

Ejercicios resueltos

1.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+\sin x} = 4$

1º. Se considera la función $f(x) = \frac{6}{2+\sin x} - 4$ continua en $\mathbb{R}$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T^a Bolzano:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del T^a de Bolzano, luego:

$\exists c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+\sin x} = 4$ tiene una solución c en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2.- Demostrar que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1º. Se considera la función $f(x) = x^{18} - 5x + 3$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del T^a Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del T^a de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$ y $\exists c' \in (1,2)$ tal que $f(c) = f(c') = 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{R}$

3.- Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + a = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ tiene a lo más una solución en $[-1,1]$.
¿Para que valor de a existe dicha solución?

1º. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x + a$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se supone que hay más de 1 solución:

hay 2 soluciones, $c_1, c_2 \in [-1,1]$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$

Luego en el intervalo $[c_1, c_2]$ se cumplen las hipótesis del T^a Rolle por lo que

$\exists d \in (c_1, c_2) \subset [-1,1]$ tal que $f'(d) = 0$ que equivale a decir $d \in (-1,1)$

Veamos que pasa con la función derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \notin (-1,1) \text{ en contradicción con } d \in (-1,1)$$

Por tanto a lo sumo existe una solución de la ecuación.

3º. ¿Para que valor de a existe dicha solución? Se tiene que cumplir el T^a Bolzano en $[-1,1]$:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 + 3 + a = a + 2 \\ f(1) = 1 - 3 + a = a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (a+2) \cdot (a-2) < 0 \Rightarrow a \in (-2,2)$$

4.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+\sin x} = 4$

1º. Se considera la función $f(x) = \frac{6}{2+\sin x} - 4$ continua en $\mathbb{R}$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+\sin x} = 4$ tiene una solución c en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5.- Demostrar que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1º. Se considera la función $f(x) = x^{18} - 5x + 3$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$ y $\exists c' \in (1,2)$ tal que $f(c) = f(c') = 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{R}$

4º. Solo hay 2:

Se supone que hay 3 soluciones: $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ con $c_1 < c_2 < c_3$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

En los intervalos $[c_1, c_2]$ y $[c_2, c_3]$ se cumplen las hipótesis del Tº Rolle, luego:

$\exists d \in (c_1, c_2)$ y $d' \in (c_2, c_3)$ tales que $f'(d) = f'(d') = 0$ pero $f'(x) = 18x^{17} - 5 = 0$ que solo tiene una solución real $x = \sqrt[17]{\frac{5}{18}}$ en contradicción con la suposición, por tanto solo hay 2

6.- La función $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo: $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$ $f(1) = \sqrt[3]{1^2} = 1$

Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Si intentamos anular la derivada resulta: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ ¡absurdo!

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica: la función no es derivable en todos los puntos del intervalo, en el punto $x = 0$ no existe la derivada como podemos ver calculándola a través del límite:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1-\frac{2}{3}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty$$

7.- Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

→ Por ser una función polinómica, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y se cumplen las dos primeras hipótesis.

→ Tercera hipótesis: $\left. \begin{matrix} f(0) = 2 \\ f(b) = b^3 - 9b + 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b^3 - 9b + 2 = 2 \Rightarrow b^3 - 9b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 9) = 0$

$$b(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{La única solución válida es } b = 3$$

→ La tesis se cumple: $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \in (0, 3)$

8.- Prueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ Cumple las hipótesis del T^a de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

En cada uno de los intervalos es una función polinómica que es continua y derivable en $\mathbb{R}$

El único punto dudoso es $x = 1 \Rightarrow$ estudiamos la continuidad y derivabilidad en dicho punto

★ f continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \Rightarrow$

Se cumple la 1^a hipótesis: f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$

★ f derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 < x < 4 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

$$f \text{ derivable en } x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$$

Se cumple la 2^a hipótesis: f es derivable en $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

★ $\left. \begin{matrix} f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 2 = 1 \\ f(4) = 5 - (4 - 2)^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ se cumple la 3^a hipótesis

★ Veamos dónde se verifica la tesis: $f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 & \text{absurdo} \\ -2(x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \in [1, 4] \Rightarrow \text{La tesis se verifica en } c = 2$$