Examen de Matemáticas I

IMPORTANTE: Se recuerda que en algunos ejercicios hay que tener presentes alguna de las siguientes identidades:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \;\; ; \;\; \sec x = \frac{1}{\cos x} \;\; ; \;\; \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

1. **[2 puntos]** Demuestra que las siguientes identidades son ciertas:

   a) $\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 2\operatorname{tg} 2x$

   b) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg} x}$

2. **[2 puntos]** Simplifica todo lo que puedas las expresiones siguientes:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$

   b) $2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha$

3. **[3 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones y da las soluciones dentro del intervalo $\left[0^{\text{o}}, 360^{\text{o}}\right)$ (primera vuelta).

   a) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0$

   b) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

4. **[1 punto]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones en el primer cuadrante.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\[2ex] \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Soluciones

1. Identidades trigonométricas:

a) $$\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}-\frac{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x-\operatorname{sen}x)}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\cos x\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}-\frac{\cos^2 x-2\cos x\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=\frac{2\cos x\operatorname{sen}x+2\cos x\operatorname{sen}x}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}2x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2x}=\frac{2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=2\operatorname{tg}2x$$

b) $$\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{cotg}x}=\frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\dfrac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x\cdot\cos^2x}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x^2}=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2x}$$

2. Simplificar expresiones:

a) $$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha$$

b) $$2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha=2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}-\operatorname{sen}\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

3. Ecuaciones trigonométricas

a) $$\operatorname{tg}x+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x(1+2\cos x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=0^{\circ};x=180^{\circ}\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=120^{\circ};x=240^{\circ}\end{cases}$$

b) $$\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\operatorname{sen}x\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow 6\operatorname{sen}^2x=\sqrt{3}\cos x\Rightarrow 6(1-\cos^2x)=\sqrt{3}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-6\cos^2x=\sqrt{3}\cos x\Rightarrow 6\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-6=0$$

El discriminante de la ecuación anterior es: $\sqrt{3}^2-4\cdot6\cdot(-6)=3+144=147$. Por tanto:

$$\cos x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{147}}{12}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7^2\cdot3}}{12}=\frac{-\sqrt{3}\pm7\sqrt{3}}{12}=\begin{cases}\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{-8\sqrt{3}}{12}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Si $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $x=30^{\circ};x=330^{\circ}$

Si $\cos x=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$, entonces no existe solución para x pues $\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\cong-1{,}15<-1$

4. Sistema de ecuaciones trigonométricas.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Dividiendo ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{2}{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^{\circ}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} 30^{\circ} \cdot \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 45^{\circ}$$