Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x-1}$, se pide:

   a) **[0,5 puntos]** Halla su asíntota vertical, y la tendencia de la función hacia la izquierda y derecha de esta.

   b) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x-1}$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

   c) **[1,5 puntos]** Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de la función donde se alcance un máximo o un mínimo.

   d) **[0,5 puntos]** Con los datos anteriores realizar una representación gráfica aproximada de la función.

2. **[1,5 puntos]** Calcula la siguiente integral indefinida: $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$.

3. Dadas las funciones $f\left(x\right)=x^2-1$ y $g\left(x\right)=1-x$:

   a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

   b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

4. **[2 puntos]** Discutir, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, el sistema $\begin{cases}3x+my+z=m-2\\x+y+2z=0\\mx+y-z=m-2\end{cases}$ y resolverlo, si es posible, para $m=-1$.

5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r\equiv\begin{cases}y+z+1=0\\x-y+2=0\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv x=2$, calcular la ecuación de una recta s que pase por el origen de coordenadas, sea perpendicular a r y paralela al plano π.

Soluciones

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$, se pide:

 a) **[0,5 puntos]** Halla su asíntota vertical, y la tendencia de la función hacia la izquierda y derecha de esta.

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 1^-\\ +\infty & \text{si } x\to 1^+\end{cases}\Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

 b) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x-1}$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=+\infty\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{0}{-\infty}=0.$$

 De lo anterior se deduce que la función tiene una asíntota horizontal en $y=0$ (eje X).

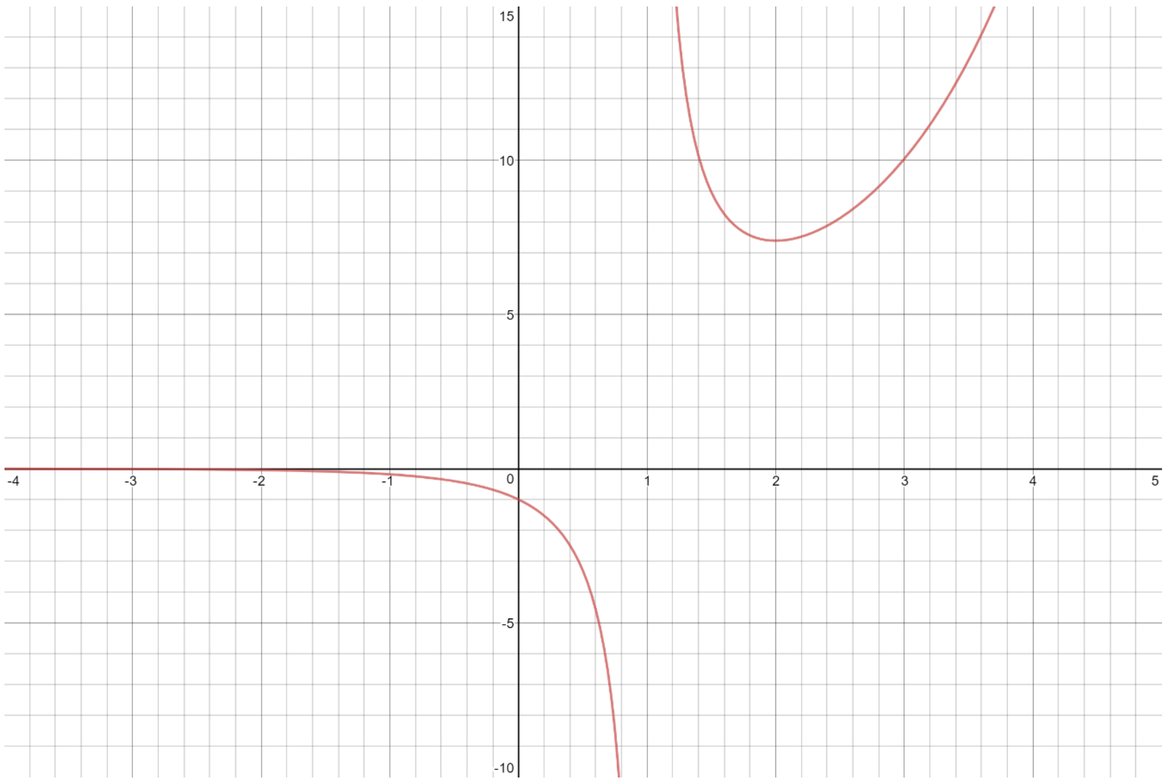
 c) **[1,5 puntos]** Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de la función donde se alcance un máximo o un mínimo.

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.\text{ Entonces } f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(x-2)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Signo f'	$-$	$-$	$+$
Monotonía	Decreciente	Decreciente	Creciente

 Por tanto f es decreciente en $(-\infty,1)\cup(1,2)$ y creciente en $(2,+\infty)$. Además, f alcanza un mínimo en el punto de abscisa $x=2$. Como $f(2)=\dfrac{e^2}{2-1}=e^2$, el mínimo es el punto $(2,e^2)$.

 d) **[0,5 puntos]** Con los datos anteriores realizar una representación gráfica aproximada de la función.



2. **[1,5 puntos]** Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$.

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$. Entonces:

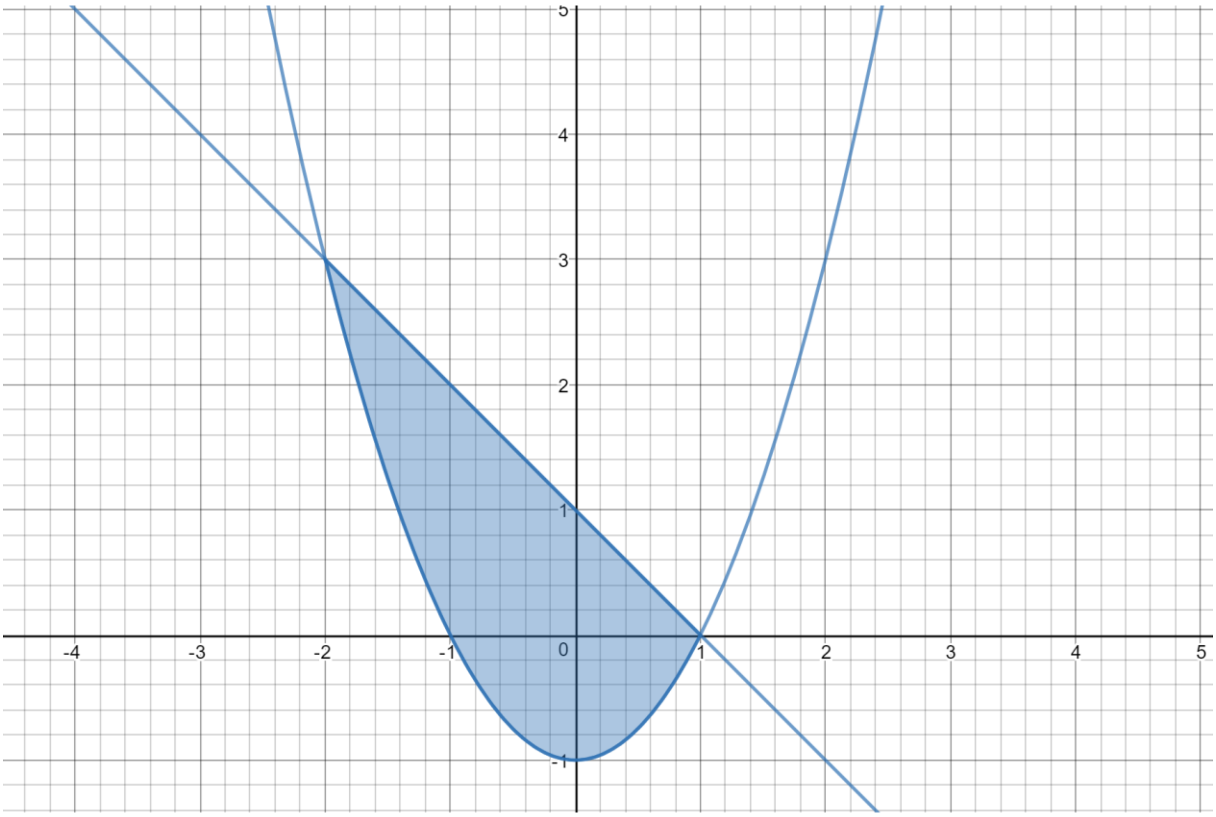
$$\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$. Hallemos *A*, *B* y *C*:

Si $x=1$, $-B=2\Rightarrow B=-2$. Si $x=2$, $C=5$. Si $x=0$, $2A+4+5=1\Rightarrow 2A=-8\Rightarrow A=-4$. Por tanto:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx=\int \frac{-4}{x-1}\,dx+\int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{5}{x-2}\,dx=-4\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}+5\ln(x-2)+C.$$

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$:

a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.



b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

$$A=\int_{-2}^{1}\left((1-x)-(x^2-1)\right)dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-2}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\frac{-2-3+12}{6}-\frac{8-6-12}{3}=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{6}+\frac{20}{6}=\frac{27}{6}\text{ uds}^2$$

4. **[2 puntos]** Discutir, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el sistema $\begin{cases} 3x+my+z=m-2 \\ x+y+2z=0 \\ mx+y-z=m-2 \end{cases}$ y resolverlo, si es posible, para $m=-1$.

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $|A|=\left(-3+2m^2+1\right)-\left(m-m+6\right)=2m^2-8$. Por tanto $|A|=0 \Leftrightarrow 2m^2-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=2 \end{cases}$. Podemos distinguir pues tres casos.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$ tenemos que $r\left(A\right)=r\left(A\,|\,b\right)=3=n$, y el sistema es compatible determinado.

Si $m=-2$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2. Además $A\,|\,b=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 porque $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=\left(-12-4\right)-\left(8+16\right)=-16-24=-40\neq 0$. Por tanto, si $m=-2$ el sistema es incompatible (carece de soluciones).

Si $m=2$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es claramente 2. Además $A\,|\,b=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es también dos pues añadir una columna de ceros no aumenta el rango de una matriz. Por tanto, si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Si eliminamos la última ecuación y llamamos $z=\lambda$, el sistema queda del siguiente modo $\begin{cases} 3x+2y=-\lambda \\ x+y=-2\lambda \end{cases}$. Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando: $x=3\lambda$. Sustituyendo en la última ecuación $3\lambda+y=-2\lambda \Rightarrow y=-5\lambda$. Así, las infinitas soluciones son $\left(x,y,z\right)=\left(3\lambda,-5\lambda,\lambda\right)$.

5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r\equiv\begin{cases} y+z+1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ y el plano $\pi\equiv x=2$, calcular la ecuación de una recta s que pase por el origen de coordenadas, sea perpendicular a r y paralela al plano π.

Es fácil deducir que las ecuaciones paramétricas de r son $r\equiv\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$. Por tanto un vector director suyo será $\vec{v}=\left(1,1,-1\right)$. Como r y s han de ser perpendiculares, este vector será perpendicular a s. Un vector perpendicular al plano π es $\vec{u}=\left(1,0,0\right)$. Como s y π han de ser paralelos, el vector $\vec{u}$ también será perpendicular a la recta s. Por tanto un vector director de r será el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} j & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-j-k=\left(0,-1,-1\right)\Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}.$$