1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}\,3x}{2x-3\,\text{sen}\,2x}$

   b) $\lim_{x\to 1} \left[\ln(e\cdot x)\right]^{\frac{1}{x-1}}$

2. **[1 punto]** Estudiar de manera razonada la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \frac{\text{sen}\,x}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ x+1-e^x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ \frac{x-1}{\ln x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$ en los puntos $x=0$ y $x=1$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

3. **[2 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano. Encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $2xe^{x-1}=x^2+2$ tenga una solución.

4. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

   a) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

   b) $y=\ln\left(\frac{\text{sen}\,x}{e^x}\right)$

5. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

   a) Utilizando la definición de continuidad, hallar el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=2$.

   b) Para el valor de *a* hallado en el apartado anterior, ¿es *f* derivable en $x=2$?

   c) Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

Soluciones

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\,\text{sen}\,3x}{2x-3\,\text{sen}\,2x}=\left[\text{Indeterminación }\dfrac{0}{0}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{2\cos 3x\cdot 3}{2-3\cos 2x\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{6\cos 3x}{2-6\cos 2x}=\dfrac{6\cdot 1}{2-6\cdot 1}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$.

Para hacer el límite anterior, en el paso (1), se ha aplicado la regla de L'Hôpital.

b) $\lim_{x\to 1}\left[\ln(e\cdot x)\right]^{\frac{1}{x-1}}=[\text{Indeterminación }1^{\infty}]$. Pero $\lim_{x\to 1}\left[\ln(e\cdot x)\right]^{\frac{1}{x-1}}=e^{L}\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}\left(\ln(e\cdot x)-1\right)\right]=L$.

Calculemos pues este último límite:

$\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}\left(\ln(e\cdot x)-1\right)\right]=\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(e\cdot x)-1}{x-1}=\left[\text{INDETERMINACIÓN }\dfrac{0}{0}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{e\cdot x}\cdot e}{1}\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, donde

en el paso (1) se ha aplicado la regla de L'Hôpital. Por tanto: $\lim_{x\to 1}\left[\ln(e\cdot x)\right]^{\frac{1}{x-1}}=e^{1}=e$.

2. Estudiar de manera razonada la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen}\,x}{x} & \text{si}\quad x<0\\ x+1-e^{x} & \text{si}\quad 0\le x<1\\ \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si}\quad x\ge 1\end{cases}$ en los puntos $x=0$ y $x=1$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0+1-e^{0}=1-1=0\\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{1}=1\\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+1-e^{x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}f(x)\ne\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow f\text{ no es continua en }x=0.$$

$f(1)$ no existe ya que para $x=1$ se anula el denominador de $\dfrac{x-1}{\ln x}$. Entonces, como $1\notin\text{Dom}\,f$, f no es continua en $x=1$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x+1-e^{x}\right)=2-e\\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1/x}=\lim_{x\to 1^+}x=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)\ne\lim_{x\to 1^+}f(x)$.

En ambos casos la discontinuidad es de salto finito porque existen los límites laterales y son finitos, pero no son iguales.

3. Enuncia el teorema de Bolzano. Encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $2xe^{x-1}=x^{2}+2$ tenga una solución.

Teorema de Bolzano. Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,\,b]$ y supongamos que el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$. Entonces existe $c\in(a,\,b)$ tal que $f(c)=0$.

Sea la función $f(x)=2xe^{x-1}-x^{2}-2$. Claramente f es continua en todo $\mathbb{R}$, luego en particular será continua en cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$. Además, por un lado: $f(1)=2-1-2=-1<0$. Y, por otro lado: $f(2)=4e-4-2\cong 4{,}87>0$. Por el teorema de Bolzano, existe $c\in(1,\,2)$ tal que $f(c)=0$, es decir tal que $2ce^{c-1}-c^{2}-2=0\Leftrightarrow 2ce^{c-1}=c^{2}+2$, tal y como queríamos demostrar.

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2x-x\ln x}{2x\sqrt{x}}}{x}=\frac{x\left(2-\ln x\right)}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

b) $y=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)$

$$y'=\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}\cdot\frac{\cos x\cdot e^x-\operatorname{sen} x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{e^x\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{ctg} x-1$$

Otra forma. Como $y=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-\ln e^x=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-x\ln e=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-x$, tenemos:

$$y'=\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x-1=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-1=\operatorname{ctg} x-1$$

5. Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Utilizando la definición de continuidad, hallar el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Rightarrow 4a+1=e^0+2\Rightarrow 4a+1=3\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, la función queda de la forma $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

b) Para el valor de *a* hallado en el apartado anterior, ¿es *f* derivable en $x=2$?

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2 \\ f'\left(2^+\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-e^{2-x}\right)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ como } f'\left(2^-\right)\neq f'\left(2^+\right),\ f \text{ no es derivable en } x=2.$$

c) Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

La recta tangente en $x=1$ es $y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right)$. Pero $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ y $f'\left(1\right)=1$, porque a la izquierda de 2 es $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2}2x=x$. Por tanto, la recta tangente en el punto $x=1$ queda de la forma $y-\dfrac{3}{2}=1\left(x-1\right)\Rightarrow y=x-1+\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=x+\dfrac{1}{2}$.

Para un valor genérico de a, tenemos que $f\left(1\right)=a+1$ y $f'\left(1\right)=2a$. Por tanto, en este caso, la recta tangente en $x=1$ sería $y-\left(a+1\right)=2a\left(x-1\right)\Rightarrow y-a-1=2ax-2a\Rightarrow y=2ax-a+1$.