EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2022–2023

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**(4)**
Convocatoria:	

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

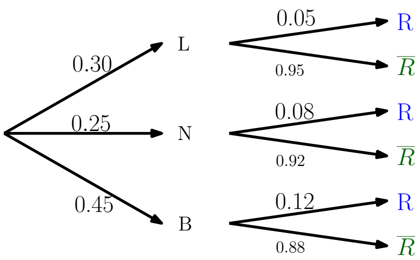
1. **A1.** En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30 % de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25 % a NUBERIA y el resto a BRINKEN. La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5 % para los de LAVOLONA, el 8 % para los de NUBERIA y el 12 % para los de BRINKEN.

   a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.

   b) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?

   c) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

a) Realizamos el árbol, calculando todas las probabilidades necesarias:



$p\left(L\cap R\right)=0.30\cdot 0.05=0.015$

$p\left(L\cap \overline{R}\right)=0.285$

$p\left(N\cap R\right)=0.02$

$p\left(N\cap \overline{R}\right)=0.23$

$p\left(B\cap R\right)=0.054$

$p\left(B\cap \overline{R}\right)=0.396$

b) Nos piden una probabilidad condicionada por el retraso del avión. Por ello, previamente tenemos que calcular la probabilidad que un avión llegue con retraso:

- $p\left(R\right)=p\left(L\cap R\right)+p\left(N\cap R\right)+p\left(B\cap R\right)=0{,}015+0{,}02+0{,}054=0{,}089$
- $p\left({}^{N}\!/\!{}_{R}\right)=\dfrac{p\left(N\cap R\right)}{p\left(R\right)}=\dfrac{0{,}02}{0{,}089}=0{,}2247\rightarrow 22{,}47\,\%$ de posibilidades que si el avión llegua con retraso, éste sea de la compañía Nuberia.

c) Podemos resolver el apartado utilizando dos estrategias diferentes y a la vez, muy parecidas.

1ª Forma: La proporción de vuelos que llegan con retraso para Brinken es $P({}^{R}\!/\!{}_{B})=0{,}12$

La probabilidad de que ambos aviones de Brinken lleguen a tiempo se calcula como el complementario de que al menos uno de ellos llegue con retraso:

- $p(Ambos\ a\ tiempo)=1-p(Al\ menos\ uno\ con\ retraso)$

Dado que los retrasos son independientes, la probabilidad que ambos aviones lleguen a tiempo es el producto de las probabilidades individuales.

- $p(Ambos\ a\ tiempo)=p({}^{\overline{R}}\!/\!{}_{B})\cdot p({}^{\overline{R}}\!/\!{}_{B})=0{,}88\cdot 0{,}88=0{,}7444\rightarrow 74{,}44\,\%$
- $p(Al\ menos\ uno\ con\ retraso)=1-p(Ambos\ a\ tiempo)=1-0{,}7444=0{,}2256\rightarrow 22{,}56\,\%$

La probabilidad que alguno de los aviones de Brinken llegue con retraso será del 22.56 %

2ª Forma: Utilizando la distribución binomial:

Tenemos que contar el nº de aviones con retraso de la compañía Brinken

$$\left.\begin{array}{c} Retraso\rightarrow p(R)=0{,}12=p \\ \\ Sin\ Retraso\rightarrow p(\overline{R})=0{,}88=1-p \\ \\ Los\ retrasos\ son\ independientes \end{array}\right\}\longrightarrow \begin{array}{c} X=\text{"}N^{o}\ retrasos\ de\ n=2\ aviones \\ \\ X\simeq B\left(2,0{,}12\right) \\ \\ p\left(X=r\right)=\binom{2}{r}\cdot 0{,}12^{r}\cdot 0{,}88^{2-r} \end{array}$$

- $p\left(Al\ menos\ 1\right)=p\left(X\geq 1\right)=\underbrace{p\left(X=1\right)}_{0{,}2112}+\underbrace{p\left(X=2\right)}_{0{,}0144}=0{,}2256\rightarrow 22{,}56\,\%$

2. **B1.** Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10 %. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

   a) Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.
   b) Al menos, 435 clientes no hayan comprado.
   c) Al menos 45 clientes realicen una compra.

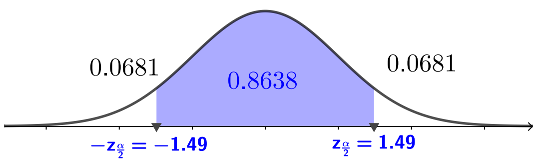
Tenemos que darnos cuenta que es un problema binomial ya que un cliente compra o no compra en las tiendas del centro comercial.

$$\left.\begin{array}{c} Compra \rightarrow p(C) = 0{,}10 = p \\[1em] No\,compra \rightarrow p(\overline{C}) = 0{,}90 = 1-p \\[1em] Las\ compras\ son\ independientes \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{c} X = \text{"}\,N^{\text{o}}\ compras\ de\ n = 500\ clientes \\[1em] X \simeq B\,(500, 0{,}10) \\[1em] p\,(X = r) = \binom{2}{r} \cdot 0{,}12^r \cdot 0{,}88^{2-r} \end{array}$$

Como los cálculos son muy largos, podemos utilizar la aproximación de la Binomial a la Normal utilizando el T$^{\underline{a}}$ central del Límite.

$$\begin{array}{c} X = \text{"}\,N^{\text{o}}\ compras\ de\ n = 500\ clientes \\[0.5em] X \simeq B\,(500, 0{,}10) \\[0.5em] p\,(X = r) = \binom{2}{r} \cdot 0{,}12^r \cdot 0{,}88^{2-r} \end{array} \quad \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ n = 500 \geq 30 \checkmark \\ n \cdot p = 50 \geq 5 \checkmark \\ n \cdot (1-p) = 450 \geq 5 \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{c} X\,' \simeq N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right) \\ \downarrow \\ X\,' \simeq N\,(50, 6{,}7082) \end{array}$$

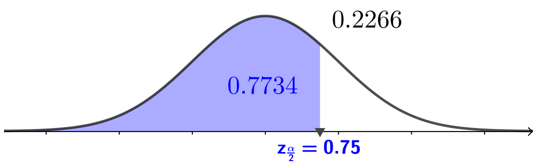
a) $p\,(40 \leq X \leq 60) \overset{tipificando}{=} p\left(\dfrac{40-50}{6{,}7082} \leq \dfrac{X-50}{6{,}7082} \leq \dfrac{60-50}{6{,}7082}\right) = p\,(-1{,}49 \leq z \leq 1{,}49) = 0{,}8638 \rightarrow 86{,}38\,\%$



b) Si al menos no compran 435, entonces compran **menos de 65**.

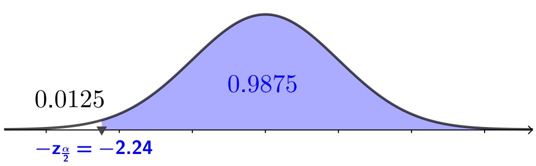
Compren 65	No compren 435

$p\,(X \leq 65) \overset{tipificando}{=} p\left(\dfrac{X-50}{6{,}7082} \leq \dfrac{65-50}{6{,}7082}\right) = p\,(z \leq 0{,}75) = 0{,}7734 \rightarrow 77{,}34\,\%$



c) Al menos 45 realizan compra, es decir, 45 o más realizan la compra.

$p\,(X \geq 45) \overset{tipificando}{=} p\left(\dfrac{X-50}{6{,}7082} \geq \dfrac{45-50}{6{,}7082}\right) = p\,(z \geq -2{,}24) = 0{,}9875 \rightarrow 98{,}75\,\%$



3. **A2.** En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

   a) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

   b) Determinar un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

   c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97 % para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

Solución:

Tomamos una muestra de 150 estudiantes donde:

a) 90 utilizan el campus virtual donde $p(V) = \dfrac{90}{150} = 0{,}60 = p$

- Por tanto, 60 no utilizan el campus virtual donde $p(\overline{V}) = \dfrac{60}{150} = 0{,}40 = 1 - p = q$

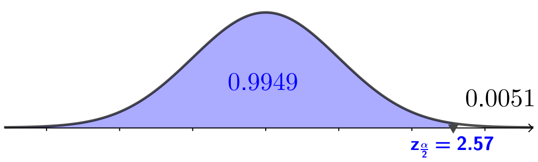
b) El intervalo de confianza de la proporción viene dado por la expresión:

$$\left.\begin{array}{c} Tama\tilde{n}o\ muestra \rightarrow n = 150 \\ \\ p = 0{,}60 \quad q = 0{,}40 \\ \\ Nivel\ de\ confianza\ 1-\alpha = 99\,\% \end{array}\right\} \longrightarrow I_P = \left[p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right]$$

- Determinamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado al nivel de confianza

$$I_P = \left[0{,}60 \pm 2{,}57 \cdot \sqrt{\frac{0{,}60 \cdot 0{,}40}{150}}\right] =$$

$$I_P = [0{,}60 - 0{,}103, 0{,}60 + 0{,}103] = [0{,}497, 0{,}703]$$



Por tanto, estimamos con una confianza del 99 % que la proporción de alumnos que utilizan el campus virtual se encuentra comprendida entre un 49.7 % y un 70.3 % del total de alumnos.

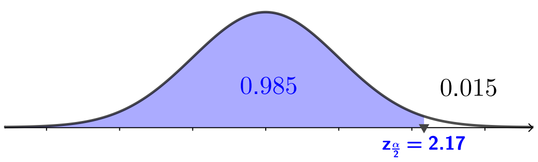
c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes el intervalo de confianza al 97 % para la proporción de estudiantes que **NO UTILIZAN**.

$$\left.\begin{array}{c} Tama\tilde{n}o\ muestra \rightarrow n = 450 \\ \\ p = 0{,}40 \quad q = 0{,}60 \\ \\ Nivel\ de\ confianza\ 1-\alpha = 97\,\% \end{array}\right\} \longrightarrow I_P = \left[p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right]$$

- Determinamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado al nivel de confianza

$$I_P = \left[0{,}40 \pm 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}40 \cdot 0{,}60}{450}}\right] =$$

$$I_P = [0{,}40 - 0{,}0501, 0{,}40 + 0{,}0501] = [0{,}3499, 0{,}4501]$$



Por tanto, estimamos con una confianza del 97 % que la proporción de alumnos que **NO UTILIZAN** el campus virtual se encuentra comprendida entre un 34.99 % y un 45.01 % del total de alumnos.

4. **B2.** En una encuesta se pregunta a 10000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza al 80 % para el número medio de botellines consumidos a la semana.

b) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes en necesario entrevistar?

c) Si la encuesta se realizara a 8500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82 %, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

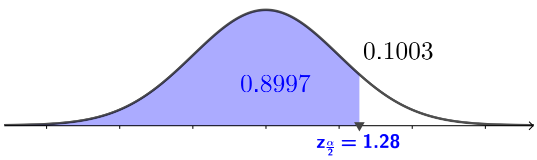
Solución:

X = "Nº de botellines de cerveza que consumen a la semana" donde $\overline{x} = 5$, $\sigma_{\overline{x}} = 2$ botellines.

a) El intervalo de confianza de la media viene dado por la expresión:

$$\left.\begin{array}{r} Tamaño\ muestra \rightarrow n = 10000 \\ \overline{x} = 5 \quad \sigma_{\overline{x}} = 2 \\ Nivel\ de\ confianza\ 1-\alpha = 80\,\% \end{array}\right\} \longrightarrow I_\mu = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Determinamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado al nivel de confianza



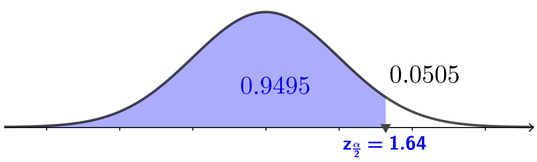
$$I_\mu = \left[5 \pm 1{,}28 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}}\right] =$$
$$I_P = [5 - 0{,}0256, 5 + 0{,}0256] = [4{,}9744, 5{,}0256]$$

Por tanto, estimamos con una confianza del 80 % que la media de botellines consumidos se va a encontrar alrededor de 5 del total de los jóvenes.

b) Si queremos como error máximo de 0.28 botellines para un 90 % de nivel de confianza manteniendo la desviación típica de 2 botellines, si utilizamos la expresión del error.

$$\left.\begin{array}{r} Tamaño\ muestra \rightarrow ¿n? \\ \overline{x} = 5 \quad \sigma_{\overline{x}} = 2 \\ Nivel\ de\ confianza\ 1-\alpha = 90\,\% \end{array}\right\} \longrightarrow E_{máx} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Determinamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado al nivel de confianza

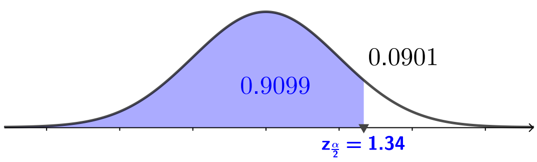


$$E_{máx} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}28 = 1{,}64 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$$
$$\rightarrow n = \left(\frac{1{,}64 \cdot 2}{0{,}28}\right)^2 \simeq 138{,}06$$

Por tanto, estimamos que hay que entrevistar al menos a 138 jóvenes para garantizar las condiciones dadas.

c) Si tenemos el mismo intervalo que en el apartado a) pero cambiando los datos obtenemos que el error es de 0.0256 y si sutituimos en la expresión del error máximo (ver apartado anterior).

- Determinamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ asociado al nivel de confianza



$$E_{máx} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}0256 = 1{,}34 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{8500}} \rightarrow \sigma \simeq 1{,}76 \text{ botellines.}$$

5. **A3.** Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x)=\begin{cases} \dfrac{3x}{2} & si\ 0\leq x<2 \\ \\ x^2-5x+9 & si\ 2\leq x\leq 4 \\ \\ 5 & si\ x>4 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en años.

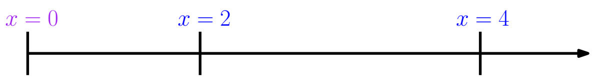
a) Hacer una gráfica de $B(x)$ ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?

b) ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?

c) ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3000 euros?

Solución:

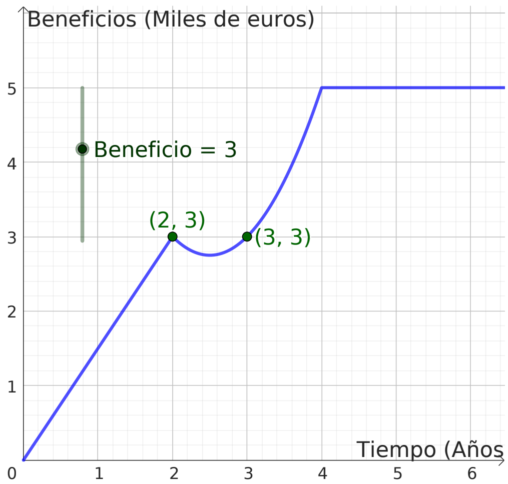
a) Para poder representar una función a trozos, debemos realizar cálculos en cada trozo de las funciones. En los trozos calculamos SIEMPRE su valor en los extremos de los intervalos. En la parábola, además, hay que calcular el vértice.



x	$B(x)=\frac{3x}{2}$
0	0
2	6

x	$B(x)=x^2-5x+9$
2	3
2.5	2.75
4	5

x	$B(x)=5$
4	5
6	5



- **Para el estudio de la continuidad**, tenemos que afirmar que los tres trozos son continuos por ser polinómicas. Veamos que ocurre en los puntos de cambio de trozos.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} B\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{2}=\dfrac{3\cdot 2}{2}=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} B\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-5x+9=2^2-5\cdot 2+9=3 \\ B\left(2\right)=3 \end{array}\right\} \longrightarrow\ B\left(x\right)\ continua\ en\ x=2$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 4^-} B\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 4^-} x^2-5x+9=4^2-5\cdot 4+9=5 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} B\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5 \\ B\left(4\right)=5 \end{array}\right\} \longrightarrow\ B\left(x\right)\ continua\ en\ x=4$$

Podemos afirmar que la función es continua en $[0,\infty)$.

- **Para el estudio de la derivabilidad**, tenemos que calcular la derivada de cada trozo de la función y luego analizar las derivadas laterales de cada una de ellas en los puntos de cambio de los trozos.

$$B(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2} & si\ 0\leq x<2\\[2ex] x^2-5x+9 & si\ 2\leq x\leq 4\\[2ex] 5 & si\ x>4\end{cases} \dashrightarrow \quad B´(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2} & si\ 0\leq x<2\\[2ex] 2x-5 & si\ 2<x<4\\[2ex] 0 & si\ x>4\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} B´(2^-)=\dfrac{3}{2} \\ B´(2^+)=2\cdot 2-5=-1\end{array}\right\}\longrightarrow\ B´(2^-)\neq B´(2^+)\ \textit{no derivable en } x=2$$

$$\left.\begin{array}{r} B´(4^-)=2\cdot 4-5=3 \\ B´(4^+)=0\end{array}\right\}\longrightarrow\ B´(4^-)\neq B´(4^+)\ \textit{no derivable en } x=4$$

Podemos afirmar que la función es derivable en su dominio excepto en $x=2$ y $x=4$

b) Para estudiar cuando aumentan o disminuyen los beneficios hay que realizar el estudio con su derivada. Para ello, se debe analizar cuando la primera derivada da 0.

Calculamos donde la derivada de la parábola se anula que es en el vértice. $2x-5=0\to x=\dfrac{5}{2}=2{,}5$. También tenemos en cuenta los cambios en los trozos de la función.

	$[0,2)$	$x=2$	$(2,2{,}5)$	$x=2{,}5$	$(2{,}5,4)$	$x=4$	$(4,+\infty)$
Signo 1ª derivada	$f´(1)=\frac{3}{2}>0$		$f´(2{,}25)<0$	$f´(2{,}5)=0$	$f´(3)>0$		$f´(4)=0$
$f(x)$ es...	$\nearrow$ creciente	No es derivable	$\searrow$ decreciente	Mínimo relativo	$\nearrow$ creciente	No es derivable	$\rightarrow$ constante

- Podemos concluir que los beneficios aumentan durante los dos primeros años y desde mitad del 2º año hasta el 4º año. Por otro lado disminuyen la primera mitad del 2º año y por último, a partir del 4º año los beneficios se mantienen constantes en 4000€.

c) Para calcular cuando los beneficio serán de 3 mil euros, igualamos los tres trozos a 3 (recuerda que los beneficios vienen dados en miles de euros y que puedes visualizar la solución en la gráfica).

- $\dfrac{3x}{2}=3\longrightarrow 3x=6\longrightarrow x=2$ años
- $x^2-5x+9=3\longrightarrow x^2-5x+6=0\longrightarrow x=2{,}x=3$ años
- $5=3\longrightarrow$ sin solución.

Podemos afirmar, que los beneficios serán al 2º y 3ª año.

6. **B3.** Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0{,}24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$ y, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.

   a) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

   b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20 % del precio de venta?

Figura 1

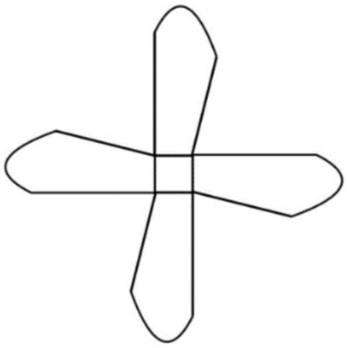
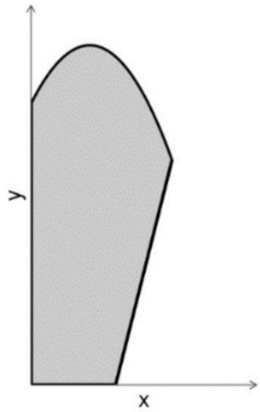


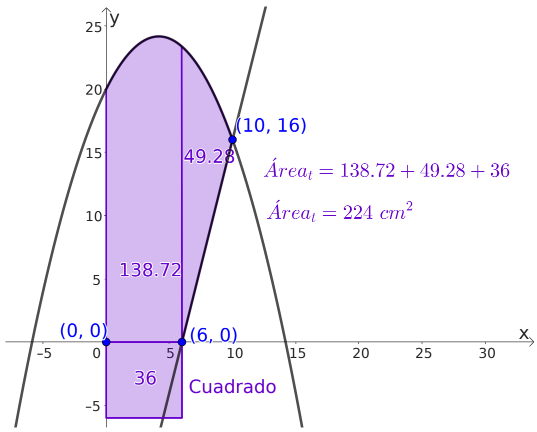
Figura 2



Solución:

a) Para poder calcular la superficie total de un aspa (multiplicamos luego por 4 aspas) más el cuadrado central, tenemos que obtener dos puntos.

- Punto de corte de la recta con el eje OX. Para ello igualamos la expresión de la recta a 0.
  $4x - 24 = 0 \dashrightarrow x = 6$. Entonces, como podemos ver en la gráfica, es lo que mide el lado del cuadrado central.
- Punto de corte de la parábola y al recta. Para ello igualamos las expresiones y resolvemos.
  $-0{,}24x^2+2x+20 = 4x-24 \rightarrow -0{,}24x^2-2x+44 = 0$
  $\rightarrow x_1 = 10, \quad x_2 = -18{,}3$
  Nos quedamos con el valor de $x_1 = 10$
- Calculamos bajo la parábola de $x = 0$ hasta $x = 6$
  $\int_0^6 \left(-0{,}24x^2 + 2x + 20\right) dx = \left[-0{,}24\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^2}{2} + 20x\right]_0^6 =$
  $138{,}72\ cm^2$
- Calculamos el área entre las dos funciones desde $x = 6$ hasta $x = 10$
  $\int_6^{10} \left(-0{,}24x^2 + 2x + 20\right) - (4x - 24)\, dx =$
  $\int_6^{10} \left(-0{,}24x^2 - 2x + 44\right) dx =$
  $\left[-0{,}24\dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{x^2}{2} + 44x\right]_6^{10} = 49{,}28\ cm^2$
- Calculamos el cuadrado central de lado 6 cm.
  $A = 6 \cdot 6 = 36\ cm^2$
- La superficie total de una aspa será la suma de los dos valores:
  $\acute{A}rea_{total} = 138{,}72 + 49{,}28 = 188\ cm^2$
- La superficie total del molinillo será de cuatro aspas más el cuadrado central:
  $\acute{A}rea_{total} = 188 \cdot 4 + 36 = 788\ cm^2$



b) Para calcular el precio de venta del molinillo, debemos realizar los siguientes cálculos:

- Coste de fabricación:
  $\underbrace{788 \cdot 1{,}4}_{plástico} + \underbrace{20}_{palito} = 1123{,}2$ céntimos
- Coste de distribución: 24 céntimos
- Coste total: $1123{,}2 + 24 = 1147{,}2$ céntimos
  $\rightarrow 11{,}472$€
- El beneficio, según el enunciado, debe ser de $0{,}20 \cdot x$ donde x es el precio de venta. Por otra parte, el beneficio se calcula como el precio de venta menos los costes (tanto de fabricación como de distribución).

  $0{,}20x = x - 11{,}472 \rightarrow 11{,}472 = 0{,}80x \rightarrow 14{,}34€ = x$
- Por tanto, podemos concluir que el precio de venta debe ser de 14.34€ cada molinillo.

7. **A4.** Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A. Para maximizar el beneficio diario:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

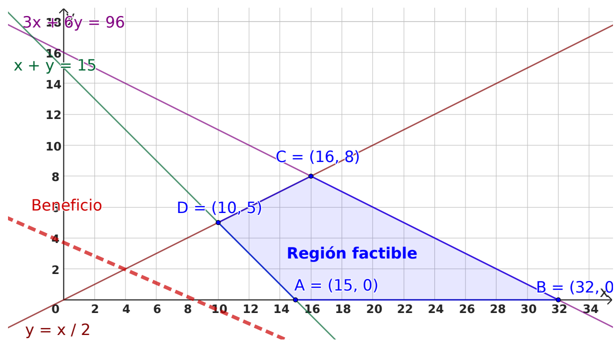
Solución:

- **Primer paso:** "Identificar las dos variables del problema (llamarlas x e y)"
  x = Nº de relojes modelo A, y = Nº de relojes modelo B
  Aunque no es obligatorio, es muy recomendable construir al principio una tabla para organizar cómodamente los datos:

	$x \to$ Modelo A	$y \to$ Modelo B	
Beneficio (en euros)	70	160	
Horas	3	6	12 personas trabajando 8 horas diarias, en total $12 \cdot 8 = 96$ horas
Restriciones de la fábrica.	x	y	Mínimo 15 relojes diarios.
Restriciones de la fábrica.	$\frac{x}{2}$	y	B sea como máximo la mitad del A

- **Segundo paso:** "Plantear algebraicamente la función objetivo y las restricciones"

$$\begin{cases} Máx: & B(x,y) = 70x + 160y \\ restricciones & \\ 3x + 6y & \leq 96 \\ x + y & \geq 15 \\ y & \leq \dfrac{x}{2} \\ Obviamente: & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$



- **Tercer paso:** Representar el recinto definido por las restricciones y calculamos las coordenadas de los vértices.

$$\left.\begin{array}{ll} x + y & = 15 \\ y & = 0 \end{array}\right\} \to A\,(15,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 6y & = 96 \\ y & = 0 \end{array}\right\} \to B\,(32,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 6y & = 96 \\ y & = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \to C\,(16,8)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x + y & = 15 \\ y & = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \to D\,(10,5)$$

- **Cuarto paso:** Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices, para ver en cuál se obtiene el máximo (o el mínimo en otros problemas).

Vértices	Max $B(x,y) = 70x + 160y$	
$A = (15,0)$	$70 \cdot 15 + 160 \cdot 0 = 1050$€	
$B = (32,0)$	$32 \cdot 15 + 160 \cdot 0 = 480$€	
$C = (16,8)$	$70 \cdot 16 + 160 \cdot 8 = 2400$€	**MÁXIMO**
$D = (10,5)$	$70 \cdot 10 + 160 \cdot 5 = 1500$€	

- Se deben fabricar 16 relojes tipo A y 8 relojes tipo B para obtener un beneficio máximo de 2400€.

8. **B4.** En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

   a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

   b) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

   c) ¿Cuántas personas hay en cada grupo.

Solución: Nombramos las incógnitas utilizando para ello las siguientes rectas._

$x, y, z \rightarrow$ Nº de niños-jóvenes, Nº adultos, Nº jubilados respectivamente.

- 875 personas: x, y , z: $x + y + z = 875$
- La $\frac{1}{4}$ de y = 2· $\frac{1}{5}$ de x $\longrightarrow \frac{1}{4} \cdot y = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot x \longrightarrow \frac{y}{4} = \frac{2x}{5} \longrightarrow 5y = 8x$
- por cada 9 z hay 26 de $x + y \longrightarrow \frac{z}{9} = \frac{x+y}{26} \longrightarrow 26z = 9x + 9y$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 875 \\ 8x & -5y & & = & 0 \\ 9x & +9y & -26z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Si realizamos los cálculos utilizando matrices para resolver por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 875 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -26 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} ----> \\ \begin{cases} F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 9F_1 \end{cases} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1400 \\ 0 & -13 & -8 & -7000 \\ 0 & 0 & -35 & -7875 \end{pmatrix} \text{ y resolvemos:}$$

- 3º: $x + 400 + 225 = 875 \longrightarrow x = 875 - 625 \longrightarrow x = 250$
- 2º: $-13y - 8 \cdot 225 = -7000 \longrightarrow -13y = -5200 \longrightarrow y = 400$
- 1º: $-35z = -7875 \longrightarrow z = 225$