

1. Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ , contesta a los siguientes apartados:

- a) Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**
- b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
- c) Haz una representación gráfica aproximada de la función utilizando los apartados anteriores (sin necesidad de tabla de valores). **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{3x}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2-4}} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{3x^2 - 7} \right)^{6x}$

3. Sea la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Estudia la continuidad de  $f$  en  $x = -1$ . Caso de no ser continua di qué tipo de discontinuidad es, razonando la respuesta. **(1 punto)**
  - b) Halla razonadamente el valor de  $a$  para que  $f$  sea continua en  $x = 2$ . **(1 punto)**
4. Utiliza el Teorema de Bolzano para hallar un intervalo de longitud a lo sumo 1 unidad, en el que la ecuación  $2x^3 - 2x + 1 = 0$  tenga una solución. **(1 punto)**

$$① f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$$

c)

$$a) x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

\* Puntos de corte eje X:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

(2  $\notin$  Dom f)

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -3 : \cancel{(2, 0)}; \underline{\underline{(-3, 0)}}$$

\* Puntos de corte eje Y:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 3 : \underline{\underline{(0, 3)}}$$

b) \* Asintota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 1}} \text{ (A.H.)}$$

\* Asintotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1} = \left[ \frac{2}{0} \right] \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = -1}} \text{ (A.V.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow x = 2$  NO ES ASÍNTOTA VERTICAL.

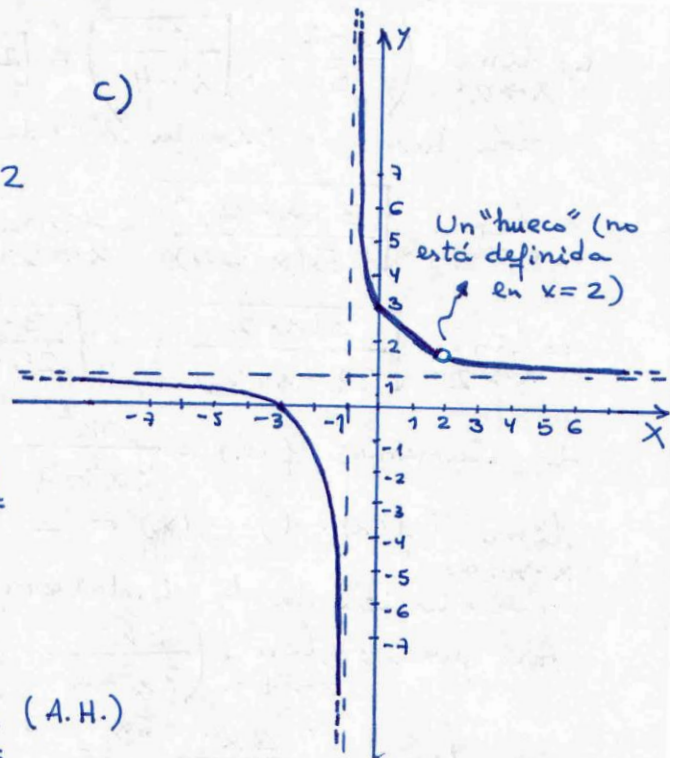
$$② a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2) = [\text{INDET } \infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)(\sqrt{x^4 + x^2} + x^2)}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{3x}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}} = (2 + 0)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$



$$c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2-4}} \right) = [\text{INDET: } 0 \cdot \infty] = (\text{para hacer la operación hay que introducir todo dentro del radical}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x^2-4)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x+2)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)}{25(x+2)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0}{25 \cdot 4}} = \underline{\underline{0}}$$

$$d) \text{ Llamemos } f(x) = \frac{3x^2}{3x^2-7} \text{ y } g(x) = 6x. \text{ Entonces:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-1) \cdot g(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = e^L$$

(resolución de la indeterminación del tipo  $1^\infty$ )

$$\text{Así pues: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{3x^2-7} - 1 \right) \cdot 6x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{42x}{3x^2-7} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{3x^2-7} \right)^{6x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-1-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+2x) = (-1)^2+2(-1) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \neq 2 = f(-1) : \text{ existe el límite}$$

cuando  $x \rightarrow -1$ , pero no es igual que la imagen de  $f$

en  $x = -1 \Rightarrow f$  NO ES CONTINUA EN  $x = -1$ ; DISCONTINUIDAD EVITABLE.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+2x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax-x^2) = 2a-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{para que exista el límite}$$

cuando  $x \rightarrow 2$ , los laterales deben ser iguales:

$$8 = 2a - 4 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 6}}. \text{ En este caso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8 \text{ y } f \text{ es continua en } x = 2$$

④ La función  $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , en particular en todo intervalo cerrado y acotado. Encontramos uno  $[a, b]$  de longitud 1 en el que  $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$ :

$$f(0) = 1; f(1) = 1; f(2) = 15; \underline{f(-1) = 1}; \underline{f(-2) = -11}$$

Así pues, puede servir como solución el intervalo  $(-2, -1)$