del planeta Venus. Toma como masa de la Tierra el valor aproximado de 6 · 10^{24} kg.

Según la Ley de gravitación universal, el peso del astronauta en la Tierra es:

$$P = G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = g_0 m = 700\ \text{N}$$

En Venus, el peso es $P_V = G\,\frac{M_V m}{R_V^2}$. Según el enunciado, se cumple que $R_T = R_V$, así que:

$$G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = 700\ \text{N}; \qquad G\,\frac{M_V m}{R_T^2} = 600\ \text{N}$$

$$\frac{M_T}{M_V} = \frac{700}{600} \Rightarrow M_V = \frac{6}{7}\,M_T = \frac{6}{7}\cdot 6\cdot 10^{24}\ \text{kg} = 5{,}14\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

9. Ío, uno de los satélites de Júpiter, tiene una masa de 8,9 · 10 ²² kg, un periodo orbital de 1,77 días y un radio medio orbital de 4,22 · 10 ⁸ m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determina:

***a)* La masa de Júpiter.**

***b)* La intensidad del campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Ío.**

***c)* La energía cinética de Ío en su órbita.**

***d)* El módulo del momento angular de Ío respecto al centro de su órbita.**

a) Aplicando la 3.ª ley de Kepler al satélite Ío:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J};\ M_J = \frac{4\pi^2R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2\,.\,(4{,}22\cdot 10^8)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(1{,}77\cdot 24\cdot 3\,600)^2} = 1{,}9\cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

b) $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9\cdot 10^{27}}{(4{,}22\cdot 10^8)^2} = 0{,}71\ \text{m/s}$

c) $E_c = \frac{1}{2}\,mv_2 = \frac{1}{2}\,m\,.\,\frac{GM}{R_o} =$

$$= \frac{8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9\cdot 10^{27}}{2\cdot 4{,}22\cdot 10^8} = 1{,}34\cdot 10^{31}\ J$$

d) $L = r\cdot m\cdot v = 4{,}22\cdot 10^8\cdot 8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 17\,338 =$
$= 6{,}51\cdot 10^{35}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

10. Un satélite artificial orbita en torno a la Tierra con un radio de órbita de 2 · 10⁷ m. ¿Cuánto vale la intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite?

Datos: $M_T = 6\cdot 10^{24}$ kg.

$$g = \frac{GM}{R_o^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{4\cdot 10^{14}} = 1\ \text{m/s}^2$$

11. Desde la superficie de la Tierra se pone en órbita un satélite, lanzándolo en dirección vertical con una velocidad inicial de 6 000 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, determina:

***a)* La altura máxima que alcanza el satélite.**

***b)* El valor de la gravedad a esa altura.**

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m.

a) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{GMm}{R^T + h}$$

de donde h vale:

$$h = \frac{v^2R_T^2}{2GM_T - v^2\,R_T} =$$

$$= \frac{36\cdot 10^6\,(6{,}37\cdot 10^6)^2}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24} - 36\cdot 10^6\cdot 6{,}37\cdot 10^6}$$

$= 2{,}6\cdot 10^6$ m

b) $g = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}37+2{,}6)^2\cdot 10^{12}} = 4{,}\ 97\ \text{m/s}^2$

12. Dos planetas *A* y *B* de masas M_A y M_B tienen la misma intensidad de la gravedad en su superficie. Determina la relación de sus radios y la relación de sus densidades sabiendo que $M_A = 25\ M_B$.

Si partimos de la definición de intensidad de campo gravitatorio en la superficie de un planeta, tenemos, para los planetas *A* y *B*, las siguientes relaciones:

$$g_A = G\,\frac{M_A}{R_A^2}; \qquad g_B = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

Como $M_A = 25\ M_B$, y se cumple la condición $g_A = g_B$, resulta que:

$$g_A = g_B = G\,\frac{25\,M_B}{R_A^2} = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

de donde, $\frac{25\,M_B}{R_A^2} = \frac{M_B}{R_B^2} \Rightarrow R_A^2 = 25\,R_B^2 \Rightarrow R_A = 5\,R_B$

Para hallar la relación de densidades, basta con considerar la relación entre las masas y los radios de los planetas, así:

$$d_A = \frac{M_A}{V_A} = \frac{M_A}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_A^3}; \qquad d_B = \frac{M_B}{V_B} = \frac{M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_B^3}$$

$$d_A = \frac{25\,M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,(5\,R_B)^3} = \frac{25}{125}\cdot\frac{M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_B^3} = \frac{1}{5}\,d_B$$

$$d_B = 5\,d_A$$

13. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Mercurio, si el radio de la Tierra es tres veces mayor que el de Mercurio, y la densidad de Mercurio es $\frac{3}{5}$ de la densidad media de la Tierra. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s².

Valor de la gravedad en Mercurio en función de la densidad y del radio del planeta:

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M^3\,\rho_M}{R_M^2} = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M\,\rho_M$$

Y para la Tierra sería $g_T = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_T\,\rho_T$

Relacionando los dos valores, tenemos:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M\,\rho_M}{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_T\,\rho_T} = \frac{R_M\,\frac{3}{5}\,\rho_T}{3\,R_M\,\rho_T} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, se cumple que:

$$g_M = \frac{g_T}{5} = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{5} = 1{,}96 \text{ m/s}^2$$

14. Halla la aceleración de un cuerpo que cae libremente en la superficie de la Luna, sabiendo que el diámetro de la Luna es 1/4 del diámetro terrestre y la masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra.

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es $g_L = G\,\frac{M_L}{R_L^2}$, y en la de la Tierra $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0$.

Como se conoce el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, relacionamos los valores dato con este valor conocido.

$$M_L = \frac{1}{81}\,M_T; \qquad R_L = \frac{1}{4}\,R_T$$

Así:

$$g_L = G\,\frac{\frac{1}{81}\,M_T}{\left(\frac{1}{4}\,R_T\right)^2} = \frac{1}{81}\cdot 16\cdot G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 0{,}19\;g_0 =$$

$$= 0{,}19 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 1{,}9 \text{ m/s}^2$$

15. Si la densidad de la Tierra es 5,5 · 10³ kg/m³, calcula:

a) El valor de su radio sabiendo que *g* = 9,8 m/s².

b) El valor de *g* a una altura igual a dicho radio.

Dato: constante de gravitación *G* = 6,7 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻².

a) La densidad media de la Tierra se obtiene mediante la expresión $d = \frac{M_T}{V_T}$.

Por otra parte, el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Así, planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} g_0 = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \\[2ex] d = \dfrac{M_T}{V_T} = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\,\pi\,(R_T)^3} = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, llegamos al valor:

$$R_T = \frac{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4\pi \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5\,500 \text{ kg/m}^3} = 6\;352 \cdot 10^3 \text{ m}$$

b) Para calcular *g* a una altura *h* de 6 350 km, acudimos a la expresión de la intensidad de campo gravitatorio $g_T = G\,\frac{MT}{(R+h)^2}$

Según el apartado *a*), la masa de la Tierra es de:

$$MT = \frac{R_T^2 g_0}{G} = \frac{(6\,350 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{6{,}7 \cdot 10^{11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Así que la gravedad a 6 350 km de la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{(R+h)^2} =$$

$$= 6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg} \cdot \frac{5{,}9 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6\,350 \cdot 10^3 \text{ m} + 6\,350 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

16. Júpiter, el mayor de los planetas del sistema solar y cuya masa es 318,36 veces la de la Tierra, tiene orbitando 12 satélites. El mayor de ellos, Ganímedes (descubierto por Galileo), gira en una órbita circular de radio igual a 15 veces el radio de Júpiter y con un periodo de revolución de 6,2 · 10⁵ s. Calcula:

a) La densidad media de Júpiter.

b) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Hallamos el radio de la órbita del satélite para obtener el radio de Júpiter. Para que el satélite se mantenga en la órbita se cumple:

$$F_c = F_g\;;\; m\,\frac{v^2}{R_o} = \frac{GMm}{R_o^2}\;;\; v^2 = \frac{GM}{R_o}\;;\; \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2} = \frac{GM}{R_o}$$

$$R_o^3 = (15 \cdot R_J)^3 = \frac{T^2 G M_J}{4\pi^2}\;;\; R_J = \frac{1}{15}\cdot\sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot 318{,}36 M_T}{4\pi^2}} =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot\sqrt[3]{\frac{6{,}22 \cdot 10^{10} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 318{,}36 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 3{,}14^2}} =$$

$$= 7{,}15 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{M_J}{V_J} = \frac{M_J}{4/3 \cdot \pi \cdot R_J^3} = \frac{3 \cdot 318{,}36 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}15^3 \cdot 10^{21}} =$$

$$= 1{,}24 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

b) $$g_J = \frac{GM_J}{R_J^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 318{,}36 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}15^2\,.10^{14}} =$$

$$= 24{,}8 \text{ m/s}^2$$

17. Si por una causa interna la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa:

a) ¿Cuál sería la intensidad de la gravedad en su nueva superficie?

b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor de su eje?

c) ¿Cuál sería la nueva duración en horas del día?

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8$ m/s². Si se reduce el radio a la mitad:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{\left(\frac{1}{2}\,R_T\right)^2} = 4g_0 = 39{,}2 \text{ m/s}^2$$

b) No.

c) El periodo de rotación en función de la intensidad de campo gravitatorio:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}}$$

como el radio terrestre es ahora la mitad, el nuevo periodo de rotación será:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{R_T}{2}}{4g_0}} = T\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{T}{4} = 6 \text{ horas}$$

18. Júpiter tiene una masa 318 veces la masa terrestre, un radio 11,22 veces el de la Tierra y su distancia al Sol es 5,2 veces mayor que la distancia media de la Tierra al Sol. Determina:

a) **El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter en relación con su valor en la superficie de la Tierra y el periodo de rotación de Júpiter alrededor del Sol, sabiendo que el periodo terrestre es de 365 días y las órbitas de ambos planetas se consideran circulares.**

b) **El periodo y la velocidad media orbital de Calisto, su segunda mayor luna, sabiendo que describe una órbita circular de 1,88 · 10⁹ m.**

a) $\dfrac{g_1}{g_T} = \dfrac{M_J R_T^2}{M_T R_J^2} = \dfrac{318\ M_T R_T^2}{M_T \cdot (11{,}22)^2\ R_T^2} = 2{,}5\ ;\ g_J = 2{,}5\ g_T$

Para hallar el período aplicamos la 3.ª ley de Kepler:

$$\frac{T_J^2}{T_J^2} = \frac{R_{oJ}^3}{R_{oT}^3}\ ;\ T_J = T_T \cdot \sqrt{\frac{5{,}2^3 \cdot R_{oT}^3}{R_{oT}^3}} = 365 \cdot 11{,}85 = 4\,325 \text{ días}$$

b) $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R_o}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 318 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}88 \cdot 10^9}} =$

$= 8{,}21 \cdot 10^3$ m/s

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}88 \cdot 10^9}{8{,}21 \cdot 10^3} = 1{,}43 \cdot 10^6 \text{ s}$$

19. Un satélite artificial de 100 kg gira en una órbita circular de 9600 km de radio. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es 4/9 del valor que tiene en la superficie terrestre, calcula:

a) **La velocidad de traslación del satélite.**

b) **Su energía cinética.**

c) **Su periodo de revolución.**

a) $\dfrac{g_h}{g_o} = \dfrac{4}{9} = \dfrac{\frac{GM}{R_o^2}}{\frac{GM}{R_T^2}} = \dfrac{R_T^2}{R_o^2}\ ;\quad R_o = \dfrac{3}{2} R_T$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{3/2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}} = 6{,}46 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 = 50 \cdot (6{,}46 \cdot 10^3)^2 = 2{,}1 \cdot 10^9\ J$

c) $T = \dfrac{2\pi R_o}{v} = \dfrac{6{,}28 \cdot 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}46 \cdot 10^3} = 9{,}28 \cdot 10^3 \text{ s} = 2{,}58 \text{ h}$

20. Calcula:

a) **La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2 440 km y que tiene una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N/kg.**

b) **La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5 000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie. Dato: Constante G = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻².**

a) $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3 \cdot g}{4\pi RG} =$

$= \dfrac{3 \cdot 3{,}7}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}44 \cdot 10^6 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}43 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

b) $\Delta E_m = E_{mf} - E_{mo} =$

$= -\dfrac{GMm}{2R_o} - \left(-\dfrac{GMm}{R}\right) = \text{GMm}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{2R_o}\right)$

Para hallar R_0 utilizamos el dato del valor de g.

$$\frac{GM}{R_o^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{GM}{R^2} \Rightarrow R_o = 2R$$

$$\Delta E_m = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{GMm}{R} = G\pi R^2 \rho m =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}14 \cdot (2.44 \cdot 10^6)^2 \cdot 5{,}43 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 =$$
$$= 3{,}38 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

Potencial gravitatorio

21. Calcula:

a) **El potencial gravitatorio creado por una masa m = 5 000 kg en los puntos A y B situados a 10 m y 20 m, respectivamente, de m (considera la masa como una partícula).**

b) **El trabajo realizado para desplazar otra masa de 25 kg desde A hasta B (Dato: G = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻²).**

a) $V_A = -\dfrac{GM}{r_A} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}{10} = -3{,}3 \cdot 10^{-8}$ J/kg

$V_B = -\dfrac{GM}{r_B} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}{20} = -1{,}6 \cdot 10^{-8}$ J/kg

b) $W = (V_B - V_A) \cdot m = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{J/kg} \cdot 25\ \text{kg} = 4 \cdot 10^{-7}\ J$

22. Calcula la altura a la que se debe colocar un cuerpo para que pierda el 20 % de su peso.

a) **¿Cuánto vale el potencial gravitatorio terrestre en ese punto?**

b) **¿Qué diferencia de potencial existe entre ese punto y la posición inicial del cuerpo, la superficie terrestre?**

Datos: radio de la Tierra R = 6 370 km; masa de la Tierra M = 5,98 · 10²⁴ kg; constante de gravitación G = 6,57 · 10¹¹ N m² kg⁻².

a) $\dfrac{GMm}{(R+h)^2} = 0{,}8\ \dfrac{GMm}{R^2} \Rightarrow R^2 = 0{,}8\ (R+h)^2\ ;$

$h = \dfrac{R\ (1 - \sqrt{0{,}8})}{\sqrt{0{,}8}} = 752$ km

b) $V_h = -\dfrac{GMm}{R+h} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7121{,}8 \cdot 10^3} = -5{,}6 \cdot 10^7$ J/kg

$$V_o = -\frac{GMm}{R_T} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6}} = -6{,}26 \cdot 10^{7}\ \text{J/kg}$$

$$V_h - V_o = (6{,}26 - 5{,}6) \cdot 10^{7} = 0{,}66 \cdot 10^{7}\ J/kg$$

Trabaja como un científico

1. La gráfica que has obtenido, ¿cumple la ley de las órbitas de Kepler?

Sí se cumple. La grafica obtenida es una elipse.

2. Dibuja una línea del Sol a la posición de Mercurio correspondiente al 20 de diciembre, por ejemplo, y otra correspondiente al 30 de diciembre. Las dos líneas y la órbita determinan un área barrida durante el intervalo de diez días. Sombrea ligeramente esta superficie. Calcula el área de esta superficie teniendo en cuenta que para una pequeña porción de elipse el área es aproximadamente:

$$\text{área} = \frac{\theta}{360°}\,\pi r^2$$

donde *r* es el radio medio de la órbita (media aritmética del semieje mayor y el semieje menor). El ángulo *u* se obtiene hallando la diferencia en grados entre el 20 y el 30 de diciembre.

Respuesta abierta.

3. Selecciona otros dos periodos de 10 días en los meses de octubre y noviembre y repite las mismas operaciones que en el apartado anterior. ¿Se cumple la tercera ley de Kepler en la órbita que has obtenido?

Respuesta abierta.

4. Si no se cumple exactamente, ¿cuáles son las posibles causas de error?

La causa más importante de error está en la representación de las distancias entre Mercurio y el Sol. Se ha tomado unidad de estas distancia la UA. Hemos tomado como distancia entre dos círculos concéntricos un décimo de UA. No podemos representar con precisión la distancia en UA de las distintas posiciones situadas entre dos círculos concéntricos.