

**Examen de Matemáticas II**

1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

a) Calcular el valor de  $k$  para que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \right)^{kx-1} = e^3$

b) Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

2. **[1 punto]** ¿Qué condición debe cumplir  $m$  para que la ecuación  $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$  tenga una solución en el intervalo  $(0, 2)$ ?

3. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a)  $y = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$

b)  $y = \ln\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)$

4. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Considera, para distintos valores de  $b$ , la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ b(x - 2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de  $b$  es  $f$  continua? ¿Para qué valores de  $b$  es  $f$  derivable?

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -2$ .

5. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Dada la función  $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$ , se pide:

a) Dominio y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Máximos y mínimos relativos (ambas coordenadas).

c) Intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

## Soluciones

1. Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \right)^{kx-1} = e^3 \text{ [Indeterminación } 1^\infty] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (kx-1) \left( \frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} - 1 \right) \right] = 3.$$

Calculemos pues este último límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (kx-1) \left( \frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} - 1 \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (kx-1) \left( \frac{3x-1}{2x^2 + 1} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(kx-1)(3x-1)}{2x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3kx^2 - kx - 3x + 1}{2x^2 + 1} = \frac{3k}{2}. \text{ Por tanto: } \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \left[ \text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right]. \text{ Podemos aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1 - \sin x}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2. ¿Qué condición debe cumplir  $m$  para que la ecuación  $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$  tenga una solución en el intervalo  $(0, 2)$ ?

Sea la función  $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$ , que es claramente continua en todo  $\mathbb{R}$  por ser polinómica. Además  $f(0) = -6 < 0$  y  $f(2) = 8 + 4 + 2m - 6 = 2m + 6$ . Por el teorema de los ceros de Bolzano, si es  $f(2) = 2m + 6 > 0$ , existe  $c \in (0, 2)$  tal que  $f(c) = 0$ , es decir, tal que  $c^3 + c^2 + mc - 6 = 0$ . Por tanto la condición que se debe cumplir es que  $2m + 6 > 0 \Rightarrow 2m > -6 \Rightarrow m > -3$ .

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

$$a) y = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{x \ln x - 2x + 2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x - 2x + 2x}{x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$b) y = \ln \left( \frac{\sin x}{e^x} \right). \text{ Dos formas:}$$

$$\begin{aligned} i) y' &= \frac{1}{\frac{\sin x}{e^x}} \cdot \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{\sin x} \cdot \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{(e^x)^2} = \frac{e^{2x} (\cos x - \sin x)}{e^{2x} \sin x} = \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x} = \cotg x - 1 \end{aligned}$$

$$ii) y = \ln(\sin x) - \ln e^x = \ln(\sin x) - x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \cotg x - 1$$

4. Considera, para distintos valores de  $b$ , la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ b(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de  $b$  es  $f$  continua? ¿Para qué valores de  $b$  es  $f$  derivable?

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$ ,  $f$  es continua sea quien sea el valor de  $b$ .

Por otro lado, para que  $f$  sea derivable, lo ha de ser en  $x=2$ , y para ello la derivada por la izquierda en 2, ha de ser igual que la derivada por la derecha en 2, obteniendo por tanto que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x < 2: f'(x) = 2x \Rightarrow f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4 \\ \text{Si } x > 2: f'(x) = b \Rightarrow f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow b = 4.$$

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -2$ .

$$y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \Rightarrow y - 0 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8$$

5.  $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

La función la podemos escribir así:  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$f$  no tiene asíntotas horizontales porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = \pm\infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$ ,  $x=2$  es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 2x} = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 7}{x-2} = -3.$$

Por tanto,  $y = x - 3$  es una asíntota oblicua.

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2 - 5x + 7) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

Obsérvese que la segunda derivada nunca se anula pues  $\frac{2}{(x-2)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ , por tanto  $f$  no

puede tener puntos de inflexión. Estudiemos la monotonía y la curvatura.

|               | $(-\infty, 1)$     | $(1, 2)$               | $(2, 3)$               | $(3, +\infty)$     |                | $(-\infty, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---------------|--------------------|------------------------|------------------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|
| signo de $f'$ | +                  | -                      | -                      | +                  | signo de $f''$ | -              | +              |
| monotonía     | $\uparrow\uparrow$ | $\downarrow\downarrow$ | $\downarrow\downarrow$ | $\uparrow\uparrow$ | curvatura      | $\cap$         | $\cup$         |

De lo anterior se deduce que:

- $f$  es creciente en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  y es decreciente en  $(1, 2) \cup (2, 3)$ . Además, tiene un máximo relativo en el punto  $(1, -3)$  y un mínimo relativo en el punto  $(3, 1)$
- $f$  es convexa en el intervalo  $(-\infty, 2)$  y cóncava en el intervalo  $(2, +\infty)$ . Además, como ya se ha comentado, carece de puntos de inflexión.