

1. Calcular razonadamente los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

2. [2 puntos] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\cos x - 1} & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, estudiar su continuidad en los puntos

$x = 0$ y $x = 2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

3. [2 puntos] Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $e^x = x + 2$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

4. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla los valores de a para los que f es continua en el punto $x = 1$.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, ¿es f derivable en $x = 1$?

5. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, se pide:

a) [1 punto] Calcular la imagen de f y la derivada de f en $x = -1$, o sea, hallar $f(-1)$ y $f'(-1)$.

b) [1 punto] Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la función f que sea paralela a la recta $y = -3x + 1$.

Nota. Recuerda que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Soluciones

1. Calcular razonadamente los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty \text{ INDET}] = e^L$, donde $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\cos x}{x+1} - 1 \right) \right]$. Calculemos este límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\cos x}{x+1} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x - x - 1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - x - 1}{x^2 + x} \right) = \left[\frac{0}{0} \text{ INDET} \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\operatorname{sen} x - 1}{2x + 1} \right) = -1.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. **Nota:** en (1) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital.

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \left[\frac{2}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$.

2. [2 puntos] Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\cos x - 1} & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, estudiar su continuidad en los puntos

$x = 0$ y $x = 2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

Continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDET} \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-\operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDET} \right] \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{-\cos x} = -2.$$

Nota: en (1) y en (2) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x - 2) = 0 + 0 - 2 = -2.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 = f(0)$, con lo que f es continua en $x = 0$.

Continuidad en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 2x - 2) = -4 + 4 - 2 = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDET} \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 2x) = 8 - 4 = 4.$$

Nota. En (1) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital.

Puesto que los límites laterales son distintos, no existe el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, con lo que f no es continua en $x = 2$. En este punto hay una discontinuidad de salto finito.

El hecho de que no exista la imagen de la función en $x = 2$ no influye en el razonamiento anterior porque, al ser los límites laterales finitos y distintos, la existencia o no de $f(2)$ no cambia el que f tenga una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

3. **[2 puntos]** Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $e^x = x + 2$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

Consideremos la función $f(x) = e^x - x - 2$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular lo es en cualquier intervalo cerrado contenido en $\mathbb{R}$.

Además, $f(1) = e - 1 - 2 = e - 3 < 0$ y $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = 0 \Rightarrow e^c - c - 2 = 0 \Rightarrow e^c = c + 2$. Por tanto, en el intervalo $(1, 2)$ existe una solución de la ecuación $e^x = x + 2$, como queríamos demostrar.

4. **[2 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla los valores de a para los que f es continua en el punto $x = 1$.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, ¿es f derivable en $x = 1$?

a) Para que f sea continua en $x = 1$ se ha de cumplir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, es decir,

$$3 - a = \frac{2}{a}. \text{ Resolviendo la ecuación anterior: } 3a - a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}. \text{ Por tanto, para}$$

los valores de a hallados anteriormente, la función es continua en $x = 1$.

b) La función derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} -2ax & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{ax^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Si $a = 1$, se tiene que $f'(1^-) = -2$ y $f'(1^+) = -2$. De aquí se deduce que, en este caso, f es derivable en el punto $x = 1$, ya que las derivadas laterales coinciden. Además, $f'(1) = -2$.

Si $a = 2$, se tiene que $f'(1^-) = -4$ y $f'(1^+) = -1$. En este caso, al no coincidir las derivadas laterales, f no es derivable en el punto $x = 1$.

5. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular la imagen de f y la derivada de f en $x = -1$, o sea, hallar $f(-1)$ y $f'(-1)$.

b) **[1 punto]** Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la función f que sea paralela a la recta $y = -3x + 1$.

a) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1$. La derivada de f es $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$.

$$\text{Entonces } f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1)}{(-1+2)^2} = \frac{1-4}{1} = -3.$$

b) La pendiente de la recta $y = -3x + 1$ es $m = -3$. Por tanto, la recta tangente también ha de tener la misma pendiente, y ya hemos visto en el apartado anterior que esto ocurre para $x = -1$. Por tanto, una recta tangente a la gráfica de la función que sea paralela a la recta $y = -3x + 1$ es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - 1 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 2.$$