Las ecuaciones irracionales son aquellas en la que la incógnita aparece bajo signos radicales.

Una de las técnicas para resolver es:

- Aislamos una de las raíces.
- Elevamos ambos lados de la ecuación al orden de nuestra raíz.
- Repetimos las acciones anteriores hasta obtener una ecuación sin raices y solucionamos
- Debemos comprobar si las soluciones obtenidas son correctas.

---

1. **Resuelve la ecuación irracional $x - \sqrt{2x-4} = 6$.**

   Solución:

   En primer lugar aislamos la raíz en uno de los miembros de la ecuación.

   $x - 6 = \sqrt{2x-4}$

   Elevamos ambos miembros al cuadrado.

   $(x-6) = \left(\sqrt{2x-4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 2x - 4$

   Simplificando se tiene $x^2 - 12x + 36 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$

   Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

   $x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 4 \end{cases}$

   Para comprobar que nuestras soluciones son correctas, debemos sustituir los valores en la ecuación original

   $x = 10 \rightarrow 10 - 6 = 4 = \sqrt{2 \cdot 10 - 4} = \sqrt{16} \rightarrow 4 = 4$ Solución válida

   $x = 4 \rightarrow 4 - 6 = -2\sqrt{2 \cdot 4 - 4} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow$ -2 $\neq 2$ Solución no válida

2. **Resolver $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$**

   Solución:

   Aislamos una de las raíces de la ecuación.

   $\sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4}$

   Elevamos los dos miembros de la ecuación al orden de nuestra raíz, en este caso al cuadrado.

$(\sqrt{2x-1}\,)^2 = \left(6\ -\ \sqrt{x+4}\right)^2 \to 2x-1 = 36+(x+4)-12\sqrt{x+4}$

Aislamos de nuevo la raíz de la ecuación:

$12\sqrt{x+4} = 36+x+4-2x+1 \longrightarrow 12\sqrt{x+4} = 41-x$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación

$\left(12\sqrt{x+4}\right)^2 = (41-x)^2 \to 144(x+4) = 1681+x^2-82x$

$x^2-226x+1105 = 0 \to$ Resolvemos la ecuación de segundo grado$\longrightarrow$

$\begin{cases} x=5 \\ x=225 \end{cases}$

Para comprobar que nuestras soluciones son correctas, debemos sustituir los valores en la ecuación original

$x=5 \to \sqrt{2\cdot 5-1} + \sqrt{5+4} \to \sqrt{9}+\sqrt{9} = 6 \to 6 = 6$ Solución válida

$x=221 \to \sqrt{2\cdot 221-1} + \sqrt{221+4} = 6 \to \sqrt{441}+\sqrt{225} = 36 \neq 6$ Solución no válida

3. **Resolver $\sqrt[3]{x^2-x+6}-2=0$**

   Solución:

   Aislamos la raiz en un miembro de la ecuación $\sqrt[3]{x^2-x+6} = 2$

   Como tenemos una raíz cúbica y la raíz ya está aislada elevamos al cubo ambos lados de la ecuación.

   $\left[\sqrt[3]{x^2-x+6}\right]^3 = 2^3 \longrightarrow x^2-x+6 = 8 \longrightarrow x^2-x+-2 = 0$

   $x^2-x-2=0 \to$ Resolvemos la ecuación de segundo grado$\longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

   Comprobamos las soluciones:

   $x=-1 \longrightarrow \sqrt[3]{1^2-(-1)+6} = \sqrt[3]{8} = 2$ Solución válida

   $x=2 \longrightarrow \sqrt[3]{2^2-2+6} = \sqrt[3]{8} = 2$ Solución válida

4. **Resolver $\sqrt{x}+1=\sqrt{x+1}$**

   Solución:

   $\sqrt{x}+1 = \sqrt{x+1} \overset{Elevamos\ al\ cuadrado}{\Longrightarrow} (\sqrt{x}+1)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow x+2\sqrt{x}+1 = x+1$

   Simplificamos y resolvemos:

   $x+2\sqrt{x}+1 = x+1$

$2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0$ .La única solución: $\boxed{x=0}$.

5. **Resolver $\boldsymbol{\sqrt{5x+4}=2x+1}$**

   Solución:

   $\sqrt{5x+4}=2x+1 \longrightarrow (\sqrt{5x+4})^2=(2x+1)^2 \longrightarrow 5x+4=4x^2+4x+1$

   Resolvemos la ecuación $4x^2-x-3=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-3}{4} \end{cases}$ .Comprobamos las soluciones

   $x=1 \longrightarrow 3=\sqrt{5\cdot 1+4}=2\cdot 1+1=3$ Solución válida

   $x=\frac{-3}{4} \longrightarrow \sqrt{5\cdot\frac{-3}{4}+1}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{2}=2\cdot\frac{-3}{4}+1$Solución no válida

6. **Resolver$\boldsymbol{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x}}$**

   Solución:

   $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x}$

   Elevamos al cuadrado

   $\left[\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right]^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Longrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=x \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=0$.

   Elevamos al cuadrado de nuevo: $x^2-1=0\left\langle \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ x & = & -1 \end{array}\right.$

   La ecuación obtenida $x^2-1=0$ tiene dos soluciones: $x=1$ y $x=-1$. Sin embargo, sólo la positiva es solución de la ecuación irracional.

7. **Resuelve: $\boldsymbol{\sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}=2}$**

   Solución:

   Elevamos al cuadrado

   $\left[\sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}\right]^{\mathbf{2}}=[\mathbf{2}]^{\mathbf{2}} \Rightarrow \sqrt{x+16}-\sqrt{x}=4$

   Aislamos y elevamos al cuadrado otra vez

   $\sqrt{x+16}=\sqrt{x}+4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+16}\right)^2=(\sqrt{x}+4)^2 \Rightarrow$

   $x+16=x+16+8\sqrt{x}$

   Simplificamos

   $0=\sqrt{x} \Rightarrow x=0$

   $x=0 \longrightarrow \sqrt{\sqrt{0+16}-\sqrt{0}}=2$ Solución válida

8. **Resuelve:** $\frac{x}{x+4}+\frac{2}{\sqrt{x+4}}= \ \frac{5}{4}$

   Solución:

   Racionalizamos e 2º término multiplicando la expresión $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}$:

   $\frac{x}{x+4}+\frac{2}{\sqrt{x+4}}\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}= \ \frac{5}{4}\Rightarrow\frac{x}{x+4}+\frac{2\sqrt{x+4}}{x+4}= \ \frac{5}{4}$

   Operamos sobre la ecuación sumando $\frac{x+2\sqrt{x+4}}{x+4}= \ \frac{5}{4}$

   Quitamos denominadores

   $4(x+2\sqrt{x+4})= \ 5(x+4)$

   $4x+8\sqrt{x+4}= \ 5x+20\longrightarrow 8\sqrt{x+4}=x+20$

   Elevamos al cuadrado

   $(8\sqrt{x+4})^2=(x+20)^2\Rightarrow 64(x+4)=x^2+400+40x$

   Operamos

   $64x+256=x^2+400+40x\Rightarrow x^2-24x+144=0$

   Resolvemos ecuación de segundo grado

   $x=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 1\cdot 144}}{2}=\frac{24+\sqrt{0}}{2}=12$

   Comprobamos

   $x=12\longrightarrow\frac{12}{12+4}+\frac{2}{\sqrt{12+4}}=\frac{12}{16}+\frac{2}{4}= \ \frac{3}{4}+\frac{2}{4}= \ \frac{5}{4}$ Solución válida

9. **Resuelve:** $\boldsymbol{\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}}$

   Solución:

   Quitamos el denominador del 2º término multiplicando la expresión en cada lado por $\sqrt{5a+x}$:

   $(\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x})\sqrt{5a+x}=\frac{12a}{\cancel{\sqrt{5a+x}}}\cancel{\sqrt{5a+x}}$

   $(\sqrt{5a+x})^2+(\sqrt{5a+x})(\sqrt{5a+x})=12a$

   $5a+x+\sqrt{25a^2-x^2}=12a$

   Ahora, despejamos el término con raíz cuadrada y elevamos

   $\sqrt{25a^2-x^2}=7a-x \quad\Rightarrow\left[\sqrt{25a^2-x^2}\right]^2=(7a-x)^2$

   Operando sobre la igualdad:

   $25a^2-x^2=49a^2+x^2-14ax\rightarrow 2x^2-14ax+24a^2=0\rightarrow x^2-7ax+12a^2=0$

   Resolvemos

$x = \frac{-(-7a)\pm\sqrt{(-7a)^2-4\cdot1\cdot12a^2}}{2} = \frac{7a\pm\sqrt{49a^2-48a^2}}{2} = \frac{7a\pm\sqrt{a^2}}{2} = \frac{7a\pm a}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 4a \\ x = 3a \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

$x = 4a \longrightarrow \sqrt{5a+4a} + \sqrt{5a-4a} = \sqrt{9a} + \sqrt{a} = 4\sqrt{a} = \frac{12a}{\sqrt{9a}} = \frac{12a}{3\sqrt{a}} = \frac{4a}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{a} = 4\sqrt{a}$ Solución válida

$x = 3a \longrightarrow \sqrt{5a+3a} + \sqrt{5a-3a} = \sqrt{8a} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a} + \sqrt{2a} = 3\sqrt{2a} = \frac{12a}{\sqrt{5a+3a}} = \frac{12a}{\sqrt{8a}} = \frac{12a}{2\sqrt{2a}}\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{\cancel{12a}\sqrt{2a}}{\cancel{4a}} = 3\sqrt{2a}$ Solución válida

10. **Resuelve:** $\begin{cases} 2 + \sqrt{x+y} = x+1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$

Solución:

$\begin{cases} 2 + \sqrt{x+y} = x+1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = x-1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \longrightarrow$

$\begin{cases} (\sqrt{x+y})^2 = (x-1)^2 \\ y = 2x-5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y = x^2-2x+1 \\ y = 2x-5 \end{cases}$

$x + 2x - 5 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm1}{2} = \langle \begin{matrix} x = 3 \rightarrow y = 1 \\ x = 2 \rightarrow y = -1 \end{matrix}.$

Las dos soluciones son válidas

11. **Resuelve:** $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x - y + \sqrt{x^2-4y^2} = 2} \\ \boldsymbol{x^5\sqrt{x^2-4y^2} = 0} \end{matrix}\right\}$

Solución:

Según la ecuación 2, si un producto es igual a cero, uno de sus factores o los dos son iguales a cero, por tanto:

$x^5\sqrt{x^2-4y^2} = 0$

$\Rightarrow x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$ solución no válida ya que $0 - y + \sqrt{0-4y^2} = 2$ tendría la raíz de un negativo

$\Rightarrow \sqrt{x^2-4y^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow (x-2y)(x+2y) = 0 \langle \begin{matrix} x = 2y \\ x = -2y \end{matrix}$

- Caso 1: $x = 2y$

Sustituyo el valor de $x = 2y$, en la ecuación $(1) x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2$

$2y - y + \sqrt{(2y)^2 - 4y^2} = 2 \Rightarrow [y = 2] \longrightarrow [x = 4]$

- Caso 2: $x = -2y$

Sustituyo el valor de $x = -2y$, en la ecuación $(1) x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2$

$-2y - y + \sqrt{(-2y)^2 - 4y^2} = 2 \Rightarrow -3y = 2 \Rightarrow \left[y = \frac{-3}{2}\right] \longrightarrow [x = -3]$ No válida

12. **Resolver** $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\sqrt{2x + 3\sqrt{y}} = 4} \\ \boldsymbol{\sqrt{8x - 2\sqrt{y}} = 6} \end{array}\right\}$

Solución:

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad de la primera ecuación

$\left[\sqrt{2x + 3\sqrt{y}}\right]^2 = 4^2 \longrightarrow 2x + 3\sqrt{y} = 16$

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad de la segunda ecuación

$\left[\sqrt{8x - 2\sqrt{y}}\right]^2 = 6^2 \longrightarrow 8x - 2\sqrt{y} = 36$

Tendremos ahora el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3\sqrt{y} = 16 \\ 8x - 2\sqrt{y} = 36 \end{array}\right\}$$

Intentamos método de reducción como si las incógnitas fueran x e$\sqrt{y}$. multiplicamos la primera ecuacion por 2 y la segunda por 3

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3\sqrt{y} = 16 \\ 8x - 2\sqrt{y} = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 6\sqrt{y} = 32 \\ 24x - 6\sqrt{y} = 108 \end{array}\right\}$$

Sumamos y queda $28x = 140 \longrightarrow \left[x = \frac{140}{28} = 5\right]$.

Con ese valor de x sustituyo para hallar y.

$2 \cdot 5 + 3\sqrt{y} = 16; 10 + 3\sqrt{y} = 16 \longrightarrow \left[y = \frac{6}{3} = 2\right]$